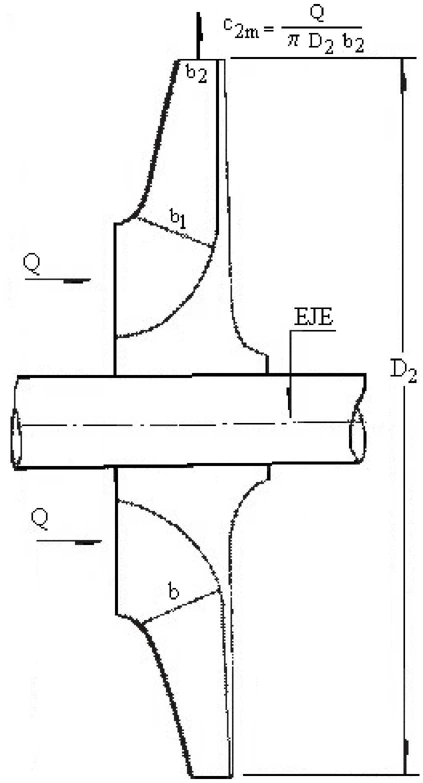
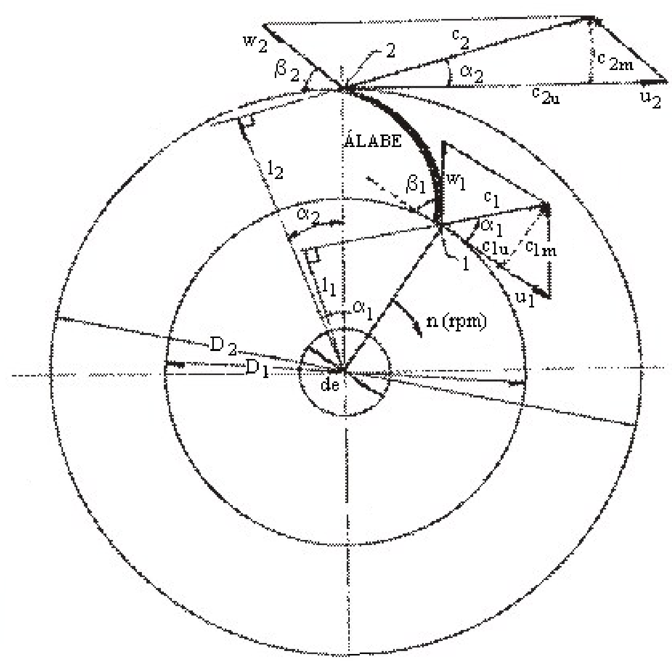
2. ECUACIÓN DE EULER Y TRIÁNGULO DE VELOCIDADES EN MÁQUINAS HIDRÁULICAS

2.1. ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LAS TURBOMÁQUINAS HIDRÁULICAS

En la Figura 2.1 se muestran dos cortes mutuamente ortogonales, a través del rodete de una turbomáquina, en donde 1 y 2 son los puntos de entrada y de salida de la partícula fluida, respectivamente.





CORTE MERIDIONAL CORTE TRANSVERSAL

Figura No. 2.1 Cortes meridional y transversal del rodete de una bomba rotodinámica

c_1: velocidad absoluta de una partícula de fluido a la entrada del álabe.

c_2: velocidad absoluta de una partícula de fluido a la salida del álabe.

n: velocidad de rotación del rodete (rpm).

u_1, u_2: velocidad periférica del rodete, a la entrada y salida del álabe, respectivamente.

$$u_1 = \frac{\pi \cdot D_1 \cdot n}{60} \qquad u_2 = \frac{\pi \cdot D_2 \cdot n}{60} \qquad (2.1)$$

w_1, w_2: velocidad relativa de una partícula de fluido a la entrada y a la salida del álabe, respectivamente, con relación al álabe.

Vectorialmente, estas velocidades se relacionan de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{c_1} - \overrightarrow{u_1} \qquad (2.2)$$

o

$$\overrightarrow{c_1} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{u_1} \qquad (2.3)$$

Suposición: El vector $\overrightarrow{w}$ es tangente al álabe, es decir, la partícula entra sin chocar en el álabe. Luego, la partícula es guiada por el álabe desde (1) hasta (2), en donde sale con velocidad relativa w_2.

Análogamente, $$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{c_2} - \overrightarrow{u_2} \qquad (2.4)$$

de donde: $$\overrightarrow{c_2} = \overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{u_2} \qquad (2.5)$$

En su trayectoria de 1 a 2, la partícula experimenta un cambio de velocidad en el rodete: es decir de c_1 a c_2.

Por otra parte, según el teorema de la cantidad de movimiento, aplicado a un hilo de corriente, al cual pertenece la partícula fluida, se tiene:

$$dF = \rho \cdot dQ \cdot (c_2 - c_1) \qquad (2.6)$$

dQ: caudal diferencial que fluye a través del hilo de corriente.

Según el teorema del momento de la cantidad de movimiento:

$$dM = \rho \cdot dQ \cdot (l_2 \cdot c_2 - l_1 \cdot c_1) \qquad (2.7)$$

dM: momento cinético, con relación al eje de la máquina, de la fuerza que el rodete ejerce sobre las partículas de fluido.

Hipótesis:

Todas las partículas de fluido entran en el rodete a un diámetro D_1, con la misma velocidad c_1, y salen a un diámetro D_2, con la misma velocidad c_2. Es decir, se supone que las líneas de corriente experimentan la misma desviación, lo que, a su vez, significa que el rodete está dotado de un número infinito de álabes, para guiar perfectamente al fluido. Esta hipótesis se llama Teoría del Número Infinito de Álabes.

Siendo constante el término $\left(l_2 \cdot c_2 - l_1 \cdot c_1\right)$, al integrar la ecuación (2.7) resulta

$$M = \rho \cdot Q \cdot (l_2 \cdot c_2 - l_1 \cdot c_1) \qquad (2.8)$$

donde,

M: momento total comunicado al fluido o momento hidráulico.

Q: caudal total de la bomba.

Además, es fácil ver de la Figura 2.1 que:

$$\begin{aligned} l_1 &= r_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ l_2 &= r_2 \cdot \cos \alpha_2 \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.9) en la ecuación (2.8), se tiene:

$$M = \rho \cdot Q \cdot (r_2 \cdot c_2 \cos \alpha_2 - r_1 \cdot c_1 \cos \alpha_1) \qquad (2.10)$$

De otro lado, la potencia que el rodete comunica al fluido se puede expresar de la siguiente manera:

$$P = M \cdot \omega \qquad (2.11)$$

ω: velocidad angular del rodete; $\omega = \dfrac{2\pi \cdot n}{60}$, (rad/s).

Luego,

$$P = \rho \cdot Q \cdot \omega \cdot (r_2 \cdot c_2 \cos\alpha_2 - r_1 \cdot c_1 \cos\alpha_1) \qquad (2.12)$$

Por otra parte, siendo H_t la altura equivalente a la energía suministrada al fluido, la potencia de la bomba se expresa como:

$$P = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_t \qquad (2.13)$$

Igualando las ecuaciones (2.12) y (2.13), se tiene:

$$\cancel{\rho} \cdot g \cdot \cancel{Q} \cdot H_t = \cancel{\rho} \cdot \cancel{Q} \cdot \omega \cdot (r_2 \cdot c_2 \cos\alpha_2 - r_1 \cdot c_1 \cos\alpha_1)$$

de donde:

$$H_t = \frac{r_2 \cdot \omega \cdot c_2 \cos\alpha_2 - r_1 \cdot \omega \cdot c_1 \cos\alpha_1}{g}$$

De los triángulos de velocidades, es fácil ver que:

$$c_2 \cos\alpha_2 = c_{2u} \qquad y \qquad c_1 \cos\alpha_1 = c_{1u}$$

y sabiendo que:

$$r_2 \cdot \omega = u_2 \qquad y \qquad r_1 \cdot \omega = u_1$$

resulta:

$$H_t = \frac{(u_2 \cdot c_{2u} - u_1 \cdot c_{1u})}{g} \qquad \text{Ecuación de Euler} \qquad (2.14)$$

H_t es la altura equivalente a la energía suministrada por la bomba al fluido. Se denomina altura hidráulica, y es una altura teórica porque una parte de esta energía se disipará por rozamientos hidráulicos.

En bombas, ventiladores y compresores, que son máquinas generadoras, el rodete imparte energía al fluido. La ecuación (2.10) expresa el momento comunicado al fluido y la ecuación (2.12), la potencia comunicada al mismo.

En turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas, las cuales son máquinas motoras, el fluido es el que imparte energía al rodete. Por ello, para deducir la ecuación de Euler en máquinas motoras, se procede análogamente, pero escribiendo el momento que el fluido ejerce sobre el rodete, con lo cual los segundos miembros de las ecuaciones (2.10), (2.12) y (2.14) cambian de signos, convirtiéndose a las siguientes expresiones:

$$M = \rho \cdot Q \cdot (r_1 \cdot c_1 \cos \alpha_1 - r_2 \cdot c_2 \cos \alpha_2) \qquad (2.10')$$

$$P = \rho \cdot Q \cdot \omega \cdot (r_1 \cdot c_1 \cos \alpha_1 - r_2 \cdot c_2 \cos \alpha_2) \qquad (2.12')$$

$$H_t = \frac{(u_1 \cdot c_{1u} - u_2 \cdot c_{2u})}{g} \qquad (2.14')$$

En general, la ecuación de Euler (Ecuación fundamental de las turbomáquinas) expresa lo siguiente:

$$H_t = \pm \frac{u_1 \cdot c_{1u} - u_2 \cdot c_{2u}}{g} \qquad \begin{matrix} (-)\text{: M. Generadoras} \\ (+)\text{: M. Motoras} \end{matrix} \qquad (2.15)$$

H_t es la altura hidráulica de las turbomáquinas hidráulicas. Energía (altura) teórica comunicada al fluido (turbomáquinas generadoras: bombas, ventiladores, compresores). Energía (altura) teórica aprovechada por el rodete. En todas las turbomáquinas, es la energía (altura) teórica intercambiada en el rodete.

2.2. TRIÁNGULO DE VELOCIDADES

Las ecuaciones vectoriales:

$$\overrightarrow{c_1} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{w_1} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{c_2} = \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{w_2}$$

se representan por medio de dos triángulos que se llaman triángulo de velocidades a la entrada (e) y triángulo de velocidades a la salida (s), respectivamente. Véase la Figura 2.2, donde:

u_1: velocidad absoluta del álabe a la entrada (velocidad periférica a la entrada).

c_1: velocidad absoluta del fluido a la entrada.

w_1: velocidad relativa a la entrada, del fluido con respecto al álabe.

$c_{1\,m}$: componente meridional de la velocidad absoluta del fluido a la entrada.

$c_{1\,u}$: componente tangencial o periférica de la velocidad absoluta del fluido a la entrada.

α_1: ángulo formado por los vectores de velocidad c_1 y u_1.

$ß_1$: ángulo formado por los vectores de velocidad w_1 y $(-u_1)$.

$ß_1'$: ángulo formado por los vectores velocidades w_1 y u_1 ($ß_1 + ß_1' = 180°$).

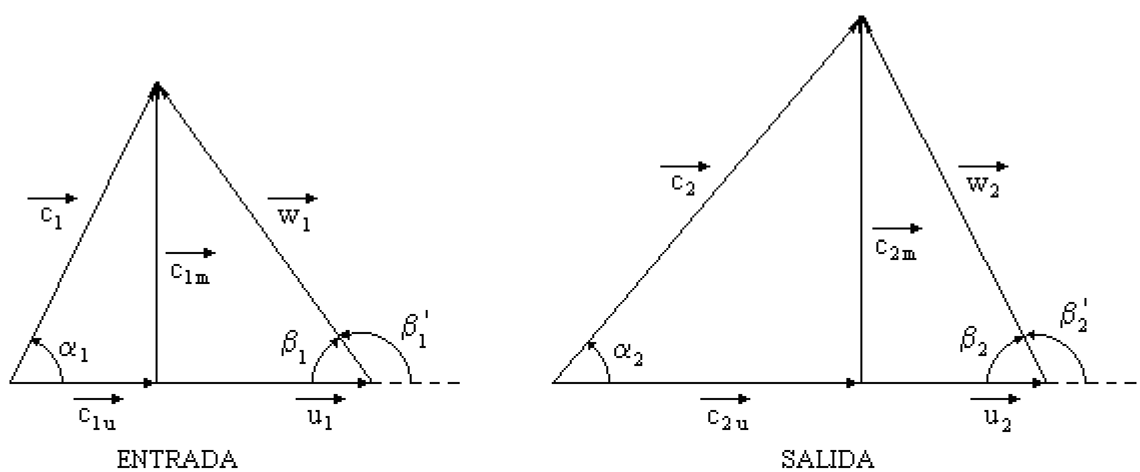


Figura No. 2.2 Triángulos de velocidades a la entrada y a la salida del álabe

Del triángulo de entrada, y por la Ley de Cosenos, se tiene:

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2 \cdot c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1$$

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2 \cdot c_{1u} \cdot u_1$$

de donde:

$$u_1 \cdot c_{1u} = \frac{1}{2}\left(c_1^2 + u_1^2 - w_1^2\right) \qquad (2.16)$$

Análogamente, del triángulo de salida, se tiene:

$$u_2 \cdot c_{2u} = \frac{1}{2}\left(c_2{}^2 + u_2^2 - w_2^2\right) \qquad (2.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.16) y (2.17), en la ecuación (2.15), se tiene:

$$H_t = \pm \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(c_1^2 + u_1^2 - w_1^2\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(c_2^2 + u_2^2 - w_2^2\right)}{g}$$

$$H_t = \pm\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2\,g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2\,g} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2\,g}\right) \qquad (2.18)$$

Planteando, por otra parte, la ecuación de Bernoulli entre (1) y (2), la entrada y la salida del rodete, despreciando las pérdidas de carga, se tiene:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2\,g} \pm H_t = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2\,g}$$

$$H_t = \pm\left[\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \left(z_1 - z_2\right) + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2\,g}\right] \qquad (2.19)$$

Igualando la ecuación (2.18) con la ecuación (2.19) y suponiendo, $z_1 - z_2 = 0$, se tiene:

$$H_t = H_p + H_d \qquad (20)$$

$$H_p = \pm\left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma}\right) = \pm\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}\right) \qquad (2.20)$$

H_p: altura de presión del rodete + : turbinas

- : bombas

$$H_d = \left(\frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}\right) \qquad (2.21)$$

H_d: altura de presión del rodete + : turbinas

- : bombas