Propiedad de continuación única para la ecuación de Ostrovsky

por

Duver Alonso Quintero Castañeda

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Director: Jorge Mejía Laverde

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Septiembre 2008

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por la Universidad Nacional de Colombia dentro
del proyecto **"Problemas en ecuaciones diferenciales parciales no lineales"**.
Código DIME 20101007172

Resumen

En el presente trabajo demostramos que para toda solución suficientemente suave $u = u(x,t)$ de la ecuación de Ostrovsky:

$$u_t - u_{xxx} \mp \partial_x^{-1} u + u u_x = 0,$$

tal que *supp* $u(\cdot, t)$ está contenido en un intervalo compacto $[-B, B]$ para t en un intervalo no trivial del tiempo de la recta real, se tiene que u es idénticamente nula.

Contenido

Agradecimientos

Quiero agradecer al director de esta tesis, Profesor Jorge Mejía Laverde, por sus valiosas enseñanzas y por su gran aporte a la realización de este trabajo.

Agradezco también a los profesores Pedro Isaza y Carlos Vélez por sus valiosas sugerencias enfocadas hacia el mejoramiento de esta tesis.

Agradezco a Sandra Viviana por su compañía, apoyo y comprensión en los momentos difíciles.

Quisiera, por último, agradecer a todos aquellos que de alguna u otra forma contribuyeron a mi formación académica para alcanzar este anhelado logro: Profesores, compañeros, amigos y familiares.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales de evolución aparecen de manera natural como modelos matemáticos para la descripción de fenómenos de las ciencias físicas y naturales, que varían en el tiempo y constituyen un área de gran importancia dentro de la matemática actual.

Uno de los problemas que en los últimos años ha llamado la atención de los especialistas que estudian estas ecuaciones, se conoce con el nombre de **Principio de Continuación Única**. De manera genérica este problema consiste en encontrar condiciones suficientes de carácter local sobre dos soluciones u_1 y u_2 de una misma ecuación de evolución dispersiva que garanticen que $u_1 \equiv u_2$. Un caso particular de principio de continuación única se refiere al establecimiento de condiciones suficientes de carácter local bajo las cuales la solución de un problema de Cauchy asociado a una ecuación de evolución dispersiva es idénticamente nula.

Los primeros resultados de continuación única en ecuaciones de evolución fueron obtenidos por J. C. Saut y B. Scheurer en [Sa Sc] para un tipo de generalización de la ecuación de Korteweg de Vries (KdV).

Bourgain en [B] redescubrió este tipo de resultados de continuación única con un método basado en técnicas de Análisis Complejo, en el que se tienen en cuenta la analiticidad del término no lineal y las propiedades dispersivas de la parte lineal de la ecuación.

El método de Bourgain es aplicable a una clase muy amplia de ecuaciones de evolución que incluye modelos multidimensionales en las variables espaciales (véase por ejemplo [P]).

Recientemente se han obtenido refinamientos sustanciales de estos principios de continuación única que permiten debilitar las hipótesis de carácter local bajo las cuales una solución de un problema de Cauchy, asociado a una ecuación de evolución, es idénticamente nula. Estos refinamientos utilizan técnicas de Análisis Armónico, que incluyen estimativos tipo Carleman (véase, por ejemplo, [EKPV]).

En el presente trabajo establecemos un principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky.

La ecuación de Ostrovsky, deducida en [O], es un modelo matemático para la descripción de ondas débilmente no lineales que se propagan en un medio con rotación, por ejemplo, ondas superficiales en el océano. El problema de Cauchy para la ecuación de Ostrovsky consiste en hallar una función $u = u(x,t)$ de la variable espacial x y de la variable temporal t, tal que

$$\partial_t u - \partial_x^3 u \mp \partial_x^{-1} u + u \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

donde el dato inicial u_0 es tomado en cierto espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$.

El término no local $\partial_x^{-1} u$ en la ecuación (1) representa cierta antiderivada con respecto a la variable espacial, definida a través de la transformada de Fourier espacial mediante el multiplicador singular $\frac{1}{i\xi}$, es decir, $\left(\partial_x^{-1} f\right)^{\wedge}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{i\xi}$.

El signo del tercer término en la ecuación (1) está relacionado con el tipo de dispersión.

En ausencia de rotación el tercer término de la ecuación (1) desaparece y la ecuación se convierte en la conocida ecuación de Korteweg de Vries (KdV). De esta manera, podemos considerar la ecuación de Ostrovsky como una perturbación de la ecuación KdV con el término no local $\partial_x^{-1} u$.

En el presente trabajo desarrollamos en detalle el artículo de Bourgain [B], en el caso particular del problema de Cauchy para la ecuación de Ostrovsky (1). Demostramos que si $u \in C\left(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R})\right)$ es una solución suficientemente suave del problema de Cauchy (1)-(2) (por ejemplo, con $s \geq 4$) tal que para cierta constante $B > 0$, $supp\ u(\cdot, t) \subseteq [-B, B]$ para todo t perteneciente a cierto intervalo compacto no trivial del tiempo I, entonces $u \equiv 0$.

El método de Bourgain que exponemos en este trabajo se basa en dos ideas claves. En primer lugar, la solución del problema no lineal es mirada como una perturbación de la solución del problema lineal con un término integral no lineal que puede ser debidamente controlado y, en segundo lugar el principio de continuación única para el problema lineal puede ser obtenido por contradicción a partir del hecho de que la transformada de Fourier de una función con soporte compacto tiene una extensión a una función entera de tipo exponencial.

En otras palabras, el método de Bourgain tiene en cuenta que toda solución u del problema de Cauchy (1)-(2) satisface la fórmula de Duhamel

$$u(t) = W(t) u_0 - \frac{1}{2} \int_0^t W\left(t - t'\right) \partial_x \left(u\left(t'\right)^2\right) dt',$$

donde $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es el grupo de operadores lineales asociado a la parte lineal de la ecuación de Ostrovsky, definido a través de la transformada de Fourier por:

$$[W(t) u_0]^{\wedge}(\xi) := e^{itm(\xi)} \widehat{u_0}(\xi),$$

siendo $m(\xi) := -\left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right)$ el símbolo asociado a la parte lineal espacial de la ecuación de Ostrovsky.

Notemos que el símbolo en el caso de la ecuación KdV viene dado por $-\xi^3$. Como el argumento de contradicción usado por Bourgain en la prueba del principio de continuación única para la ecuación KdV utiliza una sucesión $\{\xi_k\}$ que converge a $+\infty$, este mismo argumento se adapta sin mayores dificultades al caso de la ecuación de Ostrovsky dado que en valor absoluto el término $\pm\frac{1}{\xi_k}$ es muy pequeño comparado con $-\xi_k^3$.

Por último, terminamos esta introducción con un breve panorama sobre la estructura del trabajo.

El trabajo consta de dos capítulos. El capítulo 1, en el que se discuten algunos temas preliminares, está dividido en cuatro secciones. En la sección 1.1 probamos que la transformada de Fourier de una función con soporte compacto tiene una extensión analítica a todo el plano complejo. En la sección 1.2 definimos los espacios funcionales que utilizaremos en el estudio del problema de Cauchy para la ecuación de Ostrovsky. Además, enunciamos y probamos unos lemas auxiliares, necesarios en la prueba del principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky (véase [S]). En la sección 1.3 presentamos el concepto de solución local para el problema de Cauchy asociado a la ecuación de Ostrovsky y el teorema de existencia y unicidad de soluciones locales establecido por P. Isaza y J. Mejía en [IM1]. En la sección 1.4 enunciamos la desigualdad de Markov y un lema concerniente a las derivadas sobre el eje real de funciones analíticas de tipo exponencial.

El capítulo 2, dedicado a la demostración del principio de continuación única, se divide en dos secciones. En la sección 2.1 establecemos el principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky linealizada y en la sección 2.2 llevamos a cabo la demostración del principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky, resultado central de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos algunas definiciones y resultados básicos, necesarios en la demostración del principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky. Con ello pretendemos darle un carácter autocontenido al trabajo.

En la primera sección recordamos la definición de transformada de Fourier y establecemos un teorema de continuación analítica para las transformadas de Fourier de funciones de soporte compacto.

En la segunda sección definimos los espacios de Sobolev de tipo L^2, que denotamos por H^s, y demostramos un par de lemas técnicos relacionados con cierto tipo de funciones continuas del tiempo que toman valores en los espacios de Sobolev H^s.

En la tercera sección precisamos el concepto de solución para el problema de valores iniciales (PVI) asociado a la ecuación de Ostrovsky, cuando tomamos los datos iniciales en H^s. Asimismo, describimos en esta sección una propiedad de la extensión analítica de la transformada de Fourier de la fórmula de Duhamel cuando el soporte de la solución $u(t)$ está contenido en un intervalo cerrado $[-B, B]$, para todos los valores de t en un cierto intervalo I.

Finalmente, en la cuarta sección de este capítulo de preliminares enunciamos un resultado relacionado con la estimación de las derivadas sobre el eje real de funciones analíticas de tipo exponencial.

1.1 La Transformada de Fourier de una función con soporte compacto

En esta sección mostramos que la transformada de Fourier de una función con soporte compacto tiene una extensión analítica a todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

Para $f \in L^1(\mathbb{R})$ definimos la **transformada de Fourier de** f, que denotamos por $\widehat{f}$, como la función $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida para $\xi \in \mathbb{R}$ por:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

De otro lado, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la **transformada inversa de Fourier de** f, que denotamos por $\overset{\vee}{f}$, es la función $\overset{\vee}{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definida para $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\overset{\vee}{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Es posible demostrar que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

$$(\widehat{f})^{\vee}(x) = f(x).$$

También se puede probar que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función continua y acotada tal que:

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0 \qquad \text{y} \qquad \left\| \widehat{f} \right\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| f \right\|_{L^1}.$$

(ver por ejemplo [R], teorema 9.6, página 206).

Teorema 1.1.1 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ con supp f compacto contenido en $[-B, B]$ para cierto $B > 0$. Entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tiene una extensión analítica G a todo el plano complejo $\mathbb{C}$, definida por*

$$G(\xi + i\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{-i(\xi + i\eta)x} f(x) dx, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

Prueba. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que *supp* $f \subseteq [-B, B]$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \int_{-B}^{B} |f(x)|\, dx \leq \sqrt{2B} \left(\int_{-B}^{B} |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \leq \sqrt{2B} \left\| f \right\|_{L^2} < \infty,$$

y en consecuencia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Así, existe $\widehat{f}$, y además

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{-i\xi x} f(x) dx,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Definimos ahora la función $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{-izx} f(x) dx,$$

donde $z = \xi + i\eta$ y $\xi, \eta \in \mathbb{R}$; es decir,

$$G(\xi + i\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{-i(\xi + i\eta)x} f(x) dx.$$

Como $\left| e^{-i(\xi + i\eta)x} f(x) \right| = e^{\eta x} \left| f(x) \right|$, la buena definición de la función G se sigue del hecho de que $f \in L^1 [-B, B]$.

Nos basamos ahora en el teorema de Morera (teorema del Análisis Complejo) para demostrar que G es una extensión analítica de $\widehat{f}$ a todo el plano complejo $\mathbb{C}$. Para ello probemos que:

i) G es continua y

ii) $\int_\gamma G(z)dz = 0$, para todo camino cerrado suave a trozos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$.

En efecto, veamos i).

Sea $\{z_k\}$ una sucesión tal que $z_k = \xi_k + i\eta_k \to \xi + i\eta = z$ cuando $k \to \infty$. Veamos que $G(z_k) \to G(z)$ cuando $k \to \infty$.

Como para casi todo $x \in [-B, B]$,

$$\left| e^{-i\xi_k x + \eta_k x} - e^{-i\xi x + \eta x} \right| |f(x)| \leq (e^{\eta_k x} + e^{\eta x}) |f(x)| \leq e^{MB} |f(x)|,$$

para cierta constante $M > 0$, entonces por el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} (G(z_k) - G(z)) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} (e^{-i\xi_k x + \eta_k x} - e^{-i\xi x + \eta x}) f(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} \lim_{k\to\infty} (e^{-i\xi_k x + \eta_k x} - e^{-i\xi x + \eta x}) f(x) dx = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente veamos ii).

Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un camino cerrado suave a trozos. Entonces, por el teorema de Fubini y debido a que $z \longmapsto e^{-izx}$ es una función entera para todo $x \in [-B, B]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma G(z)\, dz &= \int_0^1 G(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{-ix\gamma(t)} f(x)\, dx \right) \gamma'(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} \left(\int_0^1 e^{-ix\gamma(t)} \gamma'(t)\, dt \right) f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} \left(\int_\gamma e^{-izx} dz \right) f(x)\, dx = 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia G verifica las hipótesis i) y ii) del teorema de Morera y por tanto G es la extensión analítica de $\widehat{f}$ a todo el plano complejo $\mathbb{C}$. ■

1.2 Espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y lemas técnicos relacionados con funciones continuas con valores en $H^s(\mathbb{R})$

En esta sección presentamos la definición de los espacios de Sobolev, donde serán tomados los datos iniciales del problema de Cauchy para la ecuación de Ostrovsky. Asimismo enunciamos dos lemas técnicos, relacionados con funciones continuas con valores en estos espacios y hacemos un bosquejo de sus pruebas. Estos lemas serán utilizados en el capítulo 2 para demostrar el principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky.

Para $s \in \mathbb{R}$, definimos los espacios de Sobolev de tipo L^2, como:

$$H^s \equiv H^s(\mathbb{R}) := \left\{ u_0 \in S'_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}) : \|u_0\|_{H^s}^2 := \|(1+|\cdot|)^s \widehat{u_0}(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 := \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\},$$

donde $S'_{\mathcal{F}}(\mathbb{R})$ es el espacio de distribuciones temperadas en $\mathbb{R}$ cuya transformada de Fourier es representable por una función de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_{H^s}$ es la norma definida en H^s, $\widehat{u_0}$ es la transformada de Fourier de u_0 y, para un número α, $\langle\alpha\rangle := 1 + |\alpha|$.

Se puede probar que si $s > \frac{1}{2}$, entonces $H^s(\mathbb{R})$ está inmerso de manera continua en $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Lema 1.2.1 *(Véanse lema en sección 1 de [B] y lemas 2.2.1 a 2.2.7 en [S]) Sean I un intervalo compacto no trivial del tiempo, $u \in C(I; H^4(\mathbb{R}))$ y $B > 0$ tales que supp $u(t) \subseteq [-B, B]$ para todo $t \in I$ y sea $a : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ la función definida para $\xi \in \mathbb{R}$ por:*

$$a(\xi) = \sup_{|\xi'| \geq |\xi|} a^*(\xi'), \ \text{donde } a^*(\xi') = \sup_{t \in I} \left| \widehat{u(t)}(\xi') \right|.$$

Entonces:

(i) Existe una constante $\widetilde{C} > 1$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}$,

$$a(\xi) \leq \frac{\widetilde{C}}{1 + \xi^4}.$$

(ii) Si para algún $t_0 \in I$, $u(t_0) \neq 0$, entonces existe $C > 0$ tal que para todo $Q > 0$ y $\xi_0 > 0$, existe $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi| > \xi_0$ y existe $t_1 \in I$ tales que

$$\left| \widehat{u(t_1)}(\xi) \right| = a^*(\xi) = a(\xi), \qquad a(\xi) > C(a * a)(\xi) \qquad y \qquad a(\xi) > e^{-\frac{|\xi|}{Q}}.$$

Recordemos que $a * a$ denota el producto de convolución de a con a.

Prueba. (Bosquejo) Veamos (i). Como $u \in C(I; H^4(\mathbb{R}))$, para $t \in I$

$$\begin{aligned} \left| (1 + \xi^4) \widehat{u(t)}(\xi) \right| &= \left| \left[u(t) + \partial_x^4 u(t) \right]^\wedge (\xi) \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| u(t) + \partial_x^4 u(t) \right\|_{L^1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} \left| u(t)(x) + \left(\partial_x^4 u(t) \right)(x) \right| dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2B}\left\|u(t)+\partial_x^4 u(t)\right\|_{L^2} \\
&\leq 2\left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\|u(t)\|_{H^4}.
\end{aligned}
$$

Ahora, como $u \in C\left(I; H^4(\mathbb{R})\right)$ con I compacto, entonces de la anterior desigualdad podemos concluir que existe una constante $\widetilde{C} > 1$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $t \in I$,

$$
\left|\widehat{u(t)}(\xi)\right| \leq \frac{\widetilde{C}}{1+\xi^4}.
$$

Por lo tanto para todo $\xi \in \mathbb{R}$, $a(\xi) \leq \frac{\widetilde{C}}{1+\xi^4}$.

Veamos (ii). Razonando por contradicción, supongamos que para todo $C > 0$, existen $Q > 0$ y $\xi_0 > 0$, tales que para todo ξ, con $|\xi| > \xi_0$,

$$
a(\xi) \leq C(a * a)(\xi) \qquad \text{ó} \qquad a(\xi) \leq e^{-\frac{|\xi|}{Q}}.
$$

A partir de la anterior disyunción se puede demostrar que existe $r > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}$,

$$
a(\xi) < \frac{4\widetilde{C}}{1+\xi^2}e^{-\frac{|\xi|}{r}}.
$$

(Véase [S], lema 2.2.2 (iv), página 22). En consecuencia para todo $t \in I$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}$,

$$
\left|\widehat{u(t)}(\xi)\right| \leq \frac{4\widetilde{C}}{1+\xi^2}e^{-\frac{|\xi|}{r}} \leq 4\widetilde{C}e^{-\frac{|\xi|}{r}}. \tag{1.2.1}
$$

Usando la estimación (1.2.1) se puede probar que para $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{1}{r}$, $u(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene una extensión analítica (que también denotamos por $u(t)$) a la banda

$$
\Omega_\epsilon = \{x + iy / \, x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad |y| < \epsilon\},
$$

(Véase [S], lema 2.2.3, página 25).

Así, como $u(t)(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \geq B$, entonces por el principio de identidad para funciones analíticas $u(t)(z) = 0$ para todo $z \in \Omega_\epsilon$. Por tanto $u(t) = 0$ para todo $t \in I$, lo cual es una contradicción. En consecuencia existe $C > 0$ tal que para todo $Q > 0$ y todo $\xi_0 > 0$, existe ξ con $|\xi| > \xi_0$ tal que $a(\xi) > C(a*a)(\xi) \quad \text{y} \quad a(\xi) > e^{-\frac{|\xi|}{Q}}$. Por otro lado, es fácil probar que el anterior ξ puede ser escogido de manera que $a^*(\xi) = a(\xi)$ (véase [S], lema 2.2.5, página 29). Puesto que la función $t \mapsto \left|\widehat{u(t)}(\xi)\right|$ es continua en el compacto I (véase [S], lema 2.2.2 (iii)), existe $t_1 \in I$ tal que $\left|\widehat{u(t_1)}(\xi)\right| = \max_{t \in I}\left|\widehat{u(t)}(\xi)\right| = a^*(\xi)$. ■

Lema 1.2.2 *Sean I un intervalo compacto no trivial del tiempo, $u \in C\left(I; H^4(\mathbb{R})\right)$ y $B > 0$ tal que supp $u(t) \subseteq [-B, B]$ para todo $t \in I$. Entonces existe una constante $\widetilde{C} > 1$ tal que para todo $t \in I$ y para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}$:*

$$\left|\widehat{u(t)}(\xi + i\eta)\right| \leq \widetilde{C} e^{|\eta| B}. \tag{1.2.2}$$

Prueba. (Bosquejo) Como $u \in C\left(I; H^4(\mathbb{R})\right)$ y $H^4(\mathbb{R})$ está inmerso de manera continua en $L^\infty(\mathbb{R})$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{u(t)}(\xi + i\eta)\right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-B}^{B} e^{-i(\xi + i\eta)x} u(t)(x)\, dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{|\eta| B} \left| u(t)(x) \right| dx \\
&\leq \frac{2B}{\sqrt{2\pi}} e^{|\eta| B} \left\| u(t) \right\|_{L^\infty} \\
&\leq \frac{2BC'}{\sqrt{2\pi}} e^{|\eta| B} \left\| u(t) \right\|_{H^4} \\
&\leq \frac{2BC'C''}{\sqrt{2\pi}} e^{|\eta| B},
\end{aligned}$$

para ciertas constantes $C' > 0$ y $C'' > 0$, con lo cual queda establecida la desigualdad (1.2.2). ■

1.3 El problema de Cauchy para la ecuación de Ostrovsky en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$

En esta sección precisaremos el concepto de solución del problema de Cauchy para la ecuación de Ostrovsky:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \partial_x^3 u \mp \partial_x^{-1} u + u \partial_x u &= 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}; \\
u(x, 0) &= u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

que utilizaremos en nuestro estudio cuando el dato inicial u_0 es un elemento del espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, para ciertos índices s adecuados.

Inicialmente, introduciremos el tipo de espacios donde se buscan las soluciones del problema de Cauchy (1.3.1).

Para $s, b \in \mathbb{R}$, definimos el **espacio de Bourgain** $X_{s,b}$ por

$$X_{s,b} := \left\{ u \in S'_{\mathcal{F}}\left(\mathbb{R}^2\right) / \left\| u \right\|_{s,b}^2 := \int_{\mathbb{R}^2} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \sigma \rangle^{2b} \left| \widehat{u}(\lambda) \right|^2 d\lambda < \infty \right\},$$

donde $S'_{\mathcal{F}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ es el espacio de distribuciones temperadas en $\mathbb{R}^2$ cuya transformada de Fourier es representable por una función de $L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\widehat{u}$ es la transformada de Fourier de u con respecto a las variables espacial y temporal, $\lambda = (\xi, \tau)$ es la variable en el espacio de frecuencias con ξ correspondiente a la variable espacial x y τ correspondiente a la variable temporal t, y

$$\sigma := \tau - m(\xi) := \tau + \left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right).$$

Nótese que $m(\xi) = -\left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right)$ es el símbolo asociado a la parte lineal espacial de la ecuación de Ostrovsky, con "+" para la ecuación cuyo tercer término tiene signo "−" (a la cual nos referiremos como (O_1)), y con "−" para la ecuación cuyo tercer término tiene signo "+" (a la cual nos referiremos como (O_2)).

Se puede probar que $X_{s,b}$ es isomorfo a $L^2_{\xi\tau}\left(\langle\xi\rangle^{2s}\langle\sigma\rangle^{2b}\,d\lambda\right)$ y en consecuencia $X_{s,b}$ es un espacio de Banach.

Si $S\left(\mathbb{R}^2\right)$ es el espacio de Schwartz, entonces $S\left(\mathbb{R}^2\right) \cap X_{s,b}$ es denso en $X_{s,b}$. Además, si $C_{bd}\left(\mathbb{R}_t; H^s\right)$ denota el espacio de funciones continuas y acotadas de la variable t con valores en H^s, entonces se puede probar que para $b > \frac{1}{2}$, $X_{s,b}$ está continuamente inmerso en $C_{bd}\left(\mathbb{R}_t; H^s\right)$.

En consecuencia, para $T > 0$ y $b > \frac{1}{2}$, podemos definir el espacio de restricciones al intervalo $[-T,T]$ de los elementos de $X_{s,b}$, denotado por $X_{s,b}[-T,T]$, como el conjunto $\left\{v\,\big|_{[-T,T]} : v \in X_{s,b}\right\}$ con norma definida por

$$\|u\|_{X_{s,b}[-T,T]} = \inf\left\{\|v\|_{s,b} : v \in X_{s,b} \text{ y } v\,\big|_{[-T,T]} = u\right\}.$$

Nuestro concepto de solución del problema de Cauchy para la ecuación de Ostrovsky (1.3.1) proviene de la fórmula de Duhamel. Formalmente, diremos que u en $X_{s,b}[-T,T]$ es solución en $[-T,T]$ del problema de Cauchy para la ecuación de Ostrovsky (1.3.1) con dato inicial u_0 si y sólo si, para todo $t \in [-T,T]$

$$u(t) = W(t)\,u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t W\left(t-t'\right)\partial_x\left(u\left(t'\right)^2\right)dt', \tag{1.3.2}$$

donde $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es el grupo asociado a la parte lineal de la ecuación de Ostrovsky, definido a través de la transformada de Fourier por

$$[W(t)\,u_0]^{\wedge}(\xi) := e^{itm(\xi)}\widehat{u_0}(\xi).$$

Con el fin de estudiar el problema (1.3.1) en el contexto de los espacios de Bourgain, modificamos levemente los dos términos del lado derecho de la ecuación integral (1.3.2) por medio de una función de truncación $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ de la variable temporal t, con soporte en $(-2,2)$, tal que $0 \le \psi \le 1$, y $\psi \equiv 1$ en $[-1,1]$. Podemos observar, mediante un cálculo directo, que para $s, b \in \mathbb{R}$:

$$\left\|\psi\left(\cdot_t\right) W\left(\cdot_t\right) u_0\right\|_{s,b} \leq C\left\|u_0\right\|_s, \tag{1.3.3}$$

para cierta constante $C>0$.

De otro lado, para descomponer el término integral en (1.3.2) de una manera adecuada, para $T>0$, usamos una función de truncación $\varphi_T \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, soportada en $\left(-2T^{-\frac{1}{2}}, 2T^{-\frac{1}{2}}\right)$, tal que $0 \leq \varphi_T \leq 1$ y $\varphi_T \equiv 1$ en $\left[-T^{-\frac{1}{2}}, T^{-\frac{1}{2}}\right]$. Para $f \in S\left(\mathbb{R}^2\right)$, podemos escribir

$$-\frac{1}{2}\int_0^t W\left(t-t'\right) f\left(t'\right) dt' = I_{\varphi_T}(f) + II_{\varphi_T}(f) + III_{\varphi_T}(f), \tag{1.3.4}$$

donde $f(t) \equiv f\left(\cdot_x, t\right)$,

$$\begin{aligned}
I_{\varphi_T}(f)(x,t) \ &: = C\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{itm(\xi)}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\sigma}-1}{i\sigma}\varphi_T(\sigma)\,\widehat{f}(\xi,\tau)\,d\tau\right) d\xi,\\
II_{\varphi_T}(f)(x,t) \ &: = C\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\tau}}{i\sigma}\left(1-\varphi_T(\sigma)\right)\widehat{f}(\xi,\tau)\,d\tau\right) d\xi,\\
III_{\varphi_T}(f)(x,t) \ &: = -C\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{itm(\xi)}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\varphi_T(\sigma)}{i\sigma}\widehat{f}(\xi,\tau)\,d\tau\right) d\xi, \ \text{y}
\end{aligned}$$

como antes $\sigma = \tau + \left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right)$ y C es cierta constante positiva.

La modificación que consideramos para el operador integral en (1.3.4) viene dada por el operador G_T, definido para $f \in S\left(\mathbb{R}^2\right)$ por:

$$G_T(f) := \psi\left(T^{-1}\cdot_t\right) I_{\varphi_T}(f) + II_{\varphi_T}(f) + \psi\left(\cdot_t\right) III_{\varphi_T}(f).$$

Observemos que para $0<T\leq 1$ y $t \in [-T, T]$,

$$G_T(f)(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t W\left(t-t'\right) f\left(t'\right) dt'.$$

Procediendo como se hizo en [ILM] (lema 1, página 4), se puede ver que para $s \in \mathbb{R}$, $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $\beta \in (0, 1-b)$, existe $\delta>0$ tal que

$$\left\|G_T(f)\right\|_{s,b} \leq CT^\delta \left\|f\right\|_{s,-\beta} \quad \forall T \in (0,1), \tag{1.3.5}$$

donde C es una constante positiva independiente de f y T. El estimativo (1.3.5) nos permite extender el operador G_T al espacio $X_{s,-\beta}$ de manera continua; extensión que también denotaremos por G_T.

De otra parte, en el estudio del problema (1.3.1) es crucial estimar la forma bilineal $\partial_x(uv)$ asociada a la parte no lineal de la ecuación. Tal estimativo se enuncia en el siguiente lema, cuya prueba completa puede verse en [IM1], [IM2] e [IM3].

Lema 1.3.1 *(Estimativo de la forma bilineal para* (O_1) *y* (O_2)*) Para* $s > -\frac{3}{4}$*, si* $r := \max\{-s, 0\}$ *y los parámetros* β *y* b *se escogen de manera que* $\beta \in \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - r\right)$, $b > \frac{1}{2}$ *y* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \leq b - \frac{1}{2}$ *y* $b + \beta < 1$*, entonces*

$$\|\partial_x (uv)\|_{s,-\beta} \leq C \|u\|_{s,b} \|v\|_{s,b} \quad \forall u, v \in X_{s,b}.$$

Teniendo en cuenta los estimativos (1.3.3), (1.3.5) y el lema 1.3.1, podemos dar una definición precisa de solución local en el tiempo para el PVI (1.3.1).

Definición 1.3.1 *Sea* $s > -\frac{3}{4}$ *y sean* β *y* b *parámetros que satisfacen las condiciones del lema 1.3.1. Para* $u_0 \in H^s$ *y* $T \in (0, 1]$ *decimos que la función* $u \in X_{s,b}[-T, T]$ *es solución del PVI (1.3.1) en* $[-T, T]$ *con dato inicial* u_0*, si existe una extensión* $v \in X_{s,b}$ *de* u *tal que*

$$u(t) = W(t) u_0 + G_T\left(\partial_x\left(v^2\right)\right)(t) \quad \forall t \in [-T, T].$$

En las referencias [IM1], [IM2] e [IM3] se puede encontrar la demostración completa del siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones locales para el PVI (1.3.1).

Teorema 1.3.2 *(Véanse [IM1], [IM2] e [IM3]). Sea* $s > -\frac{3}{4}$ *y sea* b *un parámetro que satisface las condiciones del lema 1.3.1. Si* $u_0 \in H^s$*, entonces existen* $T \in (0, 1]$, $T = T\left(\|u_0\|_{H^s}\right)$ *(es decir, con* T *que depende de la norma de* u_0 *en* H^s*), y una única* $u \in X_{s,b}[-T, T]$ *tal que* u *es solución en* $[-T, T]$ *del PVI (1.3.1) con dato inicial* u_0*.*

Se puede demostrar además que para s suficientemente grande, por ejemplo $s \geq 4$, si $u \in X_{s,b}[-T, T]$ es solución del PVI (1.3.1) entonces para todo $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y para todo $t \in [-T, T]$:

$$\begin{aligned}
\widehat{u(t)}(\xi) &= e^{itm(\xi)}\widehat{u_0}(\xi) - \frac{1}{2}\int_0^t e^{i(t-t')m(\xi)}(i\xi)\widehat{u(t')^2}(\xi)\,dt' \\
&= e^{-it\left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right)}\widehat{u_0}(\xi) - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-i(t-t')\left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right)}(i\xi)\widehat{u(t')^2}(\xi)\,dt' \qquad (1.3.6) \\
&= e^{-it\left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right)}\widehat{u_0}(\xi) - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-i(t-t')\left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right)}(i\xi)\left[\widehat{u(t')} * \widehat{u(t')}\right](\xi)\,dt'.
\end{aligned}$$

Concluimos esta sección con un lema relacionado con las extensiones analíticas de las funciones que aparecen en la ecuación integral (1.3.6).

Lema 1.3.3 *Para* $t > 0$ *y* $u \in C\left([0, t]; H^4(\mathbb{R})\right)$ *supongamos que existe* $B > 0$ *tal que* *supp* $u(t') \subseteq [-B,B]$ *para todo* $t' \in [0,t]$ *y que para todo* $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\widehat{u(t)}(\xi) = e^{itm(\xi)}\widehat{u(0)}(\xi) - \frac{1}{2}\int_0^t e^{i(t-t')m(\xi)}(i\xi)\widehat{u(t')^2}(\xi)\,dt',$$

donde $m(\xi) = -\left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right)$.

Entonces la extensión analítica de $\widehat{u(t)}$ *a todo el plano complejo* $\mathbb{C}$ *verifica la igualdad*

$$\widehat{u(t)}(\xi+i\eta) = e^{itm(\xi+i\eta)}\widehat{u(0)}(\xi+i\eta) - \frac{1}{2}\int_0^t e^{i(t-t')m(\xi+i\eta)}i(\xi+i\eta)\widehat{u(t')^2}(\xi+i\eta)\,dt',$$

para todo $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Prueba. Sea $u_0 := u(0)$. Sabemos que tanto $\widehat{u(t)}$ como $\widehat{u_0}$ tienen extensiones analíticas a todo el plano complejo $\mathbb{C}$, a saber, $\widehat{u(t)}(\xi+i\eta)$ y $\widehat{u_0}(\xi+i\eta)$, respectivamente. Además, es claro que la función $\xi \longmapsto e^{itm(\xi)}$ tiene extensión analítica a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, por consiguiente la función $\xi \longmapsto e^{itm(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)$ tiene extensión analítica a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y ésta viene dada por $z \longmapsto e^{itm(z)}\widehat{u_0}(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Así, para probar la conclusión del lema, basta ver que la extensión analítica de

$$\xi \longmapsto \int_0^t e^{i(t-t')m(\xi)}(i\xi)\widehat{u(t')^2}(\xi)\,dt', \qquad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

es:

$$z \longmapsto \int_0^t e^{i(t-t')m(z)}(iz)\widehat{u(t')^2}(z)\,dt', \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

En efecto, sea $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ la función definida para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ por

$$F(z) = \int_0^t e^{i(t-t')m(z)}(iz)\widehat{u(t')^2}(z)\,dt'.$$

De nuevo hacemos uso del teorema de Morera para demostrar que F es la extensión analítica de la función mencionada. Para ello mostremos que F verifica las siguientes condiciones:

i) F está bien definida;

ii) F es continua;

iii) $\int_\gamma F(z)\,dz = 0$ para todo contorno cerrado suave a trozos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $0 \notin int(\gamma)$.

En efecto, sea $z = \xi + i\eta \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left| e^{i(t-t')m(\xi+i\eta)} i(\xi+i\eta)\widehat{u(t')^2}(\xi+i\eta)\right| dt' \\
= \quad &\int_0^t \left| e^{-i(t-t')\left[(\xi+i\eta)^3 \pm \frac{1}{\xi+i\eta}\right]} i(\xi+i\eta)\widehat{u(t')^2}(\xi+i\eta)\right| dt'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t e^{\eta(t-t')\left(3\xi^2-\eta^2\pm\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\right)} |\xi+i\eta| \left|\widehat{u(t')^2}(\xi+i\eta)\right| dt' \\
&\leq M|\xi+i\eta| \int_0^t \left|\widehat{u(t')^2}(\xi+i\eta)\right| dt',
\end{aligned}
$$

para cierta constante $M>0$.

Ahora, puesto que $supp\ u(t') \subseteq [-B,B]$ para todo $t' \in [0,t]$, entonces $supp\ u(t')^2 \subseteq [-B,B]$ para todo t' en $[0,t]$. Así:

$$
\begin{aligned}
\left|\widehat{u(t')^2}(\xi+i\eta)\right| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-B}^{B} e^{-i(\xi+i\eta)x} u\left(t'\right)^2(x)\,dx\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-B}^{B} e^{\eta x}\left|u\left(t'\right)^2(x)\right| dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-B}^{B} e^{|\eta|B}\left|u\left(t'\right)^2(x)\right| dx \leq \frac{2B}{\sqrt{2\pi}}\left\|u\left(t'\right)^2\right\|_\infty e^{|\eta|B}.
\end{aligned}
$$

Como $H^4(\mathbb{R})$ está inmerso de manera continua en $L^\infty(\mathbb{R})$ y además $H^4(\mathbb{R})$ es una álgebra, entonces $u(t')^2 \in H^4(\mathbb{R})$ y existe una constante absoluta $C'>0$ tal que

$$
\left\|u\left(t'\right)^2\right\|_\infty \leq C'\left\|u\left(t'\right)\right\|_{H^4}^2.
$$

Por tanto

$$
\left|\widehat{u(t')^2}(\xi+i\eta)\right| \leq \frac{2BC'}{\sqrt{2\pi}}\left\|u\left(t'\right)\right\|_{H^4}^2 e^{|\eta|B},
$$

y como $u \in C\left([0,t];H^4(\mathbb{R})\right)$, existe $C''>0$ tal que $\|u(t')\|_{H^4}^2 \leq C''$ para todo $t' \in [0,t]$. Luego

$$
\left|\widehat{u(t')^2}(\xi+i\eta)\right| \leq \widetilde{C}e^{|\eta|B} \qquad \forall t' \in [0,t], \tag{1.3.8}
$$

donde $\widetilde{C} := \frac{2BC'C''}{\sqrt{2\pi}}$. Entonces de (1.3.7) y (1.3.8) se sigue que

$$
\int_0^t \left|e^{i(t-t')m(\xi+i\eta)} i(\xi+i\eta)\widehat{u(t')^2}(\xi+i\eta)\right| dt' \leq M\widetilde{C}|\xi+i\eta|\, te^{|\eta|B} < \infty,
$$

con lo cual queda demostrada la condición i).

ii) Veamos ahora que F es continua.

Supongamos que $\{z_k\}$ es una sucesión en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

$$
z_k = \xi_k + i\eta_k \to z = \xi + i\eta \neq 0.
$$

Entonces, las sucesiones $\{\eta_k\}$, $\left\{3\xi_k^2-\eta_k^2\right\}$, $\left\{\frac{1}{\xi_k^2+\eta_k^2}\right\}$ y $\{|\xi_k+i\eta_k|\}$ son acotadas y en consecuencia,

$$\begin{aligned}\left|e^{i(t-t')m(\xi_k+i\eta_k)}i\left(\xi_k+i\eta_k\right)\widehat{u\left(t'\right)^2}\left(\xi_k+i\eta_k\right)\right| &= e^{\eta_k(t-t')\left(3\xi_k^2-\eta_k^2\pm\frac{1}{\xi_k^2+\eta_k^2}\right)}\left|\xi_k+i\eta_k\right|\left|\widehat{u\left(t'\right)^2}\left(\xi_k+i\eta_k\right)\right| \\ &\leq M_0e^{N(t-t')}\widetilde{C}e^{|\eta_k|B} \\ &\leq M_0\widetilde{C}e^{N_0B}e^{N(t-t')},\end{aligned}$$

para ciertas constantes positivas $M_0, N_0,$ N y para todo t' en $[0,t]$. Así , por el teorema de convergencia dominada,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}F\left(z_k\right) &= \lim_{k\to\infty}\int_0^t e^{i(t-t')m(\xi_k+i\eta_k)}i\left(\xi_k+i\eta_k\right)\widehat{u\left(t'\right)^2}\left(\xi_k+i\eta_k\right)dt' \\ &= \int_0^t\lim_{k\to\infty}\left[e^{i(t-t')m(\xi_k+i\eta_k)}i\left(\xi_k+i\eta_k\right)\widehat{u\left(t'\right)^2}\left(\xi_k+i\eta_k\right)\right]dt' \\ &= \int_0^t e^{i(t-t')m(\xi+i\eta)}i\left(\xi+i\eta\right)\widehat{u\left(t'\right)^2}\left(\xi+i\eta\right)dt' \\ &= F\left(\xi+i\eta\right)=F\left(z\right),\end{aligned}$$

lo cual prueba ii).

Finalmente probemos iii).

Sea entonces $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ una función continuamente diferenciable a trozos tal que $\gamma\left(0\right)=\gamma\left(1\right)$ y $0\notin int\left(\gamma\right)$.

Como γ es continuamente diferenciable a trozos, entonces $|\gamma|$ (imagen bajo γ de $[0,1]$) es un compacto de $\mathbb{C}$, y en consecuencia, teniendo en cuenta la desigualdad (1.3.8), vemos que la función

$$\begin{aligned}[0,1]\times[0,t] &\to \mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2 \\ \left(\tau,t'\right) &\longmapsto e^{i(t-t')m(\gamma(\tau))}i\gamma\left(\tau\right)\widehat{u\left(t'\right)^2}\left(\gamma\left(\tau\right)\right)\gamma'\left(\tau\right)\end{aligned}$$

es integrable. Por tanto, por el teorema de Fubini, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\left(z\right)dz &= \int_0^1\left(\int_0^t e^{i(t-t')m(\gamma(\tau))}i\gamma\left(\tau\right)\widehat{u\left(t'\right)^2}\left(\gamma\left(\tau\right)\right)dt'\right)\gamma'\left(\tau\right)d\tau \\ &= \int_0^t\left(\int_0^1 e^{i(t-t')m(\gamma(\tau))}i\gamma\left(\tau\right)\widehat{u\left(t'\right)^2}\left(\gamma\left(\tau\right)\right)\gamma'\left(\tau\right)d\tau\right)dt' \\ &= \int_0^t\left(\int_\gamma e^{i(t-t')m(z)}\left(iz\right)\widehat{u\left(t'\right)^2}\left(z\right)dz\right)dt'=0,\end{aligned}$$

lo cual establece iii).

Por i), ii) y iii) F es la extensión analítica al conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de la función

$$\xi \longmapsto \int_0^t e^{i(t-t')m(\xi)} (i\xi) \widehat{u(t')^2}(\xi)\, dt', \qquad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

con lo cual concluimos la prueba del lema. ■

Podemos observar de la prueba del lema anterior parte (i), que la función $\widehat{u(t')^2} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tiene un crecimiento de tipo exponencial, lo cual pudo haber sido obtenido directamente del lema 1.2.2.

1.4 Estimación de las derivadas sobre el eje real de funciones analíticas de tipo exponencial

La desigualdad de Markov para polinomios afirma que si p es un polinomio de grado n, entonces

$$\|p'\|_{L^\infty[0,1]} \le 2n^2 \|p\|_{L^\infty[0,1]}.$$

(Véase [L], página 40).

Con ayuda de la desigualdad de Markov y de las propiedades de la medida armónica en regiones del plano complejo, Bourgain en [B] demostró el siguiente lema, cuya prueba en detalle puede ser consultada en [S]. (Véanse los lemas 2.2.6 y 2.2.7 en [S], páginas 29 a 36).

Lema 1.4.1 *Sea $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, no idénticamente nula, tal que existen constantes $B > 0$ y $\widetilde{C} > 1$ tales que para cada $\xi, \eta \in \mathbb{R}$*

$$|\psi(\xi + i\eta)| \le \widetilde{C} e^{|\eta| B}.$$

Entonces:

(i) Existe una constante $C > 0$, que sólo depende de $\widetilde{C}$, tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}$,

$$|\psi'(\xi)| \le CB \sup_{|\xi'| \ge |\xi|} |\psi(\xi')| \left(1 + \left|\log\left(\sup_{|\xi'| \ge |\xi|} |\psi(\xi')|\right)\right|\right).$$

Para $\xi \in \mathbb{R}$ fijo, sea $f_\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida para $\eta \in \mathbb{R}$ por $f_\xi(\eta) := \sup_{|\xi'| \ge |\xi|} |\psi(\xi' + i\eta)|$.

(ii) Si $f_\xi(0) \le M$ para algún $M > 0$, entonces existe $C > 0$ (que depende sólo de $\widetilde{C}$) tal que para $|\eta| \le \min\left\{\frac{1}{16CB(1+|\log M|)}, \frac{\log 2}{B}\right\}$ se cumple que $f_\xi(\eta) \le 2M$.

Capítulo 2

Teorema de Continuación única para la ecuación de Ostrovsky

En el presente capítulo formulamos y demostramos el principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky. Este principio establece que si se tiene una solución suficientemente suave, digamos $u = u(x,t)$, de la ecuación de Ostrovsky, con *supp* $u(\cdot,t)$ contenido en un compacto de la recta real del tipo $[-B,B]$, para cada t perteneciente a un intervalo no trivial del tiempo, entonces dicha solución u debe ser idénticamente nula.

En la primera sección formulamos y probamos una versión más fuerte del principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky linealizada y, finalmente, en la segunda sección enunciamos y demostramos el principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky, objetivo final de este trabajo.

2.1 Principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky linealizada

En esta sección probaremos, con ayuda de herramientas de Análisis Complejo, que si $u(x,t)$ es una solución suficientemente suave de la ecuación de Ostrovsky linealizada con *supp* $u(x,t)$ compacto en dos tiempos distintos, entonces u es idénticamente nula. Más precisamente, tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1 *Sea $\varphi \in H^3(\mathbb{R})$ con supp φ compacto y sea $u \in C\left(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R})\right)$ la solución del PVI*

$$\begin{cases} u'(t) - \partial_x^3 u(t) \mp \partial_x^{-1} u(t) & = 0 \\ u(0) & = \varphi. \end{cases}$$

Si existe $t_0 \neq 0$ tal que supp $u(t_0)$ es compacto, entonces $u \equiv 0$.

Prueba. Supongamos que para cierto $t_0 \neq 0$, *supp* $u(t_0)$ es compacto y consideremos $B > 0$ tal que *supp* $u(t_0) \cup$ *supp* $\varphi \subseteq [-B,B]$. Entonces para $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{-i\xi x} \varphi(x)\, dx.$$

Sea $\widehat{\Phi} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida para $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ por

$$\widehat{\Phi}\left(\xi + i\eta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{-i(\xi + i\eta)x} \varphi\left(x\right) dx.$$

Claramente $\widehat{\Phi}$ está bien definida y por el teorema de la convergencia dominada, $\widehat{\Phi}$ es continua. De otra parte, si γ es un camino cerrado en $\mathbb{C}$ suave a trozos, entonces, por el teorema de Fubini y teniendo en cuenta que $z \mapsto e^{-izx}$ es una función entera, se tiene

$$\int_{\gamma} \widehat{\Phi}\left(z\right) dz = \int_{\gamma} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{-izx} \varphi\left(x\right) dx \right) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} \varphi\left(x\right) \left[\int_{\gamma} e^{-izx} dz \right] dx = 0. \quad (2.1.1)$$

Por lo tanto, por el teorema de Morera, $\widehat{\Phi}$ es la extensión analítica a todo el plano complejo $\mathbb{C}$ de la función $\widehat{\varphi}$. Puesto que

$$\widehat{u\left(t\right)}\left(\xi\right) = e^{itm(\xi)} \widehat{\varphi}\left(\xi\right) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

(como antes, $m\left(\xi\right) = -\left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right)$) se sigue que para cada $t \in \mathbb{R}$, la función $\widehat{U\left(t\right)} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\widehat{U\left(t\right)}\left(\xi + i\eta\right) = e^{itm(\xi + i\eta)} \widehat{\Phi}\left(\xi + i\eta\right),$$

es la extensión analítica de $\widehat{u\left(t\right)}$.

Puede verse fácilmente que existen $\xi_0 > 2$ y $\delta > 0$ tales que si $|\eta| < \delta$ y $|\xi| > \xi_0$ entonces $\left|\eta^3 t_0\right| < \frac{3}{4}\xi^2 |\eta| |t_0|$. Así, para $\eta \in (-\delta, \delta)$ con $\eta t_0 > 0$ y $|\xi| > \xi_0$, se tiene que $\left|\eta^3 t_0\right| = \eta^3 t_0 < \frac{3}{4}\xi^2 \eta t_0$, y como $|\xi| > 2$, $\frac{3}{2}\xi^2 > \frac{\xi^2}{4} > 1 > \pm\frac{1}{\xi^2 + \eta^2}$. Por consiguiente, $-\eta^3 t_0 > -\frac{3}{4}\xi^2 \eta t_0$ y $-\frac{3}{2}\xi^2 < \mp\frac{1}{\xi^2+\eta^2}$. En consecuencia, de lo anterior y del hecho de que $\operatorname{Im}\left(m\left(\xi + i\eta\right)\right) = -\eta\left(3\xi^2 - \eta^2 \mp \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\right)$, donde $\operatorname{Im} z$ denota la parte imaginaria de z, se deduce que:

$$\begin{aligned} \left|e^{it_0 m(\xi + i\eta)}\right| &= e^{\eta t_0\left(3\xi^2 - \eta^2 \mp \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\right)} > e^{\eta t_0\left(3\xi^2 - \eta^2 - \frac{3}{2}\xi^2\right)} \\ &= e^{\frac{3}{2}\xi^2 \eta t_0 - \eta^3 t_0} > e^{\frac{3}{2}\xi^2 \eta t_0 - \frac{3}{4}\xi^2 \eta t_0} = e^{\frac{3}{4}\xi^2 \eta t_0}, \end{aligned}$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} e^{\frac{3}{4}\xi^2 \eta t_0} \left|\widehat{\Phi}\left(\xi + i\eta\right)\right| &\leq \left|e^{it_0 m(\xi + i\eta)} \widehat{\Phi}\left(\xi + i\eta\right)\right| = \left|\widehat{U\left(t_0\right)}\left(\xi + i\eta\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{-i(\xi + i\eta)x} u\left(t_0\right)\left(x\right) dx\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{\eta x} \left|u\left(t_0\right)\left(x\right)\right| dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-B}^{B} \left|u\left(t_0\right)\left(x\right)\right| dx \right) e^{|\eta| B} \leq \widetilde{C} e^{|\eta| B}, \end{aligned}$$

para cierta constante $\widetilde{C} > 0$.

Ahora, puesto que la función $(\xi, \eta) \mapsto e^{\frac{3}{2}\xi^2|\eta||t_0|} \left|\widehat{\Phi}(\xi + i\eta)\right|$ es acotada en $[-\xi_0, \xi_0] \times [-\delta, \delta]$, podemos concluir que existe una constante $C > 0$ tal que si $\eta \in (-\delta, \delta)$ con $\eta t_0 > 0$ y $\xi \in \mathbb{R}$,

$$e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta t_0} \left|\widehat{\Phi}(\xi + i\eta)\right| \leq Ce^{B|\eta|},$$

es decir,

$$\left|\widehat{\Phi}(\xi + i\eta)\right| \leq Ce^{B|\eta|}e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta t_0}. \tag{2.1.2}$$

Para η en $(-\delta, \delta)$ fijo, con $\eta t_0 > 0$, definimos la función $f_\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para $x \in \mathbb{R}$ por $f_\eta(x) = e^{\eta x}\varphi(x)$. Claramente, $f_\eta \in L^1(\mathbb{R})$ y como $\widehat{f_\eta}(\xi) = \widehat{\Phi}(\xi + i\eta)$, entonces, por (2.1.2), también podemos afirmar que $\widehat{f_\eta} \in L^1(\mathbb{R})$. Por consiguiente es válida la fórmula de inversión de la transformada de Fourier; es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\widehat{\Phi}(\xi + i\eta)\, d\xi.$$

Veamos que f_η tiene una extensión analítica F_η a la banda

$$\Omega_\eta := \left\{ x + iy / \, x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad |y| < \frac{3}{8}\eta t_0 \right\}.$$

Sea $F_\eta : \Omega_\eta \to \mathbb{C}$ definida por

$$F_\eta(x + iy) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x+iy)} \widehat{f_\eta}(\xi)\, d\xi.$$

En primer lugar F_η está bien definida ya que si $x + iy \in \Omega_\eta$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x+iy)} \widehat{f_\eta}(\xi)\, d\xi \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi y} \left|\widehat{\Phi}(\xi + i\eta)\right| d\xi \leq Ce^{B|\eta|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|\xi||y|}e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta t_0} d\xi \\
&\leq Ce^{B|\eta|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{3}{8}|\xi|\eta t_0}e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta t_0} d\xi \\
&\leq Ce^{B|\eta|} \left[\int_{|\xi|\leq 1} e^{\frac{3}{8}|\xi|\eta t_0} d\xi + \int_{|\xi|>1} e^{-\frac{3}{8}\xi^2\eta t_0} d\xi \right] < \infty.
\end{aligned}$$

Con ayuda del teorema de la convergencia dominada, puede verse que F_η es continua en Ω_η. Siguiendo el esquema utilizado para establecer (2.1.1) se puede probar que para todo camino cerrado γ en Ω_η suave a trozos,

$$\int_\gamma F_\eta(z)\, dz = 0.$$

En consecuencia se tiene, por el teorema de Morera, que F_η es analítica en Ω_η y como para $x \notin [-B, B]$,

$$F_\eta(x) = f_\eta(x) = e^{\eta x}\varphi(x) = 0,$$

entonces, por el principio de identidad para funciones analíticas, se tiene que para $x \in \mathbb{R}$ y $|y| < \frac{3}{8}\eta t_0$,

$$F_\eta(x + iy) = 0.$$

En particular, $f_\eta(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es, $\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Así, $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. En consecuencia, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\widehat{u(t)}(\xi) = e^{itm(\xi)}\widehat{\varphi}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

y puesto que la transformada de Fourier es un operador lineal inyectivo concluimos que $u(t) \equiv 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, que era lo que se quería probar. ■

2.2 Demostración del teorema de continuación única para la ecuación de Ostrovsky

La presente sección está dedicada a la formulación y demostración del principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky, resultado central de este trabajo.

Teorema 2.2.1 *Sea $u \in C\left(\mathbb{R}_t, H^4(\mathbb{R})\right)$ una solución del PVI*

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^3 u \mp \partial_x^{-1} u + u\partial_x u &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

tal que para un intervalo compacto no trivial del tiempo I, existe $B > 0$ tal que supp $u(t) \subseteq [-B, B]$ para todo $t \in I$. Entonces $u(t) \equiv 0$ para todo $t \in I$.

Prueba. Probamos el teorema razonando por contradicción. Supongamos que para cierto $t_0 \in I$, $u(t_0) \neq 0$. Entonces, por la parte (ii) del lema 1.2.1, la función definida para $\xi \in \mathbb{R}$ por

$$a(\xi) := \sup_{|\xi'| \geq |\xi|} a^*\left(\xi'\right), \quad \text{donde } a^*\left(\xi'\right) := \sup_{t \in I} \left|\widehat{u(t)}\left(\xi'\right)\right|,$$

es tal que para cierta constante $C > 0$, dados $Q > 0$ y $\xi_0 > 0$, existe $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi| > \xi_0$ y existe $t_1 \in I$ tales que

$$\left|\widehat{u(t_1)}(\xi)\right| = a^*(\xi) = a(\xi), \quad a(\xi) > C(a * a)(\xi) \quad \text{y} \quad a(\xi) > e^{-\frac{|\xi|}{Q}}. \tag{2.2.2}$$

Tomemos ahora un $t_2 \in I$ tal que $|\Delta t| = \frac{1}{2}|I|$, donde $\Delta t := t_2 - t_1$ y $|I|$ es la longitud del intervalo I.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $t_2 > t_1$. Entonces, puesto que u es una solución del problema (2.2.1), se sigue que u satisface la fórmula de Duhamel

$$u(t) = W(t)\,u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t W\left(t - t'\right)\partial_x\left(u\left(t'\right)^2\right)dt', \tag{2.2.3}$$

donde $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es el grupo de operadores lineales asociado al problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^3 u \mp \partial_x^{-1} u & = 0 \\ u(0) & = u_0, \end{cases}$$

es decir, $W(t)\,u_0$ es la solución del anterior problema, y está definida a través de su transformada de Fourier por

$$[W(t)\,u_0]^{\frown}(\xi) := e^{itm(\xi)}\widehat{u_0}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

siendo, como antes, $m(\xi) = -\left(\xi^3 \pm \frac{1}{\xi}\right)$ el símbolo correspondiente a la parte lineal espacial de la ecuación de Ostrovsky.

De esta manera, de (2.2.3), se tiene que

$$u(t_2) = W(t_2)\,u_0 - \frac{1}{2}\int_0^{t_2} W\left(t_2 - t'\right)\partial_x\left(u\left(t'\right)^2\right)dt', \tag{2.2.4}$$

y

$$u(t_1) = W(t_1)\,u_0 - \frac{1}{2}\int_0^{t_1} W\left(t_1 - t'\right)\partial_x\left(u\left(t'\right)^2\right)dt',$$

y así, como $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo de operadores lineales, aplicando el operador $W(t_2 - t_1)$ en la última igualdad, se sigue que:

$$W(t_2 - t_1)\,u(t_1) = W(t_2)\,u_0 - \frac{1}{2}\int_0^{t_1} W\left(t_2 - t'\right)\partial_x\left(u\left(t'\right)^2\right)dt'. \tag{2.2.5}$$

Despejando $W(t_2)\,u_0$ en (2.2.5), y sustituyéndolo en (2.2.4) se obtiene que

$$u(t_2) = W(t_2 - t_1)\,u(t_1) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} W\left(t_2 - t'\right)\partial_x\left(u\left(t'\right)^2\right)dt'.$$

Tomando ahora la transformada de Fourier en la última igualdad y teniendo en cuenta la expresión (1.3.6) obtenemos

$$\widehat{u(t_2)}(\xi) = e^{i\Delta t m(\xi)}\widehat{u(t_1)}(\xi) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[W\left(t_2 - t'\right)\partial_x\left(u\left(t'\right)^2\right)\right]^{\wedge}(\xi)\,dt'$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{i\Delta t m(\xi)}\widehat{u(t_1)}(\xi) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} e^{i(t_2-t')m(\xi)}(i\xi)\,\widehat{u(t')^2}(\xi)\,dt' \\
&= e^{i\Delta t m(\xi)}\widehat{u(t_1)}(\xi) - \frac{1}{2}\int_{0}^{\Delta t} e^{i(\Delta t-\tau)m(\xi)}(i\xi)\left[u(\tau+t_1)^2\right]^{\wedge}(\xi)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Si se lleva a cabo la extensión analítica de $\widehat{u(t)}$ a todo el plano complejo $\mathbb{C}$, entonces, en virtud del lema 1.3.3, se tiene que para $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ se cumple que

$$
\begin{aligned}
&\widehat{u(t_2)}(\xi+i\eta) \\
&= e^{i\Delta t m(\xi+i\eta)}\widehat{u(t_1)}(\xi+i\eta) - \frac{1}{2}\int_{0}^{\Delta t} e^{i(\Delta t-\tau)m(\xi+i\eta)} i(\xi+i\eta)\left[u(\tau+t_1)^2\right]^{\wedge}(\xi+i\eta)\,d\tau \\
&= e^{i\Delta t m(\xi+i\eta)}\left\{\widehat{u(t_1)}(\xi+i\eta) - \frac{1}{2}i(\xi+i\eta)\int_{0}^{\Delta t} e^{-i\tau m(\xi+i\eta)}\left[u(\tau+t_1)^2\right]^{\wedge}(\xi+i\eta)\,d\tau\right\}
\end{aligned}
$$

$$
= e^{-i\Delta t\left[(\xi+i\eta)^3\pm\frac{1}{\xi+i\eta}\right]}\left\{\widehat{u(t_1)}(\xi+i\eta) - \frac{1}{2}i(\xi+i\eta)\int_{0}^{\Delta t} e^{i\tau\left[(\xi+i\eta)^3\pm\frac{1}{\xi+i\eta}\right]}\left[u(\tau+t_1)^2\right]^{\wedge}(\xi+i\eta)\,d\tau\right\}. \tag{2.2.6}
$$

Si escogemos $\eta>0$ y $|\xi|>2$ tales que $\eta<\sqrt{\frac{3}{2}}\,|\xi|$ (cabe anotar que en caso de que $t_1>t_2$, se toma $\eta<0$ con $|\eta|<\sqrt{\frac{3}{2}}\,|\xi|$), entonces, de la desigualdad (1.2.2), de (2.2.6), y del hecho de que

$$
-(\xi+i\eta)^3 \mp \frac{1}{\xi+i\eta} = -\xi^3 - 3\xi^2\eta i + 3\xi\eta^2 + i\eta^3 \mp \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} \pm \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}i,
$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{C}e^{\eta B} &\geq \left|\widehat{u(t_2)}(\xi+i\eta)\right| \\
&\geq e^{\eta\Delta t\left(3\xi^2-\eta^2\mp\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\right)}\left\{\left|\widehat{u(t_1)}(\xi+i\eta)\right|\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2}\left|i(\xi+i\eta)\right|\int_{0}^{\Delta t} e^{-\eta\tau\left(3\xi^2-\eta^2\mp\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\right)}\left|\left[u(\tau+t_1)^2\right]^{\wedge}(\xi+i\eta)\right|d\tau\right\}.
\end{aligned}
$$

Ahora, con ξ,η escogidos como arriba, se tiene que

$$
\begin{aligned}
3\xi^2-\eta^2 &> 3\xi^2 - \frac{3}{2}\xi^2 = \frac{3}{2}\xi^2, \\
\pm\frac{1}{\xi^2+\eta^2} &< 1 < \frac{\xi^2}{4} < \frac{3}{4}\xi^2, \text{o equivalentemente } \mp\frac{1}{\xi^2+\eta^2} > -\frac{3}{4}\xi^2, \quad \text{y} \\
\frac{1}{2}\left|i(\xi+i\eta)\right| &= \frac{1}{2}\left|\xi+i\eta\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2} < \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2+\frac{3}{2}\xi^2} < |\xi|,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto:

$$\widetilde{C}e^{\eta B}\geq e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}\left\{\left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi+i\eta\right)\right|-|\xi|\int_0^{\Delta t}e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi+i\eta\right)\right|d\tau\right\}.$$

De otra parte, de la anterior desigualdad, teniendo presente que

$$\begin{aligned}\left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi+i\eta\right)\right| &= \left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi+i\eta\right)-\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi\right)+\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi\right)\right|\\ &\geq \left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi\right)\right|-\left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi+i\eta\right)-\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi\right)\right|,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi+i\eta\right)\right| &= \left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi+i\eta\right)-\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)+\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|\\ &\leq \left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|+\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi+i\eta\right)-\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|,\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\widetilde{C}e^{\eta B} &\geq e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}\left\{\left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi\right)\right|-\left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi+i\eta\right)-\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi\right)\right|\right.\\ &\quad\left.-|\xi|\int_0^{\Delta t}e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}\left(\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|+\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi+i\eta\right)-\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|\right)d\tau\right\}\\ &= e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}\left\{\left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi\right)\right|-|\xi|\int_0^{\Delta t}e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|d\tau-\left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi+i\eta\right)-\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi\right)\right|\right.\\ &\quad\left.-|\xi|\int_0^{\Delta t}e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi+i\eta\right)-\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|d\tau\right\},\end{aligned}$$

esto es,

$$\widetilde{C}e^{\eta B}\geq e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}\left\{\widetilde{I}+\widetilde{II}+\widetilde{III}\right\},\tag{2.2.7}$$

donde

$$\begin{aligned}\widetilde{I} &: = \left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi\right)\right|-|\xi|\int_0^{\Delta t}e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|d\tau,\\ \widetilde{II} &: = -\left|\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi+i\eta\right)-\widehat{u\left(t_1\right)}\left(\xi\right)\right|\quad \text{y}\\ \widetilde{III} &: = -|\xi|\int_0^{\Delta t}e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi+i\eta\right)-\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|d\tau.\end{aligned}$$

A continuación se obtendrán estimativos para $\widetilde{I},\widetilde{II}$ y $\widetilde{III}$.

Estimación de $\widetilde{I}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{I} &\equiv \left|\widehat{u(t_1)}(\xi)\right| - |\xi| \int_0^{\Delta t} e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau} \left|\left[u(\tau+t_1)^2\right]^{\wedge}(\xi)\right| d\tau \\
&\geq a(\xi) - \frac{|\xi|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta t} e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau} \left(\left|[u(\tau+t_1)]^{\wedge}\right| * \left|[u(\tau+t_1)]^{\wedge}\right|\right)(\xi)\, d\tau \\
&\geq a(\xi) - \frac{|\xi|}{\sqrt{2\pi}} (a^* * a^*)(\xi) \int_0^{\Delta t} e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau} d\tau \\
&= a(\xi) - \frac{|\xi|}{\sqrt{2\pi}} (a^* * a^*)(\xi) \left[-\frac{4}{3\xi^2\eta}\, e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}\Big|_0^{\Delta t}\right] \\
&= a(\xi) - \frac{4|\xi|}{\sqrt{2\pi}} \frac{(a^* * a^*)(\xi)}{3|\xi|^2\eta} \left[1 - e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}\right] \\
&\geq a(\xi) - \frac{4}{3\eta|\xi|\sqrt{2\pi}} (a^* * a^*)(\xi) \\
&\geq a(\xi) - \frac{4}{3\eta|\xi|\sqrt{2\pi}} (a * a)(\xi).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que por (2.2.2) $(a * a)(\xi) < \frac{a(\xi)}{C}$ y escogiendo η de manera que $\eta \geq \frac{8}{3C|\xi|\sqrt{2\pi}}$, conseguimos

$$\widetilde{I} \geq a(\xi) - \frac{4}{3C\eta|\xi|\sqrt{2\pi}} a(\xi) \geq a(\xi) - \frac{1}{2}a(\xi) = \frac{1}{2}a(\xi). \tag{2.2.8}$$

Estimación de $\widetilde{II}$:

Consideremos la función $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida para $z \in \mathbb{C}$ por $\psi(z) := \widehat{u(t_1)}(z)$. Entonces, para ξ, η como antes,

$$\left|\widetilde{II}\right| \equiv \left|\widehat{u(t_1)}(\xi + i\eta) - \widehat{u(t_1)}(\xi)\right| = |\psi(\xi + i\eta) - \psi(\xi)| \leq \eta \sup_{|\eta'| \leq \eta} \left|\psi'\left(\xi + i\eta'\right)\right|. \tag{2.2.9}$$

Procedemos ahora a obtener un estimativo para $\sup\limits_{|\eta'| \leq \eta} \left|\psi'(\xi + i\eta')\right|$.

Primero que todo notemos que $|\psi(\xi)| = \left|\widehat{u(t_1)}(\xi)\right| = a^*(\xi) = a(\xi)$, y por consiguiente $a(\xi) = \sup\limits_{|\xi'| \geq |\xi|} \left|\psi\left(\xi'\right)\right|$. En efecto,

$$a(\xi) = \sup_{|\xi'| \geq |\xi|} a^*\left(\xi'\right) = \sup_{|\xi'| \geq |\xi|} \left(\sup_{t \in I} \left|\widehat{u(t)}\left(\xi'\right)\right|\right) \geq \sup_{|\xi'| \geq |\xi|} \left(\left|\widehat{u(t_1)}\left(\xi'\right)\right|\right) = \sup_{|\xi'| \geq |\xi|} \left|\psi\left(\xi'\right)\right|,$$

y

$$a(\xi) = a^*(\xi) = \left|\widehat{u(t_1)}(\xi)\right| = |\psi(\xi)| \leq \sup_{|\xi'| \geq |\xi|} \left|\psi\left(\xi'\right)\right|.$$

Si restringimos los valores de η de tal manera que $0 < \eta \leq \frac{\log 2}{B}$ y consideramos la función $\psi_\eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida, para $z \in \mathbb{C}$, por $\psi_\eta(z) = \psi(z + i\eta)$, entonces, de (1.2.2) se sigue que para $z \in \mathbb{C}$;

$$\left|\psi_\eta(z)\right| = |\psi(z+i\eta)| \leq \widetilde{C} e^{|\operatorname{Im} z + \eta| B} \leq \widetilde{C} e^{|\operatorname{Im} z| B} e^{\eta B} \leq 2\widetilde{C} e^{|\operatorname{Im} z| B},$$

y en consecuencia, por el lema 1.4.1 parte (i), existe una constante $C_1 > 0$, que depende sólo de $\widetilde{C}$, tal que para todo $\eta' \in \mathbb{R}$ con $|\eta'| \leq \frac{\log 2}{B}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\psi'_{\eta'}(x)\right| \leq C_1 B \sup_{|\xi'| \geq |x|} \left|\psi_{\eta'}(\xi')\right| \left[1 + \left|\log\left(\sup_{|\xi'| \geq |x|} \left|\psi_{\eta'}(\xi')\right|\right)\right|\right],$$

es decir,

$$\left|\psi'(x + i\eta')\right| \leq C_1 B \sup_{|\xi'| \geq |x|} \left|\psi(\xi' + i\eta')\right| \left[1 + \left|\log\left(\sup_{|\xi'| \geq |x|} \left|\psi(\xi' + i\eta')\right|\right)\right|\right]. \tag{2.2.10}$$

Sea $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida para $\sigma \in \mathbb{R}$ por $f_\xi(\sigma) := \sup_{|\xi'| \geq |\xi|} \left|\psi(\xi' + i\sigma)\right|$. Entonces $f_\xi(0) = \sup_{|\xi'| \geq |\xi|} \left|\psi(\xi')\right| = a(\xi)$, y, de nuevo, por el lema 1.4.1, parte (ii), podemos afirmar que existe una constante $C_2 > 0$, que sólo depende de $\widetilde{C}$, tal que si

$$|\sigma| \leq \min\left\{\frac{1}{16 C_2 B (1 + |\log a(\xi)|)}, \frac{\log 2}{B}\right\},$$

entonces

$$f_\xi(\sigma) \leq 2a(\xi). \tag{2.2.11}$$

Sea $C_3 := \max\{C_1, C_2, 1\}$. Claramente C_3 es una constante positiva que depende sólo de $\widetilde{C}$ y $\frac{1}{16C_3B(1+|\log a(\xi)|)} < \frac{\log 2}{B}$.

Sea pues $\eta > 0$ tal que $\eta \leq \frac{1}{16C_3B(1+|\log a(\xi)|)}$. La existencia de un η que satisfaga simultáneamente las condiciones hasta ahora exigidas y otras que aparecerán más adelante, será demostrada al final de esta prueba.

Sea ahora $|\eta'| \leq \eta$. Entonces de (2.2.10) se sigue que:

$$\begin{aligned} \left|\psi'(\xi + i\eta')\right| &\leq C_3 B \sup_{|\xi'| \geq |\xi|} \left|\psi(\xi' + i\eta')\right| \left[1 + \left|\log\left(\sup_{|\xi'| \geq |\xi|} \left|\psi(\xi' + i\eta')\right|\right)\right|\right] \\ &\leq C_3 B f_\xi(\eta') \left[1 + \left|\log f_\xi(\eta')\right|\right], \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

y como de (2.2.11), $f_\xi(\eta') \leq 2a(\xi)$, y además la función $x \mapsto x(1 + |\log x|)$ es monótona creciente en $(0, \infty)$, entonces podemos concluir de (2.2.12), que

$$
\begin{aligned}
\left|\psi'\left(\xi+i\eta'\right)\right| &\leq 2C_3Ba\left(\xi\right)\left[1+\left|\log\left(2a\left(\xi\right)\right)\right|\right]\\
&\leq 2C_3Ba\left(\xi\right)\left[1+\left|\log 2\right|+\left|\log a\left(\xi\right)\right|\right]\\
&\leq 2C_3Ba\left(\xi\right)\left[1+\left(1+\left|\log a\left(\xi\right)\right|\right)+\left|\log a\left(\xi\right)\right|\right]\\
&= 4C_3Ba\left(\xi\right)\left[1+\left|\log a\left(\xi\right)\right|\right],
\end{aligned}
$$

y por consiguiente, tomando $0<\eta\leq\frac{1}{32C_3B(1+|\log a(\xi)|)}$, y teniendo en cuenta (2.2.9) y (2.2.13), se sigue que

$$
\left|\widetilde{II}\right|\leq\eta\sup_{|\eta'|\leq\eta}\left|\psi'\left(\xi+i\eta'\right)\right|\leq 4C_3B\eta a\left(\xi\right)\left[1+\left|\log a\left(\xi\right)\right|\right]\leq\frac{4}{32}a\left(\xi\right)=\frac{1}{8}a\left(\xi\right).
$$

Por tanto podemos concluir que para cierta constante $C_3>1$, que depende sólo de $\widetilde{C}$, con $\frac{1}{32C_3B(1+|\log a(\xi)|)}<\frac{\log 2}{B}$, se tiene que si $\eta>0$ es tal que $\eta\leq\frac{1}{32C_3B(1+|\log a(\xi)|)}$, entonces

$$
\left|\widetilde{II}\right|\leq\frac{1}{8}a\left(\xi\right). \tag{2.2.14}
$$

Estimación de $\widetilde{III}$:

$$
\widetilde{III}\equiv-|\xi|\int_0^{\Delta t}e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi+i\eta\right)-\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|d\tau.
$$

Notemos que:

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi+i\eta\right)-\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|\\
=\;&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\left(\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}*\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\right)\left(\xi+i\eta\right)-\left(\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}*\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\right)\left(\xi\right)\right|\\
=\;&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbb{R}}\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi+i\eta-\xi_1\right)\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi_1\right)d\xi_1\right.\\
&\left.-\int_{\mathbb{R}}\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi-\xi_1\right)\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi_1\right)d\xi_1\right| \qquad (2.2.15)\\
=\;&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbb{R}}\left\{\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi+i\eta-\xi_1\right)-\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi-\xi_1\right)\right\}\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi_1\right)d\xi_1\right|\\
\leq\;&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi+i\eta-\xi_1\right)-\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi-\xi_1\right)\right|\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi_1\right)\right|d\xi_1.
\end{aligned}
$$

Puesto que por (1.2.2)

$$
\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)\right]^{\frown}\left(\xi'+i\eta'\right)\right|\leq\widetilde{C}e^{|\eta'|B}\quad\forall\xi',\eta'\in\mathbb{R},
$$

entonces es válido también el estimativo obtenido en (2.2.10) para $\psi := [u(\tau + t_1)]^{\wedge}$ y así podemos afirmar que si

$$\left|\eta'\right| \leq \eta \leq \frac{\log 2}{B} \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\left|\left[[u(\tau + t_1)]^{\wedge}\right]'\left(x + i\eta'\right)\right| \\
\leq\ & C_1 B \sup_{|\xi'| \geq |x|} \left|[u(\tau + t_1)]^{\wedge}\left(\xi' + i\eta'\right)\right| \left[1 + \left|\log\left(\sup_{|\xi'| \geq |x|} \left|[u(\tau + t_1)]^{\wedge}\left(\xi' + i\eta'\right)\right|\right)\right|\right].
\end{aligned}$$

Por consiguiente, para el primer factor del integrando en la última integral que aparece en (2.2.15), se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\left|[u(\tau + t_1)]^{\wedge}(\xi - \xi_1 + i\eta) - [u(\tau + t_1)]^{\wedge}(\xi - \xi_1)\right| \\
\leq\ & \eta \sup_{|\eta'| \leq \eta} \left|\left[[u(\tau + t_1)]^{\wedge}\right]'\left(\xi - \xi_1 + i\eta'\right)\right| \\
\leq\ & \eta C_1 B \sup_{|\eta'| \leq \eta} \left\{\sup_{|\xi'| \geq |\xi - \xi_1|} \left|[u(\tau + t_1)]^{\wedge}\left(\xi' + i\eta'\right)\right| \left[1 + E_{\eta'}\right]\right\},
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

donde

$$E_{\eta'} := \left|\log\left(\sup_{|\xi'| \geq |\xi - \xi_1|} \left|[u(\tau + t_1)]^{\wedge}\left(\xi' + i\eta'\right)\right|\right)\right|.$$

Sea $\widetilde{\xi_1} := \min\{|\xi|, |\xi - \xi_1|\}$ (en adelante supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\xi > 0$).

De (2.2.16) y del hecho de que $x \mapsto x(1 + |\log x|)$ es una función monótona creciente en $(0, \infty)$, concluimos que

$$\begin{aligned}
&\left|[u(\tau + t_1)]^{\wedge}(\xi - \xi_1 + i\eta) - [u(\tau + t_1)]^{\wedge}(\xi - \xi_1)\right| \\
\leq\ & \eta C_1 B \sup_{|\eta'| \leq \eta} \left\{\sup_{|\xi'| \geq \widetilde{\xi_1}} \left|[u(\tau + t_1)]^{\wedge}\left(\xi' + i\eta'\right)\right| \left[1 + H_{\eta'}\right]\right\},
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

donde

$$H_{\eta'} := \left|\log\left(\sup_{|\xi'| \geq \widetilde{\xi_1}} \left|[u(\tau + t_1)]^{\wedge}\left(\xi' + i\eta'\right)\right|\right)\right|.$$

Si definimos la función $f_{\widetilde{\xi_1}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_{\widetilde{\xi_1}}\left(\eta'\right) := \sup_{|\xi'| \geq \widetilde{\xi_1}} \left|[u(\tau + t_1)]^{\wedge}\left(\xi' + i\eta'\right)\right|, \quad \eta' \in \mathbb{R},$$

entonces

$$f_{\widetilde{\xi_1}}(0) = \sup_{|\xi'| \geq \widetilde{\xi_1}} \left| [u(\tau + t_1)]^{\wedge}(\xi') \right| \leq a\left(\widetilde{\xi_1}\right),$$

y en consecuencia, por el lema 1.4.1 parte (ii), existe una constante positiva C_2, que depende sólo de $\widetilde{C}$, tal que si

$$\left|\eta'\right| \leq \eta \leq \min\left\{ \frac{1}{16C_2B\left(1 + \left|\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\right|\right)}, \frac{\log 2}{B} \right\},$$

entonces

$$f_{\widetilde{\xi_1}}(\eta') \leq 2a\left(\widetilde{\xi_1}\right).$$

Sea $C_3 := \max\{C_1, C_2, 1\}$. Claramente, como en la estimación de $\left|\widetilde{II}\right|$, C_3 es una constante positiva que sólo depende de $\widetilde{C}$, y además $\frac{1}{16C_3B\left(1+\left|\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\right|\right)} \leq \frac{\log 2}{B}$.

Un argumento similar al realizado para la obtención del estimativo de $\left|\widetilde{II}\right|$ nos conduce a la siguiente afirmación:

Si $0 < \eta \leq \frac{1}{16C_3B\left(1+\left|\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\right|\right)}$, entonces, de (2.2.17) y teniendo en cuenta (2.2.13), se sigue que

$$\left| [u(\tau + t_1)]^{\wedge}(\xi - \xi_1 + i\eta) - [u(\tau + t_1)]^{\wedge}(\xi - \xi_1) \right| \leq 4C_3B\eta a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\left[1 + \left|\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\right|\right]. \tag{2.2.18}$$

De otra parte, observemos que

$$\frac{1}{1 + \log \widetilde{C}} \cdot \frac{1}{1 + |\log a(\xi)|} \leq \frac{1}{1 + \left|\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\right|}. \tag{2.2.19}$$

En efecto, si $a\left(\widetilde{\xi_1}\right) < 1$, como $\xi \geq \widetilde{\xi_1}$ y a es claramente una función radialmente decreciente (es decir, si $|\xi_1| \geq |\xi_2|$, entonces $a(\xi_2) \geq a(\xi_1)$), se sigue que

$$1 - \log a(\xi) \geq 1 - \log a\left(\widetilde{\xi_1}\right),$$

y así,

$$\frac{1}{1 - \log a(\xi)} \leq \frac{1}{1 - \log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)}.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $-\log a(\xi) = |\log a(\xi)|$, $\quad -\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right) = \left|\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\right|$ y $0 < \frac{1}{1+\log \widetilde{C}} < 1$, se tiene probada, en este caso, la desigualdad (2.2.19).

Ahora, si $a\left(\widetilde{\xi_1}\right) > 1$, como $\left|\widehat{u(t)}\left(\xi' + i\eta'\right)\right| \leq \widetilde{C} e^{|\eta'|B} \quad \forall t \in I, \forall \xi', \eta' \in \mathbb{R}$; se sigue que $a\left(\widetilde{\xi_1}\right) = \sup\limits_{|\xi'|\geq\left|\widetilde{\xi_1}\right|}\left(\sup\limits_{t\in I}\left|\widehat{u(t)}\left(\xi'\right)\right|\right) \leq \widetilde{C}$. Por consiguiente, $\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right) \leq \log \widetilde{C}$, y en consecuencia $\frac{1}{1+\log \widetilde{C}} \leq \frac{1}{1+\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)}$. Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right) = \left|\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\right|$ y

$$0 < \frac{1}{1 + |\log a(\xi)|} < 1,$$

se tiene también, en este caso, la desigualdad (2.2.19).

Sea η tal que

$$0 < \eta < \frac{1}{1+\log \widetilde{C}} \cdot \frac{1}{16 C_3 B\left(1 + |\log a(\xi)|\right)} \leq \frac{1}{16 C_3 B\left(1 + |\log a(\xi)|\right)}. \tag{2.2.20}$$

Entonces, de (2.2.18) y (2.2.19), se tiene la siguiente estimación para el primer factor del integrando en la última integral de (2.2.15);

$$\begin{aligned}
& \left|\left[u(\tau+t_1)\right]^\frown(\xi+i\eta-\xi_1) - \left[u(\tau+t_1)\right]^\frown(\xi-\xi_1)\right| \\
\leq\ & 4C_3 B\eta a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\left[1+\left|\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\right|\right] \\
\leq\ & 4C_3 B\eta\left[a(\xi)+a(\xi-\xi_1)\right]\left[1+\left|\log a\left(\widetilde{\xi_1}\right)\right|\right] \\
\leq\ & 4C_3 B\eta\left[a(\xi)+a(\xi-\xi_1)\right]\left(1+\log\widetilde{C}\right)\left[1+|\log a(\xi)|\right].
\end{aligned}$$

De esta manera, volviendo a la expresión (2.2.15), se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left|\left[u(\tau+t_1)^2\right]^\wedge(\xi+i\eta) - \left[u(\tau+t_1)^2\right]^\wedge(\xi)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left|\left[u(\tau+t_1)\right]^\frown(\xi+i\eta-\xi_1) - \left[u(\tau+t_1)\right]^\frown(\xi-\xi_1)\right|\left|\left[u(\tau+t_1)\right]^\frown(\xi_1)\right| d\xi_1 \\
\leq\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} 4C_3 B\eta\left[a(\xi)+a(\xi-\xi_1)\right]\left(1+\log\widetilde{C}\right)\left[1+|\log a(\xi)|\right]\left|\left[u(\tau+t_1)\right]^\frown(\xi_1)\right| d\xi_1 \\
=\ & \frac{4}{\sqrt{2\pi}} C_3 B\left(1+\log\widetilde{C}\right)\eta\left[1+|\log a(\xi)|\right]\left\{a(\xi)\int_{\mathbb{R}}\left|\left[u(\tau+t_1)\right]^\frown(\xi_1)\right| d\xi_1\right. \\
& \left. + \int_{\mathbb{R}} a(\xi-\xi_1)\left|\left[u(\tau+t_1)\right]^\frown(\xi_1)\right| d\xi_1\right\}.
\end{aligned}$$

Sea $C_4 := \widetilde{C_1}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi_1}{1+\xi_1^4} > 0$, donde $\widetilde{C_1} > 1$ es la constante del lema 1.2.1 (i).

Entonces,

$$\left|\left[u(\tau+t_1)^2\right]^\wedge(\xi+i\eta) - \left[u(\tau+t_1)^2\right]^\wedge(\xi)\right| \leq$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{4}{\sqrt{2\pi}} C_3 B\left(1+\log \widetilde{C}\right)\eta\left[1+\left|\log a\left(\xi\right)\right|\right]\left\{C_4 a\left(\xi\right)+\int_{\mathbb{R}} a\left(\xi-\xi_1\right)a\left(\xi_1\right)d\xi_1\right\}\\
&\le \frac{4}{16\sqrt{2\pi}}\left\{C_4 a\left(\xi\right)+\left(a*a\right)\left(\xi\right)\right\}\\
&\le \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(C_4+\frac{1}{C}\right)a\left(\xi\right),
\end{aligned}
$$

donde C es la constante en (2.2.2). Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\left|\widetilde{III}\right| &\equiv |\xi|\int_0^{\Delta t} e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}\left|\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi+i\eta\right)-\left[u\left(\tau+t_1\right)^2\right]^{\wedge}\left(\xi\right)\right|d\tau\\
&\le \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(C_4+\frac{1}{C}\right)|\xi|\,a\left(\xi\right)\int_0^{\Delta t} e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}d\tau\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(C_4+\frac{1}{C}\right)|\xi|\,a\left(\xi\right)\left[-\frac{4}{3\xi^2\eta}\,e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\tau}\Big|_0^{\Delta t}\right]\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(C_4+\frac{1}{C}\right)|\xi|\,a\left(\xi\right)\cdot\frac{4}{3\left|\xi\right|^2\eta}\left(1-e^{-\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}\right)\\
&\le \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\left(C_4+\frac{1}{C}\right)\frac{a\left(\xi\right)}{|\xi|\,\eta}\\
&\le \frac{1}{3}\left(C_4+\frac{1}{C}\right)\frac{a\left(\xi\right)}{|\xi|\,\eta}.
\end{aligned}
$$

Si escogemos η de tal manera que satisfaga (2.2.20) y además $\frac{1}{3}\left(C_4+\frac{1}{C}\right)\frac{1}{|\xi|\eta}\le\frac{1}{8}$; es decir, si escogemos η tal que $\frac{8}{3|\xi|}\left(C_4+\frac{1}{C}\right)\le\eta<\frac{1}{1+\log\widetilde{C}}\cdot\frac{1}{16C_3B(1+|\log a(\xi)|)}$, entonces podemos concluir que:

$$
\left|\widetilde{III}\right|\le\frac{1}{8}a\left(\xi\right). \tag{2.2.21}
$$

Teniendo en cuenta (2.2.7) y reuniendo las estimaciones para $\widetilde{I}, \widetilde{II}$ y $\widetilde{III}$ obtenidas en (2.2.8), (2.2.14) y (2.2.21), se tiene:

(1) Si $|\xi|>2$ $\;y\;$ $0<\eta<\sqrt{\frac{3}{2}}\,|\xi|$, entonces

$$
\widetilde{C}e^{\eta B}\ge e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}\left\{\widetilde{I}+\widetilde{II}+\widetilde{III}\right\}.
$$

(2) Si $\eta\ge\frac{8}{3C|\xi|\sqrt{2\pi}}$, entonces $\widetilde{I}\ge\frac{1}{2}a\left(\xi\right)$.

(3) Si $0<\eta\le\frac{1}{32C_3B(1+|\log a(\xi)|)}$, entonces $\left|\widetilde{II}\right|\le\frac{1}{8}a\left(\xi\right)$. Aquí C_3 es una constante (≥ 1), que depende sólo de $\widetilde{C}$, y por lo tanto sólo de B. Notemos que $\frac{1}{32C_3B(1+|\log a(\xi)|)}\le\frac{1}{32B}<\frac{\log 2}{B}$.

(4) Si $\frac{8}{3|\xi|}\left(C_4+\frac{1}{C}\right)\le\eta<\frac{1}{1+\log\widetilde{C}}\cdot\frac{1}{16C_3B(1+|\log a(\xi)|)}$, entonces $\left|\widetilde{III}\right|\le\frac{1}{8}a\left(\xi\right)$.

A continuación, probaremos que es posible escoger η que satisfaga las hipótesis en (1), (2), (3) y (4). En efecto, consideremos Q y ξ_0 en (2.2.2) con $Q > 0$ fijo y ξ_0 tal que

$$\xi_0 = \max\left\{2, Q, \frac{Q\left(1+\log \widetilde{C}\right)}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\log 2}{B}}\right\}. \tag{2.2.22}$$

Entonces, podemos escoger $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\xi| > \xi_0, \quad \left|\widehat{u(t_1)}(\xi)\right| = a^*(\xi) = a(\xi), \quad a(\xi) > C(a*a)(\xi), \quad \text{y} \quad a(\xi) > e^{-\frac{|\xi|}{Q}}. \tag{2.2.23}$$

Luego, por el lema 1.2.2, $a(\xi) = \left|\widehat{u(t_1)}(\xi)\right| \leq \widetilde{C}$ y de la última desigualdad en (2.2.23), $-\log a(\xi) < \frac{|\xi|}{Q}$, con lo cual, si $a(\xi) \geq 1$,

$$1 + |\log a(\xi)| = 1 + \log a(\xi) \leq 1 + \log \widetilde{C} < \frac{2|\xi|}{Q},$$

y si $a(\xi) < 1$,

$$1 + |\log a(\xi)| = 1 - \log a(\xi) < 1 + \frac{|\xi|}{Q} = \frac{Q+|\xi|}{Q} < \frac{2|\xi|}{Q}.$$

Por lo tanto, en cualquier caso,

$$\frac{Q}{2|\xi|} \leq \frac{1}{1+|\log a(\xi)|}.$$

Así,

$$\frac{Q}{2|\xi|}\cdot\frac{1}{32C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)} \leq \frac{1}{1+|\log a(\xi)|}\cdot\frac{1}{32C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)}.$$

Tomemos $\eta > 0$ tal que

$$\frac{1}{64C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)}\cdot\frac{Q}{|\xi|} \leq \eta \leq \frac{1}{32C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)(1+|\log a(\xi)|)}\left(<\frac{\log 2}{B}\right). \tag{2.2.24}$$

Claramente este η satisface las hipótesis en (1) y (3). Luego, para que el η escogido satisfaga además las hipótesis en (2) y (4), basta tomar $Q > 0$ tal que

$$Q \geq \frac{8}{3}\left(C_4 + \frac{1}{C}\right)64C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right). \tag{2.2.25}$$

De esta manera, teniendo en cuenta los estimativos en (1), (2), (3) y (4), se sigue que

$$\widetilde{C}e^{\eta B} \geq e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}\left\{\widetilde{I} + \widetilde{II} + \widetilde{III}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \quad e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}\left\{\frac{1}{2}a(\xi)-\frac{1}{8}a(\xi)-\frac{1}{8}a(\xi)\right\}\\
&= \quad \frac{1}{4}a(\xi)\,e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}\\
&\geq \quad \frac{1}{4}e^{-\frac{|\xi|}{Q}}e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t}=\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t-\frac{|\xi|}{Q}}.
\end{aligned}$$

Como $|\xi|\,\eta \geq \frac{Q}{64C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)}$ y $\Delta t=\frac{|I|}{2}$, entonces

$$\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t=\frac{3}{4}\,|\xi|\,(|\xi|\,\eta)\,\frac{|I|}{2}\geq\frac{3}{8}\,|I|\,\frac{Q\,|\xi|}{64C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)},$$

y en consecuencia, teniendo presente que $e^{\eta B}<2$, obtenemos

$$2\widetilde{C}>\widetilde{C}e^{\eta B}\geq\frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}\xi^2\eta\Delta t-\frac{|\xi|}{Q}}\geq\frac{1}{4}e^{\left[\frac{3}{8}|I|\frac{Q}{64C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)}-\frac{1}{Q}\right]|\xi|}. \tag{2.2.26}$$

Si además de tener a Q como en (2.2.25), adicionalmente lo tomamos de tal manera que

$$Q>\max\left\{\frac{8}{3\,|I|}\left(1+\log\widetilde{C}\right)64C_3B,1+\log\widetilde{C}\right\}>1, \tag{2.2.27}$$

entonces

$$\frac{3}{8}\,|I|\,\frac{Q}{64C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)}-\frac{1}{Q}>1-\frac{1}{Q}>0.$$

Notemos que las condiciones impuestas para Q en (2.2.25) y (2.2.27), se reducen a la condición

$$\frac{Q}{64C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)}>\max\left\{\frac{8}{3}\left(C_4+\frac{1}{C}\right),\frac{8}{3\,|I|},\frac{1}{64C_3B}\right\}. \tag{2.2.28}$$

En síntesis, si tomamos Q y ξ_0 en (2.2.2) tales que Q satisface (2.2.28) y ξ_0 satisface (2.2.22), entonces existen $\xi\in\mathbb{R}$ y $t_1\in I$ tales que ξ satisface (2.2.23).

De esta manera, si η satisface (2.2.24) entonces es válida la desigualdad (2.2.26), es decir

$$2\widetilde{C}\geq\frac{1}{4}e^{\left(\frac{3}{8}|I|\frac{Q}{64C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)}-\frac{1}{Q}\right)|\xi|}, \tag{2.2.29}$$

donde

$$\frac{3}{8}\,|I|\,\frac{Q}{64C_3B\left(1+\log\widetilde{C}\right)}-\frac{1}{Q}>0. \tag{2.2.30}$$

A partir de (2.2.29) y (2.2.30) podemos obtener una contradicción. En efecto, si en vez de considerar a ξ_0 como en (2.2.22), consideramos ξ_0 de manera que para $k \in \mathbb{N}$,

$$\xi_0 = \max \left\{ k+1, Q, \frac{Q\left(1+\log \widetilde{C}\right)}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\log 2}{B} \right\},$$

entonces, se obtienen sucesiones $\{\xi_k\}$ con $|\xi_k| \to \infty$, y $\{t_{1k}\}$ en I tales que $|\xi_k| > \xi_0$ y

$$\left|\widehat{u\left(t_{1k}\right)}\left(\xi_k\right)\right| = a^*\left(\xi_k\right) = a\left(\xi_k\right), \quad a\left(\xi_k\right) > C\left(a * a\right)\left(\xi_k\right) \quad \text{y} \quad a\left(\xi_k\right) > e^{-\frac{|\xi_k|}{Q}},$$

donde Q satisface la condición (2.2.28). Eligiendo a continuación $t_{2k} \in I$, tal que si $\Delta t_k := t_{2k} - t_{1k}$, entonces $|\Delta t_k| = \frac{1}{2}|I|$ y, escogiendo $\eta_k > 0$ tal que

$$\frac{1}{64 C_3 B\left(1+\log \widetilde{C}\right)} \cdot \frac{Q}{|\xi_k|} \leq \eta_k \leq \frac{1}{32 C_3 B\left(1+\log \widetilde{C}\right)\left(1+\left|\log a\left(\xi_k\right)\right|\right)},$$

obtenemos

$$\frac{1}{4} e^{\left(\frac{3}{8}|I| \frac{Q}{64 C_3 B\left(1+\log \widetilde{C}\right)} - \frac{1}{Q}\right)|\xi_k|} \leq 2\widetilde{C} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

de lo cual se desprende la contradicción mencionada antes, pues

$$|\xi_k| \to \infty \qquad \text{y} \qquad \frac{3}{8}|I| \frac{Q}{64 C_3 B\left(1+\log \widetilde{C}\right)} - \frac{1}{Q} > 0.$$

La anterior contradicción se obtuvo de suponer que existía un $t_0 \in I$ tal que $u\left(t_0\right) \neq 0$. Por lo tanto, para todo $t \in I, u\left(t\right) = 0$ y la demostración del teorema está completa. ■

Bibliografía

[B] Bourgain, J., On the compactness of the support of solutions of Dispersive Equations. IMRN International Mathematics Research Notices, 1997 N°9, 437-447.

[EKPV] Escauriaza, L.; Kenig, C.; Ponce, G.; Vega, L., On uniqueness properties of solutions of k-Generalized KdV Equations. J. Funct. Analysis, 244 (2007), 504-535.

[IM1] Isaza, P.; Mejía, J., Global Cauchy problem for the Ostrovsky equation, Nonlinear Analysis 67 (2007), 1482-1503.

[IM2] Isaza, P.; Mejía, J., Cauchy problem for the Ostrovsky equation in spaces of low regularity, J. Diff. Eqs. 230 (2006), 661-681.

[IM3] Isaza, P.; Mejía, J., Local well-posedness and quantitative ill-posedness for the Ostrovsky equation. Aceptado para publicación en la revista Nonlinear Analysis.

[ILM] Isaza, P.; López J.; Mejía, J., The Cauchy Problem for the Kadomtsev-Petviashvili (KPII) Equation in three Space Dimensions. Communications in partial Differential Equations, 32 (2007), 1-31.

[L] Lorentz, G., Aproximation of functions. Holt, Rinehart and Winston; New York, 1996.

[O] Ostrovskii, L. A., Nonlinear internal waves in a rotating ocean, Okeanologiya 18 (2) (1978), 181-191.

[P] Panthee, M., Unique Continuation property for the Kadomtsev-Petviashvili (KP-II) equation. Electronic Journal of Differential Equations. 2005 (2005), 1-12.

[R] Rudin, W., Análisis Real y Complejo. Tercera Edición. McGraw-Hill. 1988.

[S] Sierra, M. F., Propiedad de continuación única de soluciones de la ecuación de Korteweg de Vries (KdV). Tesis de Maestría Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. (2007).

[Sa Sc] Saut, J. C.; Scheurer, B., Unique continuation for some evolution Equations, J. Diff. Eqs. (66) (1987), 118-139.