Luis Carlos Arboleda y Luis Cornelio Recalde

LAS CONCEPCIONES SOCIOEPISTEMOLÓGICAS DE FRÉCHET

en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general

La forma como el científico se representa a sí mismo, su proyecto investigativo, es algo que despierta constantemente el interés en los estudios sociales sobre la ciencia. El análisis de las condiciones socioculturales de la producción de las teorías, valga de ejemplo, pasa por la explicación del sistema de valores y de conceptos del matemático creador y por la consideración de los procedimientos que eventualmente lo llevaron a concluir determinados resultados siguiendo estrategias particulares.

Las investigaciones sociohistóricas sobre la contribución original de un científico aportan en muchas ocasiones informaciones de primera mano respecto a las apreciaciones y las valoraciones del individuo creador, en el marco de las cuales se facilita la tarea de restituir aquellas estrategias investigativas. Ése es, justamente, el propósito de la siguiente exposición. Aprovechando algunos materiales documentales de nuestro trabajo "Matemáticas y experiencia: la generalización de la noción de espacio abstracto en Maurice Fréchet", nos proponemos avanzar en el estudio del problema de las representaciones del científico sobre su obra. En este proyecto se ahonda en la investigación sociohistórica sobre la teoría de los espacios abstractos del matemático francés Maurice Fréchet (1878–1973), en relación con sus concepciones filosóficas sobre los procesos de generalización matemática a partir de lo concreto y las modelizaciones abstractas con soporte empírico. Una adecuada comprensión de este problema puede contribuir a explicar a matemáticos, filósofos, historiadores, sociólogos y educadores matemáticos, la naturaleza y la función de los factores del contexto social y cultural en la formación del pensamiento matemático. Naturalmente, no vamos a profundizar aquí en aquellas representaciones de Fréchet que se refieren a técnicas de su producción teórica y a las cuales consagramos el esfuerzo más importante en el proyecto antes mencionado. Nos limitaremos a dar una visión de conjunto sobre la caracterización de la cual disponemos, en el momento presente de la ejecución de nuestro proyecto, sobre el campo de representaciones de Fréchet en la teoría de espacios abstractos. Tal aproximación a las representaciones de Fréchet sobre su producción teórica se realiza en nuestro caso con la óptica de historiadores que, a través de este proyecto de investigación, se han formado sus propias imágenes sobre el científico, su obra y las matemáticas de la época. Nos referimos a las "representaciones" de Fréchet que se desprenden de sus propios materiales y sus documentos históricos, los cuales, a su vez, han sido escogidos, seleccionados y aprovechados por el historiador, con una visión, sin duda, más amplia y más compleja comparada con lo que el mismo Fréchet quizo expresar en cada caso concreto.

Proponemos analizar las ideas que se hacía Fréchet sobre su producción matemática a partir de dos ejes fundamentales que, como veremos, se presentan íntimamente ligados al observador histórico: i) en relación con el programa filosófico-conceptual que articula su obra y ii) en relación con sus concepciones sobre el origen fundamentalmente empírico de la producción matemática en general y de la suya en particular.

Estas ideas de Fréchet se encuentran reunidas básicamente en dos publicaciones suyas: *Notice sur les travaux scientifiques* (1933) y *Les mathématiques et le concret* (1995). La primera, a la cual nos referiremos como *Noticia*, es un ensayo comprensivo sobre su contribución matemática durante el período de 1904 a 1928. En este trabajo, Fréchet explica lo específico y lo original de la misma a los evaluadores del concurso para ser admitido como miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de París. La segunda es una recopilación de artículos divulgativos y pedagógicos elaborados a lo largo de su carrera como investigador y profesor. Entre ellos, hay dos particularmente útiles para esta comunicación en cuanto abordan temas relacionados con sus concepciones empiristas: la desaxiomatización de las ciencias y los orígenes de las nociones matemáticas. En este artículo es importante destacar el debate que mantuvo Fréchet con algunos colegas y filósofos (Enriquez, Gonseth, Bernays, Lukasiewisz, Wavre y Kérékjarto), en las *Entretiens* de Zürich realizadas entre el 6 y el 9 de diciembre de 1938, alrededor del tema de los fundamentos y el método de las ciencias matemáticas.

En la *Noticia*, Fréchet escoge el siguiente epígrafe de Leibniz para explicarles a sus colegas de la Academia la naturaleza del programa filosófico-conceptual que articula y soporta su contribución en diversos campos (análisis funcional, análisis general, análisis clásico, geometría, probabilidad, matemáticas aplicadas):

> Quienes prefieren avanzar en los detalles de las ciencias desprecian las investigaciones abstractas y generales, y quienes profundizan en los principios, entran raramente en particularidades. En cuanto a mí, le doy igual importancia a lo uno y a lo otro, porque he encontrado que el análisis de los principios permite el avance de las invenciones particulares.

Fréchet explica enseguida las razones por las cuales encuentra que su obra se enmarca en el programa filosófico leibniziano sobre las matemáticas. En primer lugar, se destaca el interés compartido en orientar las investigaciones dentro de estrategias de generalización específicas; Leibniz en el análisis infinitesimal de R, y Fréchet en el análisis general de espacios de naturaleza cualquiera. En el caso de Fréchet, toda la fecundidad alcanzada por el empleo de este enfoque de generalización, a lo largo del período de 1904 a 1928, se halla expuesta con toda su dimensión en su obra *Les ensembles abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale* (1928).

El análisis de los principios que se preservan en las generalizaciones hace parte de un programa filosófico con una cobertura que va más allá del campo matemático. En nuestro proyecto de investigación intentamos justificar que Fréchet comparte el propósito central del programa leibniziano consistente en desarrollar un lenguaje simbólico generalizado. Leibniz pensaba elaborar una especie de alfabeto del pensamiento humano, de tal suerte que a partir de él se pudiera inferir y discutir sobre cualquier aspecto, en lo que denominó *charasteristica generalis* (característica universal). Se trataba de una especie de "matemática de las formas"; buscaba crear una *mathesis universalis* con el propósito de registrar en el pensamiento simbólico aquello que la percepción nos revela, considerando que "todo lo que la imaginación empírica abarca a partir de las figuras lo deriva el cálculo de signos por una demostración inequívoca e incluso conduce a otras consecuencias a las cuales la facultad de imaginar no puede llegar" (Leibniz citado por Gilles-Gaston Granger en *Philosophie et Mathématique Leibniziennes*, p. 216). No podemos ahondar aquí en esta problemática y su relación con el sistema conceptual matemático de Fréchet. Bástenos agregar que el propósito filosófico de búsqueda de la matemática universal se entiende más allá de la construcción del lenguaje matemático integrador de una red conceptual de teorías especializadas (análisis general de los espacios abstractos). También se halla presente ese propósito metafísico en actividades que Fréchet emprendió sistemáticamente como proyecto de vida, en tanto ciudadano y como intelectual. Recordemos que Fréchet fue durante muchos años promotor y organizador de la *Unión Universal de Esperanto*, lengua en la cual él mismo publicó interesantes resultados matemáticos. Si bien su uso reducía el impacto científico esperado en la circulación de tales investigaciones, Fréchet lo hacía porque quería convencer a sus colegas de que era posible y deseable escoger una lengua "ordinaria" muy general –y acaso más apropiada que otras– para comunicar enunciados matemáticos del nivel "universal" de los suyos.

En nuestra investigación hacemos un seguimiento comparativo de las producciones de Leibniz y Fréchet e intentamos demostrar que existe una especie de simetría dentro del programa filosófico que orienta la escogencia y el estudio de sus respectivos objetos de investigación en el análisis matemático.

Como sabemos (véase, por ejemplo, el libro de Granger y Belaval, *La géométrie algébrique et le calcul infinitésimal*), la creación del cálculo leibniziano reposa sobre algunos principios lógico-filosóficos: el período de la "combinatoria" (los procedimientos de la diferenciación, por ejemplo, se establecen al margen de consideraciones infinitesimales y en relación con las propiedades del triángulo característico de Pascal); la ley de continuidad (principio metafísico que permite la expansión de las propiedades de lo finito a lo infinito: permite entender, por ejemplo, cómo la tangente conserva en el límite las propiedades de la secante a través de la relación invariante entre la subtangente y la ordenada); y la realidad de conocer matemáticamente los objetos a través de su representación en el universo simbólico. En relación con este último principio, la solución más general posible del problema de la tangente pasa por encontrar un algoritmo en el cual se expresen simbólicamente todos los pasos implicados en el proceso de generalización.

Fue en este contexto programático que Leibniz introdujo las conocidas técnicas y simbolismos del cálculo; por ejemplo, las notaciones "$\int$" y "*d*" para la integración y la diferenciación, entendidas éstas como operaciones recíprocas. También sabemos que precisamente la fuerza notacional del cálculo de Leibniz desempeñó un papel determinante en la aceptación de su enfoque con relación al de Newton. Entre otras cosas porque, siendo para Leibniz los símbolos "$\int$" y "*d*" muy próximos a nuestra idea actual de operadores, se llegaba fácilmente a resultados fecundos en el análisis. Por su parte, la engorrosa metodología newtoniana de las fluxiones y la notación de punto, complicaba inútilmente los procesos. En fin, mientras que el enfoque de Newton estaba referido a variaciones infinitesimales en el tiempo, el de Leibniz trataba variables más generales en las cuales no sólo el tiempo podía ser tomado como un caso particular, sino que su manejo era por completo independiente de consideraciones infinitesimales.

No deja de llamar la atención que en cierta medida algunos de estos principios lógico-filosóficos se encuentran subyacentes a la creación matemática más general y abstracta de Fréchet. Así como se los halla contribuyendo y validando el campo teórico del cálculo infinitesimal, también es posible reconocerles esta misma función dentro del proyecto de establecer el análisis general, entendido como el estudio de las correspondencias entre variables de naturaleza cualquiera. En el proyecto de investigación antes mencionado tratamos precisamente de comprobar que, por cierto, en la obra de Fréchet se realiza el propósito leibniziano de encontrar en el análisis más general y absoluto de los principios (la matemática de las formas) la explicación más fecunda de los objetos particulares, a la cual se refiere el ya citado epígrafe de la *Noticia*. De ahí que Fréchet, en parte por la necesidad de responder a los críticos que le objetaban que algunas de sus generalizaciones eran "artificiales" (ver, por ejemplo, *Noticia*, p. 31), buscó siempre aplicaciones para sus conceptos y principios más representativos del análisis general tanto en el campo de las matemáticas formales como en el de las ciencias experimentales y técnicas.

Basta tomar como ilustración el caso de la definición de la diferencial de una transformación abstracta, en la cual Fréchet se cuidó bien de generalizar –como dice en varios de sus trabajos– aquel principio útil y necesario que dio origen a esta noción en el cálculo infinitesimal: que la diferencial dF sea la función más *simple* con respecto a la variación Δx de la variable y la más *aproximada* a la variación Δf de la función. En su "Désaxiomatisation de la Science", Fréchet mostrará que con esta definición había querido retornar a la concepción de los inicios del cálculo diferencial y dar a la diferencial un uso más intuitivo y más riguroso.

Para el caso de una función lineal F, estas dos características invariantes de la diferencial se expresarían en el algoritmo conocido: $\Delta F(x) = dF(x) + \varepsilon||\Delta x||$, en donde x es de naturaleza cualquiera (preferiblemente elemento de un espacio métrico y "afín"), y $||\Delta x||$ es la distancia (*écart*) entre x y $|x| + \Delta x$, mientras que ε es una cantidad (vector) que tiende a cero con $||\Delta x||$.

Observemos la presencia de la expresión simbólica simple como principio lógico (rasgo común de los procesos de generalización y abstracción en matemáticas durante los siglos XIX y XX). Asimismo se puede comprobar la intervención, en este proceso de definición de la diferencial abstracta de Fréchet, de otros principios filosóficos como el de continuidad, la ley de los homogéneos (simbolización y manipulación teórica distinta entre variables y cantidades respectivamente comparables) y la aceptación de que –como ocurre en el mundo de lo concreto– a nivel de lo general y abstracto también se pueden establecer relaciones y manipulaciones teóricas entre objetos con cierto grado de vaguedad, aproximación e indeterminismo.

Además de los mencionados principios lógico-filosóficos de factura leibniziana, el campo de representación de la creación matemática de Fréchet nos parece que está articulado por sus creaciones en cuanto al origen empírico de los conceptos más generales y abstractos. Inclusive se podría vislumbrar una cierta recurrencia de estos dos órdenes de representación en el sistema de valores y conceptos matemáticos de Fréchet. De allí la formulación que proponemos como título de este trabajo: "Las concepciones socioepistemológicas de Fréchet en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general".

Las nociones fundamentales de todas las ramas matemáticas, dice Fréchet en su trabajo para las *Entretiens de Zürich*, son construidas a partir de la experiencia. La experiencia conduce a la abstracción, y ésta sustituye y enriquece la experiencia. El Análisis General se fundamenta en ideas que a través de la experiencia de matemáticos en diferentes campos teóricos particulares se han revelado muy "simples" y "útiles" o "fecundas", pero que no fueron con anterioridad a Fréchet examinadas en forma tan sistemática ni en toda su generalidad. Fréchet reconoció tales ideas "candidatas a generalización", a través de su propia experiencia y la de su entorno intelectual. Escrutó en las distintas teorías cuáles eran las condiciones necesarias y suficientes en las que radicaba su éxito; separó los aspectos accesorios de los fundamentales, y les imprimió a éstos la forma a la vez más simple y de mayor alcance conceptual; por último, validó sus generalizaciones de nuevo a través de la experiencia, comprobando que ellas permitían desarrollar nuevos campos teóricos y experimentales, al mismo tiempo que perfeccionaban los ya existentes tanto a nivel conceptual como técnico. Veamos las fases del procedimiento de doble vía entre abstracción y realidad concreta que explica –de acuerdo con Fréchet– la dinámica del pensamiento matemático.

La primera etapa de generalización a partir de lo concreto se opera con la "síntesis inductiva". Ésta tiene que ver con ese a menudo largo proceso que consiste en articular en un mismo campo teórico las versiones particulares que tiene la teoría general en campos restringidos y hasta entonces inconexos. Muchas veces la generalización matemática se produce mediante procesos de iteración. Una teoría o modelo abstracto que es reconocido como válido en la experiencia dentro de espacios restringidos, se extiende entonces a campos generales, incluso a espacios de naturaleza cualquiera.

En sus investigaciones científicas Fréchet utilizó corrientemente este procedimiento de generación inductiva sobre nociones "simples" y "útiles". Como tratamos de demostrarlo en nuestro proyecto, en ello habría podido influir, aparte de ciertos principios lógico–filosóficos, la experiencia de utilización "exitosa" de este método en los trabajos de análisis funcional que hacia comienzos del siglo XX ya había hecho célebres a matemáticos como Ascoli, Volterra, Arzelà o Hilbert, y a su propio maestro Hadamard. Fréchet tenía la convicción profunda de que las generalizaciones se hacen poco a poco, respondiendo a necesidades del campo teórico, reconocidas como tales por los propios investigadores.

La segunda etapa corresponde a los procedimientos clásicos de la axiomatización de la teoría. A través de esta fase se busca la organización racional del campo teórico, la reconstrucción del objeto y la reproducción del mismo campo. Esta fase es la que permite reemplazar experiencias directas demasiado dispendiosas o simplemente alejadas del alcance de nuestras posibilidades empíricas, por experiencias indirectas que se apoyan en proposiciones de la teoría deductiva. En la tercera fase se trata de constatar que la teoría abstracta así generalizada y axiomatizada preserva las propiedades fundamentales de la red de teorías particulares asociadas con la teoría abstracta.

En este punto es necesario hacer una acotación sobre las apreciaciones de Fréchet con respecto a los peligros del formalismo excesivo. En varios de sus trabajos recopilados en *Les mathématiques et le concret* se refiere a la situación de autonomización del pensamiento abstracto, en virtud de la cual, en la medida en que se extienden los procesos de generalización, la comunidad matemática se encierra en ella misma, desarrollándose cada vez más los conceptos y métodos dentro de un mundo matemático hermético. Las teorías progresivamente se vuelven más difíciles de relacionar y analizar de acuerdo con categorías familiares al mundo de la experiencia y de la vida cotidiana. Como dice Sal Restivo, el mundo matemático va dejando atrás los mundos de las representaciones y de los paisajes de cosas identificables, para reducirse a un mundo de símbolos y notaciones autoreferenciado.

Fréchet observa esta situación (el comienzo de la hegemonía de programa de Hilbert), y alerta sobre el hecho de que las matemáticas no se pueden reducir a su parte deductiva, so pena de convertirlas en un juego del entendimiento sin ningún alcance práctico. Llega incluso a afirmar que, no obstante todas las ventajas que se le reconocían al método axiomático, resultaría "interesante identificar igualmente una construcción científica basada sobre principios diferentes e incluso opuestos". Su propuesta parece aplicarse en todo caso a aquellas teorías "que hubieran ya alcanzado un alto grado de abstracción".

Dentro de la concepción de Fréchet sobre la relación matemática y experiencia, se pone en cuestión la creencia generalizada de la autonomía de las matemáticas con respecto a la realidad. Incluso en el trabajo matemático más abstracto interviene inevitablemente –con un efecto epistémico determinado sobre la teoría– algún tipo de representación de la experiencia. Fréchet constata que la orientación de las ciencias matemáticas, el sentido hacia donde se producen sus progresos, no se halla condicionada solamente por necesidades internas (organización, sistematización, simplificación de resultados de tales transformaciones lógicas). También son motivadas por demandas externas, por problemas concretos planteados por la naturaleza y la técnica.

Enfrentado, como estaba en el período de entreguerras, con un contexto intelectual en el cual se comenzaba a valorar más los enfoques estructuralistas, formalistas y axiomáticos, Fréchet se vio conducido a poner en práctica una verdadera estrategia de divulgación de las concepciones socio-epistémicas pseudoempíricas en las cuales reposaban sus propias investigaciones. Las ideas que hemos estudiado en este trabajo están inmersas en una retórica persuasiva que a todas luces utiliza Fréchet para hacer comprender a sus diferentes interlocutores (académicos, comunidad matemática en general, profesores, distintos usuarios científicos y no científicos) la construcción, la naturaleza y la función de sus teorías más abstractas y generales. El gusto que siempre manifestó por el uso de citaciones de autores consagrados en la literatura matemática y en la historia de las ciencias se convierte en muchos casos en un instrumento privilegiado para reforzar la argumentación persuasiva sobre sus concepciones socio-epistemológicas o pedagógicas.

En el escrito en el cual propendía claramente por la "desaxiomatización de la ciencia", una campaña tan original como atrevida hacia 1925, Fréchet respalda con inteligencia sus ideas en la siguiente citación de Einstein, muy a menudo reproducida por diversos autores hasta nuestros días:

> Por más que las proposiciones de la matemática se relacionen con la realidad, no serán ciertas; por más que sean ciertas, no se relacionarán con la realidad [...]. Pero, de otra parte, es cierto que la Matemática en general, y la Geometría en particular, deben su existencia a nuestra necesidad de aprender algo sobre la forma de ser de los objetos reales [...], la geometría debería ser despojada de su carácter lógico y formal, de tal manera que se puedan articular los conceptos esquemáticos vacíos de la geometría axiomática con los objetos de la realidad accesible a la experiencia.

No sobra aclarar algunos aspectos de esta cita que revelan el mencionado "interés" comunicativo de Fréchet. En realidad en su citación Fréchet realiza un *collage* de textos del artículo "La géométrie et le expérience", publicado en la traducción de M. Solovine en 1921. Einstein se propone responder en ese artículo a los siguientes interrogantes: a) ¿cómo es posible que, siendo la matemática producto del pensamiento humano e independiente de toda experiencia, se adapte de forma tan admirable a los objetos de la realidad?, y b) ¿podría la razón humana descubrir las propiedades reales por su sola actividad y sin apoyarse en la experiencia?

Einstein está interesado en distinguir objetivamente dos clases de geometría: a) aquella que reposa sobre la inducción de la experiencia (geometría práctica), y b) aquella que resulta como consecuencia de deducciones lógicas (geometría axiomática pura).