PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL MÉTODO DE LOS ÁRBOLES DE VERDAD EN LA CORRECCIÓN DE ARGUMENTOS

JOSÉ NICOLÁS PITALÚA POLO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MEDELLÍN, COLOMBIA
2013

PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL MÉTODO DE LOS ÁRBOLES DE VERDAD EN LA CORRECCIÓN DE ARGUMENTOS

JOSÉ NICOLÁS PITALÚA POLO

TRABAJO FINAL PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE:
MAGISTER EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXCATAS Y NATURALES

Directora:
JULIA VICTORIA ESCOBAR LONDOÑO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MEDELLÍN, COLOMBIA
2013

Dedicado a
mi mama

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi maestra y directora de este proyecto Julia Victoria Escobar Londoño, por darme la oportunidad de llevar a cabo un trabajo que desde hace mucho quería hacer y por compartir conmigo ese don raro y que ella posee que no es otro que el de con muy pocas palabras decir muchas cosas.

Agradezco a mi mama Elsa Ester Polo Sanchez por ayudarme de muy diversas maneras a lograr las metas que me he propuesto y hasta ahora he alcanzado.

Doy gracias a mi gran amiga Kety Ester Galeano Anaya por animarme a proseguir aún cuando las cosas no pintaban bien, ya sea por uno o por otro problema y también por señalarme varios errores que fuí cometiendo a lo largo de toda la maestría.

Quiero darles las gracias a los maestros de la Universidad Nacional, en especial al profesor Juan Gonzalo Moreno. Su erudicción aunada a su amor por enseñar reafirmaron en mi, el deseo de ayudar a la formación de otros, mediante la educación.

Por último desde ya pido disculpas, en caso de que suceda, que haya dejado de mencionar a alguien importante en el proceso de realización de este trabajo.

Resumen

En este trabajo busqué realizar una propuesta de enseñanza del método de los árboles de verdad para la lógica proposicional bivalente, como alternativa al método de las tablas de verdad, y obtener con dicho método las propiedades semánticas de una fórmula dada en el lenguaje proposicional de la lógica bivalente, determinar si un conjunto de fórmulas es consistente y finalmente para corregir argumentos ya sea que estén dados en el lenguaje proposicional de la lógica bivalente o traducidos al lenguaje proposicional desde el lenguaje natural que en este trabajo es el español. Dicha propuesta *puede* ser aplicada en la básica media de Colombia por docentes de filosofía o matemáticas.

Puesto que los los árboles de verdad se aplican específicamente para la determinación de la consistencia de un conjunto de fórmulas, definí todas las demás propiedades semánticas, en terminos de consistencia. Para la corrección de argumentos, dividí la propuesta en dos etapas: traducción y aplicación propiamente dicha del método de los árboles de verdad en la corrección de argumentos. Primero de los que están dados en el lenguaje proposicional y segundo, de los argumentos traducidos al lenguaje proposicional, desde el lenguaje natural (español). Así los docentes que deseen aplicar la propuesta, encontrarán una organización de contenido que desde lo más sencillo a lo más complejo.

Dado que no laboro en un colegio, propuse a varios profesores de grado décimo y undécimo tanto en Medellín, como en Montería, la aplicación de la propuesta, encontrándome en todos los casos con una respuesta negativa, ya que por una parte, muchos de ellos me comentaron que en sus colegios la materia de lógica no se imparte y por otra parte los que sí la imparten sólo manejan el método de las tablas de verdad, pues es el único que conocen. Así que en última instancia la propuesta está encaminada a que el docente de matemáticas o filosofía de la básica media en Colombia se apropie del método a medida que se decida a implementarlo.

Plabras clave: Lógica, árboles de verdad, semántica, educación.

Abstract

In this paper I sought to make a proposal of teaching the method of truth trees bivalent propositional logic, as an alternative to the method of truth tables, and get with the method the semantic properties of a given formula in the propositional language bivalent logic to determine if a set of formulas is consistent and finally to correct arguments whether they are given in the language of logic propositional bivalent or translated into propositional language from the natural language in this work is the Spanish. This proposal *can be* applied in the middle of Colombia by basic philosophy or mathematics teachers.

Since real trees apply specifically to consistency determining a set of formulas I defined all other semantic properties, in terms of consistency. For the correctness of arguments, the proposal I divided into two stages: translation and proper application of the method of truth trees to correct arguments. First of which are given in the propositional language and second, arguments translated into propositional language, from natural language (Spanish). So teachers who wish to implement the proposal, find an organization of content from the simplest to the most complex.

Given that I work in a school, several teachers suggested to tenth and eleventh grade both in Medellin, as in Monteria, the implementation of the proposal, finding in all cases with a negative response, since on the one hand, many of them told me that in their schools the subject is not taught logic and moreover teach those who did only handle the method of truth tables, it is all they know. So ultimately the proposal is aimed at the teaching of mathematics or philosophy of average basic method appropriates Colombia as he decides to implement.

Key Words: Logic, truth trees, semantic, education.

Índice general

INTRODUCCIÓN **1**

1. GENERALIDADES **2**
1.1. Problema 2
1.2. Justificación 3
1.3. Objetivos 4
1.3.1. Objetivo General 4
1.3.2. Objetivos Específicos 5

2. REFERENTES TEÓRICOS **6**
2.1. Antecedentes 6
2.2. Marco teórico 7
2.2.1. Breve historia de la lógica 7
2.2.1.1. La lógica de Aristóteles 7
2.2.1.2. La lógica megarico-estoica 8
2.2.1.3. La novedad de Frege 8
2.3. Función argumentativa del lenguaje 8
2.4. Lógica formal 9
2.4.1. Divisiones de la lógica 10
2.5. Lenguaje formal de primer orden 10
2.6. Cuadro de símbolos formales 12
2.7. Lenguaje y metalenguaje 13
2.8. Definición de término 14
2.8.1. Definiciones recursivas o inductivas 14
2.9. Fórmulas 15
2.9.1. Fórmula atómica o predicación 15
2.9.2. Definición de fórmula 16
2.10. Clases de fórmulas 17
2.10.0.1. Negación 17
2.10.0.2. Conjunción 17
2.10.0.3. Disyunción 18

2.10.0.4. Implicación 18
2.10.0.5. Coimplicación 18
2.10.0.6. Generalización 18
2.10.0.7. Particularización 18
2.10.0.8. Definiciones adicionales 18
2.11. Semántica de la lógica proposicional 21
2.11.1. Reglas para la asignación de los valores de verdad . . . 21
2.11.2. Tautologías, contradicción e indeterminación 24
2.11.3. Equivalencia semántica 25
2.11.4. Consistencia semántica 25
2.11.5. Validez e implicación semántica 26
2.12. Definición de las propiedades semánticas en función de la consistencia de un conjunto de fórmulas 27

3. DISEÑO DE LA PROPUESTA 29
3.1. Introducción 29
3.2. Sensibilización 30
3.3. Árboles de verdad en LP 32
3.3.1. Reglas para conjunción, la disyunción y la negación . . 33
3.3.2. Reglas para el condiconal y el bicondicional 42
3.3.3. Tautologías, contradicciones y fórmulas indeterminadas 47
3.3.4. Equivalencia semántica 50
3.4. Aplicación por etapas 52
3.4.1. Etapa 1: Traducción 53
3.4.1.1. Fórmulas atómicas 54
3.4.1.2. Fórmulas 55
3.4.1.3. Negación 55
3.4.1.4. Conjunción 56
3.4.1.5. Disyunción 56
3.4.1.6. Implicación 57
3.4.1.7. Coimplicación 58
3.4.1.8. Argumentos 58
3.4.2. Etapa 2 61
3.4.2.1. Aplicación del método de los árboles de verdad para argumentos en LP 61
3.4.2.2. Aplicación del método de los árboles de verdad para argumentos en español 63

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 70
4.1. Conclusiones 70
4.2. Recomendaciones 72

Índice de cuadros

2.1. Símbolos, lógicos, no lógicos y auxiliares 12

3.1. Diseño de la propuesta por pasos 30
3.2. Enseñanza por etapas del método de los árboles de verdad . . 53

INTRODUCCIÓN

La lógica matemática tiene su origen en la obra *conceptografía* de Gottlob Frege (1848-1925). En un principio Frege construyó dicha lógica con el propósito de fundamentar a la matemática, lo que se conoce como logicismo. Y aunque dicho propósito se vino abajo, por la llamada paradoja de Russell, el trabajo de Frege legó a la posteridad la *teoría ingenua de conjuntos* y las bases de la lógica moderna. Ahora bien desde 1879, año de aparición de la *conceptografía*, hasta ahora, se ha aplicado el formalismo de la lógica matemática para entender la historia de la lógica, para axiomatizar la lógica aristotélica, para buscar lógicas diferentes a las bivalentes, para estudiar diversas teorías filosóficas y para formalizar el lenguaje común y así evitar la vaguedad del mismo.
En la media vocacional se enseña (cuando se hace) propiamente la parte de la lógica matemática conocida como lógica proposicional bivalente, usando el método semántico de las *tablas de verdad*. Pero dicho método no es único ya que los *árboles de verdad* permiten obtener los mismo resultados con la ventaja que trae consigo usar los diagramas de árbol.
En esta tesis me propongo usar primeramente el método de los árboles de verdad para obtener todas las propiedades semánticas de la lógica proposicional bivalente. Después y ayudándome de los resultados obtenidos mostraré como corrregir argumentos dados en el lenguaje natural (español). Lo anterior para ofrecer a los profesores de educación media en Colombia una propuesta de enseñanza de la lógica proposicional bivalente que *puede* ser usada como alternativa a la tradicional. También busco ayudar a que los estudiantes de educación media estructuren su pensamiento.

1

GENERALIDADES

1.1. Problema

Al trabajar la competencia argumentativa, estamos dando un paso fundamental para superar las limitaciones propias de la escuela nueva y tradicional[1]. Esta competencia se expresa en desempeños que van en dos direcciones: en primer lugar, en la capacidad de comprender la racionalidad de un argumento expuesto para tomar partido ante el mismo y, por el otro, la capacidad de producir un argumento razonable y convincente y sustentar esa posición, gracias a la solidez de las premisas y a la ilación lógica entre premisas y conclusiones. Tradicionalmente en la básica media de Colombia, para «ver» dicha ilación se enseña el método de las tablas de verdad de la lógica bivalente. Una de las causas de esto, es que muchos de los docentes de filosofía o licenciados en matemática que imparten lógica en el nivel de educaión básica y media de Colombia, mientras cursaron sus estudios en la universidad, vieron en la mayoría de los casos un único curso de lógica moderna, en donde se centro la atención en la parte semántica correspondiente a las *tablas de verdad* de la lógica proposicional bivalente.[2] Sin embargo el uso de este método se vuelve engorroso si se usan fórmulas de la lógica proposicional que tengan tres o más fórmulas atómicas, llevando a que en ocasiones por tratar de «llenar la tabla» se olvide que lo que se quiere no es tan sólo llenarla sino dar cuenta de la relación lógica entre premisas y conclusión[3].

[1] ZURIBÍA,J., *Las competencias argumentativas e interpretativas en la educación básica y media*, [En línea]. Junio 2009. P.35. Disponible en la web: http://www.slideshare.net/maurelis/las-competencias-412550

[2] CABANZO,A., *La enseñanza estudios de la lógica y el análisis del texto argumentativo*, revista actualidades, número 54, julio-diciembre 2009.190 p.

[3] CABANZO, Op.cit., p.172

La lógica matemática ha avanzado mucho, hasta el punto de existir muchas lógicas y donde la lógica proposicional bivalente es sólo una de las opciones, sin embargo y por ser la que nos ayuda a reproducir más aspectos de la realidad es que la que más se enseña[4]. Sin embargo la misma lógica bivalente ha progresado bastante, hasta establecerse las lógicas modales donde el uso de las tablas de verdad es insuficiente para lograr una mayor comprensión. Así pues el uso *exclusivo* de las tablas de verdad estaría bien si los estudiantes de la básica media trataran con la lógica bivalente sólo en esta etapa de su educación, cosa que no es cierta ya que incluso las discusiones sobre la existencia de Dios se entienden mejor usando el aparato de la moderna lógica bivalente[5]. Así pues los estudiantes se verán desarmados al verse enfrentados con argumentos donde el sólo uso de las tablas de verdad no baste para la corrección de un argumento y este problema se agrava si como dije antes los docentes encargados de enseñar lógica en la media básica no sepan usar un método distinto al de las tablas de verdad para establecer propiedades semánticas tales como: si una fórmula es una tautología o una contradicción o si es semánticamente indeterminada, la consistencia de un conjunto finito de fórmulas y si un argumento es semánticamente válido.

1.2. Justificación

El procedimiento de la búsqueda de contraejemplos, ha sido utilizado en lógica desde antiguo para la invalidación de argumentos cuya corrección se pone en tela de juicio. Pero el hallazgo del contraejemplo era algo que hasta el presente dependía prácticamente del azar. Sin embargo, desde 1955 se ha impuesto entre los lógicos, gracias a las investigaciones, llevadas a cabo separadamente, de E. W. Beth y J. Hintikka[6], un método que permite la búsqueda sistemática de la interpretación invalidadora del argumento. Ello ha dado lugar a una nueva técnica de cálculo que recibe el nombre de *árboles de verdad*. La caracteristica principal de ésta técnica es operar con un conjunto muy reducido de reglas.

Las tablas de verdad son otra técnica para encontrar contraejemplos cuando se quiere invalidar un argumento dado en el lenguaje usado por la lógica proposicional. Su mayor virtud es que permite ver fácilmente cómo el valor

[4] Peña, L., *Introducción a las lógicas no clásicas*, segunda edición, UNAM, México, 1993. Pág. 7 julio-diciembre 2009.190 p.

[5] Páez M., *Introducción a la lógica moderna*, segunda edición, uniandes, Bogotá, D.C., 2010. Pág.336

[6] Garrido,M., *Lógica simbólica*, cuarta edición, tecnos, Madrid, 2001. Pág. 172

de verdad de una fórmula se genera a partir del valor de verdad de las fórmulas atómicas que la componen. Sin embargo, las tablas de verdad tienen el defecto de ser inmanejables cuando la fórmula tiene 4 ó 5 fórmulas atómicas, y entre más filas de valores haya, mayor será el riesgo de cometer un error. Este defecto de alargarse causa en el estudiante, por una parte la sensación de que la lógica se trata de sólo llenar una tabla de valores de verdad perdiéndose el objetivo que no es otro que el ver la ilación lógica de premisas y conclusión y por otra parte causa frustración al ver el estudiante que ha *llenado* una larga tabla y ver con todo que se ha equivocado[7].

En razón a lo anterior la enseñanza de *los árboles de verdad* se presenta como una alternativa a la enseñanza tradicional que precisamente por usar árboles permiten seguir «gráficamente» la ilación lógica entre premisas y conclusión y que por lo tanto no harían, ni aunque se de el caso de que los árboles sean «largos» que quien los realice se olvide que lo construye lo hace no tan sólo para llevar a cabo una tarea (por ejemplo llenar una tabla de valores de verdad) sino también para saber cómo es que la conclusión se sigue lógicamente de las premisas[8]. Pero para enseñar un tema es condición necesaria (pero no suficiente) saber del mismo, de ahí que en esta monografía se presente una propuesta del uso del método de los árboles de verdad de la lógica proposicional bivalente, en la corrección de argumentos, que se *puede* enseñar a estudiantes de media básica en Colombia, compuesta por pasos. Así los docentes que no están familiarizados con este método al verlo como *opcional* y *secuencial* lo pueden ir enseñando a media que se vayan apropiando mejor del mismo.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Diseñar una propuesta de enseñanza compuesta por pasos, del método de los árboles de verdad, en la corrección de argumentos, que *puede* ser puesta en práctica por docentes de filosofía o matemáticas en los niveles educación básica y media de Colombia.

[7]CABANZO, Op.cit., p.172
[8]GARRIDO, Op.cit., p.175

1.3.2. Objetivos Específicos

1. Usar el método de los árboles de verdad de la lógica proposicional bivalente para determinar cuando una fórmula es una tautología, cuando una fórmula es una contradicción y finalmente cuando una fórmula es una fórmula semánticamente indeterminada.

2. Mostrar cómo se formalizan enunciados del lenguaje cotidiano y su relación con expresiones del lenguaje de la lógica formal proposicional bivalente.

3. Corregir argumentos dados en lenguaje natural (español) a partir del uso del método de los árboles de verdad para el lenguaje de la lógica proposicional bivalente.

2

REFERENTES TEÓRICOS

2.1. Antecedentes

Para diseñar una propuesta de enseñanza compuesta por pasos, del método de los árboles de verdad, en la corrección de argumentos, que puede ser puesta en práctica por docentes de filosofía o matemáticas en los niveles educación básica y media de Colombia, es conveniente referir la consulta documental de trabajos realizados que guardan relación con los objetivos propuestos en este estudio, en función a ello se menciona a:

Cabanzo A[1]. Que efectuó un trabajo donde expresa que los métodos visuales sirven para la apropiación de los distintos conceptos en las diferentes ramas de la ciencia. Recomendó la necesidad de estudiar los distintos métodos visuales para entender la lógica bivalente elemental que servirán para comprender las partes más avanzadas de la misma, como la lógica modal.

Lo antes señalado, tiene estrecha vinculación con los objetivos de esta monografía, en cuanto a que el método de los árboles de verdad es un método visual, para estudiar la corrección de un argumento.

De igual manera Sepúlveda D[2]. analizó la Importancia de la competencia argumentativa en matemáticas, estableciendo que los distintos métodos gráficos resaltan el caracter constructivo en los estudiantes, mejorando su

[1] CABANZO,A., *Métodos visuales para la verificación de argumentos y el análisis semántico*, [En línea]. Marzo 2011. 28 p. Disponible en la web: http://revistas.lasalle.edu.co/index.php/lo/article/download/496/416

[2] SEPÚLVEDA,D., *Evaluación de la competencia argumentativa en matemáticas*, [En línea]. Mayo 2013. 80 p. Disponible en la web: http://www.bdigital.unal.edu.co/8241/sthash.FjAyrdnh.dpuf

capacidad para realizar argumentos deductivamente fuertes.

La referencia anterior, se relaciona con el propósito de buscar una forma gráfica apropiada para establecer la relación lógica entre premisas y conclusión.

Por otra parte Martinez C[3]. desarrolló una investigación, donde propone un modelo normativo de evaluación de argumentos y explicaciones en contextos dialógicos, en función de 1) la disponibilidad o no de evidencias y 2) el acuerdo o desacuerdo entre los interlocutores con respecto a la verdad de la afirmación que es objeto del diálogo.

El estudio mencionado se emparienta con el reconocimiento de que el simple uso de las tablas de verdad no capacita al estudiante para la defensa de sus argumentos ni para la elaboración efectiva de los mismos.

2.2. Marco teórico

2.2.1. Breve historia de la lógica

2.2.1.1. La lógica de Aristóteles

Nadie antes de Aristóteles (384/83-322 a.C.) investigó temáticamente la lógica como tal, es decir, como la teoría de la inferencia. Sin embargo, el asunto abordado en las primeras obras lógicas de Aristóteles, como son el tratado de los *Tópicos* y *Sobre la refutación de los sofismas*, no es la lógica de la ciencia sino la *dialéctica* o lógica de la opinión,[4] la teoría de la argumentación no necesaria, sino solamente probable, que es el que ejercitamos en la vida diaria y de la que disponemos cuando aún no se ha generado la ciencia. Sólo bastante más tarde, ya en fase de plena madurez, escribió Aristóteles, en la obra transmitida con el título *Segundos Analíticos*, su teoría de la demostración o razonamiento científico. Y más tarde aún llevaría a cabo el análisis puramente formal del razonamiento o silogismo en los *Primeros Analíticos*.

[3]Martinez,C., *Coordinación pragmática de teorías y evidencias en la argumentación*, [En línea]. Junio 2010. 60 p. Disponible en la web: http://www.bdigital.unal.edu.co/1481/sthash.k4cREZ2J.dpuf

[4]Más adelante veremos que en la lógica como ciencia se considera que un argumento es válido cuando la conclusión se sigue *necesariamente* de las premisas, pero en la lógica que usamos para expresar opiniones, la conclusión se sigue *probablemente* de las premisas.

2.2.1.2. La lógica megarico-estoica

. A diferencia de lo que sucede con Aristóteles, cuyos escritos lógicos se han conservado con bastante integridad , sólo conocemos textos fragmentarios de los lógicos megáricos y estoicos a través del testimonio de sus contemporáneos, lo cual permite sin embargo, advertir que con ellos se desarrolla por primera vez la lógica proposicional y la teoría de los conectores.
Los lógicos de la *escuela estoica*, el más brillante de los cuales fue Crisipo (siglo III a.C.), no sólo dominan el lenguaje de los conectores. Cuentan con un sistema deductivo basado en cinco reglas de inferencia o «improbables» que formulan así:

- Si lo primero, entonces lo segundo; pero lo primero; por tanto lo segundo.
- Si lo primero, entonces lo segundo; pero no lo segundo; por tanto no lo primero.
- No a la vez lo primero y lo segundo; pero lo primero; por tanto, no lo segundo.
- O lo primero o lo segundo; pero lo primero; por tanto, no lo segundo.
- O lo primero o lo segundo; pero no lo segundo; por tanto, lo primero.

2.2.1.3. La novedad de Frege

El año de 1879 es decisivo en la historia de la lógica, ya que en él aparece un libro que define el paradigma no aristotélicos, hoy dominante, de una lógica concebida como ciencia exacta, al modo matemático. Dicho libro libro se tituló *Conceptografía*, obra del lógico y matemático alemán Gottlob Frege. Gottlob Frege (1848-1925) fue profesor de matemáticas en la Universidad de Jena, donde transcurrió su vida. Abrigaba la convicción de que la ciencia matemática, dejando aparte a la geometría, podía deducirse de la lógica. Y al encontrar dificultades en el intento de probar su tesis en el lenguaje ordinario decidió elaborar el instrumental lógico adecuado, incluyendo el diseño de un lenguaje artifical.

2.3. Función argumentativa del lenguaje

El lenguje tiene variados usos, por ejemplo cuando le decimos (o le escribimos) a un amigo que el equipo de de fútbol de Colombia, le marcó tres goles al equipo de fútbol de Bolivia, estamos usando el lenguaje para informar pero también podemos usar el lenguaje de otra forma, podríamos usar el lenguaje para estudiar al lenguaje mismo, sobre todo cuando nos sirve para estudiar las unidades comunicativas básicas: los enunciados[5]. Así pues algunas manifestaciones del uso del lenguaje del que estamos hablando son aceptar, rechazar, contradecir, suponer etc. Al lenguaje usado de esta forma lo llamaremos argumentativo. Ejemplos de argumentos son los siguientes:

1. Toda persona miente; pero todos los que van a fiestas son personas. Por tanto todo el que va a fiestas es un mentiroso.
2. Si llueve, entonces no salgo; es cierto que no salí. Por tanto no llovió
3. Podemos afirmar con certeza que ningún león ha tenido el gusto de conocer a un marciano; pero todo el que conoce a un marciano es digno de ser invitado por el presidente a bailar en el palacio presidencial. Por tanto ningún león es digno de ser invitado por el presidente a bailar en el palacio presidencial.
4. Si Juan viene a mi casa, entonces no voy a la de él; pero Juan viene a mi casa. Por tanto no voy a la de él.
5. O leo esta monografía o juego fútbol. Pero no juego fútbol. Por tanto leo esta monografía.
6. Si salgo, entonces si voy donde Ana, entonces compraré caramelos. Pero saldré e iré donde Ana. Por tanto compraré caramelos.

2.4. Lógica formal

En la sección anterior vimos ejemplos de argumentos, pero si los vemos con más atenció notarémos que tienen ciertas sumulitudes tanto en el uso de ciertas palabras (entonces, todo, ninguno), como en la forma (si tal, entonces cual, pero tal. Por tanto cual, etc.) Pues bien del estudio de estas simulitudes y de las relaciones de dichas premisas es el objeto de estudio de la lógica[6] formal, usando un lenguaje técnico, *la lógica formal* es una ciencia que tiene por objeto el análisis formal de los argumentos.

[5]un enunciado es una frase con sentido completo y que puede ser afirmada con verdad o falsedad

[6]de ahora en adelante y por economía usaremos la solamente la palabra lógica en el sentido de la lógica formal

Como mencionamos antes (ver la nota al pie número 6) más adelante estudiaremos una definición más técnica de lo que es un argumento pero por ahora basta saber que lo que nos quiere decir la definición técnica de la lógica es que ella se encarga de estudiar las relaciones de necesidad que hay entre las premisas y la conclusión, es decir, la lógica nos dice si en el caso de que aceptemos las premisas, tenemos que *necesariamente* aceptar o no la conclusión.

2.4.1. Divisiones de la lógica

La lógica tiene un doble criterio de clasificación: *sintáctico* y *semántico*. Según el criterio sintáctico la lógica se clasifica según las fórmulas que se usen, es decir, sin importar cuántos valores de verdad se les asigne a dichas fórmulas, en:

1. **Lógica de proposiciones o enunciados o juntores**: Solo se usan las siguientes fórmulas: negación, conjunción, disyunción, implicación y coimplicación.

2. **Lógica de predicados o cuantificadores**: Se usan las fórmulas anteriores, además de la particularización y la generalización

A la unión de la lógica de enunciados y la lógica de predicados se le llama *lógica de primer orden*.
Si las letras predicativas se consideran como variables cuantificacables, entonces estaremos tratando con la lógica superior o de n-ésimo orden.
Según el criterio semántico la lógica se clasifica según el número de valores de verdad de una fórmula, en:

1. **Lógica clásica**: Sus fórmulas son bivalentes, es decir, las fórmulas son o verdaderas o falsas y no puede ocurrir que lo sean a la vez.

2. **Lógica no-clásica** Sus fórmulas pueden tener más de dos valores de verdad[7].

2.5. Lenguaje formal de primer orden

Si se quieren analizar lógicamente ciertos elementos científicos (conceptos, teorías, derivaciones y cosas de ese estilo) a menudo el mejor procedimiento

[7]aquí estudiaremos sólo la lógica de juntores bivalente

es traducir dichos elementos a un lenguaje simbólico. En este lenguaje, en contraste al lenguaje ordinario, tenemos signos libres de toda ambiguedades y podemos hacer formulaciones exactas. Por tanto, en este lenguaje tanto la pureza como la corrección de una derivación se pueden evaluar con una mayor facilidad y precisión. Ahora bien, un lenguaje formal debe componerse de tres elementos:

1. Una *tabla de símbolos formales*, que viene a ser las veces de lo que en los lenguajes naturales se llama diccionario ya que aquí constaran los signos, términos y variables del lenguaje formal.

2. Unas *reglas de formación de fórmulas*. Las fórmulas son al lenguaje formal lo que las oraciones a los lenguajes naturales, pero las reglas de formación de fórmulas (oraciones) en los lenguajes naturales son flexibles mientras que no es así en el lenguaje formal, por ejemplo podemos decir, « Kety *no* ha venido», que significa lo mismo que «*no* ha venido Kety» mientras que para negar una expresión en el lenguaje formal, el negador debe ir irremediablemente siempre, como prefijo de la expresión negada.

3. Unas *reglas de transformación de fórmulas* que, permiten pasar de unas expresiones a otras

2.6. Cuadro de símbolos formales

Los símbolos del lenguage formal son de dos tipos, *lógicos* y *no lógicos*[8], en el cuadro 2.1 se presentan además de los signos lógicos y no lógicos, los símbolos auxiliares.

	nombre	símbolo
Símbolos lógicos	conectores	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow.$
	cuantificadores	$\bigwedge, \bigvee$
	identidad	$=.$
Símbolos no lógicos	letras enunciativas	$p, q, r, ...p_1, q_1, r_1, ...$
	letras predicativas	$P, Q, R, ...P_1, Q_1, R_1, ..., P^n_m, Q^n_m, R^n_m....$
	letras individuales: variables constantes	 $x_1, y_1, z_1, ...$ $a_1, b_1, c_1, ...$
	letras funtoriales	$f, g, h, f_1, g_1, h_1, ...$
Símbolos auxiliares	paréntesis y comas	(,)

Cuadro 2.1: Símbolos, lógicos, no lógicos y auxiliares
(tomado de Garrido, M., *Lógica simbólica*, cuarta edición, tecnos, Madrid, 2001. Pág. 53-54)

Notas:

1. Las comas y puntos en la tabla solo sirven para separar los signos, es decir, no son símbolos del lenguaje formal.
2. Los subíndices (en todos los símbolos lógicos) sirven para diferenciar las letras.
3. A los símbolos '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$', los denominaremos como *conectores* y a los símbolos '$\bigvee$', '$\bigwedge$', los llamaremos *cuantificadores*
4. Las variables son de dos tipos:

[8] De acuerdo a los signos auxiliares escogidos, la presentación del lenguaje formal puede variar

a) Las variables que pueden cuantificarse[9] y

b) Los *parámetros*. Que son las variables que no se pueden cuantificar: con excepción de las letras individuales correspondientes a las variables, los símbolos dados en el cuadro 2.1, son todos parámetros[10].

5. Los superíndices (en las letras predicativas y funtoriales) indican el número de términos o el número de variables que se pueden cuantificar (solo en el caso de las letras predicativas), que se yuxtaponen a la derecha de la letra y la llamaremos n-ádica, así por ejemplo a la letra 'P^2' se le colocarán dos términos o variables que puedan cuantificarse ('P^2ab' o '$P^2(fa)b$' o 'P^2xy', etc.) y la llamaremos diádica.

2.7. Lenguaje y metalenguaje

Como hemos visto, la lógica es una ciencia que trata sobre un lenguaje (el lenguaje formal) y por esa razón, hemos de distinguir entre el lenguaje que se estudia y el lenguaje en el que se hace el estudio, al primero lo llamaremos *lenguaje objeto* y al segundo, *metalenguaje*, en nuestro caso el metalenguaje (ya que por lo anterior, podemos concluir que el lenguaje objeto son los símbolos y expresiones formales del lenguaje de la lógica) es el castellano usual, acompañado en su momento de signos auxiliares (paréntesis) y abreviaturas.
La mejor forma de entender lo anterior es usando varios ejemplos: la expresión

$$((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$$

es una *fórmula* del lenguaje objeto. Ahora bien si convenimos en en denominarla '$\wp$', este símbolo (que no aparece en el cuadro 2.1) pertenece ya, al metalenguaje, es decir el símbolo '$\wp$' es el *nombre* metalingüístico de la fórmula.
Ejemplo:
Se podría usar la expresión metalingúística $\wp \vee \Re$ como el resumen de las espresiones:

$$p \vee q$$
$$p \vee r$$
$$q \vee r$$

[9]En la sección de definiciones adicionales, precisamente en lo que es una variable ligada, se explica bien lo de la cuantificación de una variable.

[10]En la lógica superior, las letras predicativas se consideran variables cuantificables.

así la expresión $\wp \vee \Re$ no sería una fórmula, sino un *esquema de fórmula*. Junto con lo anterior ahora estudiaremos el principio de *uso* y *mención*. Una expresión es *usada* cuando se emplea teniendo en cuenta lo que significa. Por ejemplo, en el enunciado:

Kety es hermosa.

la expresión 'Kety' es usada porque designa a una persona (una mujer). Pero si la expresión se considera como en su materialidad de yuxtapisicón de signos, se dice que es *mencionada*. Por ejemplo en el enunciado:

'Kety' es una palabra de cuatro letras

La misma expresión es mencionada. Cuando se menciona una expresión debe ir entre comillas.

2.8. Definición de término

Definición 2.1. *1. Una constante individual es un término.*

2. Una letra funtorial n-ádica seguida de n términos, siendo $n \geq 1$.

3. Unicamente son términos las expresiones que satisfagan 1. y 2.

De lo que es un parámetro y de la definición de término podemos deducir que *todo* término es un parámetro aunque no todo parámetro es un término.

Ejemplos: son términos las siguientes expresiones:
$a, \quad b, \quad c, \quad fa, \quad fb, \quad fc, \quad f^2ab, \quad f^3g^3abch^2bcf_1a \quad .$

2.8.1. Definiciones recursivas o inductivas

La anterior definición es del tipo *recursiva o inductiva*, es decir a un objeto se le define en términos de objetos del mismo tipo[11]. Las definiciones inductivas constan de tres clausulas:

[11]Cuando la definición recursiva se aplica al lenguaje de la lógica, entonces se llama definición por *inducción semiótica*.

- **Regla base:** Un conjunto inicial de elementos que pertenecen al conjunto especificado. En el dafenición de término, la regla base está dada en 1.(Una constante individual...).

- **Regla inductiva:**Regla que define cómo agregar nuevos elementos al conjunto desde aquellos que ya están en el conjunto. En la definición de término, la regla inductiva está dada en 2.(una letra funtorial...)

- **Regla de exclusión:**[12]El conjunto no contiene nada más que aquello especificado por la regla base o que se obtiene recursivamente por aplicación de la regla recursiva. En la definición de término esta regla está dada en el punto 3. (Unicamente los términos...)

2.9. Fórmulas

Como vimos las definiciones recursivas o inductivas, son muy útiles, tanto así que definiremos lo que es una fórmula en forma recursiva, donde la regla base será la definición de fórmula atómica (que también es recursiva).

2.9.1. Fórmula atómica o predicación

Definición 2.2. *1. Una letra enunciativa es una fórmula atómica.*

2. Una letra predicativa n-ádica seguida de n términos (siendo $n \geq 1$) es una fórmula atómica[13].

3. Unicamente son fórmulas atómicas las expresiones que satisfagan 1. y 2.

Veamos a continuación algunos ejemplos:

- Por 1., las siguientes expresiones son fórmulas atómicas:
  p, q, r, p_1.

[12]Por lo general ésta regla se da implícitamente, es decir, por ejemplo, si en la definición de término no se hubiese puesto el punto 3. se debería entender que únicamente las expresiones que cumplieran los puntos 1. y 2. serán consideradas como términos. Sin embargo para mayor comodidad del lector, en esta monografía la regla de exclusión se pondrá explicitamente.

[13]Si sólo usamos el lenguaje proposicional ésta clausula es innecesaria

- Por 2., las siguientes expresiones son fórmulas atómicas:
  $P^2bc, Q^1f^2ab,$
  $R^5aaaaa, P^4g^3h^2abf^1ca_1b_2abc_1.$

- Por 3., las siguientes expresiones no son fórmulas:
  $(p \to q), \quad (P^2ab \to \bigvee x(P^2ax \wedge P^2xb)), \quad R^2xa.$

2.9.2. Definición de fórmula

Una fórmula o expresión bien formada en en el lenguaje formal que estamos estudiando es un símbolo o una secuencia de símbolos del cuadro 2.1 que se ciñe estrictamenete a las siguientes reglas de formación:

Definición 2.3. *1. Una fórmula atómica es una fórmula.*

2. si $\wp$ es una fórmula, entonces $\neg\wp$ es una fórmula.

3. si $\wp$ y $\Re$ son fórmulas, entonces $(\wp \wedge \Re)$, $(\wp \vee \Re)$, $(\wp \to \Re)$, $(\wp \leftrightarrow \Re)$, son fórmulas.

4. si $\wp$ es una fórmula, y $\wp^*$ resulta de cambiar en $\wp$ un término por $\boldsymbol{x}$, entonces $\bigwedge \boldsymbol{x}\wp^*$ y $\bigvee \boldsymbol{x}\wp^*$, son fórmulas[14].

5. Únicamente serán fórmulas las expresiones que satisfagan 1., 2., 3., 4..

Ejemplos:

- Por la definición de fórmula atómica y la reglas 1., 2. y 3., de la definición de fórmula, entonces las siguientes expresiones son fórmulas:
  $(q \to (\neg q \to (p \to (p_1 \to r)))), \quad (p \wedge (p \vee q)), \quad (p \to (q \vee r)).$
  Veamos que en efecto la expresión '$(q \to (\neg q \to (p \to (p_1 \to r))))$' es una fórmula. De la definición de fórmula atómica se sigue que 'p', 'q', 'r', 'p_1' son fórmulas, entonces por aplicacón de la regla 1., de la definición de fórmula esas expresiones también son fórmulas, luego por la regla 3. de la definición de fórmula las expresión '$(p_1 \to r)$', es una fórmula, así que tanto 'p' como '$(p_1 \to r)$' son fórmulas, luego por otra aplicación de la regla 3. de la definición de fórmula, la expresión '$(p \to (p_1 \to r))$' es una fórmula. Por otra parte de la regla 2. de la definición de fórmula la expresión '$\neg q$' (ya habíamos establecido que 'q', es una fórmula), es una fórmula, con que las expresiones '$\neg q$' y '$(p \to (p_1 \to r))$'

[14]Si sólo usamos el lenguaje proposicional ésta clausula es innecesaria

son fórmulas, entonces por la aplicación de la regla 3. de la definición de fórmula se obtine la fórmula '$(\neg q \rightarrow (p \rightarrow (p_1 \rightarrow r)))$'. Por tanto de una nueva aplicación de la regla 3. se obtiene la fórmula '$(q \rightarrow (\neg q \rightarrow (p \rightarrow (p_1 \rightarrow r))))$'. Que era lo que queriamos probar. Siguiendo un razonamiento similar se verifica que las otras expresiones '$((p \wedge (p \vee q))$','$(p \rightarrow (q \vee r))$', también son fórmulas.

- Por la regla 3., de la definicón de fórmula las suguientes expresiones no son fórmulas:
  $(p \vee \bigvee xPx)$, Px, Qy.

Notas

1. De ahora en adelante a las letras predicativas monádicas ($n = 1$) las representaremos sin superindices, así pues, expresiones como 'P^1a', 'R^1x', las escribiremos como 'Pa', 'Rx'.

2. Usaremos las letras '$\wp$' '$\Re$', como símbolos metalingúísticos indicadores de fórmulas atómicas

3. Se identificarán las *secuencias* de fórmulas conlas letras del alfabeto griego: Γ, Δ, Θ. Ejemplo: la secuencia $\{p, \quad q, \quad (\neg p \wedge \neg q)\}$, podría ser denotada por el símbolo Γ.

2.10. Clases de fórmulas

Las fórmulas pueden clasificarse en atómicas y no atómicas, a las no atómicas se les llama moléculares. Todas las fórmulas que resultan de la inmediata aplicación de alguna de las reglas 2., 3., y 4.(de la definición de fórmula) son moléculares. A con tinuación las veremos cada una.

2.10.0.1. Negación

Definición 2.4. *si $\wp$ es una fórmula, entonces a la fórmula $\neg\wp$ le llamaremos negación y al símbolo, '$\neg$' le llamaremos negador.*

2.10.0.2. Conjunción

Definición 2.5. *si $\wp$ y $\Re$ son fórmulas, entonces a la fórmula $(\wp \wedge \Re)$ la llamaremos conjunción y al símbolo, '$\wedge$' lo llamaremos conjuntor.*

2.10.0.3. Disyunción

Definición 2.6. *si $\wp$ y $\Re$ son fórmulas, entonces a la fórmula ($\wp \vee \Re$), la llmaremos disyunción y al símbolo, '$\vee$' lo llamaremos disyuntor.*

2.10.0.4. Implicación

Definición 2.7. *si $\wp$ y $\Re$ son fórmulas, entonces a la fórmula ($\wp \rightarrow \Re$), la llamaremos implicación y al símbolo, '$\rightarrow$' lo llamaremos implicador.*

2.10.0.5. Coimplicación

Definición 2.8. *si $\wp$ y $\Re$ son fórmulas, entonces a la fórmula ($\wp \leftrightarrow \Re$), la llamaremos coimplicación y al símbolo, '$\leftrightarrow$' lo llamaremos coimplicador.*

2.10.0.6. Generalización

Definición 2.9. *si $\wp$ es una fórmula, y $\wp^*$ resulta de cambiar en $\wp$ una constante individual por $\boldsymbol{x}$, entonces a la fórmula $\bigwedge \boldsymbol{x}\wp^*$, la llamaremos generalización y al símbolo, '$\bigwedge$' lo llamaremos generalizador.*

2.10.0.7. Particularización

Definición 2.10. *si $\wp$ es una fórmula, y $\wp^*$ resulta de cambiar en $\wp$ una constante individual por $\boldsymbol{x}$, entonces a la fórmula $\bigvee \boldsymbol{x}\wp^*$, la llamaremos particularización y al símbolo, '$\bigvee$' lo llamaremos particularizador.*

2.10.0.8. Definiciones adicionales

A continuación veremos unas definiciones que serán necesarias para enteder ciertos conceptos ya vistos (como el de variable cuantificables) y para enteder otros que veremos más adelante (como la demostración del teorema de intercambio):

Definición 2.11. *Grado lógico. Dada una fórmula $\wp$, llamaremos grado lógico al número de símbolos lógicos de $\wp$.*

Se puede considerar al grado lógico como una función, que hace corresponder a cada fórmula, un número entero no negativo (0,1, 2, 3,...) n. Este n representa el número de símbolos lógicos de $\wp$, y esta función puede ser representada como:

$$\mathrm{G}(\wp) = n,$$

Ejemplo: Sean las fórmulas:

q, $(p \to (q \to p))$, $(\neg p \vee \neg q)$, $\bigwedge x \bigwedge y(I^2xy \to I^2yx)$
el grado lógico de cada una de las fórmulas es G(q)=0 (ya que no tiene símbolos lógicos) G($(p \to (q \to p))$)=2 (ya que el símbolo, '$\to$' aparece dos veces); G($(\neg p \vee \neg q)$)=3 (ya que los símbolos '$\neg$' y '$\vee$', el uno aparece dos veces y el otro una vez); G($\bigwedge x \bigwedge y(I^2xy \to I^2yx)$)=3

Definición 2.12. *El signo principal de una fórmula es el último símbolo lógico que interviene en su construcción, suponiendo que ésta se haya realizado a partir de fórmulas atómicas, por sucesivas aplicaciones de las reglas de formación de fórmulas.*[15]

Ejemplo. Vimos en el primer ejemplo, que está inmediatamente después de la definición de fórmula que la expresión, '$(q \to (\neg q \to (p \to (p_1 \to r))))$' es una fórmula construida por la sucesiva aplicación de las reglas 1., 2. y 3., de la definición de fórmula, y el último signo que participa en la construcción es el implicador y, por tanto, es el implicador el signo principal.

Definición 2.13. *A las partes de una fórmula que sean fórmulas le llamaremos subfórmulas.*

Ejemplo: puesto que 'Pa' y '$\bigvee xPx$' son fórmulas (la primera atómica y la segunda molecular) y además hacen parte de la fórmula '$Pa \to \bigvee xPx$', entonces son subfórmulas.

Definición 2.14. *A una expresión que contenga variables libres (o no cuantificadas), la llamaremos seudofórmula.*

[15] Como estudiamos anteriormente sólo son fórmulas atómicas o una letra enunciativa o una letra predicativa n-ádica, seguida de n términos. Por tanto en una fórmula atómica no intervienen símbolos lógicos, con que tenemos que en una fórmula atómica no hay signo principal.

Ejemplo:Puesto que tanto 'x' como 'y', están libres en la expresión 'Rxy', luego ésta expresión es una seudofórmula.

Definición 2.15. *Dado un símbolo lógico cualquiera, si es signo principal de una fórmula, entonces a las subformulas de dicha fórmula las llamaremos alcance del símbolo lǵico.*

Ejemplo: 'Pa' y 'Pb' constituyen el alcance de '$\to$' en '$(Pa \to Pb)$', 'p' y '$q \vee r$', constituyen el alcance de '$\wedge$' en '$(p \wedge (q \vee r))$', 'Qx' y 'Px' constituyen el alcance de '$\bigwedge$' en '$\bigwedge x(Px \wedge Qx)$'.

Definición 2.16. *A las variables individuales que se adosen a un generalizador o a un cuantificador las llamaremos índices.*

Ejemplo: 'x' es el índice en '$\bigvee x(Qxy \to Py)$', 'z' es el índice en '$\bigwedge xRy$'.

Definición 2.17. *Al cuantificador más el índice le llamaremos prefijo cuantificacional.*

Definición 2.18. *A la parte de la fórmula afectada por el prefijo, la llamaremos matriz cuantificacional.*

Ejemplo: En la fórmula '$\bigvee x(Qxy \to Py)$', el prefijo es '$\bigvee x$', y '$(Qxy \to Py)$', es la matriz cuantificacional. Unprefijo puede agrupar varios cuantificadores con sus respectivos índices, y una matriz puede encerrar cuantificadores; por ejemplo: '$\bigvee x \bigwedge y \bigvee z((Px \to \bigvee x) \wedge (Qy \vee Rz))$'.

Definición 2.19. *Se dice que una variable 'x', o una ocurrencia de ella, es o está ligada cuando es el índice de un cuantificador o cuando ocurre dentro del alcance de éste y es además idéntica a la que ocurre como índice del mismo. En caso contrario, es decir, cuando una variable 'x', o una ocurrencia de ella no esté dentro del alcance de un cuantificador o esté dentro del alcance de un cuantificador y no sea idéntica a la que ocurre dentro del mismo, entonces diremos que 'x' está libre.*
A las variables libres se las llama también no cuantificadas; y a las ligadas, cuantificadas.

Ejemplo: La variable 'x' está ligada en las siguientes expresiones: '$\bigvee x$'; '$\bigwedge x$'; '$\bigwedge x(Px \to (Qx \vee Rx))$'.
La variable 'y' está libre en las siguientes expresiones:'Qy'; '$\bigwedge x(Pxy \to Qx)$'; '$(Py \vee \bigvee x(Py \wedge Rx))$'.

2.11. Semántica de la lógica proposicional

Como establecimos antes, la lógica tradicional es bivalente, esto es, las fórmulas atómicas con las que trabajan o son verdaderas o son falsas. Ahora bien en esta sección definiremos las reglas para la asignación de los valores de verdad a las fórmulas generadas por los cinco operadores lógicos. Dichos valores de verdad contituyen el significado lógico y establecen las propiedades semánticas de una fórmula y de los conjuntos o argumentos donde dicha fórmula aparece. En esta monografía, nos limitaremos a presentar las reglas de asignación de los valores de verdad para el lenguaje de la lógica proposicional (**LP**)[16]

2.11.1. Reglas para la asignación de los valores de verdad

Si se quiere dar un contenido semántico al lenguage **LP** lo que inicialmente se debe hacer es darle una *valucación total* al lenguaje, de ahí que se haga necesario definir formalmente lo que es una valuación:

Definición 2.20. ***Valuación*** *es la asignación de un valor de verdad,* ***V*** *o* ***F****, a cada una de las fórmulas atómicas en la fórmula.*

De la definición anterior se sigue una *valuación total* de **LP** es la asignación de un valor de verdad a cada fórmula atómica de **LP**. Cada fórmula de **LP** es semánticamente independiente, lo que quiere decir, que el valor de verdad de una fórmula atómica no depende del valor de verdad de ninguna otra fórmula.
Como una fórmula molecular de **LP**, está compuesta por fórmulas atómicas, entonces el valor de verdad de dicha fórmula está completa y exclusivamente determinado por el valor de verdad de las fórmulas atómicas que la componen y dado que una valuación total le asigna un valor de verdad a todas las

[16]de ahora en adelante sólo usaremos las letras **LP**

fórmulas atómicas de **LP**, se sigue que todas las fórmulas moleculares de **LP** también tienen un valor de verad determinado bajo cada valuación total.
Hay infinitas fórmulas fórmulas atómicas en **LP**, con lo que hacer explicita una valuación total, se convertiría en un trabajo tedioso, sin embargo al considerar una fórmula en particular, únicamente hace falta tener en cuenta los valores de verdad de las fórmulas atómicas incluidas en la fórmula. Al fin y al cabo el valor de verdad de la fórmula molecular sólo depende de esas fórmulas atómicas y de ninguna otra. A este tipo de valuación, es decir, a la valuación en la que sólo se tiene en cuenta un subconjunto de todas las fórmulas de **LP** se le llama *valuación parcial* de **LP**.

Tradicionalmente se presentan las reglas de asignación para los valores de verdad usando las siguientes tablas de verdad:

p	q	$(p\wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$(p\vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$(p\rightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$(p\leftrightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	$\neg p$
V	F
V	F
F	V
F	V

Aunque las tablas de verdad son fáciles de leer, es posible definir de una manera más rigurosa y abstracta cuáles son las condiciones de verdad de cada tipo de fórmula. Con la presentación de las definiciones abstractas se gana al largo plazo porque en primer lugar relaciona al estudiante de bachillerato con el rigor con el que se trabaja en las ciencias exactas y en segundo lugar si se llegase a decidir por continuar el estudio de la lógica, verá que dichas definiciones abstractas les permitirá ver las relaciones de la lógica tradicional y las lógicas superiores.
En la siguientes definiciones: la letra 'V' representa una valucación total de **LP**. Para decir que V le asigna el valor de verdad de **V** a $\wp$, escribiremos $V(\wp)$=**V** y para decir que V le asigna el valor de verdad de **F** a $\wp$, escribiremos $V(\wp)$=**F**.

Definición 2.21. *(NEGACIÓN). $V(\neg\wp)=\boldsymbol{V}$ si y sólo si $V(\wp)=\boldsymbol{F}$.*
$V(\neg\wp)=\boldsymbol{F}$ si y sólo si $V(\wp)=\boldsymbol{V}$.

Definición 2.22. *(CONJUNCIÓN). $V(\wp\wedge\Re)=\boldsymbol{V}$ si y sólo si $V(\wp)=\boldsymbol{V}$ y $V(\Re)=\boldsymbol{V}$.*
$V(\wp\wedge\Re)=\boldsymbol{F}$ si y sólo si $V(\wp)=\boldsymbol{F}$ o $V(\Re)=\boldsymbol{F}$.

Definición 2.23. *(DISYUNCIÓN). $V(\wp\vee\Re)=\boldsymbol{V}$ si y sólo si $V(\wp)=\boldsymbol{V}$ o $V(\Re)=\boldsymbol{V}$.*
$V(\wp\vee\Re)=\boldsymbol{F}$ si y sólo si $V(\wp)=\boldsymbol{F}$ y $V(\Re)=\boldsymbol{F}$.

Definición 2.24. *(CONDICIONAL). $V(\wp\rightarrow\Re)=\boldsymbol{V}$ si y sólo si $V(\wp)=\boldsymbol{F}$ o $V(\Re)=\boldsymbol{V}$. $V(\wp\rightarrow\Re)=\boldsymbol{F}$ si y sólo si $V(\wp)=\boldsymbol{V}$ y $V(\Re)=\boldsymbol{F}$.*

Definición 2.25. *(BICONDICIONAL). $V(\wp\leftrightarrow\Re)=\boldsymbol{V}$ si y sólo si $V(\wp)=\boldsymbol{V}$ y $V(\Re)=\boldsymbol{V}$, o $V(\wp)=\boldsymbol{F}$ y $V(\Re)=\boldsymbol{F}$.*
$V(\wp\leftrightarrow\Re)=\boldsymbol{F}$ si y sólo si $V(\wp)=\boldsymbol{F}$ y $V(\Re)=\boldsymbol{V}$, o $V(\wp)=\boldsymbol{F}$ y $V(\Re)=\boldsymbol{V}$.

A continuación procederemos a definir todas y cada una de las nociones semánticas de la lógica para el lenguaje **LP**, a saber: tautología, contradicción, indeterminación, equivalencia, consistencia semántica, validez e implicación semántica, esta última la más trascendtal ya que tiene que ver con los argumentos propiamente dichos.

2.11.2. Tautologías, contradicción e indeterminación

Un lenguaje es *veritativo-funcional* cuando el valor de verdad de cualquier enunciado compuesto está completamente determinado por los valores de verdad asignados a los enucniados simples que lo componen. El lenguaje **LP** es una simbolización de los enucnciados en español[17] y refleja sus propiedades veritativo-funcionales. Con esto claro podemos decir que una tautología es un enunciado que siempre es verdadero en virtud de sus propiedades veritativo-funcionales, e independientemente de lo que ocurra en el resto del universo. En el lenguaje **LP** podemos expresar esta idea de la siguiente forma:

Definición 2.26. *Una fórmula $\wp$ es una **tautología en LP** si y sólo si es verdadera bajo cualquier valuación.*

De esta definición se desprenden dos cosas. La primera es que se puede afirmar que una tautología es una verdad de hecho, es decir, que es verdadera cualquiera que sean los enunciados simples que simbolicen las fórmulas atómicas, por ejemplo '$p \vee \neg p$ ' que es una tautología también es una verdad de hecho sin importar si 'p' se traduce como Juan sabe vailar, maría habla inglés o cualquier otro enunciado. La segunda cosa que se desprende de la definición de tautología dada, es que no toda verdad es una tautología. Veamos porque, supongamos que conocemos a Kety Esther Galeano Anaya y sabemos que tiene un vestido azul y uno verde así que el enunciado: Kety Esther Galeano Anaya tiene un vestido azul y uno verde, se convierte en una verdad de hecho. Ahora bien, si convenimos en simbolizar como 'p' a el enunciado. Kety Esther Galeano Anaya tiene un vestido azul y como 'q' al enunciado Kety Esther Galeano Anaya tiene un vestido verde, entonces el enunciado: Kety Esther Galeano Anaya tiene un vestido azul y uno verde quedaría simbolizado así: '$p \wedge q$', y como sabemos dicha fórmula no es una tautología porque si se tiene una valuación V, talque $V(p)=\mathbf{F}$, entonces según las reglas para la asignación de valores de verdad '$p \wedge q$' sería falsa.
Una contradicción es un encunciado que siempre es falso en virtud de sus propiedades veritativo-funcionales, e independientemente de lo que ocurra en el resto del universo. En el lenguaje **LP** podemos expresar esta idea de la siguiente manera:

[17]en realidad también es una simbolización del inglés, del frances y detodos los lenguajes naturales, sólo que el lenguaje vernáculo en este caso es el español

Definición 2.27. *Una fórmula $\wp$ de **LP** es una **contradicción en LP** si y sólo si $\wp$ es falsa bajo cualquier valuación.*

Por último, hay enunciados cuyo valor de verdad varía de acuerdo con el estado de cosas en el mundo. Por ejemplo el enunciado Juan Manuel Santos es el presidente de Colombia, es verdad ahora, pero puede que no sea cierto dentro de viente años. Tales enunciados son semánticamente indeterminados. Una fórmula que represente un enunciado de este tipo será verdadera bajo algunas valuaciones, y falsa bajo otras, como se deriva de la siguiente definición.

Definición 2.28. *Una fórmula $\wp$ de **LP** es **semánticamente indeterminada en LP** si y sólo si $\wp$ no es ni una tautología ni una contradicción.*

Un ejemplo de fómula semánticamente indeterminada es '$p \vee (p \wedge q)$' pues es falsa cuando $V(p)$=**F** y verdadera cuando $V(p)$=**V**.

2.11.3. Equivalencia semántica

En esta sección consideramos al primer concepto semántico, el de equivalencia semántica.

Definición 2.29. *Dos fórmula $\wp$ y $\Re$ de **LP** son **semánticamente equivalentes en LP** si y sólo si no hay ninguna valuación bajo la cual tengan valores de verdad distintos.*

2.11.4. Consistencia semántica

La consistencia Lógica es una propiedad, no de un enunciado, sino de un *conjunto* de enunciados. Formalmente, definiremos la consistencia semántica de la siguiente manera:

Definición 2.30. *Un conjunto Γ de fórmulas de LP es **semánticamente consistente en LP** si y sólo si existe al menos una valuación bajo la cual todos los miembros del conjunto son verdaderos. Un conjunto es **semánticamente inconsistente en LP** si y sólo si no es semánticamente consistente.*

2.11.5. Validez e implicación semántica

Como en la vida cotidiana hacemos tanto uso de los argumentos, el concepto de validez es tan crucial. Podemos definir la validez semántica en **LP** de la siguiente manera:

Definición 2.31. *Un argumento de* ***LP*** *es* ***semánticamente válido en LP*** *si y sólo si no existe ninguna valuación bajo la cual todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa.*

Cuando un argumento es semánticamente válido, diremos que las premisas **implican** semánticamente a la conclusión , y que la conclusión es una **consecuencia** semántica de las premisas. Podemos definir la implicación semántica en **LP** de la siguiente manera:

Definición 2.32. *Un conjunto* Γ *de fórmulas de* ***LP implica semánticamente*** *a una fórmula* $\wp$ *si y sólo si no existe ninguna valuación bajo la cual todos los miembros de* Γ *sean verdaderos y* $\wp$ *falsa.*

Usaremos el signo '$\models$' para denotar la implicación semántica Si un conjunto de fórmulas Γ implica semánticamente una fórmula $\wp$, denotaremos esta relación como:

$$\Gamma \models \wp$$

La relación entre las nociones de validez y de implicación semántica puede ser formulada más estrictamente de la siguiente manera. Un argumento

$$\begin{array}{c} \wp_1 \\ \vdots \\ \wp_n \\ \hline \wp \end{array}$$

es semánticamente válido si y sólo si $\{\wp_1, \ldots, \wp_n\} \models \wp$.

2.12. Definición de las propiedades semánticas en función de la consistencia de un conjunto de fórmulas

El método de los árboles de verdad sólo puede ser utilizado para probar la consistencia semántica de un conjunto de fórmulas. Por lo tanto se hace necesario redefinir todas las propiedades semánticas de un enunciado y de un argumento en términos de la consistencia semántica de un conjunto de fórmulas.
Comenzaremos con las fórmulas. El primer paso para poder expresar las propiedades semánticas de una fórmula $\wp$ de **LP** en términos de consistencia semántica consiste en crear el *conjunto unitario* de $\wp$, es decir, un conjunto en el cual $\wp$ sea el único miembro. Utilizaremos este conjunto para establecer las siguiente proposiciones:[18]

Proposición 2.1. *Una fórmula $\wp$ es una **contradicción en LP** si y sólo si el conjunto $\{\wp\}$ es semánticamente inconsistente en **LP**.*

Proposición 2.2. *Una fórmula $\wp$ es una **tautología en LP** si y sólo si el conjunto $\{\neg\wp\}$ es semánticamente inconsistente en **LP**.*

Proposición 2.3. *Una fórmula $\wp$ es una **tautología en LP** si y sólo si tanto $\{\wp\}$ como $\{\neg\wp\}$ son semanticamente inconsistentes en **LP**.*

Proposición 2.4. *Dos fórmulas $\wp$ y $\Re$ son **semánticamente equivalentes en LP** si y sólo si $\{\neg(\wp \leftrightarrow \Re\}$ es semánticamente inconsistente en **LP**.*

Proposición 2.5. *Un conjunto Γ de fórmulas de **LP implica semánticamente** a una fórmula $\wp$ ($\Gamma \models \wp$) si y sólo si $\gamma \bigcup \neg\wp$ es semánticamente inconsistente en **LP**.*

Proposición 2.6. *Un argumento de **LP** es **Semánticamente válido en LP** si y sólo si el conjunto que consiste de las premisas y la negación de la conclusión es semánticamente inconsistente en **LP**.*

[18]La prueba de todas las proposiciones dadas en esta sección puede encontrarse en: *Introducción a la lógica moderna*, segunda edición, uniandes, Bogotá, D.C., 2010. P. 84-86

De las anteriores afirmaciones se desprenden como colorarios ciertos enunciados interesantes, aquí solamente veremos uno ya que le servirá de mucho a los estiduantes como propedeútica al estudio de los sistemas axiómaticos (en especial de lo que allí se considera como teorema) concepto este que se ha convertido en la presentación ideal de una ciencia:

Proposición 2.7. *Una fórmula $\wp$ es una tautología si y sólo si $\emptyset \models \wp$*[19]*.*

Demostración. Para probar la anterior afirmación, debemos probar (i) que si una fórmula $\wp$ es una tautología, entonces $\emptyset \models \wp$, y (ii) que si $\emptyset \models \wp$, entonces $\wp$ es una tautología. Comencemos con (i). Primero asumimos que $\wp$ es una tautología. Entonces por definición, el conjunto $\{\neg\wp\}$ es semánticamente inconsistente, pero ya que $\{\neg\wp\}$ es $\emptyset \bigcup \neg\wp$, luego $\emptyset \bigcup \neg\wp$ es inconsistente y, por tanto, $\emptyset \models \wp$.

Para probar (ii), asumimos que $\emptyset \models \wp$. En ese caso, por definición $\emptyset \bigcup \neg\wp$ es semánticamente inconsistente, pero como $\emptyset \bigcup \neg\wp$ es simplemente $\{\neg\wp\}$, luego $\{\neg\wp\}$ es semánticamente inconsistente y, por tanto, $\wp$ es una tautología. $\square$

[19] En un sistema axiomático cualquiera para la lógica a la expresión $\emptyset \models \wp$ se le denomina teorema.

3

DISEÑO DE LA PROPUESTA

3.1. Introducción

A continuación pasaré a explicar cada uno de los pasos que componen la propuesta. En el cuadro (3.1) se presenta cada uno de dichos pasos, acompañados de una frase que resume lo que se pretende alcanzar en cada uno de ellos, en primera instancia está la sensibilización en donde me apoyo de dos ejemplos para mostrar la importancia de la lógica proposicional bivalente en la corrección de argumentos dados en el lenguaje natural (el español en este caso). Como segunda etapa están los árboles de verdad en **LP**, donde expongo las reglas para la construcción de los árboles. Agregué este tema aquí y no en el marco teórico por ser el que interviene directamente en el establecimiento de las propiedades semánticas, así pues mostraré en esta etapa cómo establecer cuando una fórmula es una tautología, cuando una contradicción y finalmente cuando una fórmula es semánticamente indeterminada, además doy estrategias para la construcción de los árboles, todo lo anterior se realiza con varios ejemplos, que van aparececiendo según se incrementa el nivel de dificultad, de este modo pretendo que los docentes que no estén familiarizados con los árboles de verdad, se vayan apropiando del mismo secuencialmente. Como tercer paso propongo la aplicación del método por etapas. La primera etapa es la traducción desde el lenguaje natural al lenguaje **LP**. La segunda etapa es la aplicación del método de los árboles de verdad primero a la corrección de argumentos dados en el lenguaje **LP** y después a dos argumentos traducidos desde el lenguaje natural al lenguaje *LP*.

Caracteristicas / Número	Paso	Frase
1	Sensibilización	La lógica en la vida
2	Árboles de verdad	¿Cómo construyo los árboles?
3	Aplicación por etapas	Los árboles y el lenguaje natural

Cuadro 3.1: Diseño de la propuesta por pasos

3.2. Sensibilización

Supongamos que nos encontramos frente al siguiente argumento:

Mucha gente cree que los polos se están derritiendo. Pero los polos se están derritiendo si y sólo si la temperatura del planeta está aumentando. Así que mucha gente cree que la temperatura del planeta está aumentando[1].

¿Es o no correcto ese argumento?, es decir, aceptando las premisas, ¿*nece-seramiente*, aceptaremos la conclusión?, la oración declarativa: mucha gente cree que los polos se están derritiendo no es categórica, esto es, en ninguna parte están las partículas lingüísticas, todos, algunos, ninguno, y son precisamente las oraciones declarativas categóricas con las que trabaja la lógica aristotélicas, de ahí que sea inútil para este caso, si se analiza el mero contenido (es decir el significado de las palabras que se presentan en el argumento) se podrían obtener complicaciones ya que por ejemplo un estudiante puede que no esté relacionado con el significado de uno o más términos, además puesto que el objeto de la lógica es el estudio de la *forma* y no del contenido material de un argumento, no es mucho lo que analizando el contenido, se pueda lograr, si es que un análisis lógico se está llevando a cabo. El problema se complica aún más si los términos son de una materia científica específica, por ejemplo veamos este otro argumento perteneciente a la economía:

Si la inflación continúa estable, entonces los intereses tenderán a bajar; y los interes tienden a bajar si el consumo interno aumenta, la economía crecerá. Los intereses tenderán a bajar si y sólo si la economía no crece, y si no crece, entonces la inflación continuará estable. Por lo tanto, la inflación continuará estable.

términos como inflación y economía son más o menos comunes, sin embargo la expresión 'intereses tendientes a la baja' puede confundir a muchas

[1] Páez, Op.cit., p.79

personas. Ahora bien, puesto que con la lógica moderna, se matematizó la lógica, lo que quiere decir, que se construyó un lenguaje simbólico adecuado y la formulación precisa de las reglas de operación, que son la base de los cálculos, entonces estamos ante la oportunidad de analizar un argumento, cualquiera que sea la ciencia, disciplina o si sólo pertenece al lenguaje cotidiano como veremos más adelante, ya que podemos traducirlo al lenguaje de la lógica moderna y con las reglas calcular su corrección.

Si decidieramos usar las tablas de verdad para por ejemplo, hacer la correción del primer argumento dado en esta sección, una vez que lo hayamos formalizado, es decir, lo hubiesemos traducido al lenguaje **LP**, entonces tendríamos que confeccionar una tabla de cuatro columnas y dieciséis filas, que con el tamaño de letra con la que están escritas estas líneas, ocuparía toda una hoja, y tal confección lleva consigo como antes escribí, por una parte muchos riesgos de equivocación y por otra parte y aún más grave,que al concentrarnos en semejante tarea, cuando la finalicemos nos digamos, ¿para qué hice esto?, y el problema se agrava si tenemos que realizar correcciones seguidas de varios argumentos, es decir, nuestra atención estaría más en hacer bien las tablas más que en «ver» la ilación lógica entre premisas y conclusión.

3.3. Árboles de verdad en LP

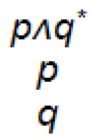
[2] Para construir un árbol de verdad nos es necesario conocer en primera instancia las reglas de construcción y segundo las partes del mismo. El método de los árboles de verdad en principio parece restrictivo ya que sólo sirve para determinar la consistencia de un conjunto finito de fórmulas, es decir no se menciona nada acerca de las nociones semánticas de tautología, contradicción, etc. pero nos aprovecharemos de de unos resultados que están en el marco teórico para ampliar en totalidad el radio de aplicación de los árboles de verdad. Como es un método semántico, entonces las reglas dan cuenta de los valores de verdad las fórmulas atómicas que son en última instancia las que definen los valores de verdad de las fórmulas en las que se encuentran. Ahora bien teniendo en cuenta lo anterior, las reglas se clasifican según cual sea el operador lógico principal: Reglas para la conjunción, disyunción, la negación, el condicional y el bicondicional. En cuanto a las partes el árbol se compone de un tronco y ramas, a su vez éstas pueden ser abiertas o cerradas, de donde se sigue que hay árboles abiertos y árboles cerrados. Comenzaremos nuestro análisis enunciando las reglas para la conjunción, disyunción y la negación, posteriormente con algunos ejemplos expondremos su uso y también las partes del árbol, para definir luego de manera formal lo que es una rama abierta, una rama cerrada, un árbol abierto y un árbol cerrrado, a renglón seguido, enunciaremos las reglas para el condicional y el bicondicional, para después con unos ejemplos ver cómo se usan dichas reglas, luego y a manera de resumen colocaremos un protocolo para la elaboración de los árboles de verdad, y así, aprovechandonos de dicho protocolo para elaborar los árboles de verdad de varios conjuntos de fórmulas que contienen combinación de operadores. Finalmente definiresmos las propiedades semánticas en terminos de los árboles de verdad, acompañadas dichas definiciones de la resolución de algunos ejemplos, y así, estaremos listos para poder pasar a la siguiente sección, donde veremos la aplicación de dicho método para determinar la validez lógica de argumentos utilizados en diversos campos del conocimiento humano y con esto hacer patente tanto a educadores como a estudiantes de la educación media, lo poderoso que es el método como herramienta.

[2] Para la presentación de de esta seccción me baso en la exposición de los árboles de verdad hecha en el libro del profesor Manuel Paez: Paez OP P. Op.cit., p.83-108

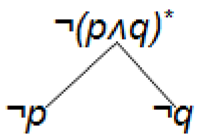
3.3.1. Reglas para conjunción, la disyunción y la negación

Las reglas para descomponer las conjunciones, disyunciones y la negación se pueden esquematizar de la siguiente manera[3]

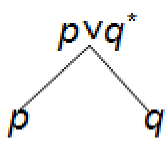
Descomposición de la conjunción ($\wedge$)



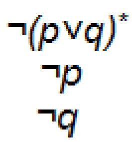
Descomposición de la negación de la conjunción ($\neg\wedge$)



Descomposición de la disyunción ($\neg\wedge$)



Descomposición de la negación de la disyunción ($\neg\vee$)



[3]Decidimos usar p y q, en vez de $\wp$ y $\Re$ para facilitar la compresnsión de la reglas aunque formalmente deberían ir los segundos

Descomposición de la doble negación $(\neg\neg)$

$$\begin{array}{c} \neg\neg p^{*} \\ p \end{array}$$

El asterisco que está en cada una de las reglas sirve para indicar que la fórmula sobre la cual se ha colocado ya ha sido *descompuesta*, es decir, que ya hemos desplegado sus condiciones de verdad. Y es que intuitivamente las se entienden como el despliegue gráfico de las fórmulas que se descomponen en dichas reglas, por ejemplo, sabemos que una conjunción es verdadera si y sólo si cada una de las subfórmulas del símbolo '$\wedge$' en la conjunción son verdaderas y la regla recoge esta información al desplegar cada una de las subfórmulas se coloca debajo de la conjunción, así deben entenderse todas las demás reglas. Veamos ahora el uso de dichas reglas. Consideremos el siguiente conjunto:

(**1**) $\{(p \wedge \neg\neg q), r\}$

El primer paso en la construcción de un árbol de verdad consiste en listar los miembros del del conjunto en una coloumna que servirá de *tronco* para el árbol:

$$\begin{array}{c} (p \wedge \neg\neg q) \\ r \end{array}$$

Lo que queremos saber es si el conjunto que contiene a estas fórmulas es semánticamnet consistente, es decir, si existe alguna valuación bajo la cual todas las fórmulas en esta columna son verdaderas. La primera fórmula es una conjunción, entonces usamos la regla para la conjunción para seguir con la construcción del árbol:

1.	$(p \wedge \neg\neg q)^{*}$	**MC**
2.	r	**MC**
3.	p	**1(^)**
4.	$\neg\neg q$	**1(^)**

Enumeramos las líneas del árbol para facilitar su lectura, a la derecha hemos añadido una columna que nos indica, en cada paso, cuál fórmula está siendo descompuesta y cuál regla se ha usado para descomponerla. En aras de la claridad, sólo descompondremos una rama a la vez. Aunque esto tiene una excepción como lo veremos más adelante. Finalmente, las letras '**MC**' en las dos primeras líneas significa 'miembros del conjunto'. El paso siguiente es mirar si hay alguna otra fórmula que necesite ser descompuesta. En efecto en la línea 4 vemos que hay una doble negación. Por lo tanto usamos en este caso la regla de la doble negación:

1.	$(p\wedge\neg\neg q)^*$	**MC**
2.	r	**MC**
3.	p	**1(^)**
4.	$\neg\neg q^*$	**1(^)**
5.	q	**4(¬¬)**

La columna resultante contiene tres fórmulas atómicas, y dos fórmulas descompuestas. Cuando un árbol sólo contiene este tipo de fórmulas, es decir, fórmulas compuestas que han sido descompuestas, y fórmulas atómicas o sus negaciones, el árbol está terminado y estamos en condiciones de determinar si el conjunto en cuestión es semánticamente consistente. El árbol se debe leer de la siguiente manera: una fórmula atómica sin su negación indica que a esa fórmula se le debe asignar el valor de verdad **V**; y la negación de una fórmula atómica indica que a esa fórmula se le debe asignar el valor de **F**. Según el árbol que acabamos de construir, debemos asignarle a 'p', 'q' y 'r' el valor de verdad de **V**. Bajo estas valuaciones, todas las fórmulas del conjunto son verdaderas. Es decir, la valuación bajo la cual el conjunto $\{(p \wedge \neg\neg q), r\}$ es semánticamente consistente es la siguiente:
$V(p)=\mathbf{V}$, $V(q)=\mathbf{V}$ y $V(r)=\mathbf{V}$.

La mayoría de los árboles de verdad requieren varias ramas para poder descomponer todas las fórmulas compuestas que hacen parte del conjunto. Consideremos el siguiente conjunto:

(2) $\{(p \wedge \neg\neg q), \neg r, (p \vee \neg s\}$

El primer paso es listar los miembros del conjunto, y descomponemos la conjunción según la regla de descomposición de la conjunción, luego como en el ejemplo antrior aplicaremos la regla de la doble negación para descomponer a '$\neg\neg p$':

1.	$(p\wedge\neg\neg q)^{*}$	MC
2.	$\neg r$	MC
3.	$(p\vee\neg s)^{*}$	MC
4.	p	1(^)
5.	$\neg\neg q^{*}$	1(^)
6.	q	5(¬¬)

Pero el árbol no está completo aún, pues todavía existe una fórmula compuesta que no ha sido descompuesta. Pero como dicha fórmula es una disyunción entonces usamos la regla para la descomposición de una disyunción:

1.	$(p\wedge\neg\neg q)^{*}$		MC
2.	$\neg r$		MC
3.	$(p\vee\neg s)^{*}$		MC
4.	p		1(^)
5.	$\neg\neg q^{*}$		1(^)
6.	q		5(¬¬)
7.	p	$\neg s$	3(v)

El árbol está completo. El paso final consiste en inspeccionar las ramas del árbol para determinar cuáles son los valores de verdad que se le debe asignar a cada una de las fórmulas atómicas.

Definición 3.1. *Una* ***rama*** *consiste de todas las fórmulas que están en el trayecto que lleva de una fórmula en la última línea hasta la fórmula en la primera línea.*

En este caso las fórmulas en las seis primeras líneas son miembros comunes (tronco) de las dos ramas del árbol. Si examinamos la rama de la derecha, encontramos que debemos aignar el valor de verdad **V** a '*p*' y '*q*', y el valor de verdad de verdad **F** a '*r*' y a '*s*'. Es decir, el conjunto es semánticamente consistente cuando:
$V(p)$=**V**, $V(q)$=**V**, $V(r)$=**F** y $V(s)$=**F**
El examen de la rama de la izquierda nos confirma la asignación de valores de verdad para '*p*', '*q*' y '*r*', pero '*s*' no está en esa rama. ¿qué valor de verdad debemos aignarle? Si una fórmula atómica no aparece en una rama determinada, se le puede asignar cualquier valor de verdad. Por lo tanto, el conjunto es semánticamente consistente bajo cualquiera de las siguientes dos valuaciones:
$V(p)$=**V**, $V(q)$=**V**, $V(r)$=**F** y $V(s)$=**F**.
$V(p)$=**V**, $V(q)$=**V**, $V(r)$=**F** y $V(s)$=**V**.

Veamos empleando el método de los árboles de verdad si el siguiente conjunto es semánticamente consistente:
(**3**) $\{(p \wedge \neg\neg q), \neg q\}$
Como siempre, lo primero es listar los miembros del conjunto:

1.	$(p\wedge\neg\neg q)$	**MC**
2.	$\neg q$	**MC**

A continuación descomponemos la conjunción y luego la doble negación y obtenemos:

1.	$(p\wedge\neg\neg q)^*$	**MC**
2.	$\neg q$	**MC**
3.	p	**1(^)**
4.	$\neg\neg q^*$	**1(^)**
5.	q	**4(¬¬)**
	×	

El árbol está terminado porque sólo contiene fórmulas descompuestas, y fórmulas atómicas o sus negaciones. Ahora bien, si tratamos de recuperar los valores de verdad que le debemos asignar a las fórmulas atómicas, nos

encontramos con un problema. Sabemos que 'p' debe ser verdadera, pero, ¿qué valor de verdad le asignamos a la fórmula 'q'?. El árbol nos muestra 'q' debe ser tanto verdadera como falsa, lo cual es imposible. Es decir, el árbol nos muestra que existe una contradicción insalvable en las condiciones de verdad de las fórmulas del conjunto, por tanto, tenemos que concluir que el conjunto $\{(p \wedge \neg\neg q), \neg q\}$ es semánticamente inconsistente.
En estaas condciones estamos listos para definir formalmente lo que es una rama abierta completa, lo que es una rama cerrada, un árbol abierto, un árbol cerrado, y definir el concepto de consistencia semántica en terminos de los árboles de verdad y eso lo haremos a continuación:

Definición 3.2. *Una rama de un árbol de verdad de **LP** es una **rama cerrada** si y sólo si contiene una fórmula $\wp$ y su negación $\neg\wp$.*

Definición 3.3. *Una rama de un árbol de verdad de **LP** es una **rama abierta completa** si y sólo si no es una rama cerrada y sólo contiene fórmulas descompuestas, fórmulas atómicas o sus negaciones.*

Definición 3.4. *Un árbol de verdad de **LP** es un **árbol de verdad abierto** si y sólo si contiene al menos una rama abierta completa.*

Definición 3.5. *Un árbol de verdad de **LP** es un **árbol de verdad cerrado** si y sólo si todas sus ramas son cerradas.*

Definición 3.6. *Un conjunto finito Γ de **LP** es **semánticamente consistente** si y sólo si Γ tiene unárbol de verdad abierto.*

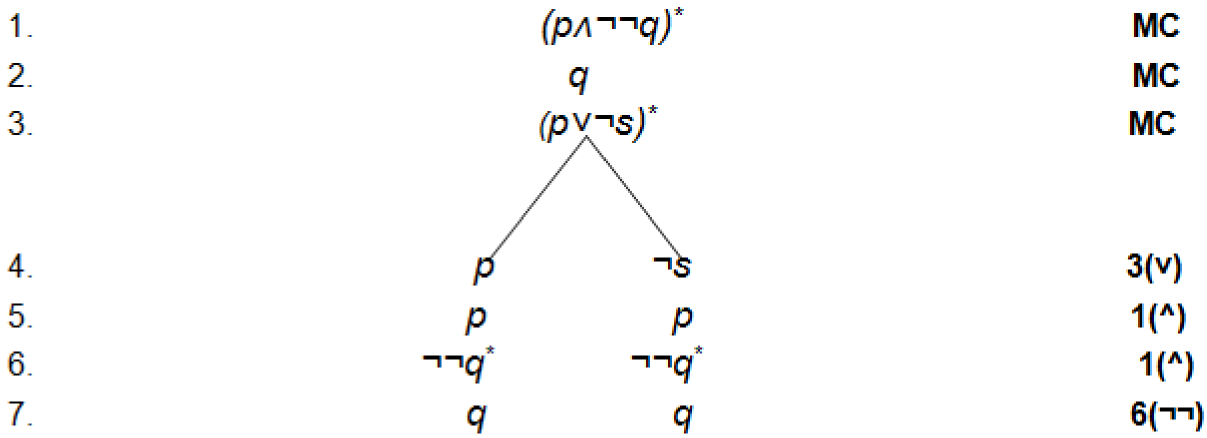
Definición 3.7. *Un conjunto Γ de fórmulas es **semánticamente inconsistente** si y sólo si un subconjunto finito de Γ tiene un árbol de verdad cerrado.*

Hacer un árbol a partir de un conjunto infinito de fórmulas resulta sencillamente imposible, ya que nunca lo terminariamos, así que la última definición de la lista anterior, nos permite tomar cierta cantidad finita de fórmulas del conjunto infinito y construirle un árbol de verdad y si dicho árbol resulta ser cerrado podemos afirmar con toda seguridad que el conjunto infinito es semánticamente inconsistente.[4] Lastimosamente, el resultado opuesto no es

[4]Dicha definición se sustenta en la siguiente proposición:

cierto. Si un subconjunto finito de un conjunto infinito de fórmulas de **LP** tiene un árbol de verdad con al menos una rama abierta completa, esto sólo probaría la consistencia semántica de ese conjunto, no del conjunto infinito. Empero estas consideraciones, debemos decir que aquí sólo presentaremos árboles de verdad generados a partir de conjuntos finitos.

Llegados aquí podemos preguntarnos, ¿cuál es el orden en el que se deben descomponer las fórmulas complejas?. No existe una regla que nos indique cuál es dicho orden. El siguiente árbol también es generado por el conjunto del ejemplo **(2)**:



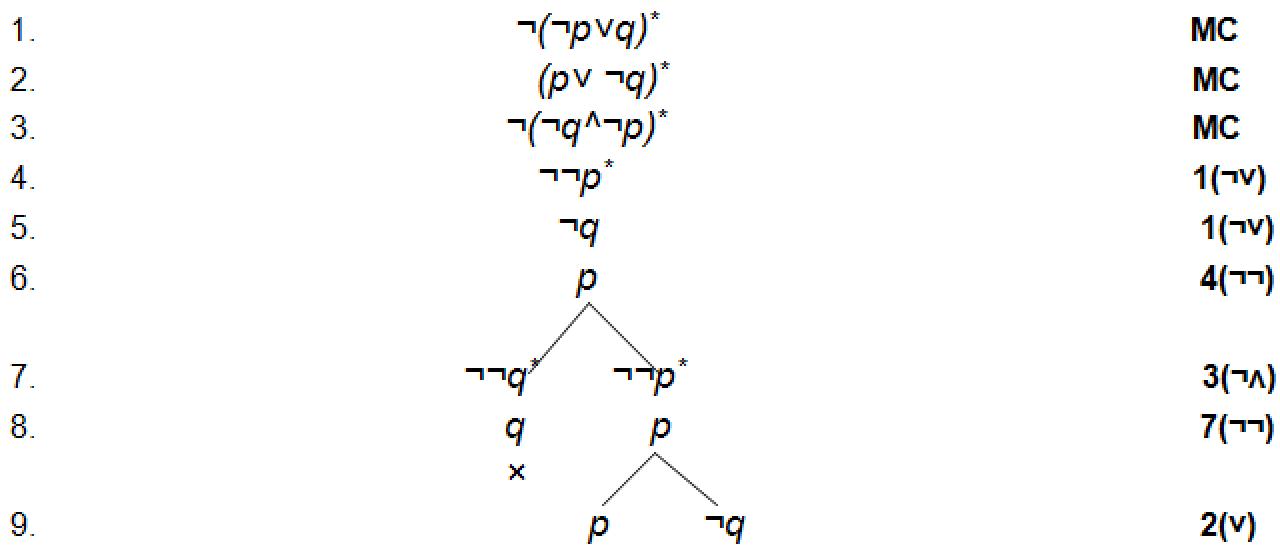
Proposición 3.1. *sea Γ un conjunto infinito de fórmulas de **LP**, si un subconjunto finito de Γ es inconsistente, entonces Γ es inconsistente*

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que Δ es un subconjunto finito del conjunto Γ, y que Δ es inconsistente y Γ es consistente. Si Γ es consistente entonces, por definición, existe al menos una valuación para la que todas las fórmulas de Γ son verdaderas. Ahora bien, sea $\wp$ una fórmula *cualquiera* de Δ. En ese caso y dado que Δ es un subconjunto de Γ, lo que quiere decir que $\wp$ es una fórmula de Γ, entonces, existe al menos una valuación en la que $\wp$ es verdadera. Pero como $\wp$ es una fórmula *cualquiera* de Δ, entonces eso quiere decir que existe al menos una valuación en la que todas las fórmulas de Δ son verdaderas. En consecuencia Δ es consistente, sin embargo esto contradice a la hipótesis de que Δ es un conjunto inconsistente y como a esta contradicción llegamos por suponer que Γ es consistente, entonces dicha suposición es imposible. Por lo tanto, podemos afirmar que si un subconjunto finito de Γ que es un conjunto infinito de fórmulas de **LP**, es inconsistente, entonces Γ es inconsistente □

.

En el árbol anterior se descompuso primero la disyunción y después la conjunción, lo que nos llevó a una duplicación, para evitar esto, siempre es mejor descomponer primero aquellas fórmulas que no se requieren la introducción de más ramas, y posponer la ramificación hasta cuando sea inevitable. Recordando siempre que no hay una regla para la orden en el que se deben descomponer las fórmulas. Como ya mencionamos, más adelante colocaremos un protocolo para la elaboración de los árboles para que la tarea de construir árboles de verdad nos sea lo más sencilla posible.

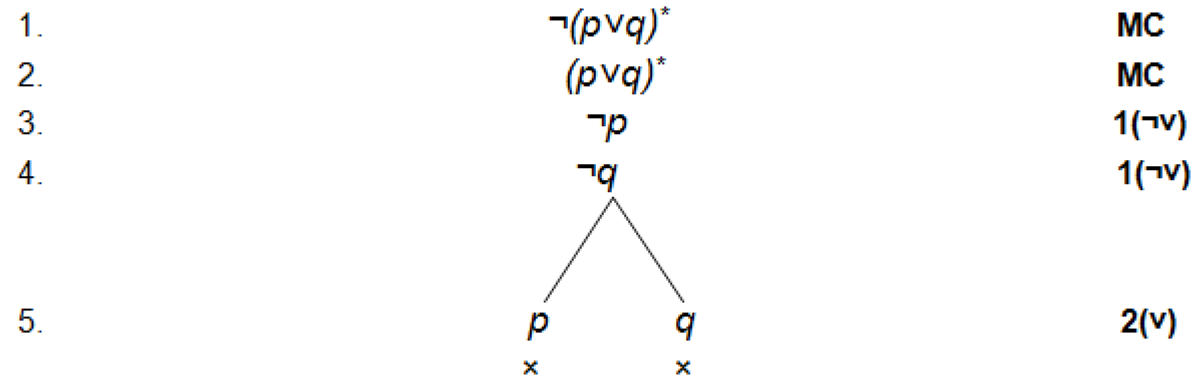
Construyamos el árbol de verdad del siguiente conjunto:
(4) $\{\neg(\neg p \wedge q), (p \vee \neg q), \neg(\neg q \wedge \neg p)\}$



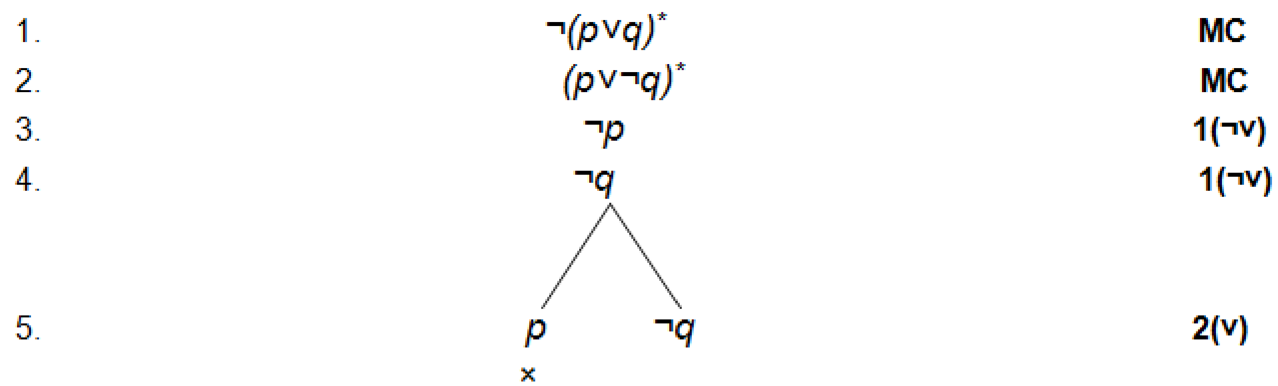
Anteriormente habíamos dicho que en aras de la claridad, solo descompondremos una rama a la vez y mencionamos también que había una excepción. Bien,en el árbol anterior, puede observarse que las fórmulas '$\neg\neg p$' y '$\neg\neg q$', fueron descompuestas simultaneamente y es que precisamente la excepción de la que hablamos se da cuando hay varias fórmulas que se descomponen con la misma regla en diferentes ramas pero en la misma línea del árbol. En tales casos, todas las fórmulas se pueden descomponer juntas.
Si examinamos el árbol vemos que en las dos ramas que están abiertas aparecen tanto 'p', como '$\neg q$', con lo que el conjunto es consistente bajo la siguiente valuación:
$V(p)$=**V** y $V(q)$=**F**.

Usemos el método de los árboles de verdad para determinar si los siguientes conjuntos son semánticamente consistentes:
(5) $\{\neg(p \vee q), (p \vee q)\}$
(6) $\{\neg(p \vee q), (p \vee \neg q))\}$
(7) $\{(\neg p \vee (p \wedge q), p, \neg(p \wedge q)\}$

El siguiente es el árbol del conjunto $\{\neg(p \vee q), (p \vee q)\}$:

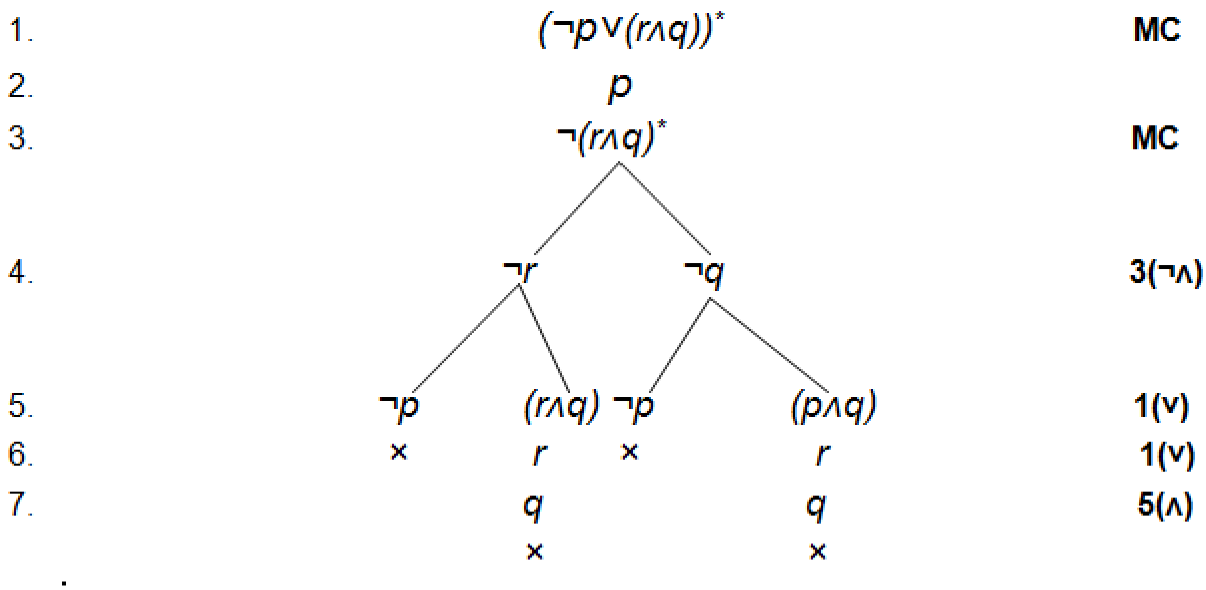


El árbol tiene todas las ramas cerradas. Por lo tanto el árbol es cerrado y el conjunto es semánticamente inconsistente.
Construyamos el árbol de verdad del conjunto $\{\neg(p \vee q), (p \vee \neg q))\}$:



La rama que contiene a la fórmula '$\neg q$' es una rama abierta completa. Por lo tanto el árbol es abierto y el conjunto es semánticamente consistente. El conjunto es consistente bajo la siguiente valuación:

$V(p)$=**F** y $V(q)$=**F**.
El siguiente es el árbol de verdad del conjunto $\{(\neg p \vee (r \wedge q), p, \neg(r \wedge q)\}$:

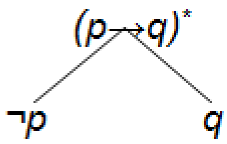


El árbol tiene todas las ramas cerradas. Por lo tanto el árbol es cerrado y el conjunto es semánticamente inconsistente.

3.3.2. Reglas para el condiconal y el bicondicional

Hasta ahora hemos generados árboles a partir de conjuntos de fórmulas cuyos operadores lógicos principales son la conjunción, la disyunción y la negación. Así pues que con las siguientes reglas tendremos las herramientas suficientes para la construcción del árbol de verdad dado cualquier conjunto de fórmulas de **LP**. Como antes, primero haremos explícitas las cuatro reglas: una para el condicional, una pra el bicondicional y dos más para las respectivas negaciones. Seguido expondremos algunos ejemplos, donde además de explicar cómo usar dichas reglas, haremos recomendaciones tendientes a la simplificación del trabajo de cosntrucción de los árboles. Finalmente colocaremos un protocolo en donde apareceran las estrategias para la construcción de cualquier árbol de verdad.

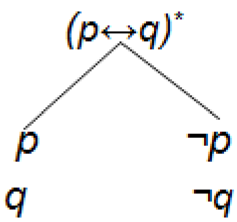
Descomposición del condicional $(\rightarrow)$



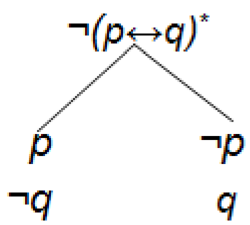
Descomposición de la negación de la conjunción $(\neg \rightarrow)$

$$\neg(p \rightarrow q)^*$$
$$p$$
$$\neg q$$

Descomposición del bicondicional $(\leftrightarrow)$

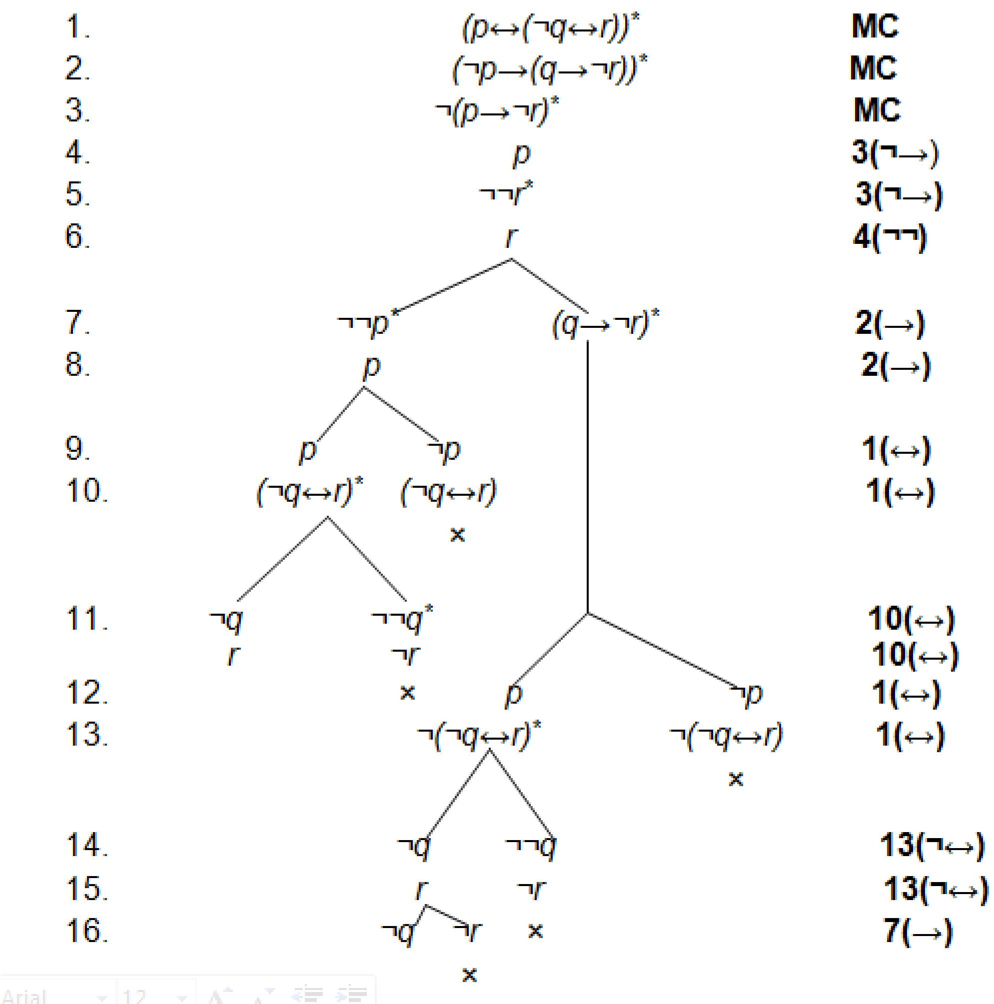


Descomposición de la negación del bicondicional $(\neg \leftrightarrow)$



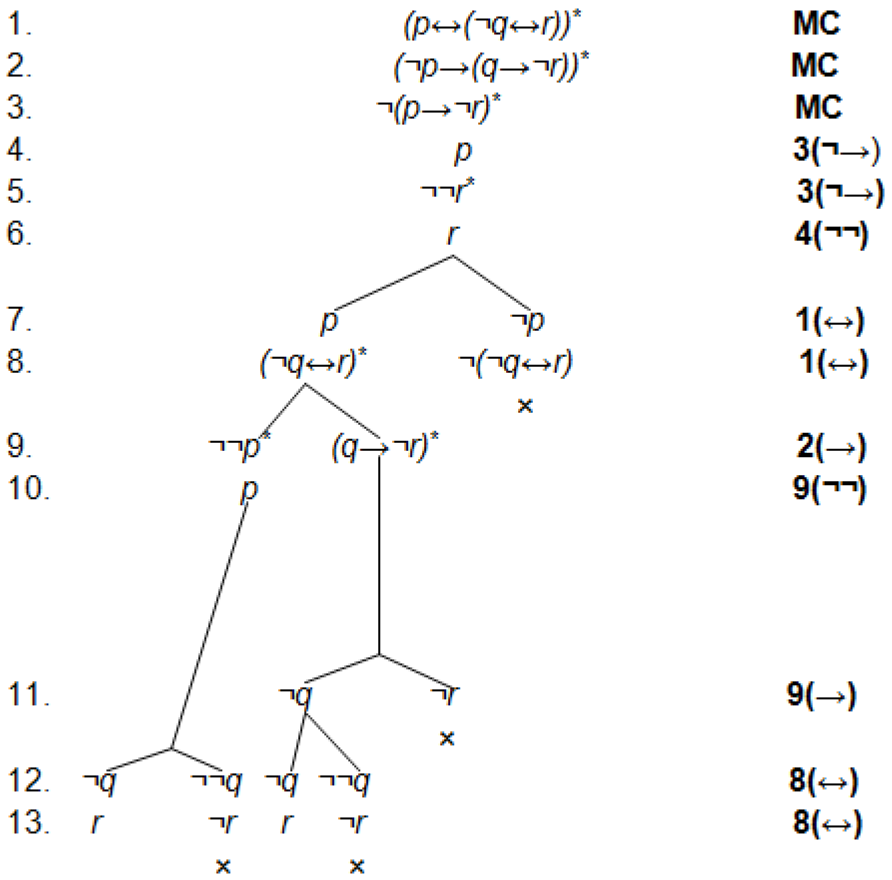
Construyamos un árbol de verdad para el siguiente conjunto:

(8) $\{(p \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow r)), (\neg p \to (q \to \neg r)), \neg(p \to \neg r)\}$



Una de las principales estrategias en la construcción de un árbol de verdad es descomponer primero aquellas fórmulas que no resulten en ramificaciones, en razón a ello descompusimos primero la fórmula '$\neg(p \to \neg r)$'. Sin embargo, hay una segunda consideración que se debe tener en cuenta: debemos tratar de descomponer primero aquellas fórmulas que generan contradicciones para así poder cerrar la rama en la que éstas se presenten. Si en el ejemplo anterior descomponemos la primera fórmula después de descomponer la fórmula

'$\neg(p \to \neg r)$', no tenemos la necesidad de continuar desarrollando la rama de la derecha pues vemos que existe una contradicción entre 'p' y '$\neg p$':

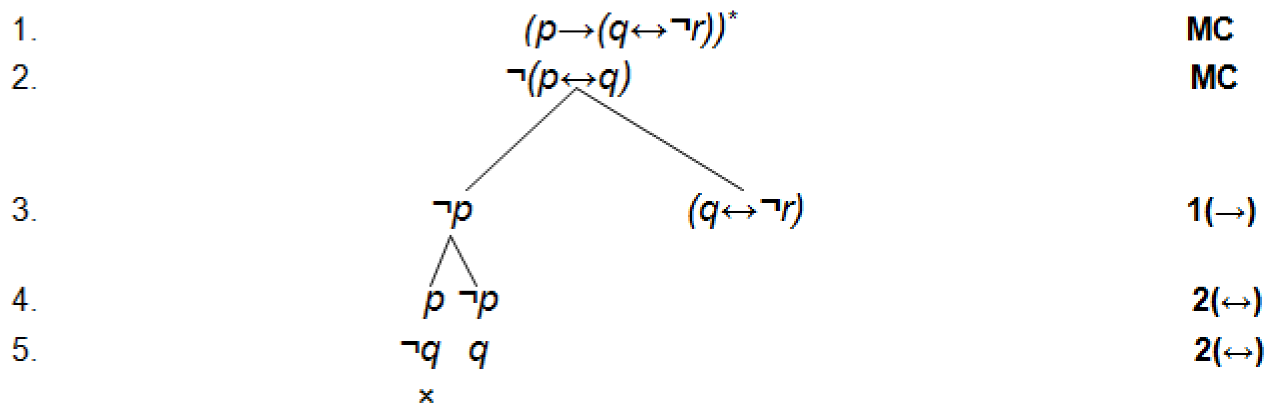


No sería un error continuar desarrollando la rama de la derecha en el paso 8, pero sí sería inoficioso pues no hay nada que podamos agregar que elimine la contadicción entre 'p' y '$\neg p$'.
En ambos casos el árbol resultante nos indica que el conjunto
$\{(p \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow r)), (\neg p \to (q \to \neg r)), \neg(p \to \neg r)\}$

es semánticamente consistente. El conjunto es consistente cuando:

$$V(p)=\mathbf{V},\ V(q)=\mathbf{F} \text{ y } V(r)=\mathbf{V}.$$

Existe una tercera consideración importante en la costrucción de un árbol de verdad: podemos dejar incompleto un árbol de verdad si ya hemos obtenido la respuesta que estabamos buscando. Veamos el caso del siguiente conjunto:



Al llegar a este punto podríamos continuar con la descomposición de la fórmula '$(q \leftrightarrow \neg r)$', pero no hace falta hacerlo si lo único que queremos saber es si el conjunto es semánticamente consistentente. La rama que contiene a '$\neg p$', es una rama abierta completa, lo cual nos indica que la respuesta es afirmativa. El conjunto es semánticamente consistente cuando:

$$V(p)=\mathbf{V},\ V(q)=\mathbf{V} \text{ y } V(r)=\mathbf{V}$$
$$V(p)=\mathbf{V},\ V(q)=\mathbf{V} \text{ y } V(r)=\mathbf{F}$$

El valor de verdad de 'r' puede ser **V** o **F**, pues no aparece en la rama abierta completa. El desarrollo de la rama de la derecha sólo nos puede servir para tratar de encontrar valuaciones adicionales en las que el conjunto sea semánticamente consistente.
Ya hemos visto con ejemplos, qué estrategías nos son útiles para la simplificación de la construcción de los árboles de verdad. A continuación las colocaremos en una lista a manera de protocolo:

Estrategia 1. Descomponer primero aquellas fórmulas que no resulten en ramificaciones.

Estrategia 2. Descomponer primero aquellas fórmulas que generen contradicciones para poder cerrar el mayor número de ramas en cada paso.

Estrategia 3. Desarrollar el árbol sólo hasta obtener la respuesta a la pregunta formulada.

Estrategia 4. Cuando ninguna de las anteriores estrategias sean aplicables, descomponer las fórmulas más complejas primero.

3.3.3. Tautologías, contradicciones y fórmulas indeterminadas

En la sección 4.11 (página 32) definimos todas las nociones semánticas en función de la noción de consistencia semántica. Ahora bien, pueston que los árboles de verdad son un método para establecer la consistencia semántica, las nociones semánticas se pueden reducir a la construcción de árboles de verdad de un conjunto unitario. En esta sección estudiaremos cómo utilizar los árboles de verdad para determinar si una fórmula es una tautología, una contradicción o una fórmula semánticamente indeterminada.
Comenzaremos con las definiciones de tautología, contradicción y fórmula semánticamente indeterminada en términos de los árboles de verdad:

Definición 3.8. *Una fórmula $\wp$ es una **contradicción en LP** si y sólo si $\{\wp\}$ tiene un árbol cerrado.*

Definición 3.9. *Una fórmula $\wp$ es una **tautología en LP** si y sólo si $\{\neg\wp\}$ tiene un árbol cerrado.*

Definición 3.10. *Una fórmula $\wp$ es **semánticamente indeterminada en LP** si y sólo si tanto $\{\wp\}$ como $\{\neg\wp\}$ tienen árboles de verdad abietos.*

Probemos que la siguiente fórmula es una contradicción en **LP**:

(9) $(p \wedge \neg p)$

Comencemos construyendo un árbol para el conjunto $\{(p \wedge \neg p)\}$:

1.	$(p \wedge \neg p)^*$	**MC**
2.	p	**1(∧)**
3.	$\neg p$	**1(∧)**

b

La única rama rama es cerrada. Por lo tanto, el árbol es cerrado y el conjunto $\{(p \wedge \neg p)\}$, es semánticamente inconsistente. En consecuencia la fórmula '$(p \wedge \neg p)$' es una contradicción en **LP**.
Probemos ahora que la siguiente fórmula es una tauotología en **LP**:
(10) $(p \vee \neg p)$
Como antes, iniciamos construyendo un árbol para el conjunto $\{\neg(p \vee \neg p)\}$

1.	$\neg(p \vee \neg p)^*$	**MC**
2.	$\neg p$	**1(¬∨**
3.	p	**1(¬∨**
	×	

La única rama es cerrada. Por lo tanto, el árbol es cerrado y el conjunto $\{\neg(p \vee \neg p)\}$ es semánticamente inconsistente. En consecuencia la fórmula '$(p \vee \neg p)$' es una tautología en **LP**.
Demostremos que la siguiente fórmula es semánticamente indeterminada en **LP**:
(11) $(p \vee q)$
El siguiente es un árbol para el conjunto $\{(p \vee q)\}$:

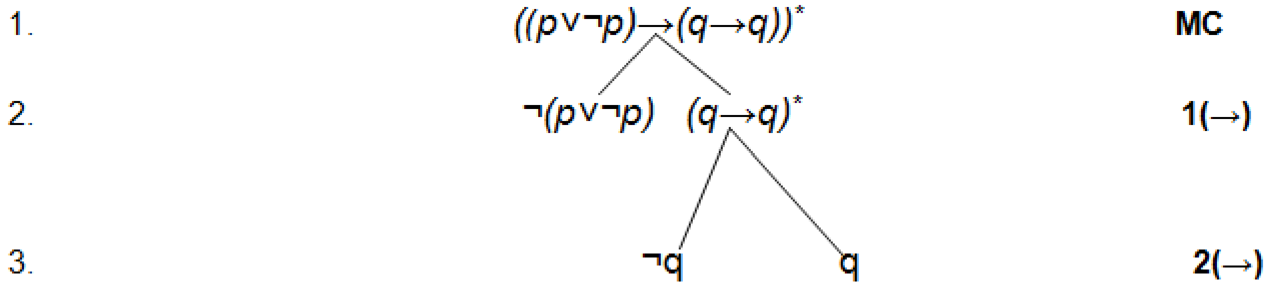
1.	$(p \vee q)^*$		**MC**
2.	p	q	**1(∨)**

Construyamos ahora el árbol de verdad para el conjunto $\{\neg(p \vee q)\}$:

1.	$\neg(p \vee q)^*$	**MC**
2.	$\neg p$	**1(¬∨)**
3.	$\neg q$	**1(¬∨)**

Ya que en ambos casos los árboles son abiertos, entonces la fórmula '$(p \vee q)$' es semánticamente indeterminada en **LP**.

En los anteriores ejemplos sabíamos de antemano que el árbol de qué conjunto íbamos a construir para obtener la respuesta a la cuestión planteada, pero ¿ qué pasa si sólo nos dan una fórmula así sin más y nos pieden determinar si es una tautología, una contradicción o una fórmula semánticamente indeterminada en **LP**?. El problema cuando se intenta determinar si una fórmula es una teutología, una contradicción o una fórmula semánticamente indeterminada reside en que muchas veces el árbol que decidimos construir primero no resulta ser un árbol cerrado, y por lo tanto puede ser un árbol innecesario y superfluo. Como se vio en el ejemplo **(11)** solamente se requieren dos árboles de verdad cuando se trata de una fórmula semánticamente indeterminada.
Ilustremos lo anterior con un ejemplo. Determinemos si la siguiente fórmula:
(12) $((p \vee \neg p) \rightarrow (q \rightarrow q))$
es una tautología, una contradicción o una fórmula semánticamente indeterminada en **LP**.
Tratemos primero de determinar si la fórmula es una contradicción en **LP**. Comencemos cosntruyendo un árbol para el conjunto $\{((p \vee \neg p) \rightarrow (q \rightarrow q))\}$:



Podemos detenernos en este punto. La rama que contiene a ‘$\neg q$ es una rama abierta completa, lo cual nos indica que el conjunto $\{((p \vee \neg p) \rightarrow (q \rightarrow q))\}$ es semánticamente consistente. Por lo tanto, la fórmula ‘$((p \vee \neg p) \rightarrow (q \rightarrow q))$’ no es una contradicción.
Para determinar si la fórmula es una tautología o una fórmula semánticamente indeterminada, debemos contruir un árbol para el conjunto que contiene como único miembro a la negación de la fórmula, es decir, el conjunto $\{\neg((p \vee \neg p) \rightarrow (q \rightarrow q))\}$:

1.	$\neg((p\vee\neg p)\rightarrow(q\rightarrow q))^{*}$	**MC**
2.	$(p\vee\neg p)$	**1(→)**
3.	$\neg(q\rightarrow q)^{*}$	**1(¬→)**
4.	q	**3(¬→)**
5.	$\neg q$	**3(¬→)**
	×	

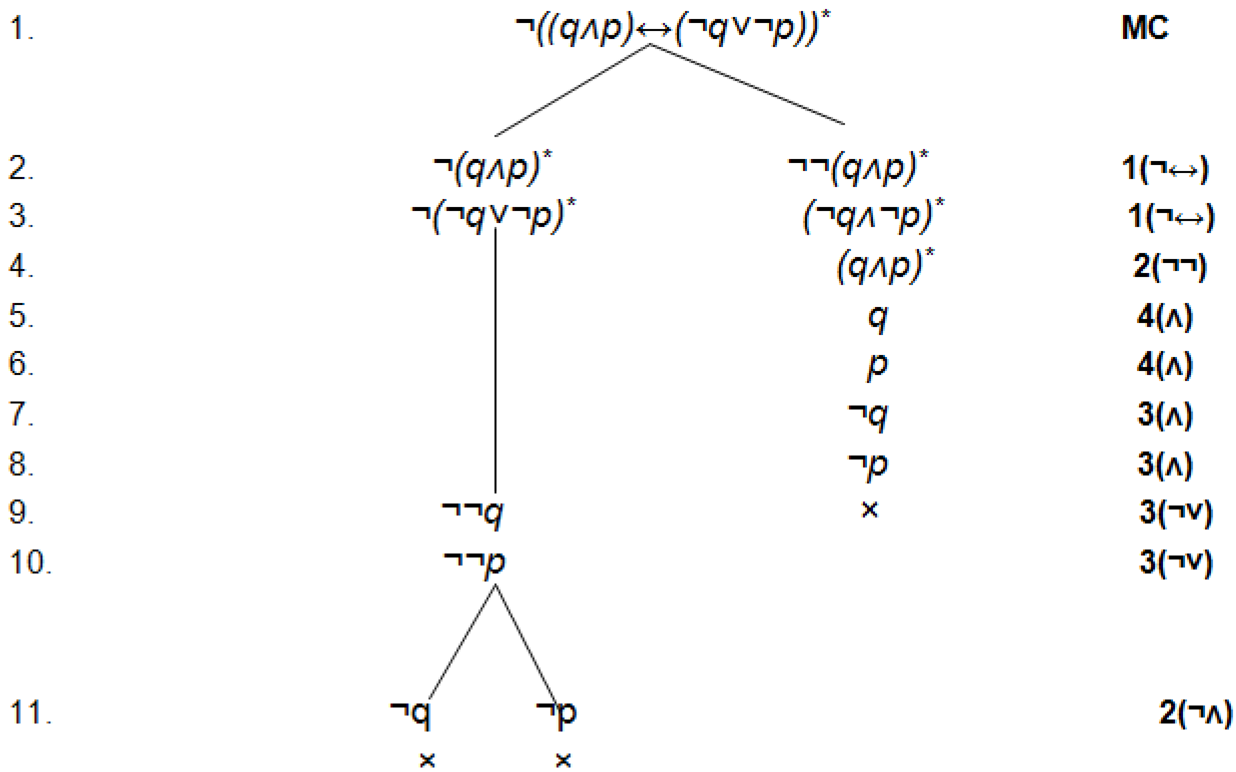
La única rama es una rama cerrada. Por lo tanto el árbol es cerrado y el conjunto $\{\neg((p \vee \neg p) \rightarrow (q \rightarrow q))\}$, es semánticamente inconsistente. En consecuencia, '$((p \vee \neg p) \rightarrow (q \rightarrow q))$' es una tautología.
En este ejemplo coonstruimos dos árboles de verdad, uno para el conjunto que contiene a la fórmula y otro para el que contiene a su negación, pero hubiera bastado con construir sólo el segundo árbol.

3.3.4. Equivalencia semántica

Según la definición que vimos en la sección 4.11, dos fórmulas $\wp$ y $\Re$ son semánticamente equivalentes si y sólo si $\{\neg(\wp \leftrightarrow \Re)\}$ es semánticamente inconsistente. Podemos expresar esta definición en términos de las propiedades de los árboles de verdad:

Definición 3.11. *Dos fórmulas $\wp$ y $\Re$ son semánticamente **equivalentes en LP** si y sólo si $\{\neg(\wp \leftrightarrow \Re)\}$ tiene un árbol de verdad cerrado.*

Las siguientes dos fórmulas son semánticamente equivalentes:
(12) $\neg(q \wedge p)$ $\qquad$ $(\neg q \wedge \neg p)$
El árbol de verdad para el conjunto $\{\neg((\neg(q \wedge p)) \leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p))\}$ prueba este resultado:



Todas las ramas están cerradas, por lo tanto el conjunto $\{\neg((\neg(q \wedge p)) \leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p))\}$ es semánticamente inconsistente y las fórmulas '$(\neg(q \wedge p)$' y '$(\neg q \wedge \neg p)$' son semánticamente equivalentes.

Si revisamos las definiciones dadas en la sección 4.11 sólo faltaría determinar cuando un argumento es semánticamente válido. Pero esto lo haremos en el siguiente capítulo donde veremos las aplicaciones de los árboles de verdad a campos distintos del de la lógica misma, esto es, campos donde la lógica ejerce influencia, que es prácticamente todos los del conocimiento.

3.4. Aplicación por etapas

Finalmente llegamos a la sección donde se desarrolla el objetivo general de esta monografía, es decir, en esta sección daremos una forma de enseñar el cómo usar los árboles de verdad para la corrección de muchos de los argumentos con los que los estudiantes de básica secundaria se encuentran no solo al abrir los libros de texto de las distintas asignaturas que cursan, sino también que escuchan por la rádio, la televisión, que leen en la internet o incluso los que usan para defender una idea o convencer a alguien. Para tal fin proponemos un modelo de etapas, donde como primera etapa sugerimos que se enseñe la traducción del lenguaje natural (en este caso el español) al lenguaje **LP**. Esto valiéndonos de uno o más ejemplos para cada uno de los cinco conectores lógicos (negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional), para que con la práctica el estudiante el estudiante logre un traducción casi instantanea de muchas las oraciones declarativas hechas en el lenguaje natural, al lenguaje proposicional, y así arme sus argumentos en el lenguaje **LP**. Una segunda y final etapa consiste en usar los árboles de verdad, cuya construcción se vio antes, para primero establecer si un argumento en el lenguaje **LP** es válido o correcto y después con dicho conocimiento logren determianr la corrección de los argumentos en **LP**, productos de la traducción hecha a partir del lenguaje natural. En el cuadro 3.2 resumimos estos hechos. En la primera columna se muestran cuantas etapas son, en la segunda columna se muestra lo que en general trataría cada una de las etapas y finalmente una tercera columna donde se muestra específicamente lo que se enseñará en dicha etapa. Las letras '**ALP**' significan 'Argumento en el lenguaje**LP**' y las letras '**ALPTLN**' significan 'Argumento en lenguaje **LP**, producto de la traducción del lenguaje natural'. Puesto que este forma de enseñar aún no se ha puesto a prueba en las aulas de clase, dejamos a criterio de cada profesor, asignar el número específico de horas que gastará en la enseñanza de cada etapa. Así como también el grado en que profundizará la explicación de las mismas.

	generalidad	especificación
Etapa 1	Traducción	Negación
		Conjunción
		Disyunción
		Condicional
		Bicondicional
Etapa 2	Aplicación	**ALP**
		ALPTLN

Cuadro 3.2: Enseñanza por etapas del método de los árboles de verdad

3.4.1. Etapa 1: Traducción

Comencemos con una pregunta ¿ qué usar: una traducción o una interpretación?. Aquí obtamos por una traducción. Ahara bien para entender bien el porque de dicha elección debemos saber cuál es la diferencia entre lo que es una traducción y lo que es una interpretación. En el lenguaje sencillo, una *traducción* es la correspondencia de un lenguaje con otro lenguaje. Así pues cuando formalizamos una proposición del lenguaje natural, esto es, cuando una proposición del lenguaje natural se pone en correspondencia con una fórmula atómica de **LP**, estamos sin duda efectuando una traducción. Pero por interpretación se entiende la correspondencia de un lenguaje, no ya con otro lenguaje, sino con hechos o situaciones, es decir, con una ontología. Veamos un ejemplo para entender esto. Convengamos en interpretar la fórmula

$$p$$

como

Baile

ahora no sólo estamos entendiendo que la letra proposicional 'p' se traduzca por la palabra española 'baile', sino que la fórmula en cuestión está en correspondencia con el hecho físico de bailar, hecho que también se puede expresar con el vocablo 'dancing' que pertenece al lenguaje natural conocido como inglés o cualquier otro vocablo que pertenezca a algún otro lenguaje natural y que sirva para expresar dicho hecho físico. Ahora bien, como a nosotros nos interesa las oraciones declarativas hechas en el lenguaje natural conocido como español más que los hechos que dichas oraciones declarativas representen, esto porque en muchas ocasiones los estudiantes puede que no

estén familiarizados con dichos hechos. Por ejemplo si interpretamos a 'q' como 'el circuito número 1 es reluctante al campo magnetico ejercido en el eje z' estariamos poniendo en correspondencia a 'q' con el hecho físco de un campo reluctante a un campo magnetico direccionado, hecho poco popular entre los estudiantes de básica media, por lo tanto lo más conveniente sería enseñarles una traducción, ya que para el análisis lógico los contenidos de las oraciones declarativas no son necesarios.
Dado que en el lenguaje **LP** hay fórmulas atómicas y fórmulas y a su vez las fórmulas son de cinco tipos, a saber, negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional, para llevar a cabo una buena traducción, nos es necesario saber qué tipo de enunciados en el lenguaje natural se pueden traducir a fórmulas atómicas y que tipo de enunciados se pueden traducir a fórmulas. Que es lo que haremos a continuación, empezando con las fórmulas atómicas y finalizando con la traducción de argumentos desde el lenguaje ordinario a **LP**.

3.4.1.1. Fórmulas atómicas

En el español hay dos tipos de enunciados, los ***enunciados simples*** y los ***enunciados complejos***. Un enunciado simple es una oración declarativa cuyo sujeto es una persona, animal o cosa individual y concreta de la cual se predica un solo atributo o propiedad. Los enunciados simples se pueden combinar de múltiples maneras para formar enunciados complejos.[5] Ejemplos de enunciados simples son:
(1) Carlos Valderrama es médico.
(2) Yolanda López es maestra.
(3) Graham Greene es inglés.
(4) Ernesto Cardenal es cubano.
(5) Victor Hugo es francés.
A los enunciados simples los traduciremos en fórmulas atómicas de **LP**. Así al enunciado 'Carlos valderrama es médico' lo podemos traducir con la letra 'p', al enunciado 'Yolanda López es maestra' con la letra 'q', y así con los demás enunciados simples. En aras de la claridad no usaremos dos letras enunciativas distintas para un mismo enunciado simple, aunque esto sea posible.

[5]Nos ocuparemos de los enunciados compuestos en la siguiente sección

3.4.1.2. Fórmulas

Como vimos antes, un enunciado complejo es la combinación de enunciados simples. Ahora bien, en español existen muchas palabras y frases que sirven para combinar enunciados simples. No todas esas palabras y frases establecen una relación *lógica*. Algunas palabras establecen relaciones temporales, causales y de otros tipos. Aquellas palabras y frases que establecen una conexión lógica entre dos enunciados se denominan ***conectores lógicos***. Hay otras frases que no conectan dos enunciados sino que se anteponen a uno solo de ellos. Tales frases se denominan ***operadores de negación***. Son precisamente, los conectores lógicos y los operadores de negación los que nos interesan y a continuación veremos como traducir enunciados compuestos formados a partir de cada uno de ellos, empezando con la negación.

3.4.1.3. Negación

Hay ciertas frases, palabras y patículas en español, que al ser añadidas a enunciados o a partes de un enunciado, generan la ***negación*** del enunciado original. Ejemplos de negación son los siguientes:
(6) No es cierto que Chaikovsky es polaco.
(7) El perro de Hitler no era alsaciano.
(8) No es el caso que Kety cenara con Miguel.
En ocasiones el predicado de un enunciado contiene prefijos como 'in-' o 'des-', que nos indican que se trata de una negación de un enunciado simple. Por ejemplo el enunciado:
(9) Diógenes de Sinope era indecente.
es la negación de:
(10) Diógenes de sinope era decente
Ya antes vimos que a los enunciados simples los traducimos por fórmulas atómicas. Ahora acordaremos que a una negación la simbolizaremos anteponiéndole a la fórmula atómica que traduce al enunciado simple el símbolo '$\neg$'. Así si 'p es la traducción del enunciado 'Diógenes de sinope' era decente', el enunciado **(9)** se traducirá como:
(11) $\neg p$.

3.4.1.4. Conjunción

La afirmación sumultánea de dos enunciados es la ***conjunción*** de los mismos. Las siguientes frases y palabras nos indican que un enunciado compuesto es una conjunción: 'y', 'pero', 'sin embargo', 'aunque', 'aún más', 'no sólo' 'a pesar de' y 'también'.[6] Así pues los siguientes son ejemplos de conjunción:
(12) Lupe quiere practicar guitarra pero no tiene tiempo
(13) Kasparov y Karpov jugaron ajedrez
(14) Jesús inventó el cristianismo. También Mahoma inventó una religión
Para traducir una conjunción en el lenguaje natural a **LP**, primero traducimos los enunciados simples y, entonces los colocamos a ambos lados del símbolo '$\wedge$'. Así si queremos traducir el enunciado **(14)** primero debemos traducir los enunicados simples de los que está compuesto: 'Jesús inventó el cristianismo' y 'Mahoma inventó una religión', lo que podemos hacer si por ejemplo usamos los síbolos 'p' y 'q', con lo que el enunciado **14** se tradiciría como:
(15) $(p \wedge q)$.

3.4.1.5. Disyunción

El tercer tipo de enunciados que estudiaremos es la ***disyunción***. En español se suele conocer a una disyunción porque entre los dos enunciados, va la palabra 'o'. Los siguientes son ejemplos de disyunción:
(12) Lupe toma café o te.
(13) Jaime juega fútbol o tenis.
(14) Cristiano Ronaldo es Portugues o no usa peineta.
En **LP** utilizaremos el símbolo '$\vee$' para representar al conector lógico que genera la disyunción. Así, si 'p' es la traduccción del enunciado 'Jaime juega fútbol' y 'q' es la traducción del enunciado 'Jaime juega tenis', elenunciado **13** sería traducido en **LP** como:
(15) $p \vee q$.

[6] La mayoría de estas expresiones se usan paraq crear contrastes entr dos enunciados. Pero es necesario dejarles claro a los estudiantes que dichas connotaciones se pierden en la traduccción al **LP**.

3.4.1.6. Implicación

Recordemos que el símbolo '$\rightarrow$' recibe el nombre de implicador. Ahora bien, dicho símbolo sirve para traducir aunque parcial y de forma incompleta[7], de la partícula 'si..., entonces...'. Veamos como traducir el siguiente enunciado:

(16) Si Nicolás cena todos los días si Kety y Katy lo hacen, entonces Nicolás goza de buena salud y Kety es una persona cordial.

Antes de pasar a la traducción cabe hacer recordar que el símbolo '$\rightarrow$' genera fórmulas del tipo $(\wp \rightarrow \Re)$. A $\wp$ se le llama ***antecendente*** y a $\Re$ se le llama consecuente. De lo anterior se podría concluir que si traducimos a los enunciados 'Nicolás cena todos los días si Kety y Katy lo hacen', 'Nicolás goza de buena salud y Kety es cordial' como 'p' y 'q', entonces el enunciado **(16)** podría traducirse a **LP** como:

(17) $(p \rightarrow q)$.

Sin embargo al hacer esto estariamos olvidando toda la información contenida en los enunciados: 'Nicolás cena todos los días si Kety y Katy lo hacen' y 'Nicolás goza de buena salud y Kety es cordial', y es que las fórmulas unidas por los conectores no tienen porque ser siempre atómicas, observemos que el enunciado 'Nicolás cena todos los días si Kety y Katy lo hacen' es un condicional donde la palabra 'entonces' no aparece en forma explícita y donde el antecedente y el consecuente son los enunciados 'Kety y Katy cenan todos los días' y 'Nicolás cena todos los días' respectivamente. Mientras que el enunciado 'Nicolás goza de buena salud y Kety es cordial' es una conjunción de los enunciados 'Nicolás goza de buena salud' y 'Kety es cordial' Por lo tanto para hacer una correcta traducción del enunciado **(16)**, traduciremos los enunciados 'Kety cena todos los días', 'Katy cena todos los días', 'Nicolás cena todos los días' 'Nicolás goza de buena salud' y 'Kety es cordial', como 'p', 'q', 'r' 's' y 't', respectivamente entonces la siguiente es la traducción que recoge la información completa dada por el enunciado **(16)**:

(18) $(((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (s \wedge t)))$.

[7]Para una discusión de las posibles connotaciones de la partícula 'si..., entonces...' ver Paez, Op.cit p.41-46

3.4.1.7. Coimplicación

En el lenguaje matemático no formalizado es frecuente el uso de partícula 'si y sólo si', que se considera sinónimo de 'cuando y solamente cuando', y también de 'equivale'. Dicha patícula suele emplearse en el establecumiento de definiciones y equivalencias y en la expresión de condiciones necsarias y suficientes.
Para traducir a **LP** dicha partícula usaremos el coimplicador '$\leftrightarrow$'. Veamos como sería la traducción de los siguientes enunciados:
(19) el número tres es impar si y sólo si el número dos es par. **(20)** el acero disminuye su volumen si y sólo si disminuye la temperatura. Lo primero es identificar cuales son los enunciados que conecta la expresión 'si y sólo si', para después traducirlos a **LP** y finalmente entre las fórmulas resultantes colocar el símbolo '$\leftrightarrow$'. En consecuencia el enunciado **(19)** se tradiciría a **LP** como:
(21) $(p \leftrightarrow q)$.
Donde 'p' y 'q' son las traducciones de los enunciados 'el número tres impar' y 'el número dos es par' respectivamente. Por otra parte la siguiente fórmula es una traducción a **LP** del enunciado **(21)**:
(22) $(r \leftrightarrow s)$.

3.4.1.8. Argumentos

En el uso cotidiano, la palabra 'argumento' se refiere a un razonamiento para defender una tesis o para convercer otros de la verdad de un enunciado. En esta monografía usaremos el lenguaje **LP** para determinar la validez de un argumento, como mostraremos más adelante, pero por ahora daremos una definicón general de lo que en español se entiende como argumento:

Definición 3.12. *Un **argumento** es una secuencia finita de enunciados. El último enunciado de la secuencia es la **conclusión**, mientras que los demás enunciados son las **premisas**.*

Veamos aquí los argumentos que presentamos antes (ver página 14) pero diferenciando las premisas de la conclusión:

Premisas	Toda persona miente; pero todos los que van a fiestas son personas.
Conclusión	Todo el que va a fiestas es un mentiroso.

Premisas	Si llueve, entonces no salgo. Es cierto que no salí.
Conclusión	No llovió.

Premisas	Podemos afirmar con certeza que ningún león ha tenido el gusto de conocer a un marciano. Todo el que conoce a un marciano es digno de ser invitado por el presidente a bailar en el palacio presidencial.
Conclusión	Ningún león es digno de ser invitado por el presidente a bailar en el palacio presidencial.

Premisas	Si Juan viene a mi casa, entonces no voy a la de él; pero Juan viene a mi casa.
Conclusión	No voy a la de él.

Premisas	O leo este libro o juego fútbol. No juego fútbol.
Conclusión	Leo este libro.

Premisas	Si salgo, entonces si voy donde Ana, entonces compraré caramelos. Saldré e iré donde Ana.
Conclusión	Compraré caramelos.

Si comparamos la forma en que se dieron los argumentos inicialmente con la representación que acabamos de dar, podemos observar que la frase 'por tanto' no aparece en la última representación y esta la forma en que podemos separar premisas de conclusión. Todos los enunciados que están antes de la partícula 'Por tanto' son las premisas del argumento y la que está después es la conclusión. Otras frases que separan premisas de la conclusión son: 'definitivamente' y 'Por lo tanto' y 'así pues', aunque las únicas que cumplen eso de que las 'premisas estén antes y la conclusión después' son las partículas 'Por lo tanto' y 'Por tanto' ya que las partículas 'definitivamente' y 'así pues' puede aparecer inmersa antes del final del argumento. En el siguiente argumento identificaremos las premisas y la conclusión:

Si ni Pedro ni Javier puede resolver la ecuación, Manuel va a estar furioso. Y si Manuel está furioso, el experimento no va a ser exitoso. Definitivamente el laboratorio no recibirá recursos adicionales. Después de todo, ni Pedro ni Javier puede resolver la ecuación, y el laboratorio recibirá recursos adicionales si y sólo si el experimento es exitoso[8]

Podemos observar que la partícula 'definitivamente' no está al final del argumento así que de lo único de lo que podemos estar seguros hasta ahora, es de que la expresión 'el laboratorio no recibirá recursos adicionales' es la conclusión. Pero como en un argumento todo enunciado que no es conclusión es premisa, entonces podemos asegurar que todos los demás enunciados son premisas. Así pues la siguiente es la representación del argumento diferenciando las premisas de la conclusión:

Premisas	Si ni Pedro ni Javier puede resolver la ecuación, Manuel va a estar furioso. Si Manuel está furioso, el experimento no va a ser exitoso. Ni Pedro ni Javier puede resolver la ecuación, y el laboratorio recibirá recursos adicionales si y sólo si el experimento es exitoso.
Conclusión	El laboratorio no recibirá recursos adicionales.

Ya que sabemos como lo que es un argumento y como identificar tanto premisas como conlusión, podemos pasar a la traducción de los mismo del lenguaje cotidiano a **LP**. La traducción ya se hace sencilla ya que sabemos como traducir los distintos enunciados y pues un argumento como vimos está compuestos por enunciados, así que para traducir un argumento a **LP** lo que primero debemos hacer es presentarlo de forma que las premisas se diferencien de la conclusión, seguido traducimos todos los enunciados simples a **LP**, para finalmente presentarlo todo en lenguaje **LP** diferenciando las premisas de la conclusión. Aprovechemos que el enunciado anterior ya está presentado de tal forma que las premisasestán diferenciadas de la conclusión y pasemos ahora a traducir los enunciados simples a **LP** así:
p: Pedro puede resolver la ecuación.
q: Javier puede resolver la ecuación.
r: Manuel está furioso
s: El laboratorio recibirá recursos adicionales.
t: El experimento será exitoso.
Así pues el argumento traducido a **LP** presentando de tal forma que las premisas se diferencien de la conclusión será:

[8]Este ejemplo es tomado de Páez, Op.cit. P.50, en donde está como ejercicio propuesto.

$$\begin{array}{l} ((\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r) \\ (r \rightarrow \neg t) \\ ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (s \leftrightarrow t)) \\ \hline \neg s \end{array}$$

3.4.2. Etapa 2

Hasta ahora hemos visto como usar los árboles de verdad para determinar si una fómula en **LP** es o no una tautología, así como para saber si un conjunto de fórmulas en **LP** es o no consistente. Aquí por otra parte veremos la aplicación más importante de los árboles de verdad y esta no es más que la determinación de la validez o corrección de un argumento[9]. Primero veremos cuando un argumento es correcto o válido en **LP** para después y con ayuda de dicho resultado y de la traducción de enunciados del lenguaje común a **LP**, establecer a traves del método de los árboles de verdad si un argumento dado en el idioma español es o no correcto.

3.4.2.1. Aplicación del método de los árboles de verdad para argumentos en LP

Antes vimos (ver página 33) que un argumento de **LP** es semánticamente válido en LP si y sólo si no existe ninguna valuación bajo la cual todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. Definiremos la validez de u argumento en términos de los árboles de verdad así:

Definición 3.13. *Un argumento de* ***LP*** *es* ***semánticamente válido en LP*** *si y sólo si el conjunto que contiene las premisas y la negación de la conclusión tiene un árbol de verdad cerrado.*

Ilustraremos ésta definicón con dos ejemplos. En el primero queremos determinar si el siguiente argumento es semánticamente válido:

$$\begin{array}{l} ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)) \\ \neg(\neg p \vee q) \\ \hline \neg(r \wedge s) \end{array}$$

[9]En principio validez y corrección no tendrían que ser sinónimos, ya que una se refiere al aspecto sintáctico y la otra al aspecto semántico de un argumento, sin embargo, para **LP** dicha sinonimia quedó establecida con el teorema de completitud de Gödel. Para más información véase Garrido, Op.cit. P.325-368

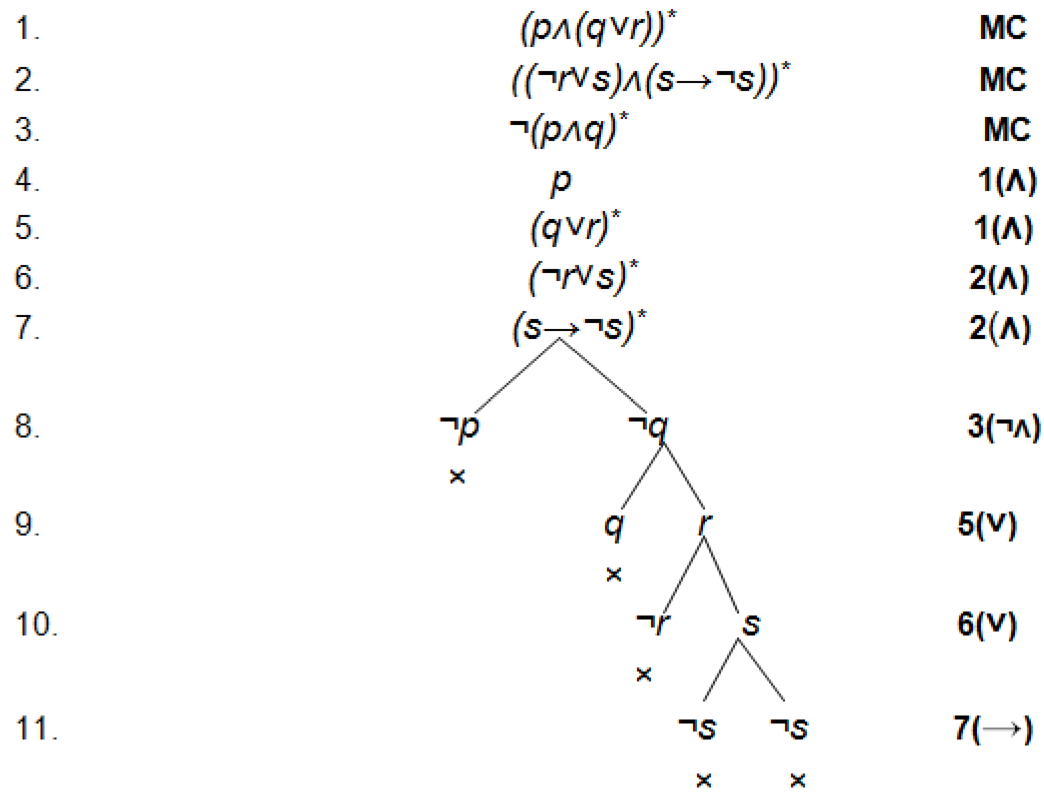
Para determinar si el argumento es semánticamente válido, creamos el conjunto que contiene a las premisas y a la negación de la conclusión:
$\{((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)), \neg(\neg p \vee q), \neg\neg(r \wedge s)\}$
Aunque la conclusión sea una negación, debemos volver a negarla. Construiremos un árbol de verdad para este conjunto:

1.		$((\neg p \vee q) \rightarrow (r \wedge s))^*$	**MC**
2.		$\neg(\neg p \vee q)^*$	**MC**
3.		$\neg\neg(s \wedge t)^*$	**MC**
4.		$(s \wedge t)^*$	**3(¬¬)**
5.		s	**4(∧)**
6.		T	**4(∧)**
7.		$\neg\neg p$	**2(¬∨)**
8.		$\neg q$	**2(¬∨)**
9.		p	**7(¬¬)**
10.	$\neg(\neg p \vee q)$	$(r \wedge s)^*$	**1(→)**
11.		r	**10(∧)**
12.		s	**10(∧)**

Como lo que nos interesa es saber si el árbol que construimos es abierto o cerrado podemos detenernos en este punto, ya que la rama que contiene a 't' es una rama abierta completa. Entonces el árbol es abierto, así que el argumento es semánticamente inválido.
Consideremos ahora otro argumento de **LP**:

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow (q \vee r) \\ ((\neg r \vee s) \wedge (s \rightarrow \neg s)) \\ \hline (p \wedge q) \end{array}$$

Para determinar si el argumento es semánticamente válido, creamos el conjunto que contiene a las premisas y a la negación de la conclusión:
$\{((p \rightarrow (q \vee r), \neg(\neg p \vee q), ((\neg r \vee s) \wedge (s \rightarrow \neg s)), \neg(p \wedge q)\}$
Construiremos el árbol de verdad para el conjunto:



El árbol es cerrado. Por lo tanto el argumento es semánticamente válido.

3.4.2.2. Aplicación del método de los árboles de verdad para argumentos en español

Veamos si el siguiente argumento es o no correcto:
Un gas denso (clorhídrico) se introduce en un frasco y sobre él se coloca un frasco que contiene un gas de menor densidad (amoniáco). Si los gases se mezclan por difusión, entonces el clorhídrico ha subido y el amoniáco ha descendido. Si el clorhídrico ha subido y el amoniáco ha descendido, entonces el movimiento de los gases es opuesto al originado por la gravedad. Si el moviento de los gases es opuesto al originado por la gravedad, entonces el movimiento ha de ser debido al movimiento molecular. Por tanto, el movimiento ha de ser debido al movimiento molecular[10].

[10] Alonso,E., *Introducción a la lógica moderna*, segunda edición, intervención cultutal, España, 2003. Pág.59

Bien, aquí veremos cómo el método de los árboles de verdad nos ayuda a responder dicha pregunta. Resolveremos dicha pegunta diviendo la solución en dos partes: En la primera observaremos el uso de las indicaciones dadas en la etapa 1 y en la segunda parte usaremos las indicaciones dadas en la primera parte de la etapa 2 y que corresponde a la aplicación del método de los árboles de verdad para argumentos en **LP**:

Primera parte: etapa 1

1. Presentemos el argumento de tal manera que diferenciemos las premisas de la conclusión:

Premisas	Si los gases se mezclan por difusión, entonces el clorhídrico ha subido y el amoníaco ha descendido. Si el clorhídrico ha subido y el amoníaco ha descendido, entonces el movimiento de los gases es opuesto al originado por la gravedad. Si el movimiento de los gases es opuesto al originado por la gravedad, entonces el movimiento ha de ser debido al movimiento molecular.
Conclusión	El movimiento ha de ser debido al movimiento molecular.

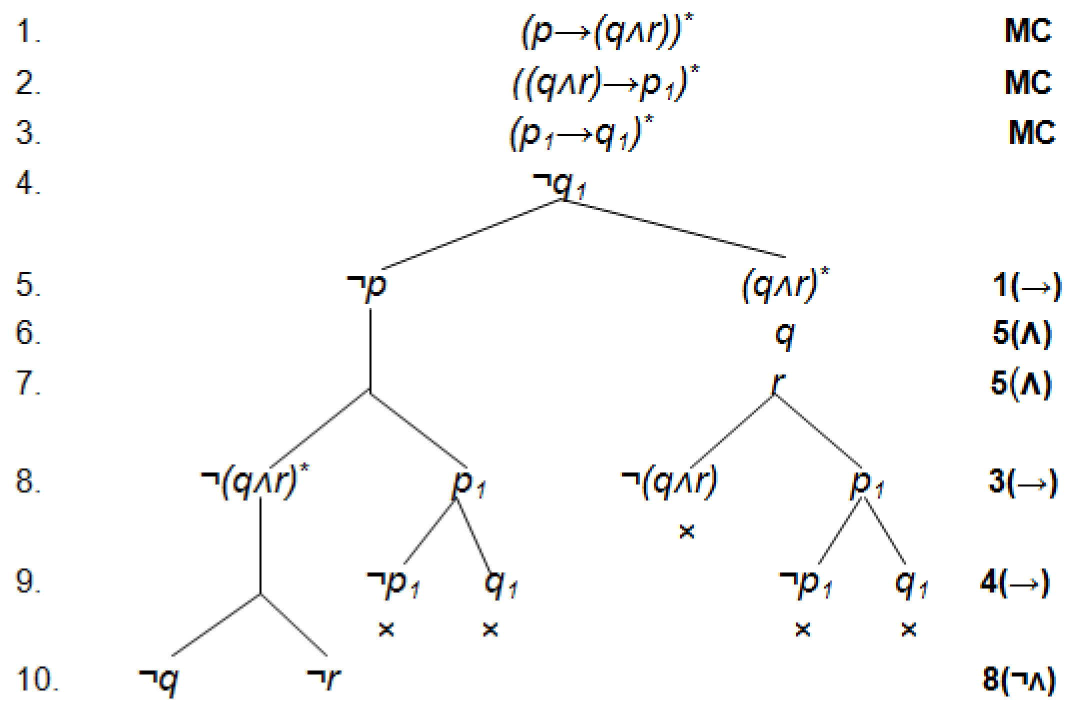
2. Ahora pasamos a traducir todos los enunciados simples a **LP**:
   - p: los gases se mezclan por difusión
   - q: el gas clorhídrico ha subido
   - r: el gas amoníaco ha descendido
   - p_1: el movimiento de los gases es opuesto al ariginado por la gravedad
   - q_1: el movimiento de los gases ha de ser debido al movimiento molecular

3. Así pues el argumento traducido a **LP** presentando de tal forma que las premisas se diferencien de la conclusión será:

$$\begin{array}{l} (p \to (q \wedge r)) \\ ((q \wedge r) \to p_1) \\ (p_1 \to q_1) \\ \hline q_1 \end{array}$$

Segunda parte: etapa 2

Para determinar si el argumento es semáticamente válido, creamos el conjunto que contiene a las premisas y a la negación de la conclusión:
$\{((p \to (q \wedge r)), \neg(\neg p \vee q), ((q \wedge r) \to p_1), (p_1 \to q_1, \neg q_1\}$
Construyamos ahora el árbol de verdad para este conjunto:



El árbol es abierto, así que el argumento es semánticamente inválido. El árbol nos muestra que es posible extraer varios contraejemplos al argumento, es decir, valuaciones bajo las cuales las premisas y la negación de la conclusión sean verdaderas. Todas las valuaciones que cumplen dicha condición son: $V(q)$=**F**, $V(p)$=**F**, $V(r)$=**V** $V(q_1)$=**F** y $V(p_1)$=**V**.
$V(q)$=**F**, $V(p)$=**F**, $V(r)$=**V** $V(q_1)$=**F** y $V(p_1)$=**F**.
$V(q)$=**F**, $V(p)$=**F**, $V(r)$=**F** $V(q_1)$=**F** y $V(p_1)$=**V**.
$V(q)$=**F**, $V(p)$=**F**, $V(r)$=**F** $V(q_1)$=**F** y $V(p_1)$=**V**.
$V(q)$=**F**, $V(p)$=**F**, $V(r)$=**V** $V(q_1)$=**F** y $V(p_1)$=**V**.
$V(q)$=**V**, $V(p)$=**F**, $V(r)$=**V** $V(q_1)$=**F** y $V(p_1)$=**V**.
$V(q)$=**F**, $V(p)$=**F**, $V(r)$=**V** $V(q_1)$=**F** y $V(p_1)$=**F**.
Ahora bien, puesto que cada valuación puede interpretarse como un “mun-

do" posible, cabe la pregunta, ¿cuál de esos ocho mundos que invalidan el argumento es el nuestro?. Ya que el valor de verdad de cada uno de los enunciados que se dan en el argumento se determina por la experiencia, entonces el docente que dicta lógica podía ponerse de acuerdo con los alumnos y con el profesor que imparte la matería de química y reproducir la experiencia en el laboratorio de la escuela y así determinar cuál es la situación que ocurre en la realidad que conocemos (si es que hay otras realidades).

Tomemos ahora un argumento más cercano a la cotidianidad y que lo hizo famoso el griego Bías:

> O te casas con una mujer hermosa o te casas con una fea. Si es hermosa, la compartirás con otros. Si es fea, será un castigo. Pero ninguna de estas cosas es deseable. Luego no te cases[11]

Frente a argumentos de este tipo nos podemos sentir tentados a ver si es correcto mirando el significado de los términos incluidos en el mismo, eso porque la mayoría sino todos nos son familiares, pero ante esto hay que recodar que un argumento es o no válido de acuerdo a su *forma* y no al significado de los términos involucrados en el mismo.
El procedimiento para determinar la validez del argumento es similar el mismo al presentado anteriormente por lo cual la estructura para resolverlo será la misma cambiando el contenido de cada paso, a este tipo de soluciones a un problema determinado se le denomina algorítmicas, una de las características fundamentales de este tipo de solución es implica en principio una seguridad absoluta. Con lo cual el método de los árboles de verdad se convierte en una poderosísima arma para enfrentar el problema bastante común de determinar si lo que leemos o escribimos, es coherente. A continuación mostramos la solución al problema de la corrección del argumento que hizo famoso Bías:

Primera parte: etapa 1

1. Presentemos el argumento de tal manera que diferenciemos las premisas de la conclusión:

[11] GARRIDO, Op.Cit. p.65.

	O te casas con una mujer hermosa o te casas con una fea.
	Si es hermosa, la compartirás con otros.
Premisas	Si es fea, será un castigo.
	Ninguna de estas cosas es deseable
Conclusión	No te cases.

2. Ahora pasamos a traducir todos los enunciados simples a **LP**:

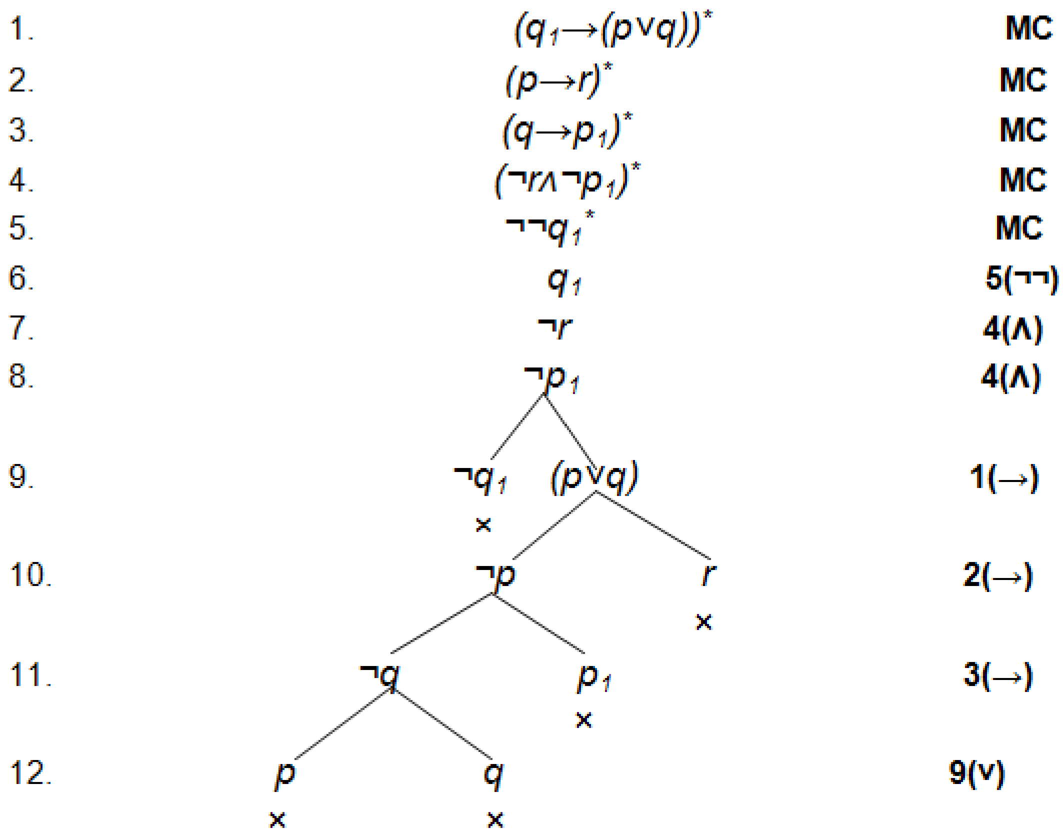
   - p: Te casas con una mujer bonita
   - q: Te casas con una mujer fea
   - r: Compartirás tu mujer con otros
   - p_1: Serás castigado
   - q_1: Te casas

3. Así pues el argumento traducido a **LP** presentando de tal forma que las premisas se diferencien de la conclusión será:

$$\begin{array}{l} (q_1 \to (p \vee q)) \\ (p \to r) \\ (q \to p_1)) \\ (\neg r \wedge \neg p_1) \\ \hline \neg q_1 \end{array}$$

Segunda parte: etapa 2

Para determinar si el argumento es semáticamente válido, creamos el conjunto que contiene a las premisas y a la negación de la conclusión:
$\{(q_1 \to (p \vee q)), (q \to p_1)), (q \to p_1)), (\neg r \wedge \neg p_1), \neg\neg q_1\}$
Construyamos ahora el árbol de verdad para este conjunto:



El árbol es cerrado, así que el argumento es semánticamente válido. Sí por más chocante que pueda parecerle a un amante del matrimonio, el argumento de Bías es válido, pero entendamos bien lo que significa validez, empecemos diciendo que el hecho de que un argumento sea válido no quiere decir que las premisas sean verdaderas, es decir, el argumento de Bías puede ser muy válido, pero eso no quiere decir que si me caso con una mujer hermosa,neceariamente tendré que compartirla. Tampoco que un arguemnto sea correcto significa que la conclusión sea necesariamente cierta, una persona puede oir dicho argumento e incluso saber que es correcto y sin embargo dicha persona termine casandose. Lo que **Sí** significa que argumento sea válido es que si *acepto* la validez de las premisas, tengo que *necesariamente* aceptar la validez de la conclusión.

Como vimos ya sea un argumento tomado de la ciencia o uno tomado del lenguaje común, el método de los árboles de verdad son una herramienta suficiente para determinar si dichos argumentos son o no correctos. Con lo cual el aprender a usar dicho método será de gran ayuda tanto para estudiar la obra intelectual que otro haya hecho, como para construir la obra intelectual nuestra.

4

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1. Conclusiones

1. Se usó el método de los árboles de verdad de la lógica proposicional bivalente para determinar cuando una fórmula es una tautología, cuando una fórmula es una contradicción y finalmente cuando una fórmula es una fórmula semánticamente indeterminada, valiéndome de ejmplos que iban desde los más simples a los más complejos.

2. Se Mostró cómo se formalizan enunciados del lenguaje cotidiano y su relación con expresiones del lenguaje de la lógica formal proposicional bivalente. Para esto utilicé argumentos tomados ya de la ciencia, ya del lenguaje común.

3. Empleando dos argumentos dados en el lenguaje natural, tomados uno de las ciencias naturales y el otro de la literatura se corregieron a partir del uso del método de los árboles de verdad para el lenguaje de la lógica proposicional bivalente.

4. Al corregir un argumento lo que se busca es establecer es que si se cumple la condición de que la conclusión se siga *necesariamente* de las premisas, es decir, se busca verificar que si aceptamos a las premisas como verdaderas, tendremos que aceptar a la conclusión como verdadera de manera obligatoria. Ahora bien, en la media básica se enseña (cuando se hace)que esta verificación se lleva a cabo confeccionando una tabla de verdad, ya que las fórmulas de la lógica proposicional bivalente son veritativo-funcionales, esto es, dependen de los valores de verdad que se le asignen a las fórmulas atómicas que componen a dichas

fórmulas de la lógica proposicional bivalente. De hecho el que las tablas hagan explícita esa propiedad veritativo-funcional de las fórmulas es su mayor virtud y lo que hace que su uso se vuelva engorroso cuando haya más de tres fórmulas atómicas. En esta monografía usé el método de los arboles de verdad para corregir el siguiente argumento.

$$\begin{array}{l} (p \to (q \land r)) \\ ((q \land r) \to p_1) \\ (p_1 \to q_1) \\ \hline q_1 \end{array}$$

En dicho argumento (al que nombraré **A**) hay cinco fórmulas atómicas (p; q; r; p_1; q_1) y si se asignan dos valores de verdad a cada una de ellas ($\boldsymbol{V}$ o $\boldsymbol{F}$), se tendría que construir una tabla de al menos nueve columnas y $2^5 = 32$ filas, cuestión muy engorrosa, que haría (dado su tamaño) que por una parte quien la realice en determinado momento olvide que lo que busca es «ver» la ilación lógica entre premisas y conclusión y crea que lo que busca es sólo llenar dicha tabla y por otra que en los estudiantes cause una gran frustración, al ver que con todo después de llenarla, haya una equivocación la cual es muy dificíl de rastrear ya que hay tantas filas y columnas que es necesario un examen exhaustivo para saber donde reside la falla. Como vimos en este trabajo se soluciona ambos problemas ya que por usar diagramaciones de árbol se mira de manera gráfica la ilación de premisas y conclusión, no causando que en la elaboración del árbol se provoque el olvido del objeto por el cual se está realizando, y en vez de frustración, el encontrar un error llevaría al estudiante a recorrer las distintas ramas «viendo» cómo se sigue lógicamente la descomposición de una fórmula en sus fórmulas atómicas. Además la simplicidad se hace patente ya que como se vió, en esta monografía se confeccionó un árbol de diez filas y siete ramas para la corrección del argumento **A**. De otro lado, puesto a que muchos de los licenciados en matemática encargados de impartir la lógica en la básica media se les enseña de forma exclusiva el método de las tablas de verdad, considero (puesto que no fue posible poner en práctica la propuesta mientras escribí estas líneas)que como se organiza la propuesta es ideal para que el profesor que se decida a ponerla en práctica y no conozca el método de los árboles de verdad se vaya apropiando del mismo a medida que lo va introduciendo en sus clases.

4.2. Recomendaciones

1. A los docentes que no manejan el método de los árboles de verdad se les recomienda en un principio, un especial estudio de la parte de las definiciones de las propiedades semánticas en términos de los árboles de verdad, ya que es aquí donde radica la novedad del método y la que garantiza que su uso permite «ver» la ilación lógica entre premisas y conclusión.

2. Antes de la aplicación de la propuesta deberá recordarle a sus estudiantes nociones básicas de la teoría ingenua de conjuntos, tales como: conjunto unitario y conjunto vacío ya que son esenciales para poder entender las definiciones que se hacen de las propiedades semánticas en términos de los árboles de verdad.

3. El método se puede introducir primero como alternativa de las tablas de verdad, en los casos de fórmulas sencillas que contengan dos fórmulas atómicas acompañado de algo de la historia del método y como en un principio se creo como forma sistemática de encontrar contraejemplos y después pasó a convertirse en una manera de obtener propiedades semánticas, para que así el estudiante vea como ha ido evolucionando nuestro conocimento acerca de la lógica, a proposito de esto, los libros que referencié en la bibliografía contienen muchos datos históricos que serán de gran ayuda.

4. Por último se recomienda que en trabajos posteriores se lleve a cabo la aplicación de la propuesta dada en esta monografía, con motivo de establecer criterios claros de evaluación, ya que con la información con que se cuenta no es muy razonable proponer alguna forma de evaluar.

Bibliografía

[1] Garrido, M., *Lógica simbólica*, cuarta edición, tecnos, Madrid, 2001.540 p

[2] Páez, M., *Introducción a la lógica moderna*, segunda edición, uniandes, Bogotá, D.C., 2010. 526 p

[3] Carnap, R., *Introduction to symbolic logic and its applications*, traducción al inglés por Meyer, W. y Wilkilson, J., Dover Publications, New York, 1958. 241 p

[4] Gómez, A., *Los estudios de la lógica en el Currículo Universitario Colombiano*, Intersecciones educativas, número 2, Edición 2010. 240 p

[5] *Serie lineamientos curriculares*, 1998. 325 p

[6] Cabanzo, A., *La enseñanza estudios de la lógica y el análisis del texto argumentativo*, revista actualidades, número 54, julio-diciembre 2009.190 p.

[7] Republica de Colombia, *Serie lineamientos curriculares.* Ministerio de educación nacional,1998.512 p

[8] Alonso, E., *Introducción a la lógica moderna*, segunda edición, intervención cultutal, España, 2003. 300 p.

[9] Alonso, E., *Sócrates en Viena*, tecnos, España, 2007. 160 p.

[10] Zubiría, J., *Las competencias argumentativas e interpretativas en la educación básica y media*, [En línea]. Junio 2009. Disponible en la web: http://www.slideshare.net/maurelis/las-competencias-412550

[11] Zubiría, J., *PROPUESTA DE LINEAMIENTOS PARA LA FORMACIÓN POR COMPETENCIAS EN EDUCACIÓN SUPERIOR*, [En línea]. Enero 2010. Disponible en la web:http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-261332_archivo_pdf_lineamientos.pdf