5. LEYES DE SEMEJANZA EN TURBOMÁQUINAS HIDRÁULICAS.

Los constructores de máquinas hidráulicas que desarrollan nuevos tipos, disponen de laboratorios de ensayos de modelos. En particular, el alto costo de una turbina hidráulica de gran potencia absorbe los gastos de construcción y experimentación de un modelo, cuyo ensayo corrobora o rectifica el diseño.

En los ensayos de máquinas hidráulicas, la fuerza predominante es la de viscosidad. Por tanto, el modelo y el prototipo, además de ser geométricamente semejantes, deben ensayarse a igual número de Reynolds, **R**, para conservar la semejanza dinámica. En la práctica, esto resulta imposible. Así, por ejemplo, si se construye un modelo reducido de una bomba de agua a escala 1/5, siendo 1000 rpm la velocidad de giro del prototipo, y el ensayo del modelo se hiciera también con agua ($\nu m = \nu p$), entonces, de la condición de semejanza dinámica se tiene:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_m \qquad (5.1)$$

$$\frac{u_p \cdot D_p}{\upsilon_p} = \frac{u_m \cdot D_m}{\upsilon_m}$$

$$u_p \cdot D_p = u_m \cdot D_m \qquad (5.2)$$

donde se ha tomado como velocidad característica, la velocidad tangencial, u.

$$u_p = \frac{\pi \cdot D_p \cdot n_p}{60} \qquad ; \qquad u_m = \frac{\pi \cdot D_m \cdot n_m}{60} \qquad (5.3)$$

Sustituyendo (5.3) en (4.15):

$$\frac{\cancel{\pi} \cdot D_p^2 \cdot n_p}{\cancel{6}0} = \frac{\cancel{\pi} \cdot D_m^2 \cdot n_m}{\cancel{6}0}$$

de donde:

$$n_m = \left(\frac{D_p}{D_m}\right)^2 \cdot n_p \qquad (5.4)$$

Para el ejemplo, $n_m = (5)^2.1000$ rpm = 25000 rpm (altísima).

Los ensayos a velocidades tan elevadas en el laboratorio, serían costosos y prácticamente irrealizables.

En los ensayos de turbinas hidráulicas se tropieza con la dificultad de ensayar la turbina modelo, bajo el salto requerido, por la igualdad del número de Reynolds, en el modelo y en el prototipo. De ahí que, según la práctica universal:

"En los ensayos de máquinas hidráulicas se hace la hipótesis de que la semejanza geométrica implica la semejanza dinámica". A esta hipótesis se le llama "Semejanza Restringida".

Esto equivale a suponer que la viscosidad no entra en juego y, por tanto, que los rendimientos del modelo y del prototipo son iguales. Aunque en la realidad no sucede así (en el ejemplo anterior, el rendimiento del modelo podría ser del orden del 50%, mientras que el del prototipo sería del 80%), la hipótesis anterior ha conducido a excelentes resultados, excepto en lo que respecta a predicción de rendimientos. Más aún, utilizando fórmulas empíricas se pueden predecir, a base de los rendimientos del modelo obtenidos en el ensayo, los rendimientos del prototipo.

En el ensayo de turbinas hidráulicas, se ha utilizado la siguiente fórmula, con buenos resultados:

$$\eta_{1\,total} = \eta_m \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\eta_{2\,total}}{\eta_m}\right) \cdot \left(\frac{1}{\lambda^{0.314}}\right)\right] \qquad (5.5)$$

donde:

$\eta_{1\,total}$: Rendimiento total del prototipo.

$\eta_{2\,total}$: Rendimiento total del modelo.

η_m: Rendimiento mecánico, supuesto igual en el modelo y prototipo.

λ: Escala del modelo.

En el ensayo de bombas, se ha utilizado la siguiente fórmula, con buenos resultados también:

$$\eta_2 = 1 - (1 - \eta_1) \cdot \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{\frac{1}{10}} \qquad (5.6)$$

la cual relaciona los rendimientos de una misma bomba (λ =1), funcionando a distintos números de revoluciones.

Las leyes de semejanza sirven para:

- Predecir el comportamiento de una máquina de distinto tamaño, pero geométricamente semejante a otra, cuyo comportamiento (caudal, potencia, n, etc.) se conoce, trabajando en las mismas condiciones, sobretodo en condiciones de óptimo rendimiento, o bien, en condiciones de igual rendimiento, por ejemplo, 50% del rendimiento máximo.
- Predecir el comportamiento de una misma máquina, cuando varía alguna de sus características, por ejemplo: una bomba, para predecir cómo varía la altura efectiva, cuando varía el número de revoluciones ,o, en una turbina, cómo varía el caudal, cuando varía la altura neta, etc., sobre todo en condiciones de óptimo rendimiento, o bien, en condiciones de igual rendimiento.

5.1. LEYES DE SEMEJANZA DE LAS BOMBAS HIDRÁULICAS ROTODINÁMICAS

Las tres primeras leyes se refieren a la misma bomba ($\lambda = D_p/D_m = 1$) y expresan la variación de las características de una misma bomba o de bombas iguales, cuando varía el número de revoluciones.

Primera Ley: "Los caudales son directamente proporcionales a los números de revoluciones".

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{\cancel{A}_p \cdot v_p}{\cancel{A}_m \cdot v_m} = \frac{v_p}{v_m} = \frac{u_p}{u_m} = \frac{\cancel{\pi} \cdot \cancel{D}_p \cdot \frac{n_p}{\cancel{60}}}{\cancel{\pi} \cdot \cancel{D}_m \cdot \frac{n_m}{\cancel{60}}} = \frac{n_p}{n_m}$$

Entonces,

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{n_p}{n_m} \qquad (5.7)$$

Segunda Ley: "Las alturas útiles son directamente proporcionales a los cuadrados de los números de revoluciones".

$$\frac{H_{u\,p}}{H_{u\,m}} = \frac{\cancel{\eta}_{h\,p} \cdot H_{t\,p}}{\cancel{\eta}_{h\,m} \cdot H_{t\,m}} = \frac{H_{t\,p}}{H_{t\,m}} = \frac{u_{2\,p} \cdot \frac{c_{2\,u\,p}}{g}}{u_{2\,m} \cdot \frac{c_{2\,u\,m}}{g}} = \frac{(\cancel{k}_{1p} \cdot n_p) \cdot (\cancel{k}_{2\,p} \cdot n_p)}{(\cancel{k}_{1m} \cdot n_m) \cdot (\cancel{k}_{2\,m} \cdot n_m)}$$

Por tanto,

$$\frac{H_{u\,p}}{H_{u\,m}} = \left(\frac{n_p}{n_m}\right)^2 \qquad (5.8)$$

Tercera Ley: "Las potencias absorbidas son directamente proporcionales a los cubos de los números de revoluciones".

$$\frac{P_{a\,p}}{P_{a\,m}} = \frac{\dfrac{\gamma_p \cdot Q_p \cdot H_{u\,p}}{\cancel{\eta}_{p\ total}}}{\dfrac{\gamma_m \cdot Q_m \cdot H_{u\,m}}{\cancel{\eta}_{m\ total}}} = \frac{Q_p \cdot H_{u\,p}}{Q_m \cdot H_{u\,m}} = \left(\frac{n_p}{n_m}\right) \cdot \left(\frac{n_p}{n_m}\right)^2$$

Se deduce así, entonces que:

$$\frac{P_{a\,p}}{P_{a\,m}} = \left(\frac{n_p}{n_m}\right)^3 \qquad (5.9)$$

Las tres leyes siguientes se refieren a dos bombas geométricamente semejantes, pero de diámetros distintos, y expresan la variación de las características de dos bombas semejantes geométricamente, con el tamaño, si se mantiene constante el número de revoluciones.

Cuarta Ley: "Los caudales son directamente proporcionales al cubo de la relación de diámetros".

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{A_p \cdot v_p}{A_m \cdot v_m} = \frac{\left(\frac{\cancel{\pi} \cdot D_p^2}{\cancel{4}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{\pi} \cdot D_p \cdot \cancel{n}_p}{\cancel{60}}\right)}{\left(\frac{\cancel{\pi} \cdot D_m^2}{\cancel{4}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{\pi} \cdot D_m \cdot \cancel{n}_m}{\cancel{60}}\right)}$$

Resultando que:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \left(\frac{D_p}{D_m}\right)^3 \qquad (5.10)$$

Quinta Ley: "Las alturas útiles son directamente proporcionales al cuadrado de la relación de diámetros".

$$\frac{H_{up}}{H_{um}} = \frac{\cancel{\eta}_{hp} \cdot H_{tp}}{\cancel{\eta}_{hm} \cdot H_{tm}} = \frac{H_{tp}}{H_{tm}} = \frac{u_{2p} \cdot \frac{c_{2up}}{g}}{u_{2m} \cdot \frac{c_{2um}}{g}} = \frac{\left(\frac{\cancel{\pi} \cdot D_p \cdot \cancel{n}_p}{\cancel{60}}\right) \cdot \left(k_p \cdot D_p\right)}{\left(\frac{\cancel{\pi} \cdot D_m \cdot \cancel{n}_m}{\cancel{60}}\right) \cdot \left(k_m \cdot D_m\right)}$$

Luego,

$$\frac{H_{up}}{H_{um}} = \left(\frac{D_p}{D_m}\right)^2 \qquad (5.11)$$

Sexta Ley: "Las potencias absorbidas son directamente proporcionales a la quinta potencia de la relación de diámetros".

$$\frac{P_{a\,p}}{P_{a\,m}}=\frac{\dfrac{\gamma_p\cdot Q_p\cdot H_{u\,p}}{\eta_{p\,total}}}{\dfrac{\gamma_m\cdot Q_m\cdot H_{u\,m}}{\eta_{m\,total}}}=\left(\frac{Q_p}{Q_m}\right)\cdot\left(\frac{H_{u\,p}}{H_{u\,m}}\right)=\left(\frac{D_p}{D_m}\right)^3\cdot\left(\frac{D_p}{D_m}\right)^2$$

luego,

$$\frac{P_{a\,p}}{P_{a\,m}}=\left(\frac{D_p}{D_m}\right)^5 \qquad (5.12)$$

Estas leyes se pueden fundir dos a dos, haciendo que varíe primero el diámetro y luego el número de revoluciones, obteniéndose las siguientes fórmulas:

$$\frac{Q_p}{Q_m}=\left(\frac{n_p}{n_m}\right)\cdot\left(\frac{D_p}{D_m}\right)^3 \qquad (5.13)$$

$$\frac{H_{u\,p}}{H_{u\,m}}=\left(\frac{n_p}{n_m}\right)^2\cdot\left(\frac{D_p}{D_m}\right)^2 \qquad (5.14)$$

$$\frac{P_{a\,p}}{P_{a\,m}}=\left(\frac{n_p}{n_m}\right)^3\cdot\left(\frac{D_p}{D_m}\right)^5 \qquad (5.15)$$

despejando $\dfrac{D_p}{D_m}$ de (5.13), se tiene:

$$\frac{D_p}{D_m}=\sqrt{\frac{\left(\dfrac{H_{u\,p}}{H_{u\,m}}\right)}{\left(\dfrac{n_p}{n_m}\right)^2}}=\frac{n_m}{n_p}\cdot\sqrt{\frac{H_{u\,p}}{H_{u\,m}}}$$

y reemplazando este resultado en la (5.15), queda:

$$\frac{P_{a\,p}}{P_{a\,m}}=\left(\frac{n_p}{n_m}\right)^3\cdot\left(\frac{n_m}{n_p}\right)^5\cdot\left(\sqrt{\frac{H_{u\,p}}{H_{u\,m}}}\right)^5$$

$$\frac{P_{a\,p}}{P_{a\,m}} = \left(\frac{n_m}{n_p}\right)^2 \cdot \left(\frac{H_{u\,p}}{H_{u\,m}}\right)^{5/2} \qquad (5.16)$$

Agrupando de acuerdo al subíndice, resulta:

$$P_{a\,p} \cdot n_p^2 \cdot H_{u\,p}^{-5/2} = P_{a\,m} \cdot n_m^2 \cdot H_{u\,m}^{-5/2}$$

Sacando raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene:

$$n_p \cdot P_{a\,p}^{1/2} \cdot H_{u\,p}^{-5/4} = n_m \cdot P_{a\,m}^{1/2} \cdot H_{u\,m}^{-5/4} \qquad (5.17)$$

Dado que la ecuación (5.17) se dedujo por eliminación de la relación (D_p/D_m), se confirma que el producto $n \cdot P_a^{1/2} \cdot H_u^{-5/4}$ es idéntico para todas las bombas geométricamente semejantes. Este producto se llama Número Específico de Revoluciones, y es.

$$n_s = n \cdot P_a^{1/2} \cdot H_u^{-5/4} \qquad (5.18)$$

Conclusión: "Todas las bombas geométricamente semejantes tienen el mismo número específico de revoluciones, n_s".

n_s no es adimensional; por tanto, será distinto, según el sistema de unidades utilizado:

Por ejemplo, si n (rpm), P_a (c.v.), H_u (m)

$$P_a\,(\text{c.v.}) = \frac{\gamma\left(\dfrac{\text{kgf}}{\text{m}^3}\right)\cdot Q\left(\dfrac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)\cdot H\,(\text{m})}{75}$$

$$n_s = \left(\frac{\gamma}{75}\right)^{1/2}\cdot n\cdot Q^{1/2}\cdot H_u^{1/2}\cdot H_u^{-5/4}$$

$$n_s = \left(\frac{1000}{75}\right)^{1/2}\cdot n\cdot Q^{1/2}\cdot H_u^{-3/4}$$

Por lo tanto,

$$n_s = 3.65\cdot n\cdot Q^{1/2}\cdot H_u^{-3/4} \qquad \begin{array}{l} n\ (\text{rpm}) \\ Q\ (\text{m}^3/\text{s}) \\ H_u\ (\text{m}) \end{array} \qquad (5.19)$$

Las ecuaciones (5.16) y (5.17) dan resultados idénticos para n_s.