10. PROBLEMAS RESUELTOS

Con el propósito de lograr una mejor comprensión de los conceptos tratados en los capítulos anteriores, y de promover el hábil manejo de toda una serie de formulaciones deducidas a lo largo de este libro, se han seleccionado y resuelto los siguientes problemas ilustrativos.

Problema No. 1

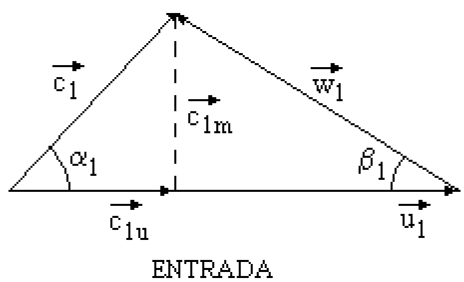
Una bomba centrífuga para agua, que gira a 1000 rpm, tiene las siguientes especificaciones: D_1 = 180 mm; $\frac{D_2}{D_1}$ = 2; b_1 = 30 mm; b_2 = 20 mm; β_1 = 20°; β_2 = 30°. La entrada en los álabes es radial; η_h = 81%, η_m = 95%; η_{motor} eléctrico = 0.85. Las bridas de entrada y de salida se encuentran a la misma cota. Diámetro de la tubería de entrada y de la tubería de salida: 220 mm y 200 mm, respectivamente. El desnivel entre el depósito de aspiración, abierto a la atmósfera, y la brida de aspiración, es de 1.2 m. Las pérdidas en la tubería de succión ascienden a 4.0 m.

Calcular:

- Los triángulos de velocidades a la entrada y a la salida del rodete.
- El caudal de la bomba (supóngase η_v = 1.0).
- La altura de Euler.
- Las alturas de presión a la entrada y a la salida de la bomba.
- La energía eléctrica consumida en seis horas de funcionamiento de la bomba.

Solución.

1. Cálculo de los Triángulos de Velocidades.



$\beta_1 = 20º$

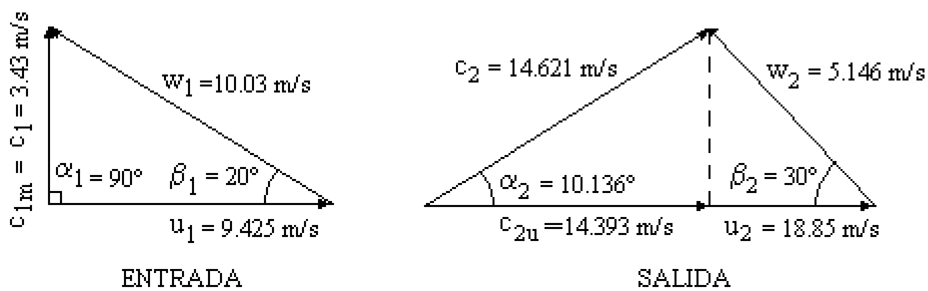
$\alpha_1 = 90º$ (entrada radial)

Luego,

$c_{1m} = c_1 \text{ sen } \alpha_1 = c_1$ y

$c_{1u} = c_1 \cos \alpha_1 = 0$

Por tanto, los triángulos de velocidades a la entrada y a la salida del álabe se representan de la siguiente manera:



$$n = 1000 \frac{\text{rev}}{\text{min}} = \frac{1000}{60} \frac{\text{rev}}{\text{s}}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1000}{60} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 104.720 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$D_2 = 2 \cdot D_1 = 2 \cdot (180 \text{ mm}) = 360 \text{ mm}$$

$$u_1 = \omega \cdot r_1 = \frac{\omega \cdot D_1}{2} = (104.720) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{0.18}{2}\right) \text{m} = 9.425 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

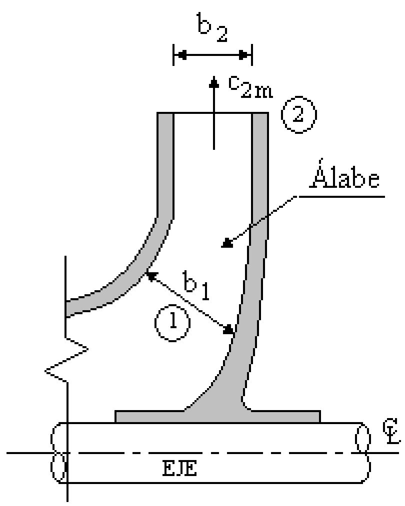
$$u_2 = \omega \cdot r_2 = \frac{\omega \cdot D_2}{2} = (104.720) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{0.36}{2}\right) \text{m} = 18.850 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En el triángulo a la entrada:

$$\tan\ \beta_1 = \frac{c_{1m}}{u_1}$$

$$\therefore\ c_{1m} = c_1 = u_1 \cdot \tan\beta_1 = (\ 9.425)\frac{m}{s} \cdot (\tan 20^\circ) = 3.430\ \frac{m}{s}$$

$$w_1 = \sqrt{c_{1m}^2 + u_1^2} = \sqrt{\left[(3.430)^2 + (9.425)^2\right]\frac{m^2}{s^2}} = 10.030\frac{m}{s}$$



Por continuidad:

$$Q = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$Q = \pi \cdot D_1 \cdot b_1 \cdot c_{1m} = \pi \cdot D_2 \cdot b_2 \cdot c_{2m}$$

$$\therefore\quad c_{2m} = \frac{D_1 \cdot b_1}{D_2 \cdot b_2}\ c_{1m}$$

$$c_{2m} = \frac{(180\ mm)\cdot(30\ mm)}{(360\ mm)\cdot(20\ mm)} 3.430\frac{m}{s} = 2.573\frac{m}{s}$$

En el triángulo a la salida:

$$c_{2m} = w_2 \cdot \operatorname{sen}\beta_2$$

$$\therefore\ w_2 = \frac{c_{2m}}{\operatorname{sen}\beta_2} = \frac{2.573\ \frac{m}{s}}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 5.146\ \ \frac{m}{s}$$

$$\cos\beta_2 = \frac{u_2 - c_{2u}}{w_2}$$

$$\therefore\ \ c_{2u} = u_2 - w_2 \cdot \cos\beta_2$$

$$c_{2u} = 18.850\frac{m}{s} - 5.146\ \frac{m}{s} \cdot \cos 30^\circ = 14.393\ \frac{m}{s}$$

$$c_2 = \sqrt{c_{2u}^2 + c_{2m}^2} = \sqrt{\left[(14.393)^2 + (2.573)^2\right]\frac{m^2}{s^2}} = 14.621\,\frac{m}{s}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{c_{2m}}{c_{2u}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2.573}{14.393}\right) = 10.136^{\text{o}}$$

2. Cálculo del Caudal de la Bomba, Q

$$Q = \pi \cdot D_1 \cdot b_1 \cdot c_{1m}$$

$$Q = \pi \cdot (0.18\,m) \cdot (0.03\,m) \cdot \left(3.430\,\frac{m}{s}\right) = 0.05819\,\frac{m^3}{s} = 58.19\,\frac{l}{s}$$

3. Cálculo de la Altura de Euler, H_t

$$H_t = \frac{u_2 \cdot c_{2u} - u_1 \cdot \cancelto{0}{c_{1u}}}{g} = \frac{u_2 \cdot c_{2u}}{g}; \qquad \text{dado que: } c_{1u} = 0$$

$$H_t = \frac{\left(18.850\,\frac{m}{s}\right) \cdot \left(14.393\,\frac{m}{s}\right)}{9.81\,\frac{m}{s^2}} = 27.656\,m$$

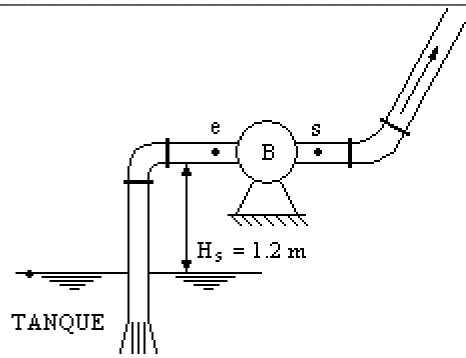
4. Cálculo de la Altura de Presión a la entrada de la Bomba, $\frac{p_e}{\gamma}$

Aplicando Bernoulli entre el tanque de aspiración y la entrada de la bomba, se tiene:

$$z_A + \cancelto{0}{\frac{p_A}{\gamma}} + \cancelto{0}{\frac{v_A^2}{2 \cdot g}} - h_{A-e} = z_e + \frac{p_e}{\gamma} + \frac{v_e^2}{2 \cdot g} \qquad (1)$$

dado que: $\frac{v_A^2}{2 \cdot g} \approx 0$ y suponiendo presiones relativas, $\frac{p_A}{\gamma} = 0$

$$\frac{p_e}{\gamma} = -(z_e - z_A) - \frac{v_e^2}{2 \cdot g} - h_{A-e} \tag{2}$$



$$\frac{p_e}{\gamma} = -H_s - \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot D_e^4} - h_{A-e} \tag{3}$$

Suponieenedo $\eta_v = 1.0$, y $q_e = q_i = 0$

$$\frac{p_e}{\gamma} = -1.2\,\text{m} - \frac{8 \cdot (0.05819)^2 \ \frac{m^6}{s^2}}{\pi^2 \cdot \left(9.81 \frac{m}{s^2}\right) \cdot (0.22)^4\,m^4} - 4.0\,\text{m} = -5.319\,\text{m}$$

5. Cálculo de la Altura de Presión a la salida de la bomba, $\frac{p_s}{\gamma}$

Planteando la Ecuación de Bernoulli entre la entrada (e) y la salida (s) de la bomba, se tiene:

$$\cancel{z_e} + \frac{p_e}{\gamma} + \frac{v_e^2}{2 \cdot g} + H_u = \cancel{z_s} + \frac{p_s}{\gamma} + \frac{v_s^2}{2 \cdot g} \tag{4}$$

Luego,

$$\frac{p_s}{\gamma} = H_u + \frac{p_e}{\gamma} + \frac{v_e^2 - v_s^2}{2 \cdot g} \tag{5}$$

$$\frac{p_s}{\gamma} = H_u + \frac{p_e}{\gamma} + \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left(\frac{1}{D_e^4} - \frac{1}{D_s^4}\right) \tag{6}$$

Por otra parte,

$$\eta_h = \frac{H_u}{H_t}$$

$\therefore \quad H_u = \eta_h \cdot H_t = 0.81 \cdot (27.684\,\text{m}) = 22.424\,\text{m}$

Sustituyendo éste y demás valores en (6), resulta:

$$\frac{p_s}{\gamma} = 22.424\,\text{m} - 5.319\,\text{m} + \frac{8 \cdot (0.05819)^2\,\dfrac{\text{m}^6}{\text{s}^2}}{\pi^2 \cdot \left(9.81\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot \left[\dfrac{1}{(0.22)^4\,\text{m}^4} - \dfrac{1}{(0.20)^4\,\text{m}^4}\right]}$$

$$\frac{p_s}{\gamma} = 17.105\,\text{m}$$

6. Cálculo de la energía eléctrica consumida, $E_{\text{eléct consumida}}$

$E_{\text{eléct. consumida}} = P_{\text{red}} \cdot t_{\text{funcionamiento}}$ (7)

$P_a = P_{\text{red}} \cdot \eta_{\text{motor eléctrico}}$ (8)

de (8),

$$P_{\text{red}} = \frac{P_a}{\eta_{\text{motor}}} \tag{9}$$

Por otra parte,

$$\eta_{\text{total}} = \eta_h \cdot \eta_m \cdot \eta_v = \frac{P_u}{P_a}$$

de donde

$$P_a = \frac{P_u}{\eta_h \cdot \eta_m \cdot \eta_v} \tag{10}$$

Sustituyendo (10) en (9) y el resultado en (7), se tiene:

$$P_{\text{red}} = \frac{P_u}{\eta_h \cdot \eta_m \cdot \eta_v \cdot \eta_{\text{motor}}}$$

$$E_{\text{eléct. consu.}} = \frac{P_u \cdot t_{\text{func.}}}{\eta_h \cdot \eta_m \cdot \eta_v \cdot \eta_{\text{motor}}}$$

Finalmente, reemplazando la P_u, queda

$$E_{\text{eléct. consu.}} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_u \cdot t_{\text{func.}}}{\eta_h \cdot \eta_m \cdot \eta_v \cdot \eta_{\text{motor}}} \tag{11}$$

$$E_{\text{eléct. consu.}} = \frac{\left(1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(0.05819 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right) \cdot (22.424\,\text{m})}{(0.81) \cdot (0.95) \cdot (1.0) \cdot (0.85)} \cdot (6\,\text{horas})$$

$$E_{\text{eléct. consu.}} = 11969.752 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{s}} \text{h} = 11969.752 \cdot (9.81) \frac{\text{N} - \text{m}}{\text{s}} \text{h}$$

$$E_{\text{eléct. consu.}} = 117423.267 \frac{\text{J}}{\text{s}} \text{h} = 117423.267 \ \text{W} - \text{h}$$

$$E_{\text{eléct. consu.}} = 117.423 \ \text{kW} - \text{h}$$

Problema No. 2

Una bomba centrífuga tiene las siguientes características: D_1 = 100 mm; $\frac{D_2}{D_1} = 2$; b_1 = 20 mm; b_2 = 10 mm; β_1 = 15°; β_2 = 30°; n = 1500 rpm. Las tuberías de succión e impulsión tienen el mismo diámetro. El manómetro de aspiración registra una altura de presión relativa de -4 m c.a. El rendimiento total de la bomba es 65 %; η_m = 96%; η_v = 0.9 y la entrada en los álabes es radial.

Calcular:

- Los triángulos de velocidades a la entrada y a la salida del rodete.
- El caudal (supóngase rendimiento volumétrico igual a 1).
- La potencia en el eje de la bomba. P_a.
- La lectura del manómetro de impulsión.

Solución:

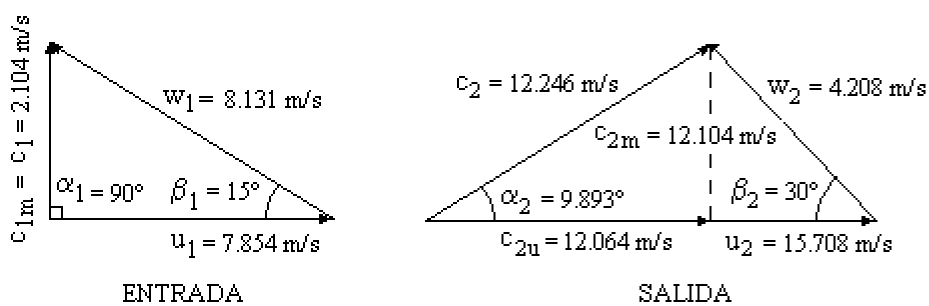
1. Cálculo de los Triángulos de Velocidades.

$$u_1 = \omega \cdot r_1 = (2 \cdot \pi \cdot n) \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{\pi \cdot n \cdot D_1}{60} \; ; \qquad n \text{ (rpm)}$$

$$u_1 = \pi \cdot (1500) \cdot \frac{(0.1\,m)}{60\,s} = 7.854 \,\frac{m}{s}$$

$$u_2 = \frac{\pi \cdot n \cdot D_2}{60} = \pi \cdot (1500) \cdot \frac{(0.2\,m)}{60\,s} = 15.708 \,\frac{m}{s}$$

$\alpha_1 = 90º$ (entrada radial)



Del triángulo a la entrada:

$$c_1 = u_1 \cdot \tan\beta_1 = 7.854 \,\frac{m}{s} \cdot \tan 15º = 2.104 \,\frac{m}{s} = c_{1m}$$

$$w_1 = \sqrt{c_{1m}^2 + u_1^2} = \sqrt{\left[(2.104)^2 + (7.854)^2\right]\frac{m^2}{s^2}} = 8.131 \,\frac{m}{s}$$

Por continuidad,

$$Q = \pi \cdot D_1 \cdot b_1 \cdot c_{1m} = \pi \cdot D_2 \cdot b_2 \cdot c_{2m}$$

$$\therefore \qquad c_{2m} = \frac{D_1 \cdot b_1}{D_2 \cdot b_2} \cdot c_{1m}$$

$$c_{2m} = \frac{(100)\cdot(20)}{(200)\cdot(10)} \cdot 2.104 \,\frac{m}{s} = 2.104 \,\frac{m}{s}$$

Del triángulo a la salida, se tiene:

$$c_{2u} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\tan\beta_2} = 15.708\,\frac{m}{s} - \frac{2.104\,\frac{m}{s}}{\tan 30º} = 12.064\,\frac{m}{s}$$

$$c_2 = \sqrt{c_{2u}^2 + c_{2m}^2} = \sqrt{\left[(12.064)^2 + (2.104)^2\right]\frac{m^2}{s^2}} = 12.246\,\frac{m}{s}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{c_{2m}}{c_{2u}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2.104}{12.064}\right) = 9.893º$$

$$w_2 = \frac{c_{2m}}{\operatorname{sen}\beta_2} = \frac{2.104\,\frac{m}{s}}{\operatorname{sen} 30º} = 4.208\,\frac{m}{s}$$

2. Cálculo del Caudal, Q

$$Q = \pi \cdot D_1 \cdot b_1 \cdot c_{1m}$$

$$Q = \pi \cdot (0.1\,m)\cdot(0.02\,m)\cdot\left(2.104\,\frac{m}{s}\right) = 0.01322\,\frac{m^3}{s} = 13.22\,\frac{l}{s}$$

3. Cálculo de la Potencia en el Eje, P_a

$$P_a = \frac{P_u}{\eta_{total}} = \frac{\gamma\cdot Q\cdot H_u}{\eta_h\cdot\eta_v\cdot\eta_m} = \frac{\gamma\cdot Q\cdot(\cancel{\eta_h}\cdot H_t)}{\cancel{\eta_h}\cdot\eta_v\cdot\eta_m} = \frac{\gamma\cdot Q}{\eta_v\cdot\eta_m}\cdot\left(\frac{u_2\cdot c_{2u}}{g}\right) \qquad (1)$$

$$P_a = \frac{\left(1000\,\frac{kgf}{m^3}\right)\cdot\left(0.01322\,\frac{m^3}{s}\right)}{(0.9)\cdot(0.96)\cdot\left(9.81\,\frac{m}{s^2}\right)}\cdot\left(15.708\,\frac{m}{s}\right)\cdot\left(12.604\,\frac{m}{s}\right)$$

$$P_a = 308.800\,\frac{kgf\cdot m}{s} = 3029.3328\ W = 3.029\,kW$$

4. Cálculo de la Lectura Manométrica a la salida, P_s

Aplicando Bernoulli entre las bridas de succión y de impulsión, queda:

$$z_s + \frac{p_s}{\gamma} + \frac{v_s^2}{2 \cdot g} + H_u = z_1 + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{v_i^2}{2 \cdot g}$$

de donde,

$$\frac{p_i}{\gamma} = -\left(z_s - z_i\right) - \frac{\cancel{v}_s^2 - \cancel{v}_i^2}{2 \cdot g} + \frac{p_s}{\gamma} + H_u \qquad (2)$$

Suponiendo que las bridas están al mismo nivel, es decir, $z_1 = z_s$ y considerando el hecho de que la diferencia de velocidades es muy pequeña, resulta:

$$\frac{p_i}{\gamma} = H_u + \frac{p_s}{\gamma} = \eta_h \cdot H_t + \frac{p_s}{\gamma} \qquad (3)$$

Además, $\eta_{total} = \eta_h \cdot \eta_m \cdot \eta_v$

$$\eta_h = \frac{\eta_{total}}{\eta_m \cdot \eta_v} \qquad (4)$$

y $$H_t = \frac{u_2 \cdot c_{2u}}{g} \qquad (5)$$

Llevando (4) y (5) a (3),

$$\frac{p_i}{\gamma} = \frac{\eta_{total}}{\eta_m \cdot \eta_v} \cdot \frac{u_2 \cdot c_{2u}}{g} + \frac{p_s}{\gamma} \qquad (6)$$

$$\frac{p_i}{\gamma} = \frac{(0.65) \cdot \left(15.708\,\frac{m}{s}\right) \cdot \left(12.064\,\frac{m}{s}\right)}{(0.96) \cdot (0.9) \cdot \left(9.81\,\frac{m}{s^2}\right)} - 4\,m$$

$$\frac{p_i}{\gamma} = 10.532\ \text{m c.a.}$$

Problema No. 3

Una bomba centrífuga, en la cual se despreciarán las pérdidas, produce un caudal de agua de 300 m^3/h y tiene las siguientes características: D_1 = 150 mm; $\frac{D_2}{D_1}$ = 3; b_1 = 40 mm; $\frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2}$; $ß_1$ = 60°; $ß_2$ = 40°; entrada radial.

Calcular:

- El número de revoluciones por minuto del rodete.
- Altura efectiva de la bomba.
- El par suministrado por la bomba.
- La potencia de la bomba.
- El incremento de presión que se produce en el rodete.
- Altura dinámica generada por el rodete.

Solución.

No hay pérdidas $\eta_h = \eta_m = \eta_v = \eta_{total} = 1$

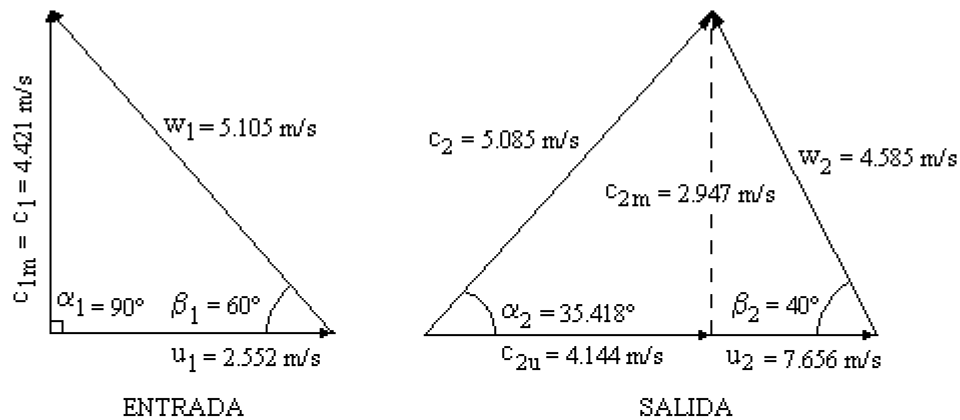
$$Q = 300\,\frac{m^3}{h} = 0.08333\,\frac{m^3}{s} = 83.33\,\frac{l}{s}$$

1. Cálculo del Número de Revoluciones, n.

$$Q = \pi \cdot D_1 \cdot b_1 \cdot c_{1m} = \pi \cdot D_2 \cdot b_2 \cdot c_{2m}$$

$$c_{1m} = \frac{Q}{\pi \cdot D_1 \cdot b_1} = \frac{0.08333\,\frac{m^3}{s}}{\pi \cdot (0.15\,m) \cdot (0.04\,m)} = 4.421\,\frac{m}{s}$$

$$c_{2m} = \frac{Q}{\pi \cdot D_2 \cdot b_2} = \frac{0.08333\,\frac{m^3}{s}}{\pi \cdot (0.45\,m) \cdot (0.02\,m)} = 2.947\,\frac{m}{s}$$



Del triángulo a la entrada, se tiene:

$$u_1 = \frac{c_{1m}}{\tan \beta_1} = \frac{4.421\,\frac{m}{s}}{\tan 60^{o}} = 2.552\,\frac{m}{s}$$

$$w_1 = \sqrt{u_1^2 + c_{1m}^2} = \sqrt{\left[(2.552)^2 + (4.421)^2\right]\frac{m^2}{s^2}} = 5.105\,\frac{m}{s}$$

Por otro lado, $u_1 = \frac{\pi \cdot D_1 \cdot n}{60}$ (con n en rpm)

de donde,

$$n = \frac{60 \cdot u_1}{\pi \cdot D_1} = \frac{60\,s \cdot \left(2.552\,\frac{m}{s}\right)}{\pi \cdot (0.15\,m)} = 324.93 \quad rpm$$

2. Cálculo de la Altura Efectiva, H_u.

$$u_2 = \frac{\pi \cdot D_2 \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot (0.45\,m) \cdot (324.93)}{60\,s} = 7.656\,\frac{m}{s}$$

Del triángulo a la salida,

$$c_{2u} = u_2 - \frac{c_{2m}}{\tan\beta_2}$$

$$c_{2u} = 7.656\frac{m}{s} - \frac{2.947\frac{m}{s}}{\tan 40º} = 4.144\frac{m}{s}$$

$$c_2 = \sqrt{c_{2m}^2 + c_{2u}^2} = \sqrt{\left[(2.947)^2 + (4.144)^2\right]\frac{m^2}{s^2}} = 5.085\frac{m}{s}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{c_{2m}}{c_{2u}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2.947\frac{m}{s}}{4.144\frac{m}{s}}\right) = 35.418º$$

$$w_2 = \sqrt{c_{2m}^2 + (u_2 - c_{2u})^2} = \sqrt{\left[(2.947)^2 + (7.656 - 4.144)^2\right]\frac{m^2}{s^2}}$$

$$w_2 = 4.585\ \frac{m}{s}$$

$$H_t = \frac{u_2 \cdot c_{2u} - u_1 \cdot \cancel{c_{1u}}^{\,0}}{g} = \frac{u_2 \cdot c_{2u}}{g} = \frac{\left(7.656\frac{m}{s}\right)\cdot\left(4.144\frac{m}{s}\right)}{9.81\frac{m}{s^2}} = 3.234\,m$$

$$\eta_h = \frac{H_u}{H_t} = 1$$

$$\therefore \quad H_u = H_t = 3.234\,m$$

3. Cálculo de la Potencia, P

$$\eta_{total} = \frac{P_u}{P_a} = 1$$

$$\therefore \quad P_u = P_a = \gamma \cdot Q \cdot H_u = \gamma \cdot Q \cdot H_t$$

$$P_u = P_a = \left(1000\,\frac{kgf}{m^3}\right)\cdot\left(0.0833\,\frac{m^3}{s}\right)\cdot(3.234\,m) = 269.392\,\frac{kgf\cdot m}{s}$$

$$P_u = P_a = 2642.74\ W = 2.64\ kW = 3.6\ c.v. = 3.54\ h.p.$$

4. Cálculo del Par de la bomba, M

$$P_a = M.\omega = M\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{60}\right)$$

$$\therefore \quad M = \frac{60\cdot P_a}{2\cdot\pi\cdot n} = \frac{60\,s\left(269.392\,\frac{kgf\cdot m}{s}\right)}{2\cdot\pi\cdot(324.93)} = 7.917\ kgf\cdot m$$

5. Cálculo del Incremento de Presión, H_p

$$H_p = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2\cdot g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2\cdot g}$$

$$H_p = \frac{\left[(7.656)^2 - (2.552)^2\right]\frac{m^2}{s^2}}{2\cdot\left(9.81\,\frac{m}{s^2}\right)} + \frac{\left[(5.105)^2 - (4.585)^2\right]\frac{m^2}{s^2}}{2\cdot\left(9.81\,\frac{m}{s^2}\right)}$$

$$H_p = 2.912\ m$$

6. Cálculo de la Altura Dinámica, H_d

$$H_d = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2\cdot g} = \frac{\left[(5.085)^2 - (4.421)^2\right]\frac{m^2}{s^2}}{2\cdot\left(9.81\,\frac{m}{s^2}\right)}$$

$$H_d = 0.322\ m$$

Problema No. 4

Una bomba centrífuga para agua suministra un caudal de 50 m^3/h. La presión a la salida de la bomba es de 2.6 bar. El vacuómetro de aspiración indica una depresión de 250 Torr. La diferencia de cotas entre los ejes de las secciones, donde se conectan las tomas manométricas, es de 0.6 m. Los diámetros de las tuberías de aspiración e impulsión son iguales. El rendimiento total de la bomba es de 62%.

Calcular la potencia de accionamiento de esta bomba.

Solución:

Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre la entrada (e) y la salida (s), de la bomba, se tiene:

$$z_e + \frac{p_e}{\gamma} + \frac{v_e^2}{2 \cdot g} + H_u = z_s + \frac{p_s}{\gamma} + \frac{v_s^2}{2 \cdot g} \qquad (1)$$

de donde

$$H_u = (z_s - z_e) + \frac{p_s - p_e}{\gamma} \qquad (2)$$

$$p_s = 2.6\,\text{bar} = 2.6 \cdot \left(1.02 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right) = 2.6 \cdot (1.02) \cdot (10^4) \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} = 26520 \ \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$$

$$p_e = -250\,\text{Torr} = -250\ \text{mm Hg} = -0.25\,\text{m} \cdot \left(13600 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}\right) = -3400 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$$

$v_s = v_e$ (por ser tuberías de igual diámetro).

Sustituyendo valores numéricos en (2), resulta:

$$H_u = 0.6\ \text{m} + \frac{[26520 - (-3400)] \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}}{1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}} = 30.520\,\text{m}$$

De otra parte:

$$\eta_{total} = \frac{P_u}{P_a}$$

$$\therefore \quad P_a = \frac{P_u}{\eta_{total}} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_u}{\eta_{total}} = \frac{\left(1000\,\frac{kgf}{m^3}\right)\cdot\left(\frac{50}{3600}\,\frac{m^3}{s}\right)\cdot(30.520\,m)}{0.62}$$

$$P_a = 683.69\,\frac{kgf\cdot m}{s} = 683.69\times 9.81\frac{N.m}{s} = 6700\,W = 6.7\,kW$$

Problema No. 5

Una bomba centrífuga, cuya entrada en los álabes del rodete es radial, proporciona una altura útil de 22 m, a una velocidad de 1200 rpm. D_1 = 180 mm; D_2 = 300 mm. c_m es constante en todo el rodete; $c_{2u} = 25\,\frac{m}{s}$. Las pérdidas hidráulicas en la bomba son iguales a $0.027\,c_2^2$ m (c_2 en m/s).

Calcular.

- El rendimiento hidráulico de la bomba, η_h.
- Los ángulos de los álabes a la entrada y a la salida, $ß_1$ y $ß_2$.

Solución:

Entrada radial: $\alpha_1 = 90^o$; $c_{1u} = 0$; $c_{1m} = c_1 = c_{2m}$, $c_{2u} = 25\frac{m}{s}$; $H_{int} = 0.027\cdot c_2^2$ (en metros); $H_u = 22\,m$.

1. Cálculo de la Eficiencia Hidráulica, η_h

$$u_1 = \frac{\pi\cdot D_1\cdot n}{60} = \frac{\pi\cdot(0.18\,m)\cdot(1200)}{60\,s} = 11.31\,\frac{m}{s}$$

$$u_2 = \frac{\pi \cdot D_2 \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot (0.30\,\text{m}) \cdot (1200)}{60\,\text{s}} = 18.85\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\eta_h = \frac{H_u}{H_t} \qquad (1)$$

$$H_t = \frac{u_2 \cdot c_{2u}}{g} = \frac{\left(18.85\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \left(25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 48.038\,\text{m}$$

$$\eta_h = \frac{22\,\text{m}}{48.038\,\text{m}} = 0.4580 = 45.80\%$$

2. Cálculo de los Ángulos $ß_1$ y $ß_2$

$$H_u = H_t - H_{int} \qquad (2)$$

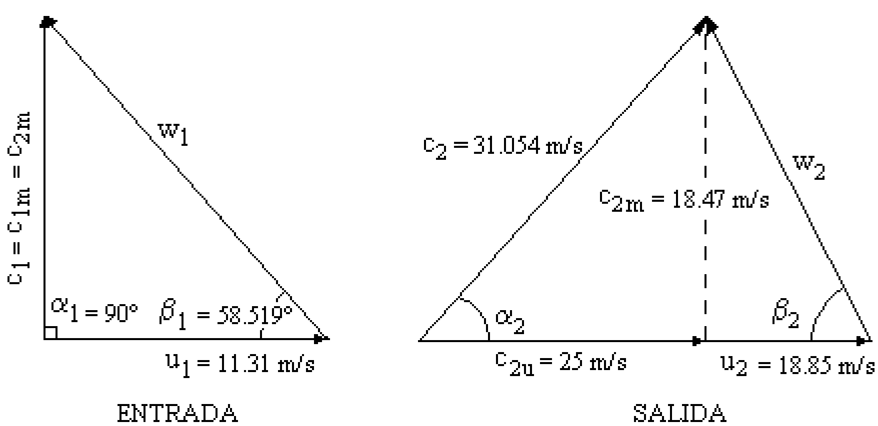
$$\therefore \quad H_{int} = H_t - H_u \qquad (3)$$

$$H_{int} = (48.038 - 22)\,\text{m} = 26.038\,\text{m}$$

$$H_{int} = 0.027 \cdot c_2^2 = 26.038\,\text{m}$$

luego, $$c_2 = \sqrt{\frac{26.038}{0.027}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 31.054\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De los siguientes triángulos de velocidades, se deduce:



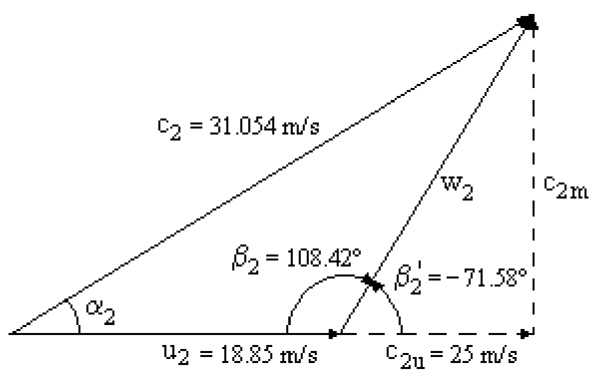
$$\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c_{1m}}{u_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{c_{2m}}{u_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{c_2^2 - c_{2u}^2}}{u_1}\right)$$

$$\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{(31.054)^2 - (25)^2}\ \frac{m}{s}}{11.31\frac{m}{s}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{18.42}{11.31}\right) = 58.519º$$

$$\beta'_2 = \tan^{-1}\left(\frac{c_{2m}}{u_2 - c_{2u}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{18.47\frac{m}{s}}{(18.85 - 25)\frac{m}{s}}\right) = -71.5844º$$

$$\beta_2 = 180º - \left|\beta_2'\right| = 180º - 71.5844º = 108.4156º$$

En consecuencia, el triángulo de velocidades a la salida del álabe queda de la siguiente manera:



TRIÁNGULO DE VELOCIDADES A LA SALIDA

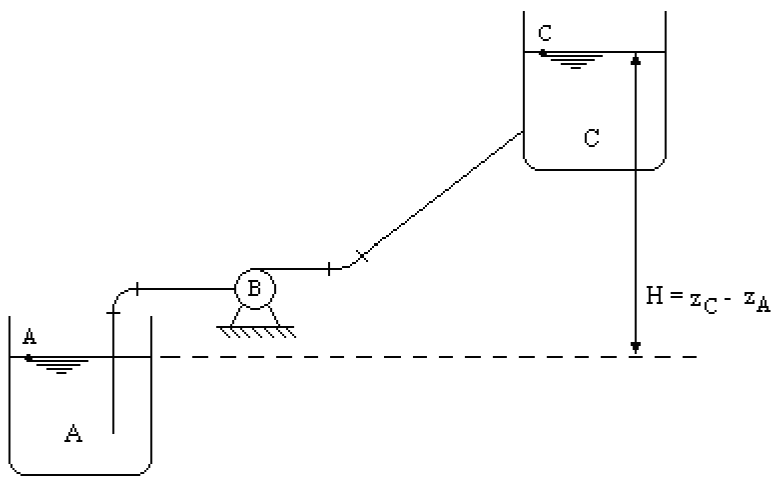
Problema No. 6

Una bomba centrífuga proporciona una altura útil de 40 m, con rendimiento hidráulico de 80%. Las tuberías de aspiración e impulsión son de 150 mm de diámetro. D_2 = 350 mm; b_2 = 25 mm; $ß_2$ = 25°; n = 1400 rpm. La pérdida de carga en las tuberías de aspiración e impulsión, incluyendo las pérdidas secundarias, es de 10 m.

Calcular:

- El caudal de la bomba.
- La diferencia de cotas entre los niveles de agua en los depósitos de succión e impulsión, si ambos están abiertos a la atmósfera.

Solución:



1. Cálculo del Desnivel entre los Tanques, H.

   Planteando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y C, sobre la superficie libre del agua, en sendos tanques, se tiene:

$$z_A + \frac{\cancelto{0}{p_A}}{\gamma} + \frac{\cancelto{0}{V_A}^2}{2\cdot g} - h_{asp} - h_{imp} + H_u = z_C + \frac{\cancelto{0}{p_C}}{\gamma} + \frac{\cancelto{0}{V_C}^2}{2\cdot g}$$

$$\therefore \quad z_C - z_A = H_u - h_{asp} - h_{imp}$$

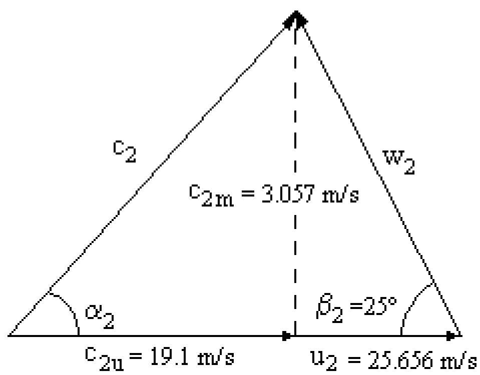
   Luego,

$$H = H_u - h_{totales} = 40\,\text{m} - 10\,\text{m} = 30\,\text{m}$$

2. Cálculo del Caudal Bombeado, Q.

$$u_2 = \frac{\pi \cdot D_2 \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot (0.35\,\text{m}) \cdot (1400)}{60\,\text{s}} = 25.656\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Del triángulo de velocidades a la salida, se tiene:



TRIÁNGULO A LA SALIDA

$$\tan\beta_2 = \frac{c_{2m}}{u_2 - c_{2u}} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad c_{2m} = (u_2 - c_{2u})\tan\beta_2 \qquad (2)$$

Además,

$$\eta_h = \frac{H_u}{H_t} = \frac{g \cdot H_u}{u_2 \cdot c_{2u} - u_1 \cdot c_{1u}} \qquad (3)$$

Suponiendo entrada radial $(\alpha_1 = 90^o)$, $c_{1u} = 0$, entonces

$$\eta_h = \frac{g \cdot H_u}{u_2 \cdot c_{2u}} \qquad (4)$$

de donde,

$$c_{2u} = \frac{g \cdot H_u}{\eta_h \cdot u_2} = \frac{\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)\cdot(40\,m)}{0.8\left(25.656\,\frac{m}{s}\right)} = 19.1\frac{m}{s}$$

Reemplazando éste y demás valores numéricos en (2), resulta:

$$c_{2m} = (25.656 - 19.1)\frac{m}{s}\cdot\tan 25^o = 3.057\ \frac{m}{s}$$

Finalmente,

$$Q = \pi \cdot D_2 \cdot b_2 \cdot c_{2m}$$

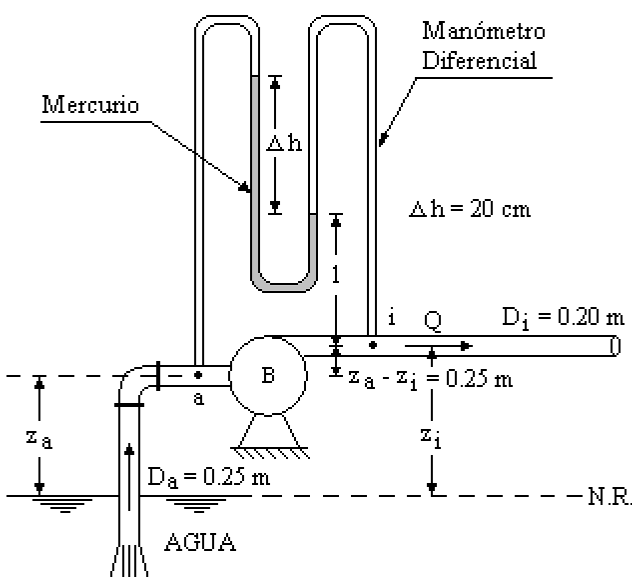
$$Q = \pi \cdot (0.35\,m) \cdot (0.025\,m) \cdot \left(3.057\,\frac{m}{s}\right) = 0.084\,\frac{m^3}{s} = 84\,\frac{l}{s}$$

Problema No. 7

Entre las bridas de entrada y de salida de una bomba, se coloca un manómetro en U, de mercurio. La bomba da un caudal de agua de 300 m^3/h. Las tuberías de aspiración y de impulsión son de 250 mm y 200 mm de diámetro, respectivamente. El eje de la bomba es horizontal y entre los ejes de las tuberías, en las tomas manométricas de aspiración e impulsión, hay un desnivel de 35 cm. El manómetro indica un incremento de altura de mercurio de 20 cm (más elevada en la rama unida al tubo de aspiración).

Calcular la potencia útil que da la bomba.

Solución:



Aplicando Bernoulli entre las bridas de aspiración (a) y de impulsión (i), resulta:

$$z_a + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_a^2}{2 \cdot g} + H_u = z_i + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{v_i^2}{2 \cdot g} \qquad (1)$$

de donde,

$$H_u = \left(z_i + \frac{p_i}{\gamma} \right) - \left(z_a + \frac{p_a}{\gamma} \right) + \frac{v_i^2 - v_a^2}{2 \cdot g} \qquad (2)$$

$$H_u = \left(z_i + \frac{p_i}{\gamma} \right) - \left(z_a + \frac{p_a}{\gamma} \right) + \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} \left(\frac{1}{D_i^4} - \frac{1}{D_a^4} \right) \qquad (3)$$

Además, aplicando manometría entre (a) e (i), resulta:

$$p_a - \gamma \cdot \left[(z_i - z_a) + l + \Delta h \right] + \gamma_m \cdot \Delta h + \gamma \cdot l = p_i \qquad (4)$$

$$\frac{p_a}{\gamma} - z_i + z_a - \cancel{l} - \Delta h + \frac{\gamma_m}{\gamma} \cdot \Delta h + \cancel{l} = \frac{p_i}{\gamma}$$

Agrupando términos correspondientes y reduciendo términos comunes, se tiene:

$$\left(z_i + \frac{p_i}{\gamma} \right) - \left(z_a + \frac{p_a}{\gamma} \right) = \Delta h \cdot \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) \qquad (5)$$

Llevando el resultado de (5) en (3), queda:

$$H_u = \Delta h \cdot \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) + \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} \left(\frac{1}{D_i^4} - \frac{1}{D_a^4} \right) \qquad (6)$$

Sustituyendo valores numéricos en (6), se tiene:

$$H_u = 0.2\,\mathrm{m} \cdot \left(\frac{13600}{1000} - 1 \right) + \frac{8 \cdot \left(\frac{300}{3600} \right)^2 \frac{\mathrm{m}^6}{\mathrm{s}^2}}{\pi^2 \cdot \left(9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right)} \left(\frac{1}{0.2^4} - \frac{1}{0.25^4} \right) \cdot \frac{1}{\mathrm{m}^4}$$

$$H_u = 2.520\,\mathrm{m} + 0.212\,\mathrm{m} = 2.732\,\mathrm{m}$$

Finalmente,

$$P_u = \gamma \cdot Q \cdot H_u$$

$$P_u = 1000\,\frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \cdot \left(\frac{300}{3600}\right)\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot (2.732\,\text{m})$$

$$P_u = 227.67\,\frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$P_u = 227.67 \times 9.8\,\text{W} = 2231.17\,\text{W}$$

$$P_u = 2.23\,\text{kW}$$

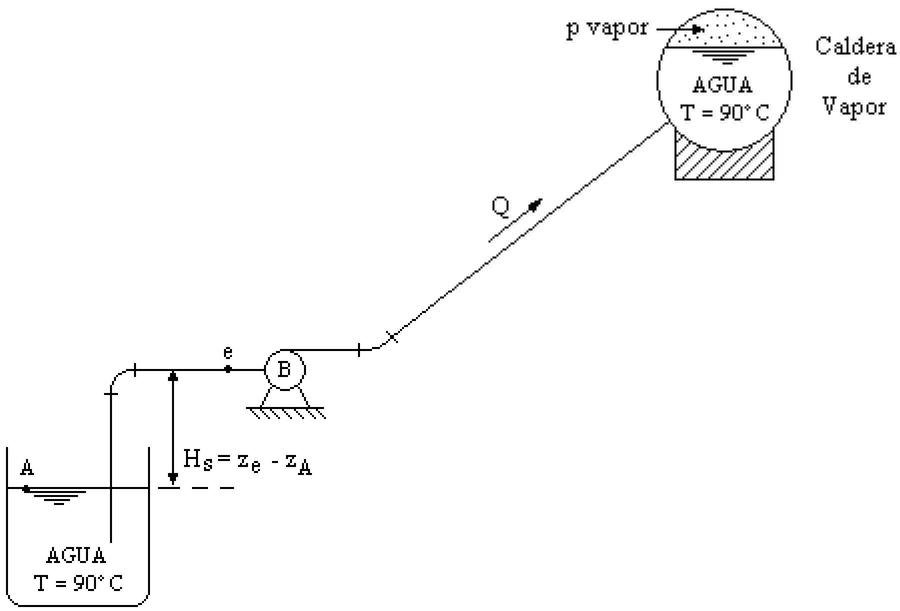
Problema No. 8

Una bomba centrífuga para alimentación de una caldera de vapor, que desarrolla una altura efectiva de 80 m, bombea agua a 90°C, desde un depósito de aspiración, abierto a la atmósfera, hasta la caldera. La pérdida de carga en la tubería de succión es de 0.5 m. La presión barométrica es de 725 Torr. El caudal de la bomba es 0.25 m^3/s: El diámetro de la tubería de aspiración es de 400 mm y el coeficiente de cavitación de la bomba, $\sigma = 0.1$.

- Esquematice la instalación, indicando la cota del eje de la bomba con respecto al nivel superficial en el pozo de succión.
- ¿A qué altura geodésica máxima se podrá colocar la bomba?.
- Si la presión de la caldera es 8,2 bar. y el eje de la bomba se encuentra 6 m por debajo del nivel del agua en la caldera, ¿cuáles son las pérdidas totales en la impulsión de la bomba?.

Solución:

1. Esquema de la Instalación de Bombeo.



A la temperatura T = 90°C, de tablas, se obtiene:

$$\gamma_{agua} = 965 \frac{kgf}{m^3}$$

$$p_{vapor} = 70.11\,kPa = 7154 \frac{kgf}{m^2} \text{ (absoluta).}$$

$$p_{atmosferica} = 725\,Torr = 725 \text{ mm Hg} = 0.725\,m \cdot \left(13600 \frac{kgf}{m^3}\right)$$

$$p_{atmosferica} = 9860 \frac{kgf}{m^2}$$

2. Cálculo de la Altura de Succión Máxima, $H_{s\ máx}$.

$$H_{s\,max} = \frac{p_A - p_V}{\gamma} - h_{A-e} - \Delta h \qquad (1)$$

$$H_{s\,max} = \frac{p_{atmosferica} - p_V}{\gamma} - h_{A-e} - \sigma \cdot H_u \qquad (2)$$

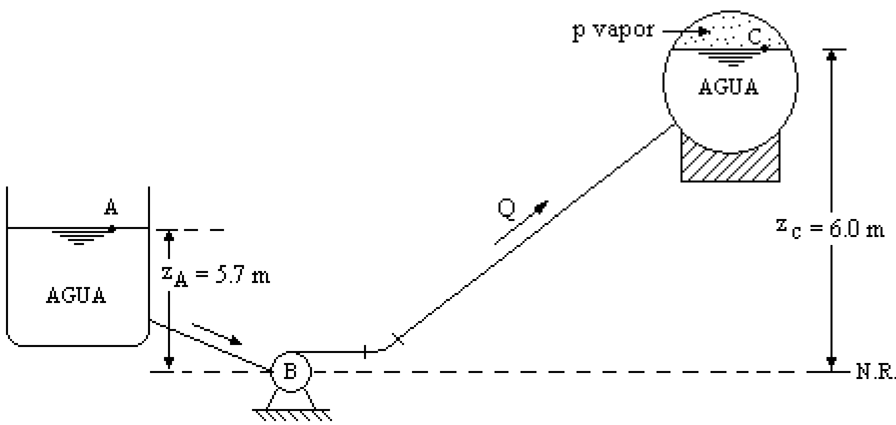
$$H_{s\,max} = \frac{(9860 - 7154)\dfrac{kgf}{m^2}}{965\,\dfrac{kgf}{m^3}} - 0.5\,m - 0.1\cdot(80\,m)$$

$$H_{s\,max} = -5.7\ \ m$$

La bomba operará en carga, es decir, con su eje situado a 5.7 m, máximo, por debajo de la superficie libre de agua en el tanque de succión.

3. Cálculo de las Pérdidas Totales en la Tubería de Impulsión, $h_{T\,imp.}$.

Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre A y C, puntos situados sobre la superficie libre de agua, en sendos depósitos, se tiene:



$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \overset{0}{\frac{\cancel{v}_A^{\,2}}{2\cdot g}} - H_{T\,asp.} + H_u - H_{T\,imp} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \overset{0}{\frac{\cancel{v}_C^{\,2}}{2\cdot g}} \qquad (3)$$

en donde se han considerado presiones absolutas. Y despreciando las diferencias de velocidades. Luego,

$$H_{T\,imp.} = H_u - h_{T\,asp} + \frac{p_A - p_C}{\gamma} - (z_C - z_A) \qquad (4)$$

$$p_A = 8.2\,\text{bar} \cdot \frac{1.02\,\dfrac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}}{\text{bar}} \cdot \frac{10^4\,\dfrac{\text{kgf}}{\text{m}^2}}{\dfrac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}} = 83640\,\frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$$

Reemplazando valores numéricos en (4), resulta:

$$H_{T\,imp.} = 80\,\text{m} - 0.5\,\text{m} + \frac{(9860 - 83640)\dfrac{\text{kgf}}{\text{m}^2}}{965\,\dfrac{\text{kgf}}{\text{m}^3}} - (6 - 5.7)\,\text{m} = 2.744\,\text{m}$$

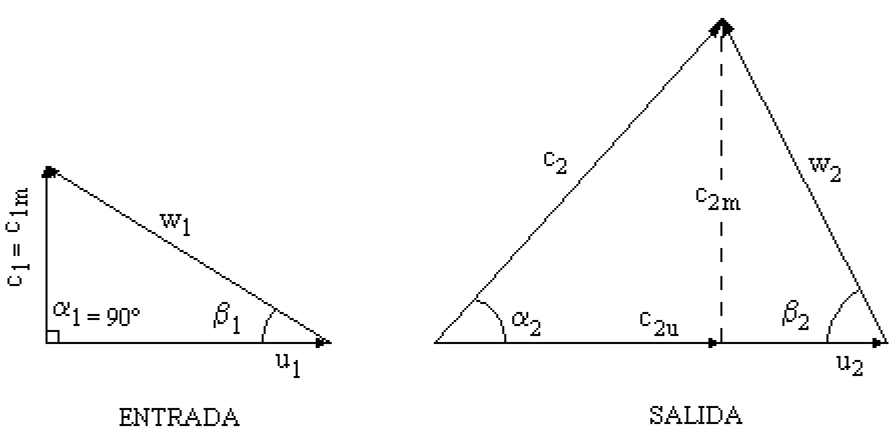
Problema No. 9

Una bomba centrífuga opera a 150 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y necesita 294 h.p. Determine la descarga a través de la bomba, si la velocidad absoluta del agua a la entrada no tiene componente tangencial. D_2 = 16", b_2 = 1" y $ß_2$ = 45°. Además, $\eta_{total} = 1$

¿Por qué existen dos posibles soluciones y por qué la bomba no operaría eficientemente en una de ellas?.

Solución:

Sean los siguientes, los triángulos de velocidades correspondientes a la entrada y a la salida de los álabes del rodete:



$$u_2 = \omega \cdot r_2 = \frac{\omega \cdot D_2}{2} = \left(150 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \cdot \left(\frac{16 \times 0.0254\,\text{m}}{2}\right) = 30.48 \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (1)$$

$$Q = \pi \cdot D_2 \cdot b_2 \cdot c_{2m} \qquad (2)$$

$$\therefore \quad c_{2m} = \frac{Q}{\pi \cdot D_2 \cdot b_2}$$

$$\tan\beta_2 = \frac{c_{2m}}{u_2 - c_{2u}}$$

$$u_2 - c_{2u} = \frac{c_{2m}}{\tan\beta_2} = \frac{c_{2m}}{\tan 45^{\circ}} = c_{2m}$$

$$\therefore \quad c_{2u} = u_2 - c_{2m} \qquad (3)$$

Reemplazando (2) en (3), se tiene:

$$c_{2u} = u_2 - \frac{Q}{\pi \cdot D_2 \cdot b_2} \qquad (4)$$

Por otro lado,

$$P_u = \gamma \cdot Q \cdot H_u \qquad (5)$$

Además, $\eta_{total} = \eta_h = \eta_V = \eta_m = 1$

de donde,

$$\eta_h = \frac{H_u}{H_t} = 1$$

Luego,

$$H_u = H_t = \frac{u_2 \cdot c_{2u}}{g} \qquad (6)$$

Llevando (6) a (5),

$$P_u = \frac{\gamma \cdot Q \cdot u_2 \cdot c_{2u}}{g}$$

$$\therefore \quad \frac{g \cdot P_u}{u_2 \cdot \gamma} = Q \cdot c_{2u} \qquad (7)$$

Trayendo (4) a (7), se obtiene:

$$\frac{g \cdot P_u}{u_2 \cdot \gamma} = Q \cdot \left(u_2 - \frac{Q}{\pi \cdot D_2 \cdot b_2} \right)$$

$$\frac{g \cdot P_u}{u_2 \cdot \gamma} = Q \cdot u_2 - \frac{Q^2}{\pi \cdot D_2 \cdot b_2}$$

o mejor,

$$\left(\frac{1}{\pi \cdot D_2 \cdot b_2} \right) \cdot Q^2 - u_2 \cdot Q + \frac{g \cdot P_u}{\gamma \cdot u_2} = 0 \qquad (8)$$

que es una ecuación cuadrática para Q, con dos raíces o soluciones para el caudal, la cual se resolverá sustituyendo en ella los valores numéricos, así:

$$\frac{Q^2}{\pi \cdot (16 \times 0.0254\,\mathrm{m}) \cdot (1 \times 0.0254\,\mathrm{m})} - \left(30.48\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right) \cdot Q + \frac{\left(9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right) \cdot \left(294 \cdot 76\,\frac{\mathrm{kgf} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right)}{\left(1000\,\frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{m}^3} \right) \cdot \left(30.48\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right)} = 0$$

$$30.8363\,Q^2 - 30.48\,Q + 7.1841 = 0 \qquad (9)$$

ó

$$Q^2 - 0.98445\,Q + 0.232975 = 0 \qquad (10)$$

cuyas soluciones son:

$$Q_1 = 0.60043\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} = 600.43\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$$

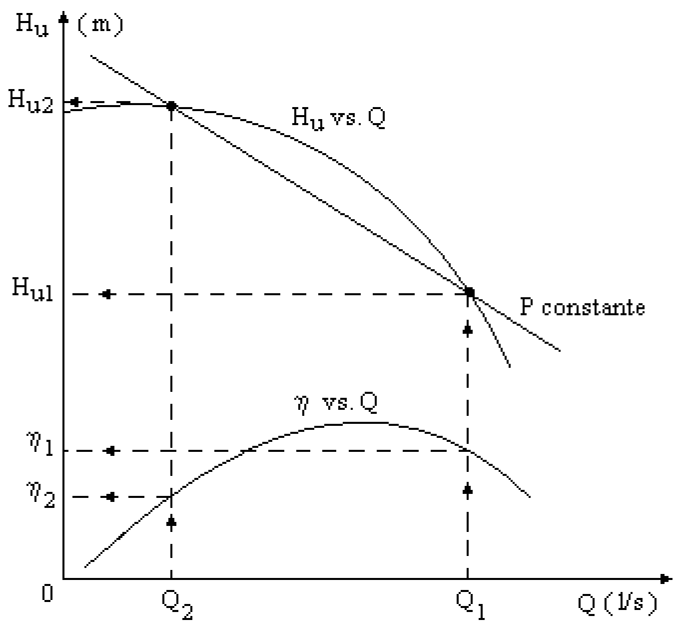
y

$$Q_2 = 0.38801\frac{m^3}{s} = 388.01\frac{l}{s}$$

Existen dos valores posibles para Q, puesto que, dada la forma de la curva H vs. Q, se pueden obtener dos valores de H correspondientes a sendos valores de Q, para un único valor de P, que satisfacen la ecuación

$$P_u = \gamma \cdot Q_1 \cdot H_{u1} = \gamma \cdot Q_2 \cdot H_{u2} = \text{constante}$$

de donde se deduce que, para el mayor valor de Q, corresponde el menor valor de H_u, y viceversa. Ello se puede observar en el siguiente esquema:



Además, para la curva η vs. Q, de la misma bomba, se puede observar que existe un valor de Q_2 , cuya eficiencia es menor que la correspondiente a Q_1. La conclusión es que, para el mayor de los dos caudales posibles ($Q = 600.42\ \frac{l}{s}$) se obtiene mejor eficiencia.

Problema No. 10

Una bomba centrífuga que aspira directamente de la atmósfera (p_{atm} = 740 mm Hg) da un caudal de $555\,\frac{l}{s}$, a una altura efectiva de 13.5 m, cuando gira a 730 rpm. El $NPSH_{neces}$ es 3.33 m; la temperatura del agua es 20°C y las pérdidas de carga en el tubo de aspiración ascienden a 0.54 m.

Calcular:

- La altura máxima de aspiración de esta bomba.
- El número específico de revoluciones.

Solución:

1. Cálculo de la Altura Máxima de Succión, $H_{s\,máx}$.

$$H_{s\,máx} = \frac{p_{atmosférica} - p_v}{\gamma} - h_{asp} - NPSH_{necesario} \qquad (1)$$

A T = 20°C, p_v = 2337 Pa = $238.47\ \frac{kgf}{m^2}$ (abs.) y $\gamma = 998\,\frac{kgf}{m^3}$

Reemplazando valores numéricos en (1), resulta:

$$H_{s\,máx} = \frac{(0.74m)\cdot\left(13600\,\frac{kgf}{m^3}\right) - 238.47\,\frac{kgf}{m^2}}{998\,\frac{kgf}{m^3}} - 0.54m - 3.33m$$

$$H_{s\,máx} = 5.975\,m$$

2. Cálculo del Número Específico de Revoluciones, n_s

$$n_s = 3.65\cdot n\cdot Q^{1/2}\cdot H^{-3/4}$$

$$n_s = 3.65\cdot(730\,rpm)\cdot\left(0.555\,\frac{m^3}{s}\right)^{1/2}\cdot(13.5\,m)^{-3/4} = 281.85$$

Problema No. 11

Una bomba centrífuga cuyo coeficiente de cavitación $\sigma = 0.11$, desarrolla una altura útil de 90 m. La presión barométrica del lugar es 1.0 bar. La presión de saturación del vapor de líquido bombeado ($\delta = 1.4$), para la temperatura de funcionamiento, es 0.03 bar (abs.). Las pérdidas de carga en la tubería de aspiración ascienden a 1.5 m.

Calcular la altura máxima permisible a la cual puede colocarse el eje de la bomba, con respecto al nivel del agua en el depósito de aspiración.

Solución:

$$H_{s\,máx} = \frac{p_{atm} - p_v}{\gamma} - h_{asp} - \Delta h$$

$$H_{s\,máx} = \frac{p_{atm} - p_v}{\gamma} - h_{asp} - \sigma \cdot H_u$$

$$H_{s\,máx} = \frac{(1.0 - 0.03) \cdot \left(1.02 \text{ x } 10^4\right) \dfrac{\text{kgf}}{\text{m}^2}}{1400 \dfrac{\text{kgf}}{\text{m}^3}} - 1.5\,\text{m} - 0.11 \cdot (90\,\text{m})$$

$$H_{s\,máx} = -\ 4.33\ \text{m}$$

La bomba operará en carga, es decir, su eje estará 4.33m, como máximo, por debajo de la superficie libre de agua en el tanque de succión.

Problema No. 12

Una bomba centrífuga de 0.5 m de diámetro de impulsor, eleva 20 $\frac{l}{s}$ de agua a una altura de 18 m, con una potencia absorbida de 4 kW, cuando opera a 1170 rpm, en su máximo rendimiento. Si las relaciones de alturas de elevación y de diámetros de rodetes, con una bomba modelo, son 4/1 y 5/1, respectivamente, a iguales rendimientos, ¿cuál es el número específico de revoluciones del modelo?.

Solución.

Para que exista semejanza dinámica entre bombas rotodinámicas, debe cumplirse que:

$n_{s\,p} = n_{s\,m}$ (1)

En general, $n_s = n \cdot P^{1/2} \cdot H^{-5/4}$ (2)

Con n (rpm); P (c.v.) y H (m)

Además, se conocen los siguientes datos:

$$D_p = 0.5\,\mathrm{m}\,;\;\; Q_p = 20\,\frac{l}{s}\;;\;\; H_p = 18\,\mathrm{m}\;;\;\; P_{a\,p} = 4\;\mathrm{kW} = 4000\,\mathrm{W}\,;\;\; n_p = 1170\;\mathrm{rpm}$$

$$\eta_p = \eta_m\,;\qquad \frac{H_p}{H_m} = \frac{4}{1};\quad \frac{D_p}{D_m} = \frac{5}{1}$$

Existen dos maneras de resolver este problema, una más rápida que la otra, y se desarrollan a continuación:

- Primera Solución:

  Hallando $n_{s\,p}$, con los datos correspondientes al prototipo, mediante la ecuación (1) se obtiene indirectamente $n_{s\,m}$.

$$n_{s\,p} = n_{s\,m} = n_p \cdot P_p^{1/2} \cdot H_p^{-5/4}$$

$$1\mathrm{W} \equiv \frac{1\,\mathrm{c.v.}}{9.81 \times 75} \equiv 1.359157322 \times 10^{-3}\,\mathrm{c.v.}$$

$$P_{a\,p} = 4000\,\mathrm{W} \cdot \frac{1.359157322 \times 10^{-3}\;\mathrm{c.v}}{1\mathrm{W}} = 5.43662929\,\mathrm{c.v.}$$

$$n_{s\,p} = n_{s\,m} = 1170\,\mathrm{rpm} \cdot (5.43662929\,\mathrm{c.v.})^{1/2} \cdot (18\mathrm{m})^{-5/4}$$

$$n_{s\,p} = n_{s\,m} = 73.58$$

- Segunda Solución:

Se obtendrá $n_{s\,m}$ reemplazando en (2) los parámetros correspondientes al modelo, así:

De la relación de cabezas se obtiene n_m:

$$\frac{H_p}{H_m} = \left(\frac{n_p}{n_m}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_p}{D_m}\right)^2 \qquad (3)$$

$$\frac{n_p}{n_m} = \left(\frac{D_m}{D_p}\right) \cdot \sqrt{\frac{H_m}{H_p}}$$

$$\therefore \quad n_s = \left(\frac{D_p}{D_m}\right) \cdot \sqrt{\frac{H_m}{H_p}} \cdot n_p \qquad (4)$$

$$n_m = 5 \cdot \sqrt{1/4} \cdot (1170\,\text{rpm}) = 2925\ \text{rpm} \qquad (5)$$

Ahora, de la relación de potencias, se calcula P_m:

$$\frac{P_p}{P_m} = \left(\frac{n_p}{n_m}\right)^3 \cdot \left(\frac{D_p}{D_m}\right)^5$$

$$\therefore \quad P_m = \left(\frac{n_m}{n_p}\right)^3 \cdot \left(\frac{D_m}{D_p}\right)^5 \cdot P_p$$

$$P_m = \left(\frac{2925}{1170}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot (5.43662929\ \text{c.v.})$$

$$P_m = 2.718314644 \times 10^{-2}\ \text{c.v.}$$

De la relación de alturas, se obtiene H_m:

$$\frac{H_p}{H_m} = 4$$

$$\therefore \quad H_m = \frac{H_p}{4} = \frac{18\,\text{m}}{4} = 4.5\,\text{m}$$

Finalmente, se obtiene $n_{s\,m}$ reemplazando los parámetros correspondientes al modelo, en la ecuación (2):

$$n_{s\,m} = n_m \cdot P_m^{1/2} \cdot H_m^{-5/4}$$

$$n_{s\,m} = (2925\,\text{rpm}) \cdot \sqrt{2.71831464 \times 10^{-2}\ \text{c.v.}} \cdot (4.5\,\text{m})^{-5/4}$$

$$n_{sm} = 73.58$$

con lo cual se comprueba que $n_{s\,p} = n_{s\,m}$

Problema No. 13

Una bomba de proceso, de succión única e impulsor de 8" de diámetro, bombea 350 US gpm a 200 pie de cabeza, rotando a 3500 rpm, en su punto de mejor eficiencia. La potencia necesaria es de 26 h.p. El trabajo cambia ligeramente y se sugiere cambiar el diámetro del rotor a 7".

Determinar las nuevas cabezas, descarga y potencia necesaria, en el punto de mejor eficiencia.

Solución:

Se trata de un caso de similitud en bombas geométricamente semejantes, de diámetro de rotor diferentes y girando a igual número de revoluciones.

Prototipo	Modelo
D_1 = 8"	D_2 = 7"
Q_1 = 350 US gpm	$n_2 = n_1$ = 3500 rpm
H_1 = 200 pie	Q_2 = ?
P_1 = 26 h.p.	H_2 = ?
n_1 = 3500 rpm	P_2 = ?

De la primera ley de semejanza, se conoce lo siguiente:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3$$

$$Q_2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \cdot Q_1 = \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot (350\ \text{US gpm}) = 234.47\ \text{US gpm}$$

De la segunda ley, se tiene:

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

$$H_2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \cdot H_1 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot (200\ \text{pie}) = 153.13\ \text{pie}$$

Y de la tercera ley, se tiene:

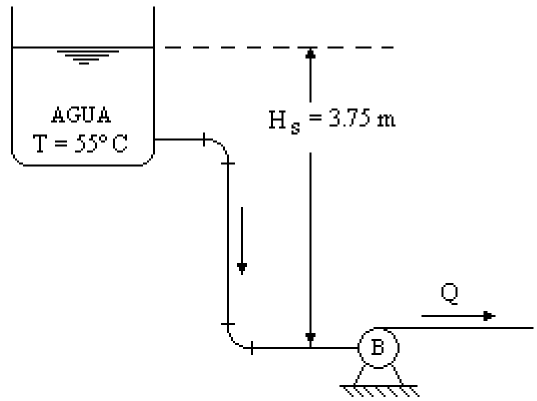
$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^5$$

$$\therefore \quad P_2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 \cdot P_1 = \left(\frac{7}{8}\right)^5 \cdot (26\ \text{h.p.}) = 13.34\ \text{h.p.}$$

Problema No. 14

Debe bombearse agua a 55°C, desde un recipiente elevado, conectado a la atmósfera, en un lugar ubicado a 1048 m sobre el nivel del mar (p_{atm} = 9103.85 kgf/m^2). Las pérdidas de carga en la tubería de succión se han estimado en 0.55 m. Si el eje de la bomba se encuentra 3.75 m por debajo de la superficie de agua en el tanque de alimentación, ¿cuál es el NPSH disponible?

Solución:



Para $T = 55^\circ C,\ p_{vapor} = 1560 \frac{kgf}{m^2} (abs)$

y $\gamma = 986 \frac{kgf}{m^3}$

$$NPSH_{disp} = \frac{(p_A - p_v)}{\gamma} + H_s - h_{succión} \qquad \text{(succión negativa, } H_s < 0)$$

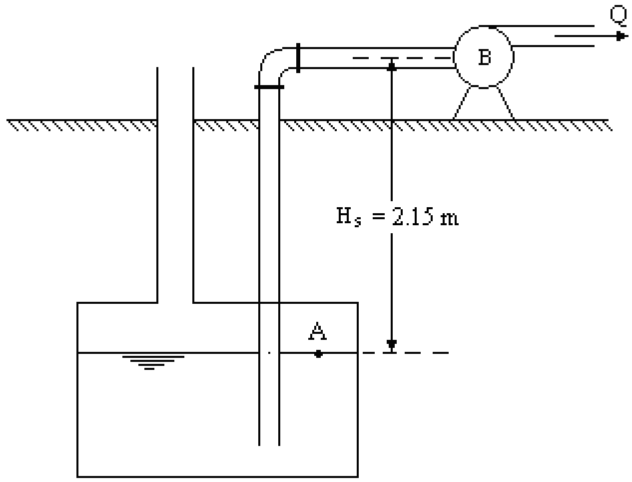
$$NPSH_{disp} = \frac{(9103.85 - 1560.66)\frac{kgf}{m^2}}{986 \frac{kgf}{m^3}} + 3.75m - 0.55m$$

$$NPSH_{disp} = 10.85\,m$$

Problema No. 15

Una bomba situada a nivel del mar debe elevar agua a 15°C, desde un tanque subterráneo conectado a la atmósfera. La superficie de agua en el tanque de succión está localizada 2.15 m por debajo del eje de la bomba. Las pérdidas totales de carga en la tubería de succión son equivalentes a 0.55 m de columna de agua. ¿Cuál es el NPSH disponible?.

Solución:



Para $T = 15^o C$, $p_{vapor} = 183 \dfrac{kgf}{m^2}$ (abs).

$$\gamma = 999.2 \frac{kgf}{m^3}$$

A nivel del mar, $p_{atmosférica} = 10336 \dfrac{kgf}{m^2}$

$$NPSH_{disp} = \frac{(p_A - p_v)}{\gamma} + H_s - h_{succión}$$

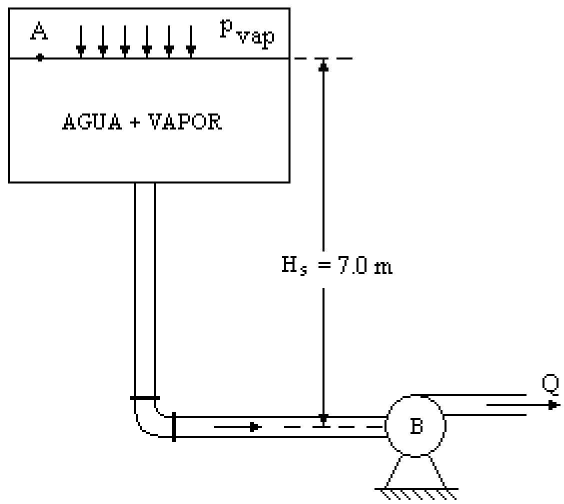
$$NPSH_{disp} = \frac{(10336 - 183)\dfrac{kgf}{m^2}}{999.2 \dfrac{kgf}{m^3}} - 2.15\,m - 0.55\,m$$

$$NPSH_{disp} = 7.46\,m$$

Problema No. 16

Se emplea una bomba para elevar agua desde un tanque que recibe una mezcla de agua y vapor de una caldera, a una temperatura de 115°C. El nivel de líquido en dicho tanque está 7 m por encima del eje de la bomba, y las pérdidas de carga en la tubería de succión son equivalentes a 0.46 m de agua caliente. ¿Cuál es el $NPSH_{disponible}$ de la instalación de bombeo, si ésta se encuentra a 578 m sobre el nivel del mar ($p_{atmosféric} = 9659 \frac{kgf}{m^2}$). Presión de vapor, a T = 115°C, $p_{vapor} = 17675 \frac{kgf}{m^2}$ (abs.)

Solución:



$$NPSH_{disp} = \frac{(p_A - p_v)}{\gamma} + H_s - h_{succión}$$ (succión negativa, Hs < 0)

$$NPSH_{disp} = \frac{(\cancel{p_v} - \cancel{p_v})}{\gamma} + H_s - h_{succión}$$

$$NPSH_{disp} = H_s - h_{succión}$$

$$NPSH_{disp} = 7.0\,m - 0.46\,m = 6.54\,m$$

Problema No. 17

Se necesita una bomba para elevar 10000 gpm de agua a una cabeza de 25 pie. Una bomba similar, con un impulsor de 36" de diámetro, descarga 2500 gpm a una cabeza de 120 pie, cuando gira a 800 rpm.

Determinar el diámetro necesario del impulsor y la velocidad de rotación para la bomba, a la misma eficiencia.

Solución.

$\eta_{1\,total} = \eta_{2\,total}$

BOMBA No. 1 Prototipo	BOMBA No. 2 Modelo
D_1 = ? n_1 = ? Q_1 = 10000 gpm H_1 = 25 pie	D_2 = 36" n_2 = 800 rpm Q_2 = 2500 gpm H_2 = 120 pie

De las leyes de similitud de bombas, se tiene:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \cdot \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 \qquad (1)$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \qquad (2)$$

Además,

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \qquad (3)$$

Llevando (2) a (3), resulta:

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^6 \cdot \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \sqrt[4]{\left(\frac{H_1}{H_2}\right) \cdot \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2}$$

Luego,

$$D_1 = \sqrt[4]{\left(\frac{H_2}{H_1}\right) \cdot \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2} \cdot D_2$$

Entonces,

$$D_1 = \sqrt[4]{\left(\frac{120}{25}\right) \cdot \left(\frac{10000}{2500}\right)^2} \cdot (36\ \text{pulg.})$$

$$D_1 = 106.57\ \text{pulg.} = 8.88\ \text{pie} \approx 9.0\ \text{pie} \qquad (4)$$

Finalmente, reemplazando (4) en (2), resulta:

$$n_1 = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \cdot n_2$$

Luego,

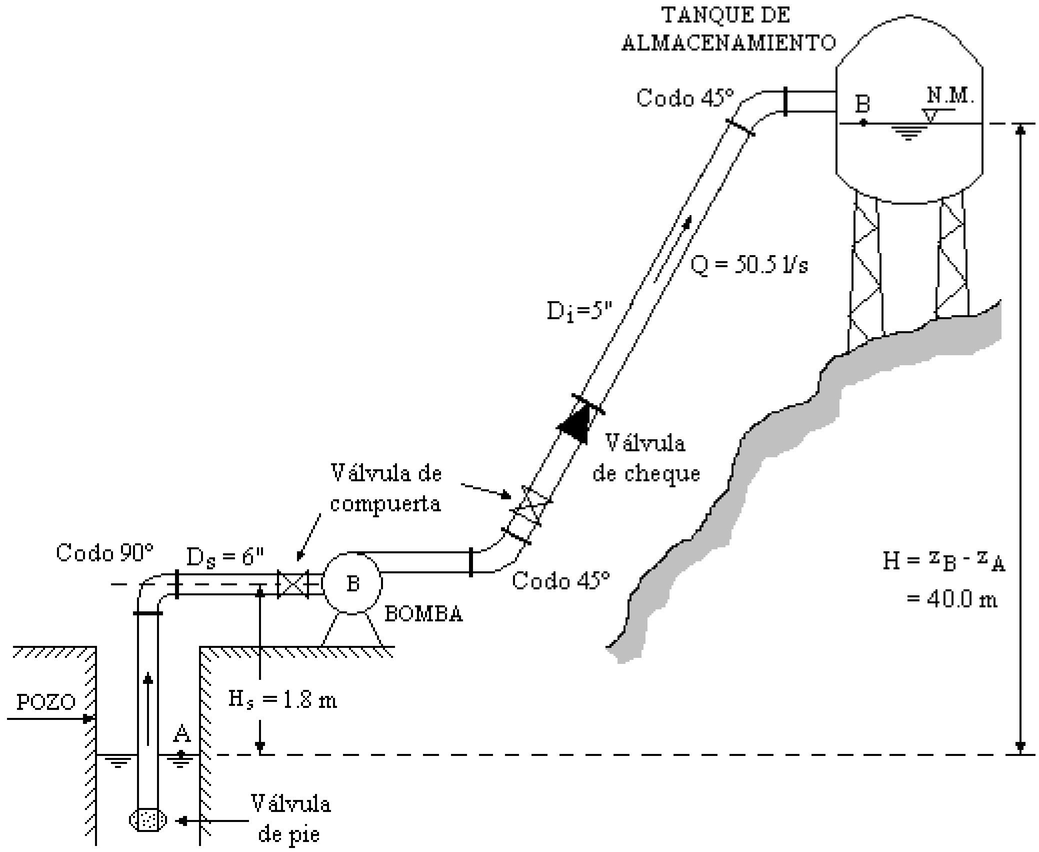
$$n_1 = \left(\frac{10000}{2500}\right) \cdot \left(\frac{36}{106.57}\right) \cdot (800\ \text{rpm})$$

$$n_1 = 123.35\ \text{rpm}$$

Problema No. 18

Para abastecer de agua a una comunidad rural, situada a 1500 m sobre el nivel del mar, se ha construido un pozo cuyo nivel medio de agua se encuentra a 40 m por debajo del correspondiente a un tanque de almacenamiento, como se muestra en la figura. Se instalará un sistema de bombeo que, dada las necesidades de consumo, eleve 50.5 $\frac{l}{s}$ y opere 6 horas diariamente. Las tuberías de succión e impulsión serán de hierro galvanizado (C =100), y los accesorios requeridos en la instalación se indican en la figura. Se instalará una bomba centrifuga con motor de velocidad variable, cuyas especificaciones se desean conocer, para lo cual se pide seleccionar una bomba apropiada, y calcular:

- Altura dinámica de la bomba, H_B.
- Potencia útil de la bomba, $P_{u.}$
- Potencia requerida (potencia absorbida) por la bomba, P_a, si se sabe que la eficiencia de la bomba es del 68%.
- El $NPSH_{disonible}$ de la bomba.
- El $NPSH_{requerido}$ de la bomba.
- La altura de succión máxima de la bomba.



Solución:

1. Cálculo de la altura Dinámica de la bomba, H_B.

   Aplicando Bernoulli entre los puntos A y B, situados en la superficie libre del agua en sendos tanques, se tiene:

$$z_A + \frac{\cancel{p_A}}{\gamma} + \frac{\overset{0}{\cancel{v_A}}^2}{2 \cdot g} - h_{Ts} - h_{Ti} + H_B = z_B + \frac{\cancel{p_B}}{\gamma} + \frac{\overset{0}{\cancel{v_B}}^2}{2 \cdot g} \qquad (1)$$

   de donde,

$$H_B = (z_B - z_A) + (h_{Ts} + h_{Ti}) \qquad (2)$$

   En la cual $(z_B - z_A)$ es la altura estática a vencer por parte de la bomba. h_{Ts} y h_{Ti} son las pérdidas de carga totales, por fricción y por accesorios, en las tuberías de succión y de impulsión, respectivamente.

1. Cálculo de las Pérdidas de Carga Totales, h_T

1.1.1. Pérdidas en la Tubería de Succión, $h_{T\,s}$

Se empleará la formula de Hazen-Williams, que expresa:

$$V = 0.355 \cdot C \cdot D^{0.63} \cdot J^{0.54} \tag{3}$$

Por continuidad,

$$Q = V \cdot A = 0.355 \cdot C \cdot D^{0.63} \cdot \left(\frac{h_f}{L}\right)^{0.54} \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4}\right)$$

de donde,

$$h_f = \left|\frac{3.5866}{C \cdot D^{2.63}}\right|^{1.851} \cdot L \cdot Q^{1.851} \tag{4}$$

Para considerar las pérdidas locales, debidas a válvulas y accesorios, se empleará el método de las longitudes equivalentes:

VÁLVULAS/ACCESORIO	LONGITUD VIRTUAL EQUIVALENTE (m)
Válvula de pie con rejilla (D = 6”)	39.0
Codo 90º (radio medio) (D = 6”)	6.7
Válvula de compuerta abierta (D = 6”)	1.7
Longitud virtual equivalente, $L_{equivalente}$	47.4
Longitud real de la tubería de succión, L	3.0
Longitud total, $L_T = L_{equivalente} + L$	50.4

Reemplazando valores numéricos en (4):

$$h_{T\,s} = \left[\frac{3.5866}{100 \cdot (6 \times 0.0254)^{2.63}} \right]^{1.851} \cdot (50.4) \cdot (0.0505)^{1.851} \, m$$

$$h_{T\,s} = 4.02 \, m$$

1.1.2. Pérdidas en la Tubería de Impulsión, $h_{T\,i}$

VÁLVULAS/ACCESORIO	LONGITUD VIRTUAL EQUIVALENTE (m)
Válvula de compuerta abierta (D = 5”)	0.9
2 Codos de 45º (D = 5”) (*1.9 m)	3.8
1 Válvula de retención (tipo pesada) (D = 5”)	16.1
1 Salida de la tubería (D = 5”)	4.0
Longitud virtual equivalente, $L_{equivalente}$	24.8
Longitud real de la tubería de impulsión, L	127.0
Longitud total, $L_T = L_{equivalente} + L$	151.8

$$h_{T\,i} = \left[\frac{3.5866}{100 \cdot (5 \times 0.0254)^{2.63}} \right]^{1.851} \cdot (151.8) \cdot (0.0505)^{1.851} \, m$$

$$h_{T\,i} = 29.42 \, m$$

Reemplazando en la ecuación (2), se tiene:

$$H_B = 40 \, m + 4.02 \, m + 29.42 \, m$$

$$H_B = 73.44 \, m$$

2. Cálculo de la Potencia Útil de la bomba. P_u

$$P_u = \gamma \cdot Q \cdot H_u = \gamma \cdot Q \cdot H_B$$

$$P_u = 1000\,\frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \cdot \left(0.0505\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right) \cdot (73.44\,\text{m})$$

$$P_u = 3708.72\,\frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{s}} = \frac{3708.72}{76}\,\text{h.p.}$$

$$P_u = 48.8\,\text{h.p.}$$

3. Cálculo de la Potencia Requerida por la bomba, $P_{requerida}$

A la potencia requerida se le llama también potencia absorbida en el eje, y se le denota por P_a.

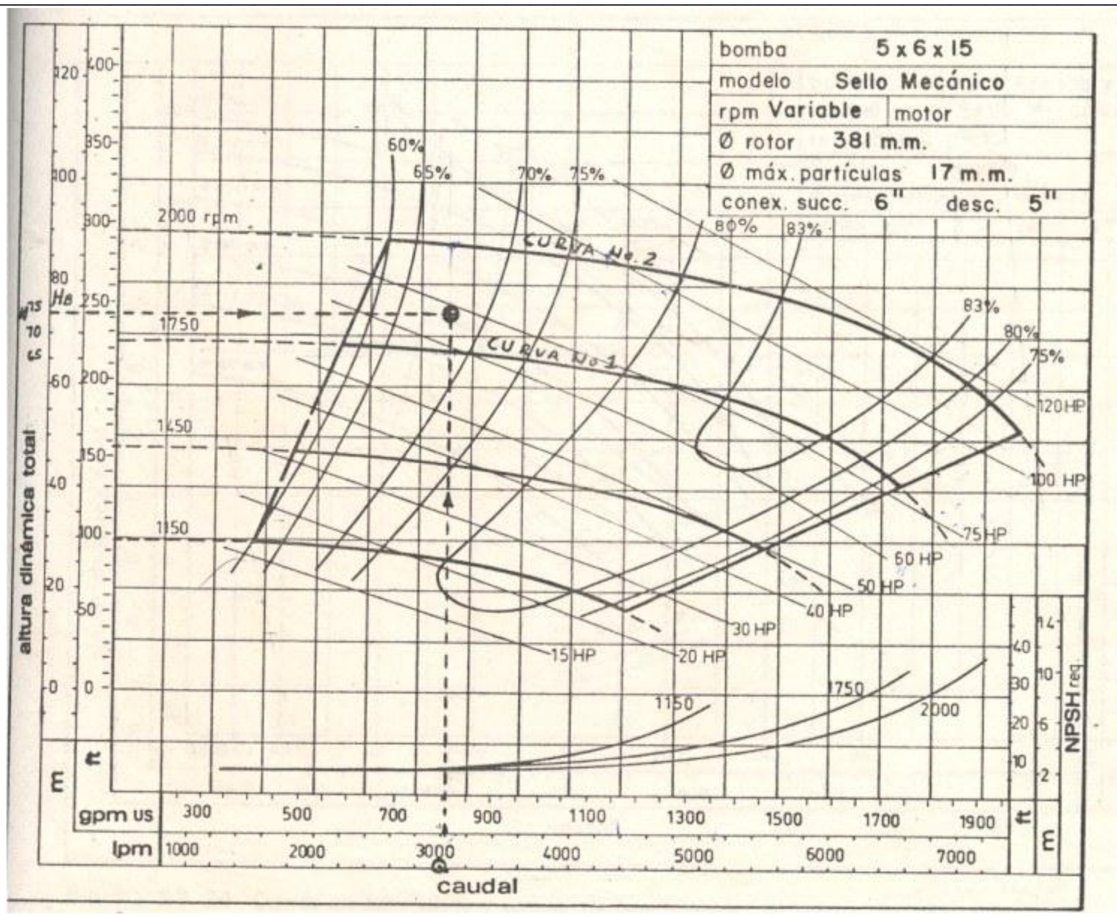
De la expresión para la eficiencia total se tiene:

$$\eta_{bomba} = \frac{P_u}{P_a} \qquad (5)$$

$$P_a = \frac{P_u}{\eta_{bomba}} = \frac{48.8\,\text{h.p.}}{0.68} = 71.76\,\text{h.p.}$$

4. Selección de la Bomba

Para elegir la bomba más apropiada a las condiciones dadas del problema, se utilizará la siguiente gráfica suministrada por el fabricante de las bombas centrifugas. Para ello, se entrará a dicha figura con los valores de $Q = 50.5\,\frac{\text{l}}{\text{s}} = 3030\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$ y $H_B = 73.44\,\text{m}$.



En dicha figura se observa que la bomba que cumple con estas exigencias quedaría en una situación intermedia entre las bombas comerciales No. 1 ($n = 1750$ rpm, $P_{a1} = 75$ h.p.) y la No. 2 (n = 2000 rpm, P_2 = 100 h.p.).

Por tanto, se seleccionará la Bomba No. 2, por tener una potencia mayor que la requerida y por suministrar una cabeza, H, y un caudal, Q, mayores que los exigidos por la situación real. Luego, la bomba seleccionada tiene las siguientes especificaciones:

Bomba: 5 x 6 x 15

Diámetro del rotor: D = 381 mm

Velocidad Variable: $1150 \leq n \leq 2000$ rpm

Potencia nominal: P = 75 h.p.

Conexión a la succión: D_s = 6”

Conexión a la impulsión: D_i = 5”

5. Cálculo del NPSH disponible, $NPSH_{disponible}$

$$NPSH_{disponible} = \frac{p_A - p_v}{\gamma} - H_s - h_{Ts} \qquad (6)$$

$$NPSH_{disponible} = \frac{p_{Atmosférica} - p_v}{\gamma} - H_s - h_{Ts} \qquad (7)$$

A 1500 m sobre el nivel del mar, $p_{atm} = 8.4\ \frac{N}{cm^2} = 0.8571\frac{kgf}{cm^2} = 8571\frac{kgf}{m^2}$

Para una temperatura del agua, T = 20ºC, $p_v = 0.234\frac{N}{cm^2} = 0.0239\frac{kgf}{cm^2} = 239\frac{kgf}{m^2}$

Además, la altura de succión, H_s = 1.8 m.

Reemplazando valores numéricos en la ecuación (7):

$$NPSH_{disponible} = \frac{(8571 - 239)\frac{kgf}{m^2}}{1000\frac{kgf}{m^3}} - 1.8\,m - 4.02\,m$$

$$NPSH_{disponible} = 2.512\,m$$

6. Cálculo del $NPSH_{requerido}$

De la misma gráfica del fabricante, para la bomba seleccionada (n = 2000 rpm), se encuentra que, para $Q = 50.5\frac{l}{s} = 3030\frac{l}{min}$, $NPSH_{requerido} = 2.0\,m$

De esta manera,

$$NPSH_{disponible} = 2.51\,m > NPSH_{requerido} = 2.0\,m$$

7. Cálculo de la Altura Máxima de Succión, $H_{s\,máx}$

$$H_{s\,máx} = \frac{p_A - p_v}{\gamma} - \Delta h - h_{Ts} \qquad (8)$$

$$H_{s\,máx} = \frac{p_{Atmosferica} - p_v}{\gamma} - NPSH_{requerido} - h_{Ts} \qquad (9)$$

Reemplazando valores numéricos en la ecuación (9), se tiene:

$$H_{s\,máx} = \frac{(8571 - 239)\frac{kgf}{m^2}}{1000\frac{kgf}{m^3}} - 2.0\,m - 4.02\,m$$

$$H_{s\,máx} = 2.31\,m$$

Chequeo: $H_{s\,máx} = 2.31\,m > H_s = 1.8\,m$

Problema No. 19

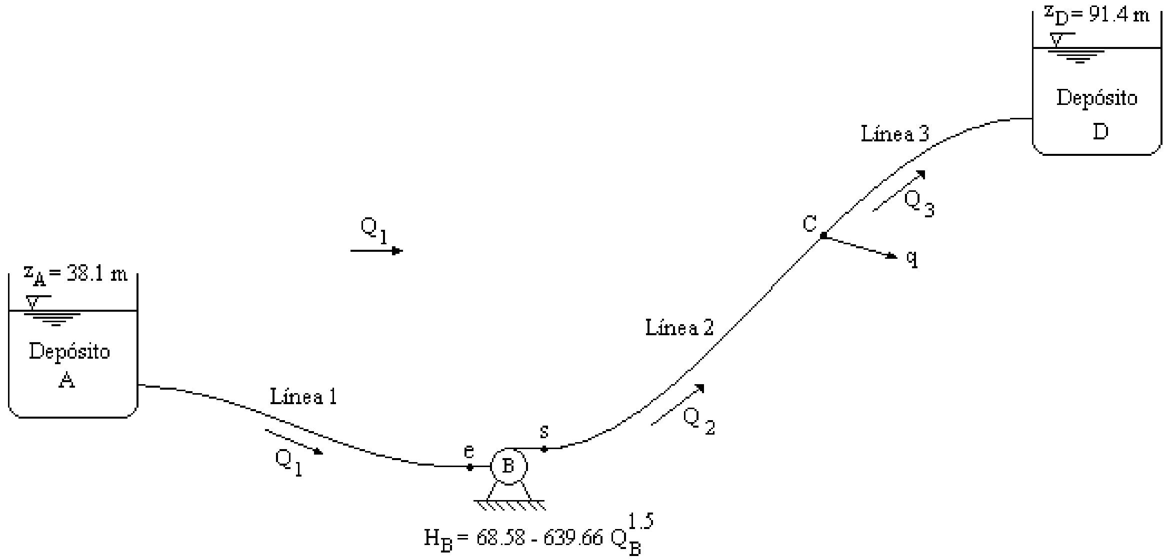
Para el sistema de bombeo mostrado en la figura, calcule la presión en el nodo C, las presiones de succión y descarga de la bomba, el caudal de la línea 3 y la potencia útil de la bomba.

Solución.

$$H_B = 68.58 - 639.66 \cdot Q^{1.5}$$

$$H_B(m); \quad Q\left(\frac{m^3}{s}\right)$$

Línea 1:	L= 67.1 m	D = 406 mm	C = 120
Línea 2:	L = 670.6 m	D = 105 mm	C = 120
Línea 3:	L = 304.8 m	D = 305 mm	C = 120



Potencia útil: $P_u = \gamma \cdot Q_B \cdot H_u$ $\qquad h_f = \left(\dfrac{3.5866}{C \cdot D^{2.63}}\right)^{1.852} \cdot L \cdot Q^{1.852}$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y D, se tiene:

$$z_A - \frac{p_A}{\gamma} + \frac{\alpha \cdot v_A^2}{2 \cdot g} - h_{f\,1} + H_B - h_{f\,2} - h_{f\,3} = z_D + \frac{p_D}{\gamma} + \frac{\alpha \cdot v_D^2}{2 \cdot g}$$

Considerando presiones relativas y despreciando las cabezas de velocidades, y reemplazando los valores numéricos, se tiene:

$$z_A - \left(\frac{3.5866}{C_1 \cdot D_1^{2.63}}\right)^{1.852} \cdot L_1 \cdot Q_1^{1.852} + \left(68.58 - 639.66 \cdot Q_1^{1.5}\right) - \left(\frac{3.5866}{C_2 D_2^{2.63}}\right) \cdot L_2 \cdot Q_2^{1.852} -$$
$$- \left(\frac{3.5866}{C_3 \cdot D_3^{2.63}}\right)^{1.852} \cdot L_3 \cdot Q_3^{1.852} = z_D$$

Por la ecuación de continuidad:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 + q$$

$$z_D - z_A = -\left(\frac{3.5866}{C_1 \cdot D_1^{2.63}}\right)^{1.852} \cdot L_1 \cdot (Q_3 + q)^{1.852} + \left(68.58 - 639.66 \cdot (Q_3 + q)^{1.5}\right) - \left(\frac{3.5866}{C_2 D_2^{2.63}}\right) \cdot L_2 \cdot$$

$$\cdot (Q_3 + q)^{1.852} - \left(\frac{3.5866}{C_3 \cdot D_3^{2.63}}\right)^{1.852} \cdot L_3 \cdot Q_3^{1.852}$$

Agrupando términos y reemplazando valores numéricos, resulta:

$$91.4 - 38.1 = 68.58 \cdot -639.66 \cdot (Q_3 + 0.0212)^{1.5} - \left(\frac{3.5866}{120}\right)^{1.852} \cdot \left[(Q_3 + 0.0212)^{1.852} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \left(\frac{67.1}{0.405^{4.87}} + \frac{670.6}{0.305^{4.87}}\right) + \frac{304.8 \cdot Q_3^{1.852}}{0.305^{4.87}}\right]$$

Organizando se tiene:

$$639.66 \cdot (Q_3 + 0.0212)^{1.5} + 335.226848 \cdot (Q_3 + 0.0212)^{1.852} + 148.6291144 \cdot Q_3^{1.852} - 15.28 = 0$$

$$Q_3 = 0.0501046 \, \frac{m^3}{s}$$

$$Q_3 = 50.1 \, \frac{l}{s}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_B = Q_3 + 0.0212 \, \frac{m^3}{s} = (0.0501046 + 0.0212) \frac{m^3}{s}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_B = 0.0713046 \, \frac{m^3}{s}$$

- Cálculo de la altura útil, $H_u = H_B$

$$H_u = H_B = 68.58 - 639.66 \cdot (0.0713046)^{1.5}$$

$$H_u = 56.4 \, m$$

- Cálculo de la potencia útil de la bomba, P_u

$$P_u = \gamma \cdot Q_B \cdot H_u$$

$$P_u = 1000\,\frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \cdot \left(0.0713046\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right) \cdot (56.4\,\text{m})$$

$$P_u = 4021.58\,\frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$P_u = \frac{4021.58}{75}\,\text{c.v.} = 53.62\ \text{c.v.}$$

$$P_u = \frac{4021.58}{76}\,\text{h.p.} = 52.92\ \text{h.p.}$$

$$P_u = 4021.58 \cdot 9.8\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 39411.48\,\frac{\text{J}}{\text{s}} = 39411.48\,\text{W} = 39.41\,\text{kW}$$

- Cálculo de la presión en C, p_C.

Bernoulli entre A y C: $z_A + 0 + 0 - h_{f\,1} + H_B - h_{f\,2} = z_C + \dfrac{p_C}{\gamma} + \dfrac{\alpha \cdot v_C^2}{2 \cdot g}$

$$\frac{p_C}{\gamma} = H_B - (z_C - z_A) - h_{f\,1} - h_{f\,2} - \frac{8 \cdot \alpha \cdot Q_2^2}{\pi^2 \cdot g \cdot D_2^4}$$

$$\frac{p_C}{\gamma} = (68.58) - 639.66 \cdot Q_B^{1.5} - (z_C - z_1) - \left(\frac{3.5866}{C_1 D_1^{2.63}}\right) \cdot L_1 \cdot Q_1^{1.852} - \left(\frac{3.5866}{C_2 D_2^{2.63}}\right)^{1.852} \cdot$$
$$\cdot L_2 \cdot Q_2^{1.852} - \frac{8 \cdot (1) \cdot (Q_2)^2}{\pi^2 \cdot g \cdot D_2^4}$$

Reemplazando valores:

$$\frac{p_C}{\gamma} = (68.58 - 12.179)\,\text{m} - 7.6\,\text{m} - 0.0611\,\text{m} - 2.46\,\text{m} - 0.0486\,\text{m}$$

$$\frac{p_C}{\gamma} = 56.401\,\text{m} - 7.6\,\text{m} - 0.0611\,\text{m} - 2.46\,\text{m} - 0.0486\,\text{m} = 46.2313\,\text{m c. a.}$$

$$\frac{p_C}{\gamma}=46.2313\,\mathrm{m}\cdot 1000\,\frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{m}^3}=46231.3\,\frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{m}^2}=4.6231\,\frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{cm}^2}$$

- Cálculo de la presión de succión o presión a la entrada de la bomba, p_a

Bernoulli entre A y e:
$$z_A+\frac{p_A}{\gamma}+\frac{\alpha\cdot v_A^2}{2\cdot g}-h_{f\,1}=z_e+\frac{p_e}{\gamma}+\frac{\alpha\cdot v_e^2}{2\cdot g}$$

Despreciando la velocidad en A y tomando presiones relativas, se tiene

$$\frac{p_e}{\gamma}=z_A-h_{f\,1}-z_e-\frac{\alpha\cdot v_e^2}{2\cdot g}$$

$$\frac{p_e}{\gamma}=\left(z_A-z_e\right)-h_f-\frac{8\cdot\alpha\cdot Q_1^2}{\pi^2\cdot g\cdot D_1^4}$$

Remplazando valores numéricos, se tiene:

$$\frac{p_e}{\gamma}=\left(38.1-35.05\;\right)\mathrm{m}-0.0611\,\mathrm{m}-\frac{8\cdot(1)\cdot(0.0713046)^2}{\pi^2\cdot(9.8)\cdot(0.406)^4}\,\mathrm{m}$$

$$\frac{p_e}{\gamma}=3.05\,\mathrm{m}-0.0611\,\mathrm{m}-0.0155\,\mathrm{m}=2.9734\,\mathrm{m}$$

- Cálculo de la presión dinámica de descarga o presión a la salida de la bomba, p_s

Ecuación de Bernoulli entre e y s:

$$z_e+\frac{p_e}{\gamma}+\frac{\alpha\cdot v_e^2}{2\cdot g}+H_B=z_s+\frac{p_s}{\gamma}+\frac{\alpha\cdot v_s^2}{2\cdot g}$$

$$\frac{p_s}{\gamma}=\frac{p_e}{\gamma}+H_B+\frac{\alpha\cdot\left(v_e^2-v_s^2\right)}{2\cdot g}$$

$$\frac{p_s}{\gamma}=\frac{p_e}{\gamma}+H_B+\frac{\alpha}{2\cdot g}\cdot\left[\left(\frac{4\cdot Q_B}{\pi\cdot D_e^2}\right)^2-\left(\frac{4\cdot Q_B}{\pi^2\cdot D_s^2}\right)^2\right]$$

$$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_e}{\gamma} + H_B + \frac{8 \cdot \alpha \cdot Q_B^2}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left[\left(\frac{1}{D_e^4} \right)^2 - \left(\frac{1}{D_s^4} \right)^2 \right]$$

$$\frac{p_s}{\gamma} = 2.9734\,\text{m} + 56.401\,\text{m} + \frac{8 \cdot (1)(0.0713046)^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\pi^2 \cdot (9.8)\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \left[\left(\frac{1}{0.406^4} \right)^2 - \left(\frac{1}{0.305^4} \right)^2 \frac{1}{\text{m}^4} \right]$$

$$\frac{p_s}{\gamma} = 2.9734\,\text{m} + 56.401\,\text{m} - 0.0331\,\text{m}$$

$$\frac{p_s}{\gamma} = 59.341\,\text{m}$$

Problema No. 20

Los resultados de un ensayo elemental de una bomba rotodinámica, girando a 1450 rpm, se presentan en la siguiente tabla:

Q (l/s)	40	80	120	160	200
H (m)	32.0	30.5	28.0	24.5	20.0
P_a (kW)	34.2	39.2	45.0	52.5	64.5

Aplicando las ecuaciones de regresión lineal por mínimos cuadrados, ajuste una expresión de la forma $H = a + c \cdot Q^2$, y otra de la forma $\eta = dQ + e \cdot Q^2$, para dicha bomba.

Además, calcule su eficiencia máxima, sus características nominales (Q_N, H_N y P_{aN}) y su número específico de revoluciones, n_s.

$$\sum_{i=1}^{N} H_i = a \cdot N + c \sum_{i=1}^{N} Q_i^2 \qquad \sum_{i=1}^{N} \eta_i \cdot Q_i = d \sum_{i=1}^{N} Q_i^2 + e \sum_{i=1}^{N} Q_i^3$$

$$\sum_{i=1}^{N} H_i \cdot Q_i^2 = a \sum_{i=1}^{N} Q_i^2 + c \sum_{i=1}^{N} Q_i^4 \qquad \sum_{i=1}^{N} \eta_i \cdot Q_i^2 = d \sum_{i=1}^{N} Q_i^3 + e \sum_{i=1}^{N} Q_i^4$$

N: Número de puntos (H_i, Q_i) N: Número de puntos (η_i, Q_i)

1. Ajuste de la curva H vs. Q

Se trata de determinar una ecuación de la forma $H = a + c \cdot Q^2$, y otra, de la forma $\eta = dQ + e \cdot Q^2$, para la bomba, aplicando los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{N} H_i = a \cdot N + c \sum_{i=1}^{N} Q_i^2 \qquad (1) \qquad \sum_{i=1}^{N} \eta_i \cdot Q_i = d \sum_{i=1}^{N} Q_i^2 + e \sum_{i=1}^{N} Q_i^3 \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{N} H_i \cdot Q_i^2 = a \sum_{i=1}^{N} Q_i^2 + c \sum_{i=1}^{N} Q_i^4 \qquad (2) \qquad \sum_{i=1}^{N} \eta_i \cdot Q_i^2 = d \sum_{i=1}^{N} Q_i^3 + e \sum_{i=1}^{N} Q_i^4 \qquad (4)$$

Donde N es el número de puntos (H_i, Q_i) ó (η_i, Q_i) de las respectivas curvas características.

En este problema, se trabajará con caudales en m^3/s.

$$\sum_{i=1}^{N} H_i = 135; \quad \sum_{i=1}^{N} Q_i^2 = 0.088; \quad \sum_{i=1}^{N} H_i \cdot Q_i^2 = 2.0768; \quad \sum_{i=1}^{N} Q_i^4 = 0.00250624$$

De (1):

$$a = \frac{1}{N}\left(\sum H_i - c \sum Q_i^2\right) \qquad (5)$$

(5) en (2):

$$\sum H_i \cdot Q_i^2 = \frac{1}{N}\left(\sum H_i - c\sum Q_i^2\right) \cdot \sum Q_i^2 + c \sum Q_i^4$$

$$\sum H_i \cdot Q_i^2 - \frac{1}{N} \sum H_i \cdot \sum Q_i^2 = c \sum Q_i^4 - \frac{c}{N} \sum Q_i^2 \cdot \sum Q_i^2$$

$$\sum H_i \cdot Q_i^2 - \frac{1}{N}\sum H_i \cdot \sum Q_i^2 = c \cdot \left(\sum Q_i^4 - \frac{1}{N}\left(\sum Q_i^2\right)^2 \right)$$

$$\therefore \quad c = \frac{\sum H_i \cdot Q_i^2 - \frac{1}{N}\sum H_i \cdot \sum Q_i^2}{\sum Q_i^4 - \frac{1}{N}\left(\sum Q_i^2\right)^2} \qquad (6)$$

Reemplazando las respectivas sumatorias en la ecuación (6), se tiene:

$$c = \frac{2.0768 - \frac{135 \times 0.088}{5}}{0.00250624 - \frac{(0.088)^2}{5}} = -312.5 \qquad (7)$$

Ahora, se sustituye el valor de c en la ecuación (5), para determinar el valor del coeficiente a, así:

$$a = \frac{1}{5}\left(135 - \left(-312.5 \times 0.088\right)\right) = 32.5 \qquad (8)$$

Ecuación de regresión para H:

$$H = 32.5 - 312.5\,Q^2; \qquad H\ (m),\ Q\ (m^3/s) \qquad (9)$$

2. Cálculo de los valores de la potencia útil, P_u

$$P_u = \gamma \cdot Q \cdot H = \gamma\left(\frac{kgf}{m^3}\right) \cdot Q\left(\frac{m^3}{s}\right) \cdot H\,(m) \qquad (10)$$

$$P_u = 1000\,\frac{kgf}{m^3} \cdot Q\left(\frac{m^3}{s}\right) \cdot H\,(m) = 1000 \cdot Q \cdot H\,\frac{kgf \cdot m}{s} = 1000 \times 9.81 \cdot Q \cdot H\,\frac{N \cdot m}{s}$$

$$P_u = 1000 \times 9.81 \cdot Q \cdot H\,\frac{J}{s} = 1000 \times 9.81 \cdot Q \cdot H\ W = \frac{1000 \times 9.81}{1000} \cdot Q \cdot H\ kW$$

$$P_u = 9.81 \cdot Q\left(\frac{m^3}{s}\right) \cdot H\,(m)\ kW \qquad (11)$$

Sustituyendo los valores de Q (m^3/s) y de H (m) de la Tabla de Datos en la ecuación (11), se obtienen los correspondientes valores P_u.

Por ejemplo, para Q = 40 l/s = 0.040 m^3/s, y H = 32.0 m, se tiene:

$$P_u = 9.81 \times 0.04 \times 32 \text{ kW} = 12.5568 \text{ kW} \qquad (11')$$

3. Cálculo de los valores de eficiencia, η

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} \times 100 \qquad (12)$$

Con ayuda de la ecuación (12) se calculan los respectivos valores de la eficiencia de la bomba, η, completando la Tabla de Datos.

Por ejemplo, para Q = 40 l/s = 0.040 m^3/s, y H = 32.0 m, P_u = 12.5568 kW y P_a = 34.2 kW, se tiene:

$$\eta = \frac{12.5568 \text{ kW}}{34.2 \text{ kW}} \times 100 = 36.7958\,\% \qquad (13)$$

4. Ajuste de la curva η vs. Q

Ahora, se determinará la expresión que relaciona la eficiencia, η, con el caudal, Q, que impulsa la bomba, de la forma $\eta = dQ + e \cdot Q^2$.

De la ecuación (2),

$$d = \frac{\sum \eta_i \cdot Q_i - e \cdot \sum Q_i^3}{\sum Q_i^2} \qquad (14)$$

Sustituyendo (14) en (4), se tiene:

$$\sum \eta_i \cdot Q_i^2 = \frac{\sum \eta_i \cdot Q_i - e \cdot \sum Q_i^3}{\sum Q_i^2} \sum Q_i^3 + e \cdot \sum Q_i^4$$

$$\sum \eta_i \cdot Q_i^2 = \frac{\sum \eta_i \cdot Q_i \cdot \sum Q_i^3}{\sum Q_i^2} - \frac{e \cdot \sum Q_i^3 \cdot \sum Q_i^3}{\sum Q_i^2} + e \cdot \sum Q_i^4$$

$$\sum \eta_i \cdot Q_i^2 - \frac{\sum \eta_i \cdot Q_i \cdot \sum Q_i^3}{\sum Q_i^2} = e \cdot \left(\sum Q_i^4 - \frac{\left(\sum Q_i^3\right)^2}{\sum Q_i^2} \right)$$

$$\therefore \quad e = \frac{\sum \eta_i \cdot Q_i^2 - \dfrac{\sum \eta_i \cdot Q_i \cdot \sum Q_i^3}{\sum Q_i^2}}{\sum Q_i^4 - \dfrac{\left(\sum Q_i^3\right)^2}{\sum Q_i^2}} \qquad (15)$$

Para este caso, los valores de las sumatorias son:

$$\sum \eta_i \cdot Q_i^2 = 5.812952003; \quad \sum Q_i^2 = 0.088; \quad \sum \eta_i \cdot Q_i = 39.03049303;$$

$$\sum Q_i^3 = 0.0144; \quad \sum Q_i^4 = 0.00250624$$

Reemplazando los valores de las sumatorias en la ecuación (15), se tiene:

$$e = \frac{5.812952003 - \dfrac{39.03049303 \times 0.0144}{0.088}}{0.00250624 - \dfrac{(0.0144)^2}{0.088}} = -3828.862226 \qquad (16)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (10), se obtiene:

$$d = \frac{39.03049303 - (-3828.862226) \cdot (0.0144)}{0.088} = 1070.069421 \qquad (17)$$

Con lo cual se obtiene:

$$\eta = 1070.069421\,Q - 3828.862226\,Q^2 \text{ ; con Q } (m^3/s),\ \eta\ (\%) \qquad (18)$$

5. Cálculo de la eficiencia máxima, $\eta_{máx}$

El valor de la eficiencia máxima resultará de derivar la función η vs. Q, con respecto al caudal; así:

$$\frac{d\eta}{dQ} = 1070.069421 - 2\,(3828.862226\,Q)$$

$$\frac{d\eta}{dQ} = 1070.069421 - 7657.724452\,Q = 0 \qquad (19)$$

$$Q = \frac{1070.069421}{7657.724452} = 0.1397372685\,\frac{m^3}{s} \qquad (20)$$

Este es el valor del caudal correspondiente a la $\eta_{máx}$; es decir, es el caudal nominal,

$$Q_N = 139.74\,\frac{l}{s} \qquad (21)$$

Reemplazando este valor de Q en la ecuación (18), se tiene:

$$\eta_{máx} = 1070.069421(0.1397372585) - 3828.862226(0.1397372585)^2 = 74.76428363$$

$$\eta_{máx} = 74.764\,\% \qquad (22)$$

6. Cálculo de las características nominales de la bomba, (Q_N, H_N, $P_{a\,N}$)

Recuérdese que las características nominales de una bomba son las que corresponden al punto de mejor rendimiento, PMR, es decir a la $\eta_{máx}$.

6.1. Cálculo del caudal nominal, Q_N

En el epígrafe 5 se obtuvo el valor del caudal nominal, y es:

$$Q_N = 139.74\,\frac{l}{s} \qquad (23)$$

6.2. Cálculo de la altura nominal, H_N

$$H_N = H\Big|_{Q=Q_N=139.74\frac{l}{s}} = 32.5 - 312.5(0.13974) = 26.3977\,m$$

$$H_N = 26.4\,m \qquad (24)$$

6.3. Cálculo de la potencia útil nominal, P_{uN}

$$P_{u\,N} = \gamma \cdot Q_N \cdot H_N$$

$$P_{u\,N} = 1000\,\frac{kgf}{m^3} \times 0.13974\,\frac{m^3}{s} \times 26.4\,m = 3689.139\,\frac{kgf \cdot m}{s}$$

$$P_{u\,N} = 36.19\,kW \qquad (25)$$

6.4. Cálculo de la potencia de accionamiento nominal, P_{aN}

$$\eta_{máx} = \frac{P_{u\,N}}{P_{a\,N}}$$

$$\therefore \qquad P_{a\,N} = \frac{P_{u\,N}}{\eta_{máx}} = \frac{36.19\,kW}{0.74764} = 48.40565\,kW$$

$$P_{a\,N} = 48.4\,kW \qquad (26)$$

6.5. Cálculo de la velocidad específica, n_s

$$n_s = \frac{n \cdot Q_N^{1/2}}{H_N^{3/4}}, \qquad \text{con n (rpm), } Q_N\ (m^3/s) \text{ y } H_N\ (m)$$

$$n_s = \frac{1450 \cdot (0.13974)^{1/2}}{(26.4)^{3/4}} = 46.53989794$$

$$n_s = 46.54$$

A continuación, se presenta una tabla con los valores iniciales del problema y los resultados obtenidos durante su resolución.

Q (l/s)	40	80	120	160	200
H (m)	32.0	30.5	28.0	24.5	20.0
P_a (kW)	34.2	39.2	45.0	52.5	64.5
P_u (kW)	12.5568	23.9364	32.9616	38.4552	39.24
η (%)	36.71578947	61.0622449	73.248	73.248	60.8372093

Problema No. 21

Dos bombas distintas, cuyas curvas características se expresan a continuación, han de acoplarse en serie, de acuerdo con la instalación mostrada en la figura.

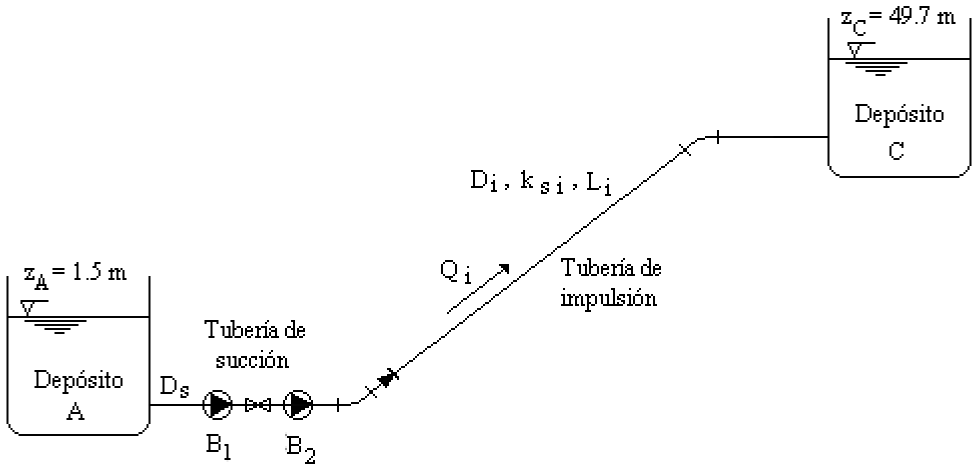
$$H_{B1} = 69 - 135\,Q - 4000\,Q^2 \quad ; \quad \eta_1 = 25\,Q - 230\,Q^2$$

$$H_{B2} = 54 - 71\,Q - 4285\,Q^2 \quad ; \quad \eta_2 = 37\,Q - 380\,Q^2$$

con H (m), Q (m^3/s) y η en tanto por uno.

Se desea determinar:

- El caudal que impulsarían las bombas si se acoplan en serie.
- El costo unitario por m^3 de agua elevada por el conjunto en serie, sabiendo que el costo de la energía es 219 $/kW·h.



$$L_{Total} = L_T = 1872\,m\,; \qquad \nu_{agua} = 1.141\times10^{-6}\,\frac{m^2}{s}\,; \qquad \sum k_{LT} = 7.4$$

k_s = 0.2 mm = 0.0002 m

$D_s = D_i$ = 350 mm

Los subíndices s e i significan succión e impulsión, respectivamente.

Solución Analítica:

Por tratarse de un sistema de bombas en serie,

$$Q_T = Q_{B1} = Q_{B2},\ y\ \ H_T = H_{B1} + H_{B2} \tag{1}$$

1. Determinación de las curvas motriz y resistente del sistema

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los depósitos A y C, se tiene:

$$H_A - \Delta H_{A\text{-}C} + H_{B1} + H_{B2} = H_C \tag{2}$$

$$\left(z_A + \frac{\overset{0}{\cancel{p}}_A}{\gamma} + \frac{\alpha\, \overset{0}{\cancel{v}}{}^2_A}{2\,g} \right) - \left(h_{f\,s} + \sum h_{L\,s}\right) - \left(h_{f\,i} + \sum h_{L\,i}\right) + \left(H_{B1} + H_{B2}\right) = z_C + \frac{\overset{0}{\cancel{p}}_C}{\gamma} + \frac{\alpha\, \overset{0}{\cancel{v}}{}^2_C}{2\,g} \tag{3}$$

$$\left(z_C - z_A\right) + \left(h_{f\,s} + h_{f\,i}\right) + \left(\sum h_{L\,s} + \sum h_{L\,i}\right) = H_{B1} + H_{B2} \tag{4}$$

$$\left(z_C - z_A\right) + \left(\frac{8\, f_s\, L_s\, Q_T^2}{\pi^2\, g\, D_s^5} + \frac{8\, f_i\, L_i\, Q_T^2}{\pi^2\, g\, D_i^5} \right) + \left(\frac{8\left(\sum h_{L\,s}\right) Q_T^2}{\pi^2\, g\, D_s^4} + \frac{8\left(\sum h_{L\,i}\right) Q_T^2}{\pi^2\, g\, D_i^4} \right) = H_{B1} + H_{B2} \tag{5}$$

$$\left(z_C - z_A\right) + \frac{8\, Q_T^2}{\pi^2\, g} \left(\frac{f_s\, L_s}{D_s^5} + \frac{f_i\, L_i}{D_i^5} \right) + \frac{8\, Q_T^2}{\pi^2\, g} \left(\frac{\sum h_{L\,s}}{D_s^4} + \frac{\sum h_{L\,i}}{D_i^4} \right) = H_{B1} + H_{B2}$$

$$\left(z_C - z_A\right) + \frac{8\, Q_T^2}{\pi^2\, g} \left[\left(\frac{f_s\, L_s}{D_s^5} + \frac{f_i\, L_i}{D_i^5} \right) + \left(\frac{\sum h_{L\,s}}{D_s^4} + \frac{\sum h_{L\,i}}{D_i^4} \right) \right] = H_{B1} + H_{B2}$$

$$\underbrace{\left(z_C - z_A\right) + \frac{8}{\pi^2\, g} \left[\left(\frac{f_s\, L_s}{D_s^5} + \frac{f_i\, L_i}{D_i^5} \right) + \left(\frac{\sum h_{L\,s}}{D_s^4} + \frac{\sum h_{L\,i}}{D_i^4} \right) \right] Q_T^2}_{\text{Curva Resistente}} = \underbrace{H_{B1} + H_{B2}}_{\text{Curva Motriz}} \tag{6}$$

1.1. Determinación de la ecuación de la curva motriz del sistema

$$H_m = H_{B1} + H_{B2} \tag{7}$$

$$H_m = \left(A_1 + B_1\, Q_{B1} + C_1\, Q_{B1}^2\right) + \left(A_2 + B_2\, Q_{B2} + C_2\, Q_{B2}^2\right) \tag{8}$$

Por estar las bombas acopladas en serie,

$$Q_{B1} = Q_{B2} = Q_T \qquad (9)$$

Luego,

$$H_m = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)Q_T + (C_1 + C_2\ )Q_T^2 \qquad (10)$$

Ecuación particular de la curva motriz del sistema, para dos bombas en serie.

1.2. Determinación de la curva resistente del sistema

$$H_r = (z_C - z_A) + \frac{8}{\pi^2\, g}\left[\left(\frac{f_s\, L_s}{D_s^5} + \frac{f_i\, L_i}{D_i^5}\right) + \left(\frac{\sum h_{L\,s}}{D_s^4} + \frac{\sum h_{L\,i}}{D_i^4}\right)\right]Q_T^2 \qquad (11)$$

Ecuación general de la curva resistente del sistema.

En este problema, los diámetros de las tuberías de succión e impulsión son iguales, es decir, $D_s = D_i = D$. Además, por tratarse de tuberías de idéntico material $(k_{s\,s} = k_{s\,i} = k_s = \text{constante})$, por las que fluye el mismo caudal $(Q_T = Q_{B1} = Q_{B2})$, los coeficientes de fricción son iguales $(f_s = f_{\,i} = f)$. Por lo tanto, la ecuación (11) se puede expresar de la siguiente manera:

$$H_r = (z_C - z_A) + \frac{8}{\pi^2\, g}\left[\left(\frac{f \cdot L_s}{D^5} + \frac{f_i\, L_i}{D^5}\right) + \left(\frac{\sum k_{L\,s}}{D^4} + \frac{\sum k_{L\,i}}{D^4}\right)\right]Q_T^2 \qquad (12)$$

$$H_r = (z_C - z_A) + \frac{8}{\pi^2\, g}\left[\left(\frac{f(L_s + L_i)\cdot}{D^5}\right) + \left(\frac{\left(\sum k_{L\,s} + \sum k_{L\,i}\right)}{D^4}\right)\right]Q_T^2 \qquad (13)$$

Es claro que la longitud total de la tubería del sistema, $L_T = L_s + L_i$, y que $\sum k_{L\,s} + \sum k_{L\,i} = \sum k_T$

Luego, la ecuación (13) se reduce a la siguiente:

$$H_r = (z_C - z_A) + \frac{8\, f\ L_T}{\pi^2\, g\, D^5}\, Q_T^2 + \frac{8 \sum k_{L\,T}}{\pi^2\, g\, D^4}\, Q_T^2 \qquad (14)$$

$$H_r = (z_C - z_A) + \frac{8}{\pi^2 \, g \, D^5}\left(f \cdot L_T + D \sum k_{LT}\right) Q_T^2 \qquad (15)$$

Ecuación particular de la curva resistente del sistema

2. Determinación del punto de funcionamiento del sistema, $P(H_T, Q_T)$

El punto de funcionamiento del sistema queda definido por la intersección de la curva motriz con la curva resistente, es decir, resolviendo la ecuación (6) para el caudal, Q_T, del sistema. En pocas palabras, se debe calcular el valor de Q_T que satisfaga la siguiente igualdad:

$$H_r = H_m \qquad (16)$$

2.1. Cálculo del caudal total, Q_T

Igualando las ecuaciones (15) y (16), se tiene:

$$(z_C - z_A) + \frac{8}{\pi^2 \, g \, D^5}\left(f \cdot L_T + D \sum k_{LT}\right) Q_T^2 = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2) Q_T + (C_1 + C_2) Q_T^2$$

ecuación (17)

Para calcular Q_T que satisfaga la ecuación (17), se requiere del concurso de la ecuación de Colebrook & White, la cual expresa lo siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{k_s}{3.7\,D} + \frac{2.51}{R\,\sqrt{f}}\right) \qquad (18)$$

con $\mathbf{R} = \dfrac{4\,Q_T}{\pi\,D\,\nu}$ (19)

Reemplazando la ecuación (19) en la ecuación (18), se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{k_s}{3.7\,D} + \frac{2.51\,\pi\,D\,\nu}{4\,Q_T\,\sqrt{f}}\right) \qquad (20)$$

En definitiva, se trata de resolver el sistema de ecuaciones simultáneas conformado por las ecuaciones (17) y (20), cuyas incógnitas son f y Q_T. Ello sólo puede hacerse iterativamente, por ensayo y error, lo cual es bastante laborioso.

La manera más ágil de resolver el sistema de ecuaciones (17) y (20) es eliminando f y obteniendo una sola ecuación con una sola incógnita: Q_T.

En efecto, combinando la ecuación de Darcy & Weisbach con la de Colebrook & White, se llega a la siguiente expresión:

$$Q_T = -\frac{\pi D^2}{2}\sqrt{2\,g\,D\left(\frac{h_{f\,T}}{L_T}\right)}\cdot\log\left(\frac{k_s}{3.7\,D}+\frac{2.51\,\nu}{D\sqrt{2\,g\,D\left(\frac{h_{f\,T}}{L_T}\right)}}\right) \qquad (21)$$

y de la ecuación (4) se despeja $\left(h_{f\,s}+h_{f\,si}\right)=h_{f\,T}$, así:

$$h_{f\,T} = -\left(z_C - z_A\right)-\left(\sum k_{Ls}+\sum k_{Li}\right)+H_{B1}+H_{B2} \qquad (22)$$

ó

$$h_{f\,T} = -\left(z_C - z_A\right)-\frac{8\sum k_{L\,T}\cdot Q_T^2}{\pi^2\,g\,D^4}+\left(A_1+A_2\right)+\left(B_1+B_2\right)Q_T+\left(C_1+C_2\right)Q_T^2 \qquad (23)$$

Finalmente, llevando (23) a (21), y reordenando términos, resulta:

$$Q_T = -0.5\pi\sqrt{\frac{2\,g\,D^5}{L_T}\left[\left(A_1+A_2\right)+\left(B_1+B_2\right)Q_T+\left(C_1+C_2\right)Q_T^2-\left(z_C-z_A\right)-\frac{8\sum k_{L\,T}\cdot Q_T^2}{\pi^2\,g\,D^4}\right]}\cdot$$

$$\cdot\log\left\{\frac{2.51\,\nu}{\sqrt{\frac{2\,g\,D^3}{L_T}\left[\left(A_1+A_2\right)+\left(B_1+B_2\right)Q_T+\left(C_1+C_2\right)Q_T^2-\left(z_C-z_A\right)-\frac{8\sum k_{L\,T}\cdot Q_T^2}{\pi^2\,g\,D^4}\right]}}\right\}$$

ecuación (24)

En la ecuación (24), todos los valores son conocidos, excepto el del caudal, Q_T.

Con la ayuda de una calculadora programable (por ejemplo, la HP-48GX), es fácil resolver la ecuación (24), para lo cual, con los datos que aparecen en la figura del problema, se obtuvo:

$$Q_T = 0.080913 \frac{m^3}{s} \qquad (25)$$

Por lo tanto, el caudal impulsado por las dos bombas conectadas en serie es $Q_T = 0.080913 \frac{m^3}{s} = 80.91 \frac{l}{s}$. Además, $f = 0.0187958368401$.

2.2. Cálculo de la altura suministrada por cada bomba en el punto de funcionamiento, H_{Bi}

Para la bomba B_1:

$$H_{B1} = 69 - 135\, Q_{B1} - 4000\, Q_{B1}^2$$

$$Q_{B1} = Q_{B2} = Q_T = 0.080913 \frac{m^3}{s}$$

$$H_{B1} = 69 - 135 \cdot (0.080913) - 4000 \cdot (0.080913)^2$$

$$H_{B1} = 31.889\, m$$

Para la bomba B_2:

$$H_{B2} = 54 - 71\, Q_{B2} - 4285\, Q_{B2}^2$$

$$H_{B2} = 54 - 71 \cdot (0.080913) - 4285 \cdot (0.080913)^2$$

$$H_{B2} = 20.202\, m$$

2.3. Cálculo de la altura total del conjunto de bombas en serie

Cuando las bombas se asocian en serie, la altura total de la asociación es, sencillamente, la suma de las alturas que suministran las bombas; esto es:

$$H_T = H_{B1} + H_{B2}$$

$$H_T = 31.889\, m + 20.202\, m$$

$$H_T = 52.091\, m$$

3. Cálculo del caudal nominal de cada bomba, Q_N

El caudal nominal es aquel que corresponde al valor de la eficiencia máxima, y se calcula de la siguiente manera:

Para la bomba B_1:

$$\eta_1 = 25\,Q - 230\,Q^2$$

$$\frac{d\,\eta_1}{d\,Q} = 25 - 460\,Q = 0$$

$$\therefore \quad Q_{N1} = \frac{25}{460} = 0.05435\ \frac{m^3}{s}$$

Obsérvese que $Q_{N1} = 0.05435\ \frac{m^3}{s} < Q_T = 0.080913\ \frac{m^3}{s}$

Para la bomba B_2:

$$\eta_2 = 37\,Q - 380\,Q^2$$

$$\frac{d\,\eta_2}{d\,Q} = 37 - 760\,Q = 0$$

$$\therefore \quad Q_{N2} = \frac{37}{760} = 0.04868\ \frac{m^3}{s}$$

Nótese que $Q_{N2} = 0.04868\ \frac{m^3}{s} < Q_T = 0.080913\ \frac{m^3}{s}$

4. Cálculo de la eficiencia máxima de cada bomba, $\eta_{máx}$

Para la bomba B_1:

$$\eta_{máz,1} = 25\,Q_{N1} - 230\,Q_{N1}^2$$

$$\eta_{máz,1} = 25\,(0.05435) - 230\,(0.05435)^2 = 0.6793 = 67.93\,\%$$

Para la bomba B_2:

$$\eta_{\text{máz},2} = 37\,Q_{N2} - 380\,Q_{N2}^2$$

$$\eta_{\text{máz},2} = 37\,(0.04868) - 380\,(0.04868)^2 = 0.9007 = 90.07\,\%$$

5. Cálculo de las eficiencias en el punto de funcionamiento, η_{Bi}

La eficiencia de cada bomba, en el punto de funcionamiento del sistema, se obtiene reemplazando el valor del caudal correspondiente al punto de funcionamiento del sistema, $Q_T = 0.080913\ \dfrac{m^3}{s}$, en la respectiva ecuación de rendimiento de la bomba:

Para la bomba B_1:

$$\eta_{B1} = 25\,Q_T - 230\,Q_T^2$$

$$\eta_{B1} = 25\,(0.080913) - 230\,(0.080913)^2 = 0.5170 = 51.70\,\%$$

Para la bomba B_2:

$$\eta_{B2} = 37\,Q_T - 380\,Q_T^2$$

$$\eta_{B2} = 37\,(0.080913) - 380\,(0.080913)^2 = 0.5060 = 50.60\,\%$$

6. Cálculo de la potencia absorbida en el eje, de cada bomba, $P_{a\,i}$

$$P_{a\,i} = \frac{P_{u\,i}}{\eta_{B\,i}} = \frac{\gamma\,Q_{B\,i}\cdot H_{B\,i}}{\eta_{B\,i}}$$

$$P_{a1} = \frac{\gamma\,Q_{B1}\cdot H_{B\,1}}{\eta_{B1}} = \frac{\left(1000\ \dfrac{kgf}{m^3}\right)\cdot\left(0.080913\ \dfrac{m^3}{s}\right)\cdot(31.889\ m)}{0.517} = 4990.78\ \frac{kgf\cdot m}{s}$$

$$P_{a2} = \frac{\gamma\,Q_{B2}\cdot H_{B2}}{\eta_{B2}} = \frac{\left(1000\ \dfrac{kgf}{m^3}\right)\cdot\left(0.080913\ \dfrac{m^3}{s}\right)\cdot(20.202\ m)}{0.506} = 3230.44\ \frac{kgf\cdot m}{s}$$

7. Cálculo de la potencia útil del conjunto, P_{uT}

$$P_{u\,T} = \gamma\, Q_T \cdot H_T = \left(1000\,\frac{kgf}{m^3}\right)\cdot\left(0.080913\,\frac{m^3}{s}\right)\cdot(52.091\,m) = 4214.84\,\frac{kgf\cdot m}{s}$$

$$P_{u\,T} = 4214.84\times 9.81\,\frac{N\cdot m}{s} = \frac{4214.84\times 9.81}{1000}\,kW = 41.35\,kW$$

8. Cálculo de la eficiencia global del conjunto, η_T

$$\eta_T = \frac{P_{u\,T}}{\sum_{i=1}^{N} P_{a\,i}} = \frac{P_{a\,T}}{P_{a1} + P_{a2}} = \frac{\gamma\, Q_T \cdot H_T}{\dfrac{\gamma\, Q_T \cdot H_{B1}}{\eta_{B1}} + \dfrac{\gamma\, Q_T \cdot H_{B2}}{\eta_{B2}}}$$

$$\eta_T = \frac{4214.84\,\dfrac{kgf\cdot m}{s}}{(4990.78 + 3230.44)\dfrac{kgf\cdot m}{s}} = 0.5127 = 51.27\,\%$$

9. Cálculo de la potencia absorbida total del conjunto de bombas, P_{aT}

$$P_{a\,T} = \frac{P_{u\,T}}{\eta_T} = \frac{41.35\,kW}{0.5127} = 80.65\,kW$$

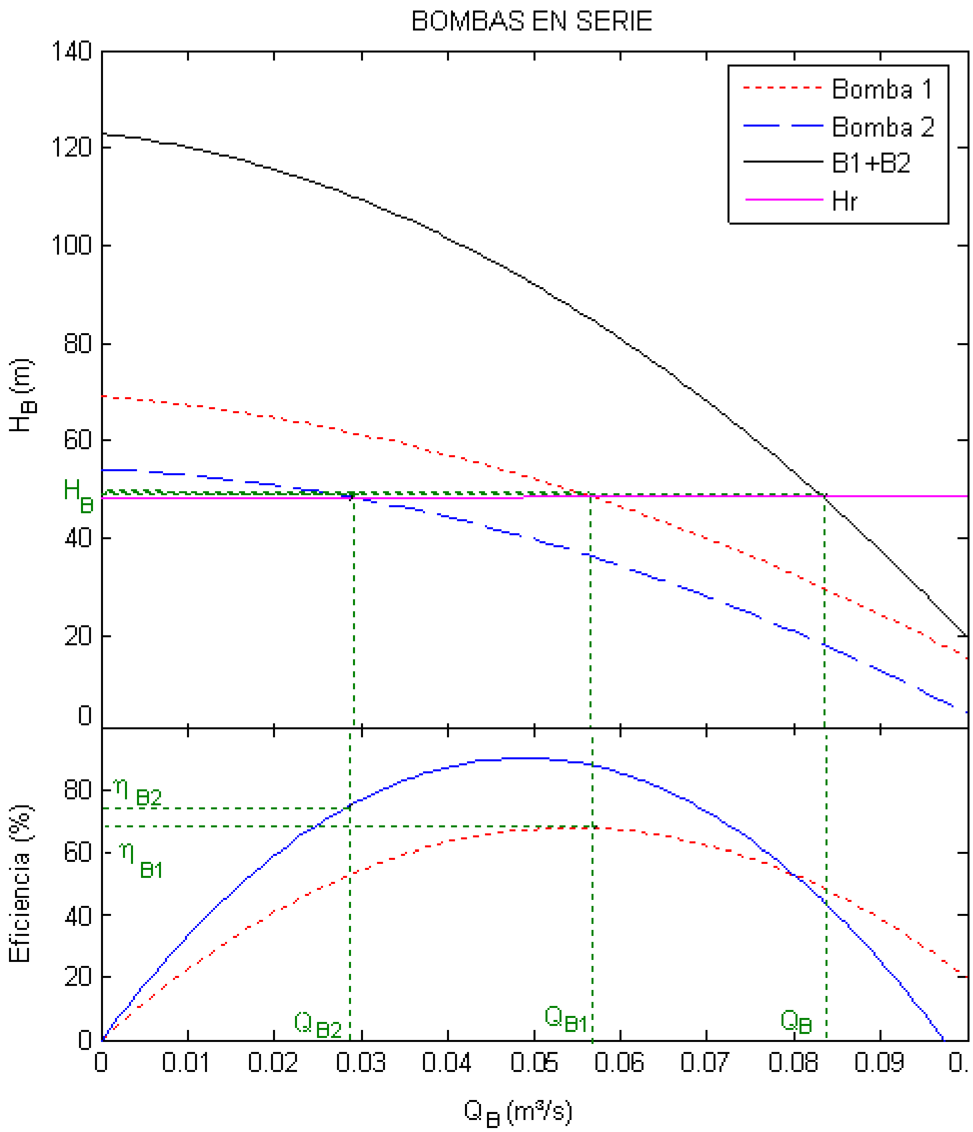
10. Cálculo del costo unitario de elevación del agua, C_u

$$C_u = \frac{C_{energía}\cdot E_{absorbida}}{\text{Volumen elevado}} = \frac{C_{energía}\cdot P_{absorbida}\cdot t_{bombeado}}{Q_{bombeado}\cdot t_{bombeado}} = \frac{C_{energía}\cdot P_{a\,T}\cdot t_b}{Q_T \cdot t_b}$$

$$C_u = \frac{\left(219\,\dfrac{\$}{kW\cdot h}\right)\cdot(80.65\,kW)\cdot(1\,h)}{\left(0.080913\,\dfrac{m^3}{s}\right)\cdot(3600\,s)} = 60.64\,\frac{\$}{m^3}$$

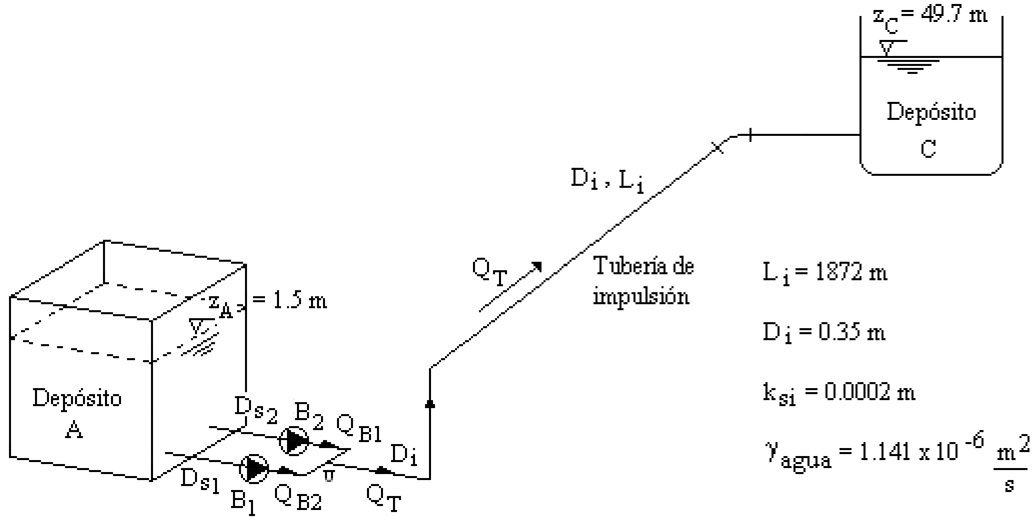
Solución Gráfica para el Punto de Funcionamiento:

En la siguiente figura se muestran las curvas motriz y resistente del sistema, de cuya intersección resulta el punto de funcionamiento PF (Q_T, H_T). Además, en ella se puede observar las curvas de eficiencia correspondientes a cada una de las bombas.



Problema No. 22

Resolver el problema (21) bajo la consideración de que las dos bombas estarán asociadas en paralelo.



Solución Analítica:

Por estar acopladas las dos bombas en paralelo, $H_{B1} = H_{B2} = H_T$, y $Q_T = Q_{B1} + Q_{B2}$

1. Determinación de las curvas motriz y resistente del sistema

   Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los depósitos A y C de la figura, resulta:

$$H_A - \Delta H_{A\text{-}C} + H_{T\,conjunto} = H_C \qquad (1)$$

   Al reemplazar en la ecuación (1), resulta:

$$z_A - \left(h_{f\,s} + \sum h_{L\,s}\right) - \left(h_{f\,i} + \sum h_{L\,i}\right) + H_T = z_C \qquad (2)$$

   Reorganizando los términos en la ecuación (2), se tiene:

$$\left(z_C - z_A\right) + \left(h_{f\,s} + \sum h_{L\,s}\right) + \left(h_{f\,i} + \sum h_{L\,i}\right) = H_T \qquad (3)$$

La ecuación (3) presenta dos variantes distintas, según que se considere la trayectoria $A - B_1 - U - C$ o la trayectoria $A - B_2 - U - C$, y son las siguientes:

$$\left(z_C - z_A\right) + \frac{8}{\pi^2\, g}\left(\frac{f_{s1}\, L_{s1}}{D_{s1}^5} + \frac{\sum k_{L\,s1}}{D_{s1}^4}\right) Q_{B1}^2 + \frac{8}{\pi^2\, g}\left(\frac{f_i\, L_i}{D_i^5} + \frac{\sum k_{L\,i}}{D_i^4}\right) Q_T^2 = H_T \tag{4a}$$

$$\left(z_C - z_A\right) + \frac{8}{\pi^2\, g}\left(\frac{f_{s2}\, L_{s2}}{D_{s2}^5} + \frac{\sum k_{L\,s2}}{D_{s2}^4}\right) Q_{B2}^2 + \frac{8}{\pi^2\, g}\left(\frac{f_i\, L_i}{D_i^5} + \frac{\sum k_{L\,i}}{D_i^4}\right) Q_T^2 = H_T \tag{4b}$$

Normalmente, las longitudes de las tuberías de succión en un sistema de bombas en paralelo son cortas, por lo cual se pueden ignorar las pérdidas de carga en dichas tuberías. Por esta razón, las ecuaciones (4a) y (4b) se vuelven idénticas, resultando:

$$\underbrace{\left(z_C - z_A\right) + \frac{8}{\pi^2\, g\, D_i^5}\left(f_i\, L_i + D_i \sum k_{L\,i}\right) Q_T^2}_{\text{Curva Resistente}} = \underbrace{H_T = H_{B1} = H_{B2}}_{\text{Curva Motriz}} \tag{5}$$

Por otra parte, como se dijo al principio, $Q_T = Q_{B1} + Q_{B2}$, (6)

2. Cálculo de la altura suministrada por el conjunto de bombas en paralelo, H_T

Los caudales Q_{B1} y Q_{B2} se despejarán de las respectivas ecuaciones de H vs. Q, de la siguiente manera:

$$H_{B1} = A_1 - B_1\, Q_{B1} + C_1\, Q_{B1}^2 \tag{7}$$

$$\therefore \quad Q_{B1} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4\, C_1\left(A_1 - H_{B1}\right)}}{2\, C_1} \tag{8}$$

Así mismo,

$$H_{B2} = A_2 - B_2\, Q_{B2} + C_2\, Q_{B2}^2 \tag{9}$$

$$\therefore \quad Q_{B2} = \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4\,C_2\,(A_2 - H_{B2})}}{2\,C_2} \tag{10}$$

Sustituyendo las ecuaciones (9) y (10) en la ecuación (6), sabiendo que $H_{B1} = H_{B2} = H_T$, se tiene:

$$Q_T = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4\,C_1\,(A_1 - H_T)}}{2\,C_1} + \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4\,C_2\,(A_2 - H_T)}}{2\,C_2} \tag{11}$$

La ecuación (11) se sustituye en la ecuación (5), resultando:

$$\begin{aligned}&(z_C - z_A) + \frac{8}{\pi^2\, g\, D_i^5}\left(f_i\, L_i + D_i \sum k_{L\,i}\right)\times \\ &\times\left[\frac{-135 + \sqrt{18225 + 16000\,(69 - H_T)}}{8000} + \frac{-71 + \sqrt{5041 + 17140\,(54 - H_T)}}{8570}\right]^2 = H_T\end{aligned} \tag{12}$$

Estas dos ultimas ecuaciones se resolverán iterativa y simultáneamente junto con la ecuación de Darcy & Weisbach combinada con la ecuación de Colebrook & White, la cual elimina la variación de f con Q_T.

$$Q_T = -\frac{\pi\,D_i^2}{2}\sqrt{2\,g\,D_i\left(\frac{h_{f\,i}}{L_i}\right)}\cdot \log\left(\frac{k_{s\,i}}{3.7\,D_i} + \frac{2.51\,\nu}{D_i\sqrt{2\,g\,D_i\left(\frac{h_{f\,i}}{L_i}\right)}}\right) \tag{13}$$

A continuación, se presenta la ecuación general que integra en una sola a las ecuaciones (11), (12) y (13), adecuada para calcular H_T, dados los valores de las restantes variables:

$$\frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4C_1\left(A_1 - H_T\right)}}{2C_1} + \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4C_2\left(A_2 - H_T\right)}}{2C_2} =$$

$$= -\frac{\pi D_i^2}{2}\sqrt{\frac{2gD_i}{L_i}\left\{H_T - z_C + z_A - \frac{8\sum k_{Li}}{\pi^2 g D_i^4}\left[\frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4C_1\left(A_1 - H_T\right)}}{2C_1} + \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4C_2\left(A_2 - H_T\right)}}{2C_2}\right]^2\right\}} \times \log\left\{\frac{k_{si}}{3.7D_i} + \frac{2.51\nu}{D_i\sqrt{\frac{2gD_i}{L_i}\left\{H_T - z_C + z_A - \frac{8\sum k_{Li}}{\pi^2 g D_i^4}\left[\frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4C_1\left(A_1 - H_T\right)}}{2C_1} + \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4C_2\left(A_2 - H_T\right)}}{2C_2}\right]^2\right\}}}\right\} \tag{14}$$

En la ecuación (14) debe descartarse el signo (+) del término $\sqrt{B^2 - 4C\left(A - H_T\right)}$, dado que éste es mayor que (-B), y siendo C < 0, por lo cual resultarían valores negativos para los caudales Q_{B1} y Q_{B2}.

Para el problema que se está resolviendo, se conocen los siguientes parámetros:

$A_1 = 69$;	$B_1 = -135$;	$C_1 = -4000$
$A_2 = 54$;	$B_2 = -71$;	$C_2 = -4285$
$z_A = 1.5$ m	$z_C = 49.7$ m	$D_i = D_s = 0.35$ m
$L_i = 1872$ m	$\Sigma k_{Li} = 7.4$	$\nu = 1.141 \times 10^{-6}$ m^2/s
$g = 9.81$ m/s^2	$k_{si} = 0.0002$ m	

Al resolver la ecuación (14) para H_T, resulta:

$$H_T = 51.189\,\mathrm{m} \tag{15}$$

Así mismo, $H_{B1} = H_{B2} = H_T = 51.189\,\mathrm{m}$ (16)

3. Cálculo de los caudales aportados por las bombas, Q_{B1}, Q_{B2} y Q_T

Sustituyendo este valor en las ecuaciones (8) y (10), respectivamente, resulta:

$$Q_{B1} = 0.0519536\,\frac{m^3}{s} = 51.95\,\frac{l}{s}$$

$$Q_{B2} = 0.0186321\,\frac{m^3}{s} = 18.63\,\frac{l}{s}$$

Por lo tanto, $Q_T = Q_{B1} + Q_{B2} = 0.0705857\,\frac{m^3}{s} = 70.59\,\frac{l}{s}$

4. Comprobación del cálculo de los caudales Q_{B1} y Q_{B2}

Con los caudales Q_{B1} y Q_{B2} calculados en el numeral anterior, se puede comprobar que $H_T = 51.189\,\mathrm{m} = H_{B1} = H_{B2}$.

En efecto,

$$H_{B1} = 69 - 135\cdot(0.051954) - 4000\cdot(0.051954)^2 = 51.189\,\mathrm{m} \qquad \text{O.K.}$$

$$H_{B2} = 54 - 71\cdot(0.018632) - 4285\cdot(0.018632)^2 = 51.189\,\mathrm{m} \qquad \text{O.K.}$$

5. Cálculo de las eficiencias de las bombas, η_{B1} y η_{B2}

$$\eta_{B1} = 25\,Q_{B1} - 230\,Q_{B1}^2$$

$$\eta_{B1} = 25\,(0.051954) - 230\,(0.051954)^2 = 0.6780 = 67.80\,\%$$

$$\eta_{B2} = 37\,Q_{B2} - 380\,Q_{B2}^2$$

$$\eta_{B2} = 37\,(0.0186321) - 380\,(0.0186321)^2 = 0.5570 = 55.70\,\%$$

6. Cálculo de la potencia absorbida en el eje, de cada bomba, $P_{a\,i}$

$$P_{a\,i} = \frac{P_{u\,i}}{\eta_{B\,i}} = \frac{\gamma\, Q_{B\,i} \cdot H_{B\,i}}{\eta_{B\,i}}$$

$$P_{a1} = \frac{\gamma\, Q_{B1} \cdot H_{B\,1}}{\eta_{B1}} = \frac{\left(1000\,\frac{kgf}{m^3}\right)\cdot\left(0.051954\,\frac{m^3}{s}\right)\cdot(51.189\,m)}{0.678} = 3922.53\,\frac{kgf\cdot m}{s}$$

$$P_{a2} = \frac{\gamma\, Q_{B2} \cdot H_{B\,2}}{\eta_{B\,2}} = \frac{\left(1000\,\frac{kgf}{m^3}\right)\cdot\left(0.0186321\,\frac{m^3}{s}\right)\cdot(51.189\,m)}{0.557} = 1712.31\,\frac{kgf\cdot m}{s}$$

7. Cálculo de la potencia útil del conjunto de bombas asociadas, P_{uT}

$$P_{u\,T} = \gamma\, Q_T \cdot H_T = \left(1000\,\frac{kgf}{m^3}\right)\cdot\left(0.0705857\,\frac{m^3}{s}\right)\cdot(51.189\,m) = 3613.21\,\frac{kgf\cdot m}{s}$$

$$P_{u\,T} = 3613.21\times 9.81\,\frac{N\cdot m}{s} = 35445.59\,\frac{J}{s} = 35.45\,kW$$

8. Cálculo de la eficiencia global del conjunto de bombas asociadas, η_T

$$\eta_T = \frac{P_{u\,T}}{\sum_{i=1}^{N} P_{a\,i}} = \frac{P_{a\,T}}{P_{a\,1} + P_{a\,2}} = \frac{3613.21\,\frac{kgf\cdot m}{s}}{(3922.53+1712.31)\frac{kgf\cdot m}{s}} = 0.6412 = 64.12\,\%$$

9. Cálculo de la potencia absorbida total del conjunto de bombas, P_{aT}

$$P_{a\,T} = \frac{P_{u\,T}}{\eta_T} = \frac{35.45\,kW}{0.6412} = 55.29\,kW$$

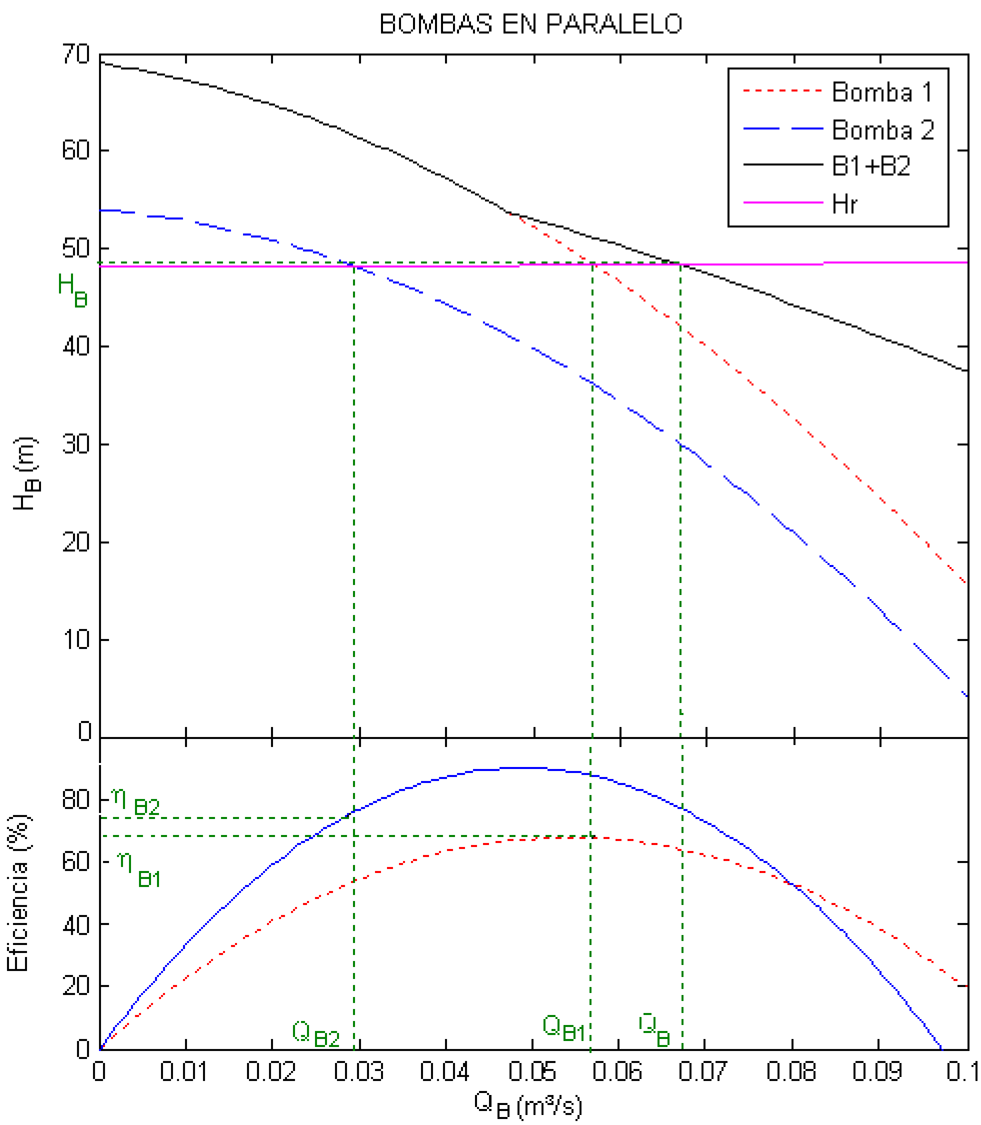
10. Cálculo del costo unitario de elevación del agua, C_u

$$C_u = \frac{C_{energía}\cdot E_{absorbida}}{\text{Volumen elevado}} = \frac{C_{energía}\cdot P_{absorbida}\cdot t_{bombeado}}{Q_{bombeado}\cdot t_{bombeado}} = \frac{C_{energía}\cdot P_{a\,T}\cdot t_b}{Q_T\cdot t_b}$$

$$C_u = \frac{\left(219\,\frac{\$}{\mathrm{kW\cdot h}}\right)\cdot(55.29\,\mathrm{kW})\cdot(1\,\mathrm{h})}{\left(0.0705857\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}}\right)\cdot(3600\,\mathrm{s})} = 47.65\,\frac{\$}{\mathrm{m^3}}$$

Solución Gráfica para el Punto de Funcionamiento:

En la siguiente figura se muestran las curvas motriz y resistente del sistema, de cuya intersección resulta el punto de funcionamiento PF (Q_T, H_T). Además, en ella se puede observar las curvas de eficiencia correspondientes a cada una de las bombas.



Problema No. 23

Analizar e interpretar cualitativamente los resultados de los Problemas 21 y 22.

BOMBAS Y ASOCIACIÓN	ECUACIÓN CARACTERÍSTICA	CAUDAL Q (m^3/s)	ALTURA H (m)	EFICIENCIA η (%)	POTENCIA P (kgf.m/s)	COSTO DE ELEVACIÓN Cu ($\$/m^3$)
BOMBA No. 1 B_1	$H_{B1} = 69 - 135\,Q - 4000\,Q^2$ $\eta_{B1} = 25\,Q - 230\,Q^2$	$Q_{N1} = 0.05435$	$H_{B1}\|_{Q=0} = 69$	$\eta_{máx,\,1} = 67.93$		
BOMBA No. 2 B_2	$H_{B2} = 54 - 71\,Q - 4285\,Q^2$ $\eta_{B2} = 37\,Q - 380\,Q^2$	$Q_{N2} = 0.04868$	$H_{B2}\|_{Q=0} = 54$	$\eta_{máx,\,2} = 90.07$		
EN SERIE	$Q_T = Q_{B1} = Q_{B2}$ $H_T = H_{B1} + H_{B2}$	$Q_{B1} = 0.080913$ $Q_{B2} = 0.080913$ $Q_T = 0.080913$	$H_{B1} = 31.89$ $H_{B2} = 20.20$ $H_T = 52.09$	$\eta_{B1} = 51.7$ $\eta_{B2} = 50.6$ $\eta_T = 51.27$	$P_{a1} = 4990.78$ $P_{a2} = 3230.44$ $P_{aT} = 8220.87$ $P_{uT} = 4214.84$	60.64
EN PARALELO	$Q_T = Q_{B1} + Q_{B2}$ $H_T = H_{B1} = H_{B2}$	$Q_{B1} = 0.051954$ $Q_{B2} = 0.018632$ $Q_T = 0.070586$	$H_{B1} = 51.189$ $H_{B2} = 51.189$ $H_T = 51.189$	$\eta_{B1} = 67.8$ $\eta_{B2} = 55.7$	$P_{a1} = 3922.53$ $P_{a2} = 1712.31$ $P_{aT} = 5635.07$ $P_{uT} = 3613.21$	47.65

En el cuadro resumen, se presentan los resultados de los problemas 21 y 22, en los que se considera la asociación de las bombas en serie y en paralelo, respectivamente. De dicho cuadro se pueden extraer las siguientes conclusiones:

i. La operación de bombas asociadas en serie conduce a un funcionamiento bastante alejado del punto de funcionamiento óptimo.

ii. Bombas distintas acopladas en serie o, lo que es lo mismo, acoplar rodetes diferentes en una misma bomba multietapas, no pueden funcionar simultáneamente cerca o en el punto óptimo de funcionamiento respectivo.

iii. El rendimiento global de dos o más bombas distintas, asociadas en serie, es relativamente bajo, tanto más bajo, cuanto más bambas diferentes se acoplen.

iv. Es mucho más interesante acoplar dos o más bombas en paralelo, pues se obtienen mejores rendimientos y caudales más cercanos a los de máximo rendimiento, aún tratándose de bombas diferentes, como ocurre en este caso.

v. Debido a que las potencias absorbidas en el eje, P_a, son menores cuando las bombas se acoplan en paralelo, que las correspondientes al acoplamiento en serie, y a que el consumo de energía eléctrica de las bombas asociadas en paralelo es menor que el correspondiente al de las bombas asociadas en serie, se genera un menor costo unitario de elevación del agua favorable a los sistemas de bombas acopladas en paralelo.

vi. En cualquier caso, es más conveniente acoplar bombas iguales que asociar bombas distintas entre sí.