



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Soluciones Regularizadas para problemas inversos en Vibraciones

Oscar Diego Calvo Orozco

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Facultad de Ciencias Naturales, Departamento de Matemáticas
2014

Soluciones Regularizadas para Problemas Inversos en Vibraciones

Oscar Diego Calvo Orozco

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito
parcial para optar al título de:
Maestría en Ciencias - Matemáticas Aplicadas.

Director:
Ph.D. Carlos Daniel Acosta Medina

Línea de Investigación:
Problemas Inversos
Grupo de Investigación:
GTA en Cálculo Científico y Modelamiento Matemático

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Facultad de ciencias Naturales, Departamento de Matemáticas
Colombia
2014

Resumen

Se presenta a continuación un trabajo de investigación acerca de soluciones regularizadas para problemas inversos. Se hace un estudio general acerca del concepto de problema inverso, y se muestra su aplicación en temas relacionados con sismicidad, especialmente para la determinación de las características del suelo, a partir de la medición de Micro-tremores. Se propone finalmente una aproximación al mismo tema a partir del método de optimización de Powell.

Palabras clave: Optimización, Problemas Inversos, Nakamura, Tikhonov.

Regularized Solutions in Inverse Problems.

Abstract

The following is a research paper about regularized solutions in inverse problems. It is a comprehensive study on the concept of inverse problems, and shows its application in seismic issues, especially for the determination of soil characteristics, from the measurement of micro-tremors. Finally proposes an approach to the same subject using Powell optimization method.

Keywords: Optimization, Inverse Problems, Nakamura, Thikhonov.

Contenido

	Pág.
Resumen.....	V
Introducción.....	9
1. Perfiles Verticales Sísmicos y Microtremores	11
1.1 Perfil Sísmico Vertical.....	11
1.2 Determinación de Características del terreno a partir de Microtremores, usando la relación de Nakamura.....	12
1.3 Conclusiones.....	18
2. Métodos para la Solución de Problemas Inversos	20
2.1 Regularización de Tikhonov.....	20
2.2 Validación General Cruzada.....	23
2.3 Análisis Espectral Singular.....	24
2.4 Método de Optimización de Powell.....	26
2.5 Conclusiones.....	27
3. Cálculos Numéricos	28
3.1 Perfil Sísmico Vertical.....	28
3.2 Identificación de parámetros a partir de microtremores .	31
3.3 Conclusiones.....	40
4. Conclusiones y recomendaciones	41
4.1 Conclusiones.....	41
4.2 Recomendaciones.....	41
Bibliografía.....	43

Introducción

Desde que en 1902, el matemático francés Jacques Hadamard, hizo la definición clásica de problemas bien y mal condicionados, esta se pudo aplicar a las teorías físicas y los fenómenos que observamos: Dada una descripción completa de un sistema físico, nosotros podemos predecir el resultado de algunas de sus mediciones, esto es comúnmente llamado un problema directo ó de modelación. Un problema inverso, es en consecuencia, aquel en el que usando los resultados de algunas medidas, buscamos determinar los parámetros que caracterizan un problema específico. Debido a esto es que en la solución de un problema inverso, se necesita tener disponible cualquier información previamente adquirida de los parámetros del modelo.

En honor a la verdad, debemos dejar claro que en la práctica diaria, no siempre se pueden tener todas las variables en forma tan clara y directa, de hecho, en muchas aplicaciones de la ingeniería y de las ciencias físicas, el problema real consiste en determinar alguna propiedad desconocida de un objeto a partir de la observación de su respuesta a una ó varias señales de prueba. Esto de por sí solo ya plantea un reto interesante pues estamos ante la necesidad de determinar las causas de un comportamiento dado a partir de sus consecuencias (muy distinto a la forma de proceder en un planteamiento directo). Agreguémosle a esto el hecho de que muchas veces las señales de prueba provienen de varias fuentes y, adicional, pequeñas variaciones en una o varias de estas señales de prueba causan grandes variaciones en los resultados finales obtenidos, causando esto que las señales leídas tengan una gran cantidad de ruido". Todas estas consideraciones hacen que los problemas inversos casi siempre estén en la categoría adicional de problemas mal condicionados, por las siguientes razones:

1. Existencia: Puede no haber un único modelo que se ajuste exactamente a los datos leídos. (Esto debido a que nuestros datos leídos contienen mucho ruido").
2. Que su solución no sea única: Si se encontrara una solución exacta para el problema, esta podría no ser única, debido a la cantidad de fuentes que se necesitaron para determinarla. Saber esto, que tipo de fuentes son las que están generando el comportamiento de la solución encontrada es lo que origina el estudio del análisis de resolución del modelo.
3. Es inestable: Como vimos, debido a que pequeños cambios en los datos originan grandes variaciones en la respuesta, es que este tipo de problemas son altamente inestables.

En este último punto, el de la inestabilidad, debemos tener en cuenta que siempre es posible estabilizar el proceso de inversión por medio de la imposición de restricciones adicionales que favorezcan la solución. Este proceso se llama regularización. La regularización es de una importancia suma en este tipo de problemas, pues nos permite encontrar soluciones a problemas inversos que de otra forma serían intratables.

Los problemas inversos aparecen frecuentemente en la práctica diaria, pudiendo citar como ejemplos típicos los siguientes:

1. El tratar de localizar fallas en vigas a partir de cambios en los modos de vibración de la misma.
2. A partir de la deformación de un elemento estructural, tratar de determinar el tipo de carga distribuida que tuvo que soportar.
3. La detección de irregularidades notorias bajo la superficie terrestre, a partir de ondas emitidas a través de ésta
4. Determinación de las características del suelo a partir de la medición de micro temores.

En este trabajo de tesis nos dedicaremos a estudiar la solución de los dos últimos tipos de problemas.

Se ha desarrollado metodologías para desarrollar este tipo de problemas:

En [12], se propone una transformación de la dispersión inversa derivada de la migración inversa del tiempo (RTM, por sus siglas en inglés) como una alternativa a la solución del Perfil Sísmico Vertical (VSP, por sus siglas en inglés).

En [13], se propone el uso de la Transformada de Radón para la correcta estimación del perfil sísmico vertical.

En [11], se propone una herramienta para determinar los parámetros principales del suelo a partir métodos de Montecarlo.

1. Perfiles Verticales Sísmicos y Microtremores.

Estudiaremos ahora, los dos tipos de problemas que nos interesan en este documento, desde su formulación directa.

1.1 Perfil Sísmico Vertical.

En el problema de Perfil Sísmico Vertical (o VSP por sus siglas en inglés) deseamos saber la velocidad sísmica vertical del material que rodea una perforación hecha en el terreno. Para esto se genera una onda sísmica que se propaga hacia abajo y sus movimientos sísmicos (micro tremores) son medidos por sensores (acelerómetros) que rodean la perforación. El tiempo de llegada de cada onda a los instrumentos de medición es tomado a partir de los datos grabados en los sismogramas. Se asume el medio de transmisión de la onda como continuo y homogéneo, pero nosotros introduciremos tres capas de material distinto con muy poca variación entre ellas. El esquema en campo sería el siguiente:

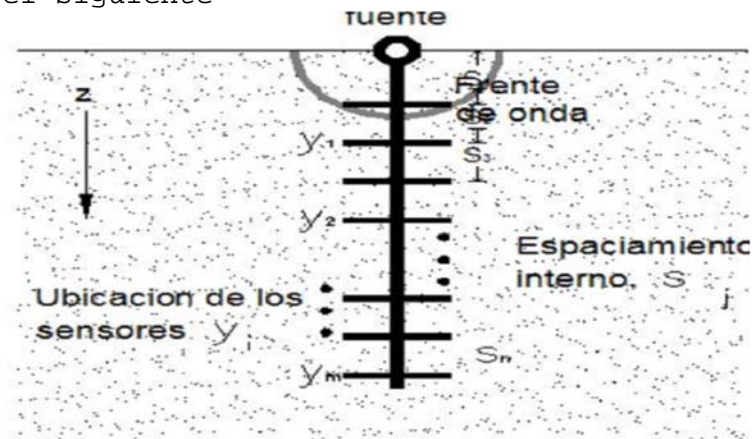


Fig 1

Este problema es no lineal si se expresa en términos de velocidad. Podemos volver lineal el problema si lo expresamos en términos de la lentitud S que es el recíproco de la velocidad V y que se puede entender como el tiempo que demora la señal en llegar a su destino. El tiempo de llegada observado a una profundidad z está dado por

$$t(z) = \int_0^z s(\xi) d\xi$$

$$t(z) = \int_0^\infty s(\xi) H(z - \xi) d\xi \tag{1.1}$$

En esta última ecuación H es la función de Heaviside.

Si resolvemos (1.1) usando el teorema fundamental del cálculo, tendríamos simplemente $t'(z) = s(z)$. Pero en la práctica, $t(z)$ está compuesta de mucho ruido y diferenciar las observaciones puede derivar en una solución llena del mismo.

Vamos a discretizar el problema planteado en (1.1) por medio de m observaciones tomadas en intervalos de tiempo t_i y profundidades y_i que están igualmente espaciadas a intervalos Δ_y . El problema es discretizado a n profundidades modelo z_j que están igualmente espaciadas a intervalos de Δ_z . Todo esto, tal como se muestra en la figura 1.

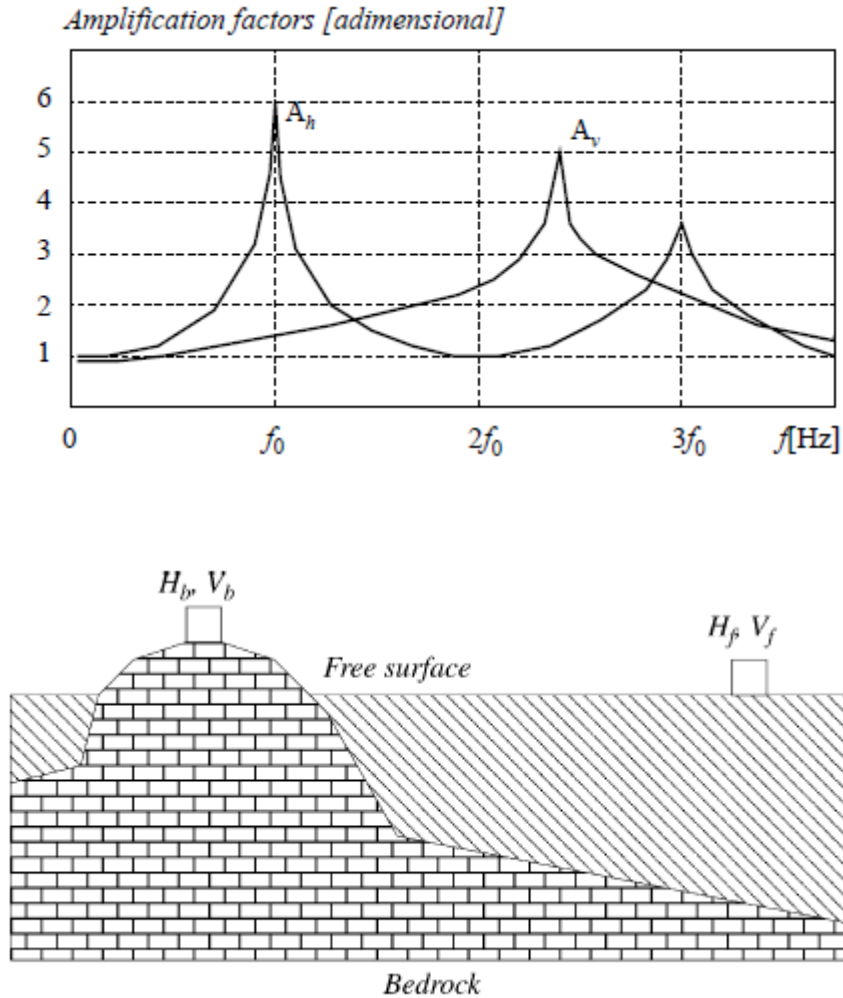
Este problema queda entonces así:

$$t_i = \sum_{j=1}^N H(y_i - z_j) s_j \Delta_z \quad (1.2)$$

Nuestro problema directo, planteado en (1.1) será a partir de ahora $G(m) = a$. Además, en donde $n/m = \Delta_y / \Delta_z$. Las filas de la matriz G_i consisten en $i * n / m$ elementos Δ_z a la izquierda y $i * n / m$ ceros a la derecha. En el caso de que $n=m$ entonces G es una matriz triangular inferior con cada entrada no-cero igual a Δ_z .

1.2 Determinación de Características del terreno a partir de Microtremores, usando la relación de Nakamura.

Nakamura propuso un nuevo método para determinar las características de los estratos superficiales de suelo, conocida como la relación H/V (ó QTS) que consiste en medir los tremores solamente en la superficie. El tremor es medido usualmente a lo largo de dos direcciones horizontales. Nos proponemos detectar en sitio los parámetros más representativos del terreno a partir de la medición de dichos micro tremores. Los siguientes gráficos dan una idea de cómo es el ensamblaje de este procedimiento:



Cada estrato de suelo se compone de seis parámetros para determinar, que son a saber: Velocidad de la Ondas S y P, densidad del suelo, espesor del estrato, y los factores Q_p y Q_s . De estos parámetros, asumiremos que se pueden conocer en sitio el espesor del estrato y la densidad del terreno, y el modelamiento de la onda da teórica, usaremos el propuesto en el trabajo de Lunedei y Albarello [1] que básicamente describe la potencia media de la señal como:

$$P_n(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} M[|A_n(\omega; x, y)|^2] dx dy \tag{1.3}$$

Donde la integral es la contribución de la potencia del n-simo modo de las ondas de superficie a una frecuencia angular ω , resultante de la activación de puntos armónicos aleatorios e independientes, operando en un elemento de una superficie unitaria, con coordenadas $(x, y, 0)^T$ y la curva de dispersión que representa (para cada frecuencia) el promedio de la velocidad fase efectiva de las ondas de superficie:

$$\widehat{V}(\omega) = \frac{\omega\xi}{\arccos\left[\sum_n \frac{P_n(\omega)}{P(\omega)} \cos\left(\frac{\omega}{V_n(\omega)} \xi\right)\right]} \quad (1.4)$$

Donde ω es la frecuencia angular, ξ es la distancia entre sensores, $V_n(\omega)$ es la velocidad de fase de la onda de superficie en el modo n -simo.

La curva H/V (ó HVSR) es:

$$HVSR(\omega) \equiv \sqrt{\frac{P_H(\omega)}{P_V(\omega)}} \quad (1.5)$$

Asumo un sistema de coordenadas con origen x,y en la superficie terrestre y coordenada z vertical hacia abajo de la superficie terrestre. Cilíndrico $(r,\phi,z)^T$.

El desplazamiento \mathbf{u}^e , producido en un punto en el origen $(0,0,0)^T$ de un medio elástico por una fuente de excitación armónica con una frecuencia angular ω es:

$$F(t) \equiv \left\{ \begin{array}{c} F_x \\ F_y \\ F_z \end{array} \right\} e^{-i\omega t} \quad (1.6)$$

Y localizado en la coordenada $(r,\phi,z)^T$ a una distancia suficiente del origen (tal que la onda de aproximación pueda ser considerada válida), se da como una superposición de Ondas de Plano en la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_{\beta}^e(\omega; r, \phi; t) = \sum_n \mathbf{A}_{\beta,n}^e(\omega; r, \phi) e^{i(k_{\beta,n}^e r - \omega t + \frac{\pi}{4})} \quad (1.7)$$

En las ecuaciones anteriores, tenemos que $\beta = L, R$, indican las ondas Love y Rayleigh respectivamente, y los índices e, v indican si los parámetros mostrados hacen referencia a medios elásticos ó viscoelásticos.

La amplitud $\mathbf{A}_{\beta,n}^e$ se puede obtener de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{L,n}^e(\omega; r, \phi)]_{\phi}^{\wedge} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi\omega r}} (F_x \sin(\phi) - F_y \cos(\phi)) B_{0,n}^e \\ [\mathbf{A}_{L,n}^e(\omega; r, \phi)]_r^{\wedge} &= [\mathbf{A}_{L,n}^e(\omega; r, \phi)]_z^{\wedge} = 0, \\ [\mathbf{A}_{R,n}^e(\omega; r, \phi)]_r^{\wedge} &= -\frac{1}{4\sqrt{2\pi\omega r}} [iF_z B_{3,n}^e + (F_x \cos(\phi) + F_y \sin(\phi)) B_{1,n}^e] \\ [\mathbf{A}_{R,n}^e(\omega; r, \phi)]_{\phi}^{\wedge} &= 0 \\ [\mathbf{A}_{R,n}^e(\omega; r, \phi)]_z^{\wedge} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi\omega r}} [F_z B_{2,n}^e - i(F_x \cos(\phi) + F_y \sin(\phi)) B_{3,n}^e] \end{aligned}$$

En las anteriores ecuaciones, los autores introducen los siguientes términos:

$$B_{0,n}^e = \frac{[l_1(k_n, \omega)]^2}{I_{1,n}^{L,e} U_{L,n}^e \sqrt{V_{L,n}^e}}$$

$$B_{1,n}^e = \frac{[r_1(k_n, \omega)]^2}{I_{1,n}^{R,e} U_{R,n}^e \sqrt{V_{R,n}^e}}$$

$$B_{2,n}^e = \frac{[r_2(k_n, \omega)]^2}{I_{1,n}^{R,e} U_{R,n}^e \sqrt{V_{R,n}^e}}$$

$$B_{3,n}^e = \frac{r_1(k_n, \omega) r_2(k_n, \omega)}{I_{1,n}^{R,e} U_{R,n}^e \sqrt{V_{R,n}^e}}$$

En estas expresiones, $l_1(k_n, \omega), r_1(k_n, \omega), r_2(k_n, \omega)$ son los desplazamientos de las funciones propias (eigenfunctions) de la ecuación normal para las ondas Love y Rayleigh, correspondientes con el modo de la onda número k_n a una frecuencia angular ω , calculada en el plano $z=0$. Adicional, $V_{\beta,n}^e$ son las velocidades de fase del modo n para las ondas Love ($\beta = L$) y Rayleigh ($\beta = R$), mientras que $I_{1,n}^{\beta,e}$ son las primeras integrales de energía de este modo y $U_{\beta,n}^e$ son las velocidades de grupo.

Si se asume un igual número de modos activos para cada frecuencia fija en ambos medios (elásticos y viscosos), la ecuación (1.7) se vuelve:

$$\mathbf{u}_{\beta}^v(\omega; r, \phi; t) = \sum_n \mathbf{A}_{\beta,n}^v(\omega; r, \phi) e^{i(k_{\beta,n} r - \omega t + \frac{\pi}{4})} \quad (1.8)$$

Y la amplitud resulta de la variación de su contraparte elástica así (ver arriba):

$$\mathbf{A}_{\beta,n}^v(\omega; r, \phi) = [\mathbf{A}_{\beta,n}^e(\omega; r, \phi) + \delta \mathbf{A}_{\beta,n}(\omega; r, \phi)] e^{-\alpha_{\beta,n} r} \quad (1.9)$$

Acá, el término δA depende de las variaciones de la velocidad de fase $\sum_{\beta,n}(\omega)$, mientras que el número real $k_{\beta,n}$ en (1.8) y el coeficiente de atenuación en (1.9) $\alpha_{\beta,n}$ son los componentes del número complejo de la onda de número (la contraparte de real de la elástica).

$$k_{\beta,n}^v = k_{\beta,n} + i\alpha_{\beta,n} \in \mathbb{C} .$$

Las relaciones entre los parámetros mecánicos, elásticos y viscoelásticos se dan de la siguiente forma:

$$k_{\beta,n} = k_{\beta,n}^e - \frac{\omega}{[V_{\beta,n}^e(\omega)]^2} \frac{2}{\pi} \log \frac{\omega}{\omega_{ref}} \sum_{\beta,n}(\omega)$$

$$\alpha_{\beta,n} = \frac{\omega}{[V_{\beta,n}^e(\omega)]^2} \sum_{\beta,n}(\omega)$$

Recordar que ω_{ref} siempre se asume igual a 1 Hz.

La amplitud para las ondas Love en medio viscoelastico es:

$$[\mathbf{A}_{L,n}^v(\omega; r, \phi)]_j = \frac{F_x \sin(\phi) - F_y \cos(\phi)}{4\sqrt{2\pi\omega r}} e^{-\alpha_{L,n}r} \begin{cases} B_{0,n}^v & \text{si } j = \hat{\phi} \\ 0 & \text{si } j = \hat{r}, \hat{z} \end{cases}$$

$$B_{0,n}^v = B_{0,n}^e \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \log \frac{\omega}{\omega_{ref}} \Gamma_{o,n}(\omega) + i\Gamma_{o,n}(\omega) \right\}$$

y para las Ondas Rayleigh, tenemos

$$B_{j,n}^v = B_{j,n}^e = \left\{ \left[1 - \frac{2}{\pi} \log \frac{\omega}{\omega_{ref}} \Gamma_{j,n}(\omega) \right] + i\Gamma_{j,n}(\omega) \right\}, \text{ para } j = 1, 2, 3 \dots$$

Estas dos últimas fórmulas no son generalmente computables, a menos que supongamos que la variación de la función propia del desplazamiento elástico se desvanece junto con la primera derivada con respecto a la profundidad, en el caso de las ondas Rayleigh, en este caso, para las ondas Love tenemos:

$$\Gamma_{o,n}(\omega) \simeq \frac{\gamma_{L,n}(\omega)}{U_L^e} + \frac{\sum_{L,n}(\omega)}{2V_L^e}$$

Y para las Ondas Rayleigh tenemos

$$\Gamma_{j,n}(\omega) \simeq \frac{\gamma_{R,n}(\omega)}{U_R^e} + \frac{\sum_{R,n}(\omega)}{2V_R^e}$$

En estas últimas ecuaciones, debemos aclarar que $\gamma_{\beta,n}$ no hace referencia la velocidad de fase, sino de grupo y que Γ son funciones que describen las variaciones del medio elástico a viscoelastico. Para el cálculo de la velocidad efectiva y la relación H/V, se asume que el ruido sísmico es el resultado de movimientos independientes y armónicos ubicados en la superficie terrestre. En este caso, solamente la contribución media de las fuentes activas a la propagación es objeto de interés. Es razonable asumir que en el promedio general, cualquier correlación entre las amplitudes espectrales promedio de los modos de propagación se pierde. Luego, según Arai y Tokimatsu [2,3] la densidad espectral de energía (power spectral density) promedio relativa a cada modo de propagación será calculada separadamente combinando las contribuciones relevante de las ondas Love y Rayleigh. Luego, si $N_L(\omega)$ es el número de modos activos de Love y $N_R(\omega)$ los correspondientes de Rayleigh, se supone que los resultados del ruido sísmico de la superposición de $N_L(\omega) + 2N_R(\omega)$ son no-correlacionados.

Entonces, tomamos:

$$|\mathbf{A}_{L,n}^v(\omega; r, \phi)|_{\hat{\phi}}^2 = \frac{1}{32\pi\omega r} e^{-2\alpha_{L,n}r} (F_x \sin \phi - F_y \cos \phi)^2 |B_{0,n}^v|^2$$

$$| \mathbf{A}_{R,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{r}}^2 = \frac{1}{32\pi\omega r} e^{-2\alpha_{R,n} r} ([-F_x \cos \phi + F_y \sin \phi] \Re B_{1,n}^v + F_z \Im B_{3,n}^v)^2 + [-F_x \cos \phi + F_y \sin \phi] \Im B_{1,n}^v + F_z \Re B_{3,n}^v)^2$$

$$| \mathbf{A}_{R,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{z}}^2 = \frac{1}{32\pi\omega r} e^{-2\alpha_{R,n} r} [(F_x \cos \phi + F_y \sin \phi) \Im B_{3,n}^v + F_z \Re B_{2,n}^v]^2 + [-F_x \cos \phi + F_y \sin \phi] \Re B_{3,n}^v + F_z \Im B_{2,n}^v)^2$$

Y los promedios correspondientes son:

$$M(| \mathbf{A}_{L,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{\phi}}^2) = \frac{1}{32\pi\omega r} e^{-2\alpha_{L,n} r} (M[F_x^2] \sin^2 \phi + M[F_y^2] \cos^2 \phi) | B_{0,n}^v |^2$$

$$M(| \mathbf{A}_{R,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{r}}^2) = \frac{1}{32\pi\omega r} e^{-2\alpha_{R,n} r} (M[F_z^2] | B_{3,n}^v |^2 + M[F_x^2] \cos^2 \phi + M[F_y^2] \sin^2 \phi) | B_{1,n}^v |^2$$

$$M(| \mathbf{A}_{R,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{z}}^2) = \frac{1}{32\pi\omega r} e^{-2\alpha_{R,n} r} (M[F_z^2] | B_{2,n}^v |^2 + M[F_x^2] \cos^2 \phi + M[F_y^2] \sin^2 \phi) | B_{3,n}^v |^2$$

$$M(| \mathbf{A}_{L,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{r}}^2) = M(| \mathbf{A}_{L,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{z}}^2) = M(| \mathbf{A}_{R,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{\phi}}^2) = 0$$

Se asume que el gran número de fuentes que contribuyen a la generación del microtremor, puede ser aproximado como una distribución continua uniforme de las fuentes en una región apropiada de la superficie terrestre así:

$$\zeta(R_1) \equiv ((x, y)^T \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq R_1^2)$$

Que excluye el círculo con radio $R_1 \geq 0$. Esta área se considera libre de la fuente, para garantizar la dominancia de las ondas de superficie y la validez del plano de la onda de aproximación. En este punto de vista, los términos $M[F_i^2]$ con $i = x, y, z$, se interpretan como la varianza de la distribución de probabilidad expresando la densidad de las fuerzas armónicas aleatorias que son activas en las direcciones principales.

Definimos también:

$$s_x^2 \equiv \frac{M[F_x^2]}{\sigma^2}; \quad s_y^2 \equiv \frac{M[F_y^2]}{\sigma^2}; \quad s_z^2 \equiv \frac{M[F_z^2]}{\sigma^2}, \quad \text{Donde}$$

$$\sigma^2 \equiv M[F_x^2] + M[F_y^2] + M[F_z^2]$$

Como las fuentes se asumen mutuamente independientes, la contribución de energía de cada modo se puede escribir como:

$$P_{HL,n}^v(\omega) \equiv \int_{\zeta(R_1)} M(| \mathbf{A}_{L,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{\phi}}^2) r d\phi dr = \int_0^\infty \int_{R_1}^\infty M(| \mathbf{A}_{L,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{\phi}}^2) r d\phi dr = \frac{\sigma^2}{32\pi\omega} | B_{0,n}^v |^2 \int_{R_1}^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\alpha_{L,n} r} dr \int_0^{2\pi} (s_x^2 \sin^2 \phi + s_y^2 \cos^2 \phi) d\phi$$

$$\mathbf{P}_{HL,n}^v(\omega) \equiv \frac{\sigma^2}{32\pi\omega} | \mathbf{B}_{0,n}^v |^2 (\mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2) \frac{e^{-2\alpha_{L,n} r}}{2\alpha_{L,n}}$$

$$P_{HR,n}^v(\omega) \equiv \int_0^\infty \int_{R_1}^\infty M(| \mathbf{A}_{R,n}^v(\omega; r, \phi) |_{\hat{r}}^2) r d\phi dr = \frac{\sigma^2}{32\pi\omega} \int_{R_1}^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\alpha_{R,n} r} dr [s_z^2 | B_{3,n}^v |^2 \int_0^{2\pi} d\phi + | B_{1,n}^v |^2 \int_0^{2\pi} (s_x^2 \cos^2 \phi + s_y^2 \sin^2 \phi) d\phi]$$

$$\mathbf{P}_{HR,n}^v(\omega) \equiv \frac{\sigma^2}{32\pi\omega} [2\mathbf{s}_z^2 |\mathbf{B}_{3,n}^v|^2 + (\mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2) |\mathbf{B}_{1,n}^v|^2] \frac{e^{-2\alpha_{R,n}R_1}}{2\alpha_{R,n}}$$

$$\mathbf{P}_{VR,n}^v(\omega) \equiv \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{\infty} \mathbf{M}(|\mathbf{A}_{R,n}^v(\omega; \mathbf{r}, \phi)|_z^2) \mathbf{r} d\phi d\mathbf{r} = \frac{\sigma^2}{32\pi\omega} [2\mathbf{s}_z^2 |\mathbf{B}_{2,n}^v|^2 + (\mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2) |\mathbf{B}_{3,n}^v|^2] \frac{e^{-2\alpha_{R,n}R_1}}{2\alpha_{R,n}}$$

Estas integrales existen y son finitas según [2,3]. Si usamos la definición de velocidad efectiva dada al principio, tenemos:

$$[\hat{V}_L^v(\omega)]_{\hat{\phi}} = \frac{\omega\xi}{\arccos[\sum_n \frac{P_{HL,n}^v(\omega)}{P_{HL}^v(\omega)} \cos(\frac{\omega}{V_{L,n}(\omega)}\xi)]}$$

$$[\hat{V}_L^v(\omega)]_{\hat{r}} = [\hat{V}_{L,n}(\omega)]_{\hat{z}} = 0$$

$$[\hat{V}_R^v(\omega)]_r = \frac{\omega\xi}{\arccos[\sum_n \frac{P_{HR,n}^v(\omega)}{P_{HR}^v(\omega)} \cos(\frac{\omega}{V_{R,n}(\omega)}\xi)]}$$

$$[\hat{V}_R^v(\omega)]_{\hat{\phi}} = 0$$

$$[\hat{V}_R^v(\omega)]_z = \frac{\omega\xi}{\arccos[\sum_n \frac{P_{VR,n}^v(\omega)}{P_{VR}^v(\omega)} \cos(\frac{\omega}{V_{R,n}(\omega)}\xi)]}$$

Donde hemos definido:

$$P^v(\omega) \equiv \sum_n P_{:,n}^v(\omega)$$

Y ya podemos, reemplazar los valores en la expresión original H/V:

$$(HVS\mathbf{R})^v(\omega) \equiv \sqrt{\frac{P_H^v(\omega)}{P_V^v(\omega)}}$$

En donde:

$$P_H^v(\omega) \equiv \sqrt{[\sum_{n=1}^{N_L(\omega)} P_{HL,n}^v(\omega)] [\sum_{n=1}^{N_R(\omega)} P_{HR,n}^v(\omega)]}$$

$$P_V^v(\omega) \equiv \sum_{n=1}^{N_R(\omega)} P_{VR,n}^v(\omega).$$

1.3 Conclusiones

Hemos revisado los fundamentos teóricos de la modelación de VSP y la identificación de parámetros de suelo a partir de microtremores. Se mostró que si en el tema de VSP, se conocieran todos los datos, la velocidad de la onda leída, sería conocida de forma directa, sin importar el ruido presente en las mediciones. En el tema de Identificación de Parámetros de Suelo, se notó que si se conocen todas las características propias del suelo, la relación de Nakamura sería obtenida de forma inmediata, sin importar el nivel de ruido

existente. Ahora pasaremos a revisar las formas de resolver el problema inverso asociado a los ya vistos.

2. Métodos para la Solución de Problemas Inversos

En este capítulo, estudiaremos los métodos que aplicaremos a la solución de los problemas inversos y en particular al problema de identificación de parámetros de suelo a partir de microtemores (VSP).

2.1 Regularización de Tikhonov.

Consideremos un problema del tipo:

$$d(s) = \int_a^b g(s, x)m(x)d(x) \quad (1.10)$$

Acá, $d(s)$ es una función conocida, que representa los datos observados. La función $g(s, x)$ se considera como prescrita y contiene todo el comportamiento físico que relaciona el modelo desconocido $m(x)$ con el observado $d(s)$. El intervalo $[a, b]$ puede ser finito ó infinito. La función $d(s)$ puede ser conocida sobre un intervalo completo (al menos en teoría), pero en la realidad, solo tenemos medidas de $d(s)$ en un conjunto de medidas en un conjunto finito de puntos.

Deseamos resolver (1.10), para la función desconocida $m(x)$. Este tipo de ecuación es llamado integral de Fredholm del primer tipo (IFK).

Para resolver (1.10), debemos discretizarla en partes tales que puedan ser solucionables por métodos del Algebra Lineal. Asumamos que $d(s)$ es conocido en un número finito de puntos s_1, s_2, \dots, s_m . Para un número finito de puntos, podemos escribir el problema inverso como:

$$\begin{aligned} d_i = d(s_i), &= \int_a^b g(s_i, x)m(x)d(x), \text{ con } i = 1, 2, \dots, m, \\ &= \int_a^b g_i(x)m(x)d(x), \text{ con } i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.11)$$

Donde $g_i(x) = g(s_i, x)$. A esta función $g_i(x)$ se le suele llamar representante ó núcleo (kernel)

En nuestra aproximación a la discretización de IFK, usaremos una integración numérica para aproximar (1.11). La manera más simple de hacerlo es por medio de la regla del punto medio, en la cual un intervalo es dividido en sub-intervalos y tomamos puntos en el medio de cada intervalo. Estos puntos están dados por:

$$x_j = a + \frac{\Delta x}{2} + (j-1)\Delta x \quad (1.12)$$

Con:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (1.13)$$

La integral planteada en (1.11), se puede aproximar entonces de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d_i &= \int_a^b g_i(x)m(x)d(x) \\ &\approx \sum_{j=1}^n g_i(x_j)m(x_j)\Delta x, \text{ con } i = 1,2,\dots,m, \end{aligned} \quad (1.14)$$

Si hacemos:

$$G_{i,j} = g_i(x_j)\Delta x \text{ con } \begin{pmatrix} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Y además hacemos:

$$m_j = m(x_j) \text{ con } j = 1,2,\dots,n \quad (1.16)$$

Tenemos entonces el sistema de ecuaciones lineales:

$$G.m = d \quad (1.17)$$

Una forma de resolver problemas que involucran mínimos cuadrados es la descomposición en valores singulares (SVD). En esta, una matriz G puede factorizarse como:

$$G = USV^T$$

Donde:

- U es una matriz $m \times m$ ortogonal, cuyas columnas son los vectores base unitarios que genera el espacio de datos R^m
- V es una matriz $n \times n$ ortogonal, cuyas columnas son los vectores base que generan el espacio del modelo R^n
- S es una matriz $m \times n$ diagonal, con elementos diagonales no-negativos, llamados valores singulares.

Una vez obtenida la SVD de G, podemos tener una solución generalizada de (1.17) así:

$$m^* = V_p S_p^{-1} U_p^T d = \sum_1^p \frac{U_p^T d}{s_i} V_{\cdot,i} \quad (1.18)$$

Donde, $p = Rank(G)$ y además:

- V_p , es una matriz $n \times p$ cuyas columnas forman una base ortonormal para $\Re(G^T)$

- S_p , es una matriz $p \times p$ diagonal, con valores singulares diferentes de cero
- U_p , es una matriz $m \times p$ cuyas columnas forman una base ortonormal para $\mathfrak{R}(G)$
- $U_{.,i}$ es un vector propio de tamaño $m \times 1$ de GG^T , con valores propios s_i^2
- $V_{.,i}$ es un vector propio de tamaño $n \times 1$ de $G^T G$, con valores propios s_i^2

Sin embargo, debemos decir que la solución presentada en (1.18) puede llegar a ser muy inestable cuando uno o más de los valores singulares, s es pequeño. Una manera de obviar esto es eliminar los términos en la sumatoria que están asociados con los valores singulares pequeños. Esto regulariza la solución en el sentido de hacer los resultados menos sensitivos a la presencia de ruido. El precio que se paga es que la solución regularizada es una solución reducida. El método de Tikhonov es probablemente el más usado en la actualidad para regularizar estas soluciones y se puede expresar fácilmente en términos de la SVD de G

Una manera de encontrar una solución para (1.17) es considerando el problema de mínimos cuadrados amortiguados, así:

$$\min \|Gm - d\|_2^2 + \alpha^2 \|m\|_2^2 \quad (1.19)$$

Donde α es conocido como parámetro de regularización. Cuando es dibujada en una escala log-log la curva de valores óptimos de $\|m\|_2$ contra $\|Gm - d\|_2$, generalmente adquiere la forma de L. Esto ocurre porque $\|m\|_2$ es una función estrictamente decreciente de α , mientras que $\|Gm - d\|_2$ es una función estrictamente creciente de α . La forma de la esquina varía en cada tipo de problema, pero generalmente está bien definida. En adición al principio de discrepancia, otro método popular para escoger el valor de α es este criterio de la L-curva en el cual, el valor de α que da la solución más cercana a la esquina de la L-curva es el que se selecciona.

El problema planteado en (1.19) es equivalente al problema de mínimos cuadrados clásico obtenido al aumentar el problema de mínimos cuadrados de (1.10) de la siguiente manera:

$$\min \left\| \begin{bmatrix} G \\ \alpha I \end{bmatrix} m - \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (1.20)$$

Mientras α sea diferente de cero, las últimas n filas de la matriz aumentada en (1.20) son linealmente independientes. Así, (1.20) es un problema de mínimos cuadrados de rango completo que se puede resolver por cualquier método normal de ecuaciones así:

$$\begin{bmatrix} G^T & \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \alpha I \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} G^T & \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Que se simplifica así:

$$(G^T G + \alpha^2 I) m = G^T d \quad (1.22)$$

Que es el conjunto de ecuaciones que restringen la solución regularizada de Tikhonov (orden - cero) para (1.10). Si usamos la SVD de G entonces (1.22) puede escribirse como:

$$(VS^T U^T U S V^T + \alpha^2 I) m = VS^T U^T d \quad (1.23)$$

$$(VS^T S V^T + \alpha^2 I) m = VS^T U^T d \quad (1.24)$$

Como (1.24) es no-singular, tiene entonces solución única, que es

$$m_\alpha = \sum_{i=1}^K \frac{s_i^2}{s_i^2 + \alpha^2} \frac{(U_{\cdot,i})^T d}{s_i} V_{\cdot,i} \quad (1.25)$$

Donde $k = \min(m, n)$.

2.2 Validación General Cruzada.

La validación general cruzada (GCV), es un método alternativo de selección del parámetro α , que tiene una serie de propiedades estadísticas interesantes. En su forma más común, nosotros consideramos los modelos que se obtienen dejando uno de los m puntos de datos fuera del proceso de ajuste. Considere el problema de regularización modificado de Tikhonov, en el que ignoramos un punto de datos d_k :

$$\min \sum_{i \neq k} ((Gm)_i - d_i)^2 + \alpha^2 \|Lm\|_2^2 \quad (1.26)$$

Llamemos a la solución de este problema $m_{\alpha,L}^{[k]}$ donde el índice superior indica que d_k fue dejado fuera del cálculo. Idealmente, el modelo $m_{\alpha,L}^{[k]}$ podría predecir muy exactamente el dato perdido d_k . En la aproximación uno-afuera, seleccionamos el parámetro α de regularización de tal manera que se puedan minimizar los errores para todos los k :

$$\min V_0(\alpha) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m ((Gm_{\alpha,L}^{[k]})_k - d_k)^2 \quad (1.27)$$

Desafortunadamente, $V_0(\alpha)$ implica resolver m problemas de la forma (1.26). Para resolver este tipo de problemas es que se creó el método GCV.

Se puede demostrar que

$$V_0(\alpha) \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{((Gm_{\alpha,L})_k - d_k)^2}{\left(\frac{1}{m}(m - \text{Tr}(GG^\#))\right)^2} = \frac{m \|Gm_{\alpha,L} - d\|_2^2}{\text{Tr}(I - GG^\#)^2} \quad (1.28)$$

En GCV, esta última ecuación es la que nosotros minimizamos.

2.3 Análisis Espectral Singular.

La metodología SSA (por sus siglas en inglés) es un método de filtrado que puede ayudar a mejorar la obtención de resultados en la lectura de los microtemores. Permite descomponer la señal en varios componentes (la señal misma y algún ó algunos niveles de ruido), siendo este nivel de diferenciamiento de la señal, el que permite en algunos casos mejorar la aplicación posterior de métodos de resolución como el de Thikhonov.

La descomposición espectral de matrices se ha aplicado solo muy recientemente al análisis de series de tiempo. Tiene sus raíces principalmente en la teoría del caos. Básicamente, los datos leídos son almacenados en un espacio de mayor dimensión y a continuación se aplican cuatro pasos a saber:

- En el primer paso, la serie de datos de tiempo es almacenada en un espacio L-dimensional (llamado Matriz de Trayectorias)
- En el segundo paso se aplica SVD y así la Matriz de Trayectorias es descompuesta en una suma de matrices ortogonales (rank = 1)
- En el tercer y cuarto paso, los componentes son agrupado y la serie de datos de tiempo asociados con cada grupo son reconstruidos.
- **SSA - ALMACENAMIENTO DE LA SERIE DE DATOS:** Se almacenan los datos en un espacio de mayor dimensión, llamado Matriz de Trayectorias. La dimensión de esta matriz es llamada Dimensión de almacenamiento.

Para la serie de datos $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, dicha Matriz de Trayectorias es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-m+1} & x_{n-m+2} & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

La anterior matriz es llamada Matriz de Hankel ($X_{ij} = x_{i+j-1}$).

El tamaño de esta matriz debe ser lo suficientemente grande de tal forma que pueda capturar el comportamiento global del sistema.

- **SSA - DESCOMPOSICION DE LA SERIE DE DATOS:** A la Matriz de Trayectorias se le aplica SVD.

$$X = USV^T$$

Donde $U_{(n-m+1) \times (n-m+1)}$ y $V_{m \times m}$ son matrices ortogonales reales y $S_{(n-m+1) \times m}$ es una matriz diagonal real, tal que sus elementos son los valores singulares de X. Esto se obtiene calculando al matriz de covarianza $C = X^T X / (n - m)$, de tal forma que C es una matriz semidefinida positiva y su descomposición espectral es:

$$C = \Phi \Lambda \Phi^T$$

Donde Φ es una matriz ortonormal tal que sus columnas son los vectores propios de C y Λ es una matriz real, diagonal, tal que sus elementos σ_i^2 son los valores propios de C en orden decreciente. Como los valores singulares de X son la raíz cuadrada de los valores propios de C, tenemos:

$$S = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{Bmatrix}$$

Con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$

Y así podemos obtener la descomposición espectral de la Matriz de Trayectorias:

$$X = \sum_{i=1}^m \sigma_i u_i v_i^T \tag{1.29}$$

Donde u_i y v_i son respectivamente las columnas i-esimas de U y V.

- **SSA - ETAPA DE RECONSTRUCCION:** En esta etapa separamos los componentes adicionados a la serie de tiempo propiamente dicha. La idea es proyectar la Matriz de Trayectorias sobre un espacio q-dimensional. En la ecuación (1.29) cada término de la suma es de menor importancia respecto al anterior en la construcción de la señal. Esta importancia está dada por el peso σ_i de cada valor singular, adicionalmente, por construcción, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$. Podemos aproximar entonces la ecuación (1.26) de la siguiente manera:

$$X_q = \sum_{i=1}^q \sigma_i u_i v_i^T$$

$$ruido = \sum_{i=q+1}^m \sigma_i u_i v_i^T$$

El criterio para la separación de datos no está formalizado y depende del conocimiento de los datos. La matriz X_q no siempre es una Matriz de Trayectorias (en general no es una matriz de Hankel) y por tanto no siempre representa la serie de datos libre de ruido. Sin embargo, la serie de tiempo puede obtenerse promediando las diagonales. Si por ejemplo

$$X_q = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} \end{bmatrix}$$

La serie de datos la podemos obtener:

$$x_q = \left\{ x_{1,1}, \frac{x_{2,1}+x_{1,2}}{2}, \frac{x_{3,1}+x_{2,2}+x_{1,3}}{3}, \frac{x_{4,1}+x_{3,2}+x_{2,3}}{3}, \frac{x_{4,2}+x_{3,3}}{2}, x_{4,3} \right\}$$

Como la serie limpia depende de los parámetros m y q , podemos escribir entonces:

$$x_q = SSA(x; m, q)$$

2.4 Método de Optimización de Powell.

El problema inverso puede ser formulado como sigue: Dados unos datos observados $u^{obs}(x)$ en un tiempo final $T > 0$ y unas funciones u_0, Ψ_0 , encuentre el flujo f y la función de difusión a tal que la solución al problema original sea tan cercana como sea posible. El problema inverso se resuelve entonces minimizando la función de costo:

$$J(u(x_0, \cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T |u(x_0, t) - u^{obs}(t)|^2 dt.$$

Para la determinación de los parámetros, se usó el método de minimización de Powell, que es un método de orden cero que requiere solamente la evaluación de la función $F(x)$.

La idea básica del algoritmo es la siguiente:

- Se escoge un punto inicial x_0
- Se escogen los vectores iniciales $v_i = 1, 2, \dots, n$

- En un ciclo, minimizo $F(x)$ a lo largo de la línea en la dirección v_i . Hacemos que el punto mínimo sea x_i .
- Genero un nuevo vector $v_{n+1} = x_0 - x_n$ que es conjugado al vector producido en el ciclo anterior.
- Ahora, minimizo $F(x)$ a lo largo de la línea a través de x_0 en la dirección de v_{n+1} . Hago que el punto mínimo sea x_{n+1} .
- Evalúo $|x_{n+1} - x_0|$, si es menor que la tolerancia, OK!
- En caso de no llegar a la tolerancia, descarto el vector actual y uso los demás vectores.

2.5 Conclusiones

Hemos mostrado los métodos matemáticos que vamos a utilizar en la solución del problema inverso. Se mostró claramente que el problema de VSP es un problema del tipo $Ax=b$ y que el problema de análisis de microtemores es un problema típico de identificación de parámetros. A continuación mostraremos los resultados numéricos de nuestros análisis.

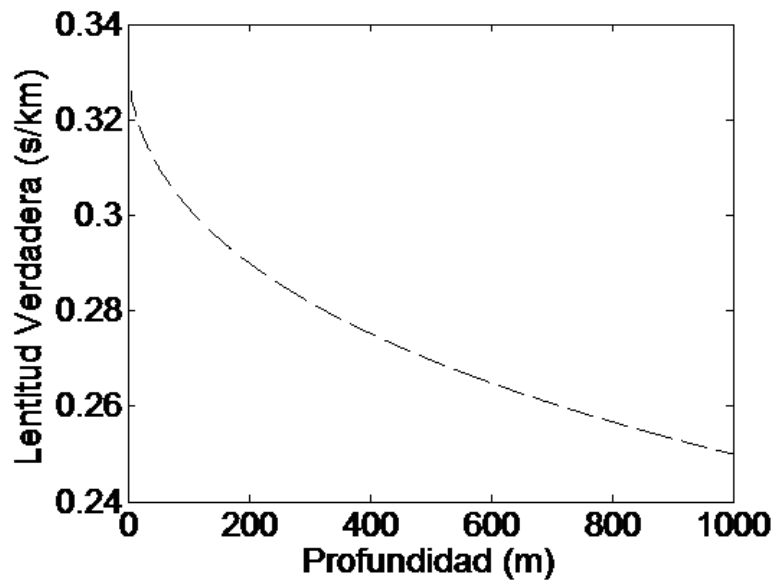
3. Cálculos Numéricos

Se presenta a continuación la evaluación numérica de los problemas anteriormente descritos.

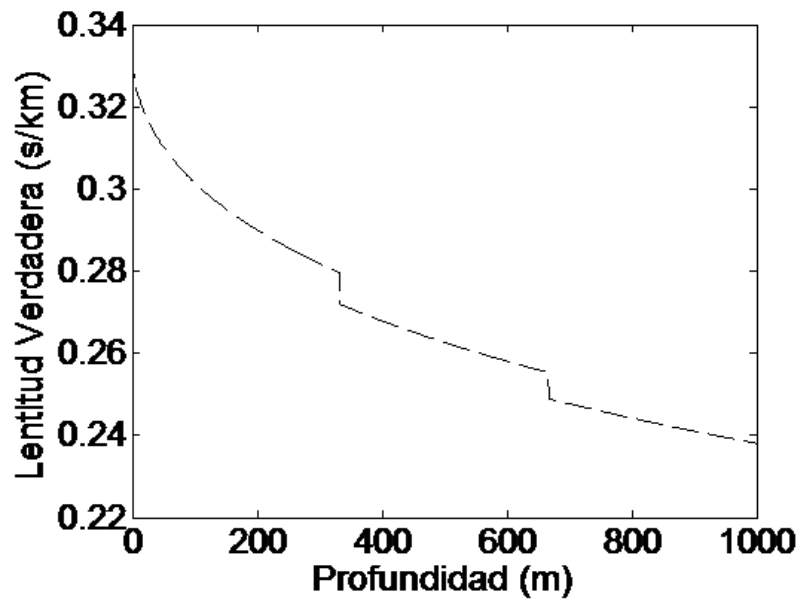
3.1 Perfil Sísmico Vertical.

En este ejemplo, asumiremos datos sintéticos así: perforación de 1 km de profundidad, sensores instalados cada 20 mts y capas de lentitud constante de 20 mts de espesor. Este tipo de problema fue descrito en el numeral 1.1 del presente documento.

El modelo de señal que intentamos reconstruir es el siguiente:

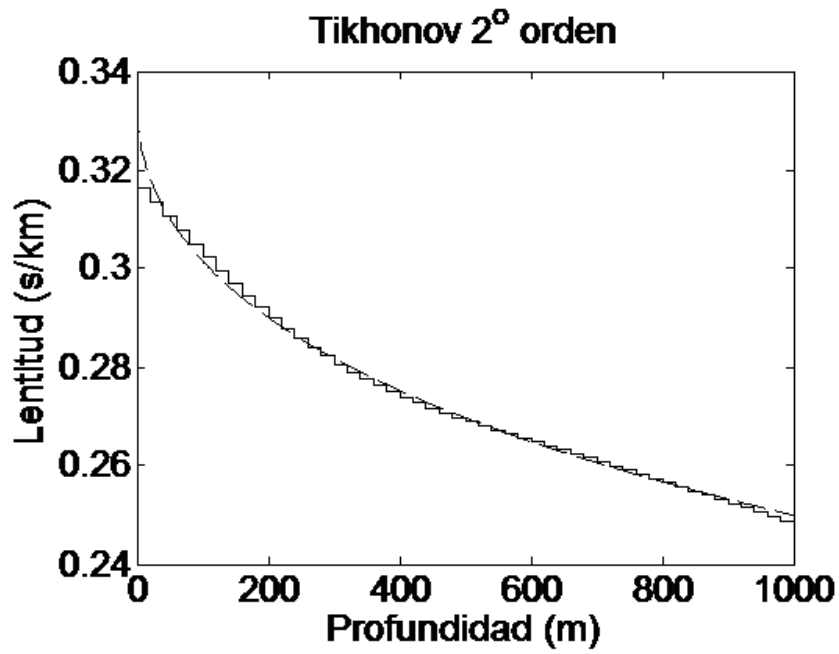


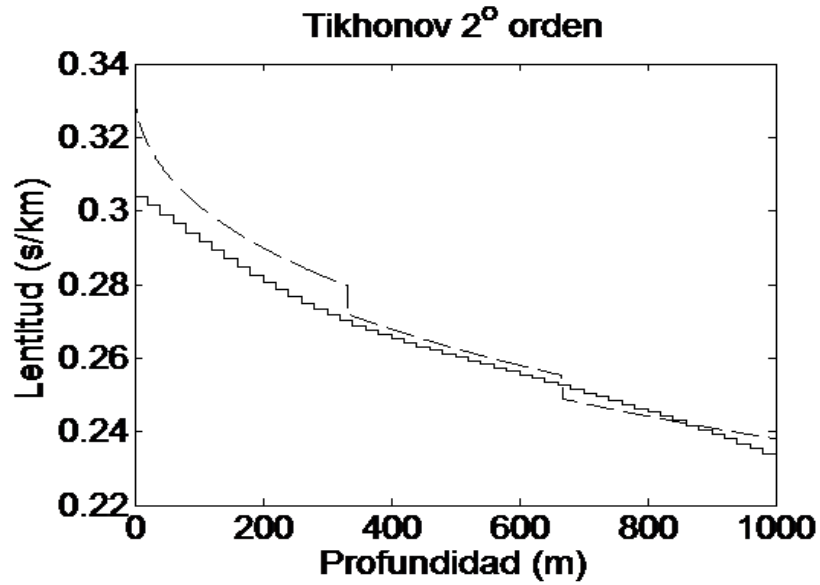
También analizaremos una señal con discontinuidades:



Modelo de señal con discontinuidades

Las soluciones obtenidas al aplicar Tikhonov a estos problemas son las siguientes:





A continuación presentamos un resumen de los resultados obtenidos:

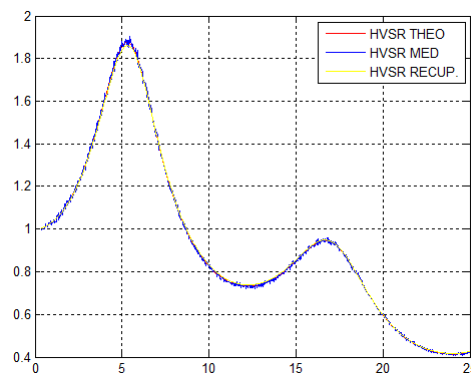
SEÑAL CONTINUA				
Nivel de ruido	Tikhonov		Tikhonov + GCV	
	1er. Orden	2o. Orden	1er. Orden	2o. Orden
0.0002	1.71E-05	2.14E-05	1.67E-05	9.72E-06
0.002	1.47E-04	1.79E-03	2.00E-04	1.62E-04
0.005	2.35E-04	1.10E-03	7.49E-04	8.99E-04
0.01	2.87E-04	4.66E-03	2.54E-03	3.55E-03
0.02	1.82E-02	1.96E-02	9.43E-03	1.43E-02
0.03	4.29E-02	4.49E-02	2.08E-02	3.22E-02
0.05	1.23E-01	1.27E-01	5.66E-02	8.97E-02
0.1	5.03E-01	5.15E-01	2.24E-01	3.60E-01

SEÑAL PARA 3 CAPAS				
Nivel de ruido	Tikhonov		Tikhonov + GCV	
	1er. Orden	2o. Orden	1er. Orden	2o. Orden
0.0002	5.44E-04	5.42E-04	6.12E-04	6.13E-04
0.002	7.33E-04	7.24E-04	6.68E-04	6.95E-04
0.005	9.37E-04	1.73E-03	1.18E-03	1.47E-03
0.01	1.08E-03	5.51E-03	2.96E-03	4.25E-03
0.02	1.91E-02	2.12E-02	9.99E-03	1.55E-02
0.03	4.46E-02	4.78E-02	2.16E-02	3.43E-02
0.05	1.28E-01	1.34E-01	5.88E-02	9.44E-02
0.1	5.24E-01	5.40E-01	2.33E-01	3.77E-01

3.2 Identificación de parámetros a partir de microtremores

Para este problema, usaremos los sismos indicados en las referencias [2], [11] y un sismo sintético con datos obtenidos a partir de la bibliografía existente. Los datos que se consideraron conocidos fueron el número de estratos diferentes en las muestras, pues estos son fácilmente observables durante el trabajo de campo. También asumimos como conocidos los espesores de los estratos y se dieron unos rangos de valores para las densidades del suelo. Se pretende a partir de la medición de los microtremores saber los valores de las ondas S y P (V_s y V_p), sus factores de forma (Q_p y Q_s).

Para la generación de las relaciones H/V a partir de las cuales se calcularán los parámetros de suelo (y que serían las que se obtendrían de las mediciones en campo), se usó una rutina provista por los autores de [11] y que está disponible en lenguaje FORTRAN. Esta rutina nos permitió generar las señales TEORICAS, y a estas señales teóricas se les agregó diversos niveles de ruido (1%, 3% y 5%) para simular las mediciones reales que tendríamos en el terreno.

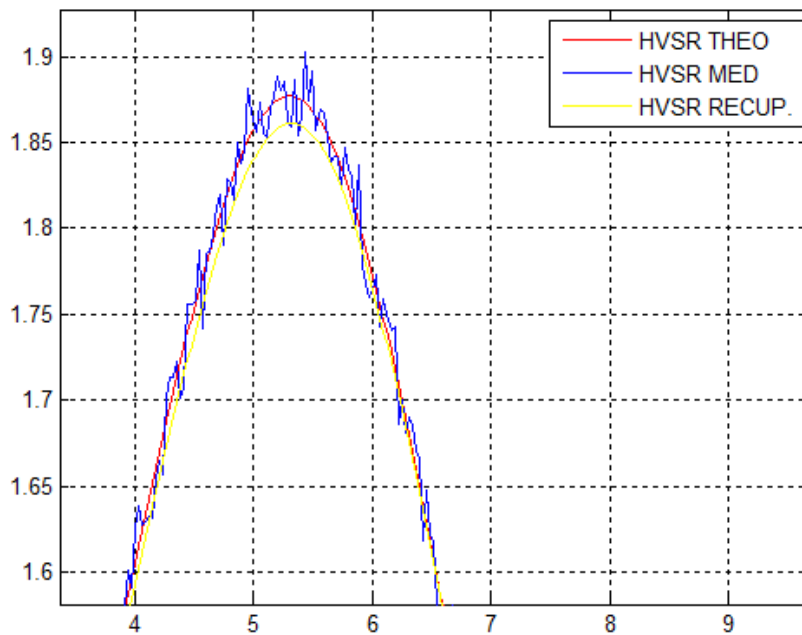


Señal según [2]. Ruido de 1%. Solución General.

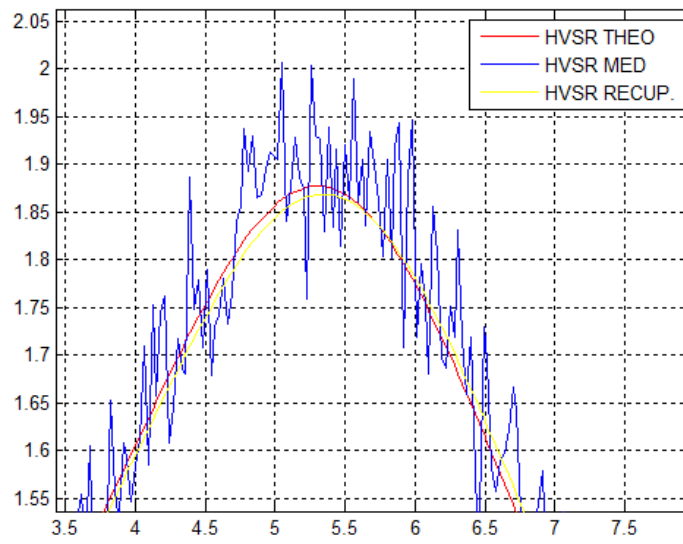
En este y en todos los gráficos siguientes, HVSR THEO hace referencia a la relación de Nakamura teórica, HVSR MED hace referencia a la la relación de Nakamura tomada en campo y HVSR RECUP. hace referencia a la relación de Nakamura recuperada por el método de solución utilizado.

La solución obtenida es comparada con la HVSR THEO.

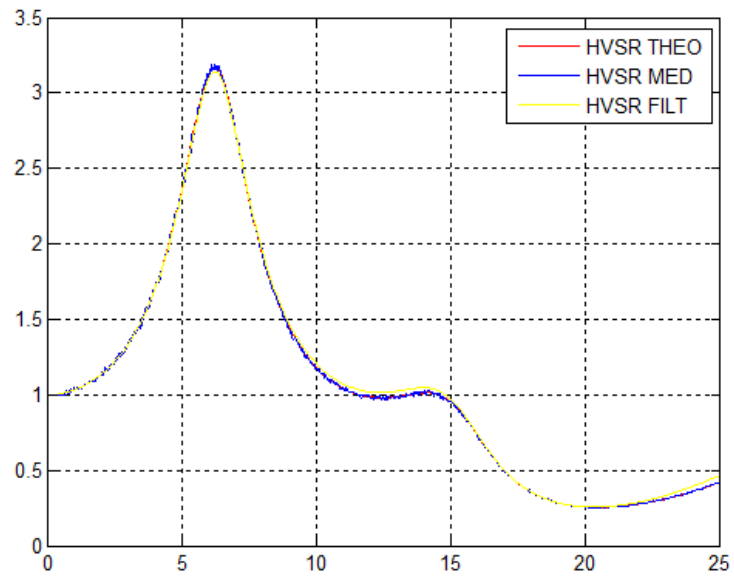
Para ver mejor como se aproximó la solución en este caso vemos esta imagen ampliada:



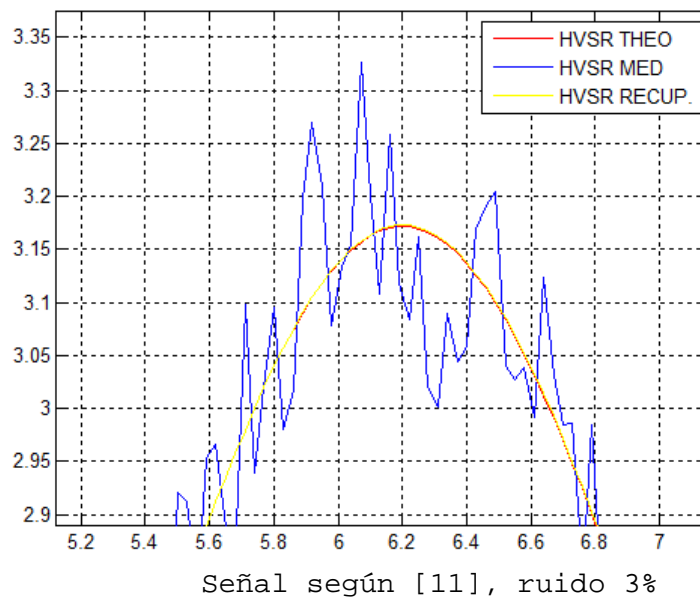
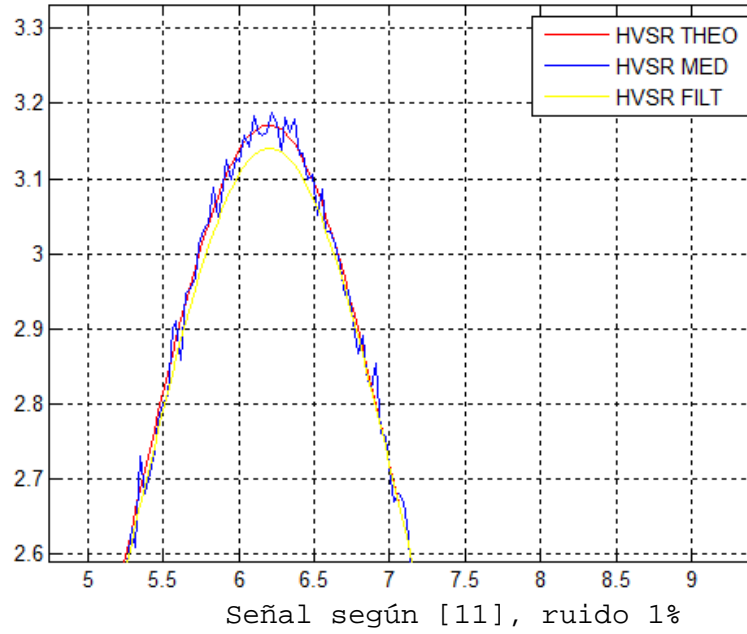
Señal según [2], ruido 3%

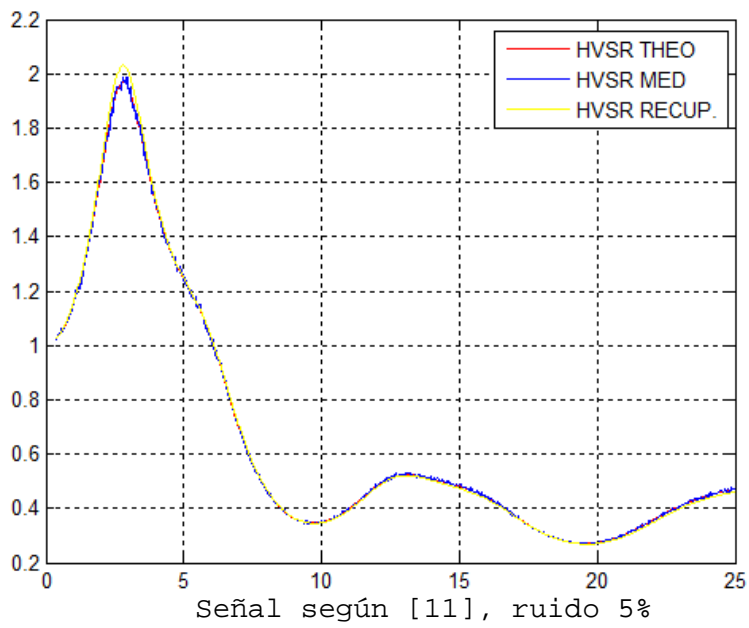
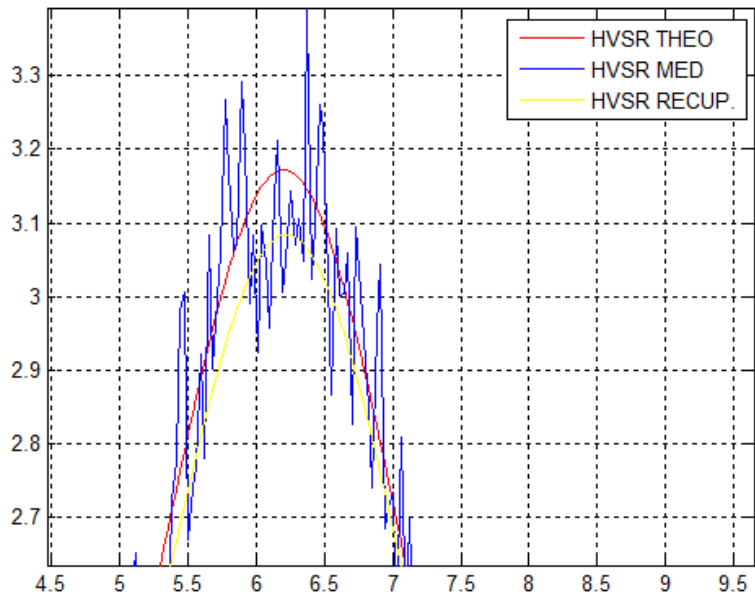


Señal según [2], ruido 5%

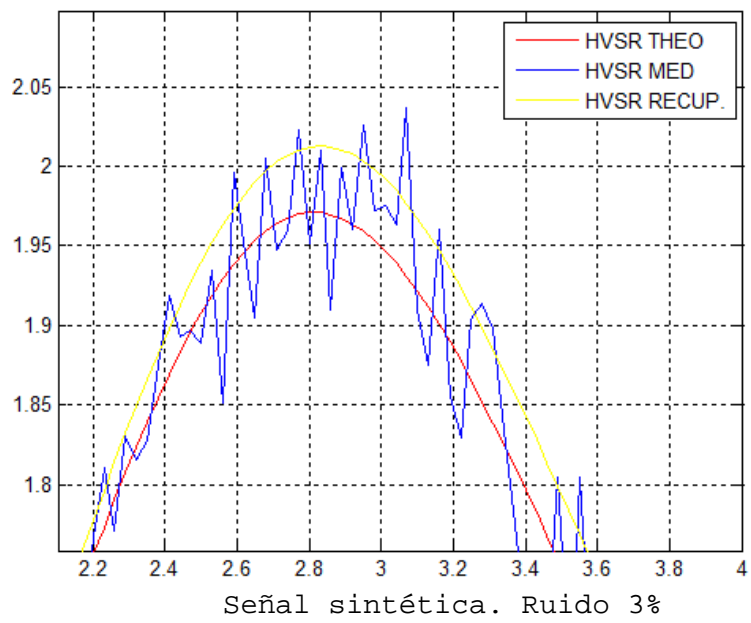
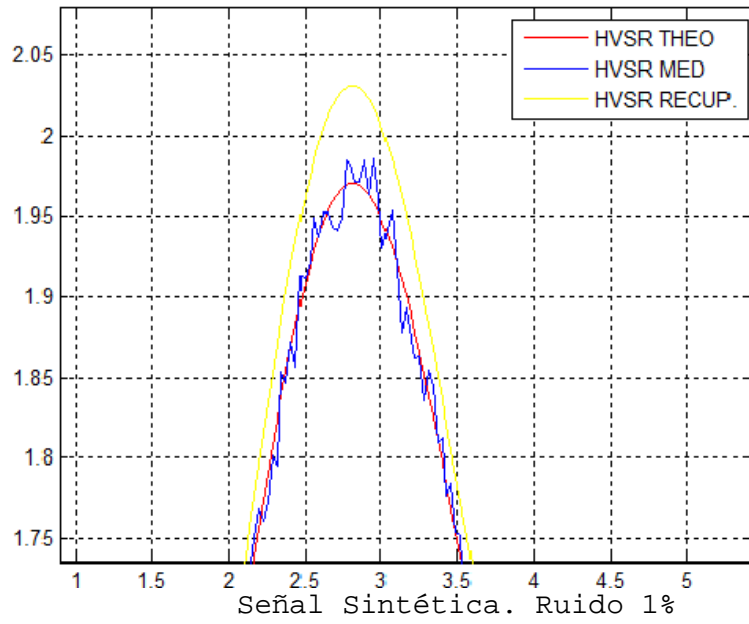


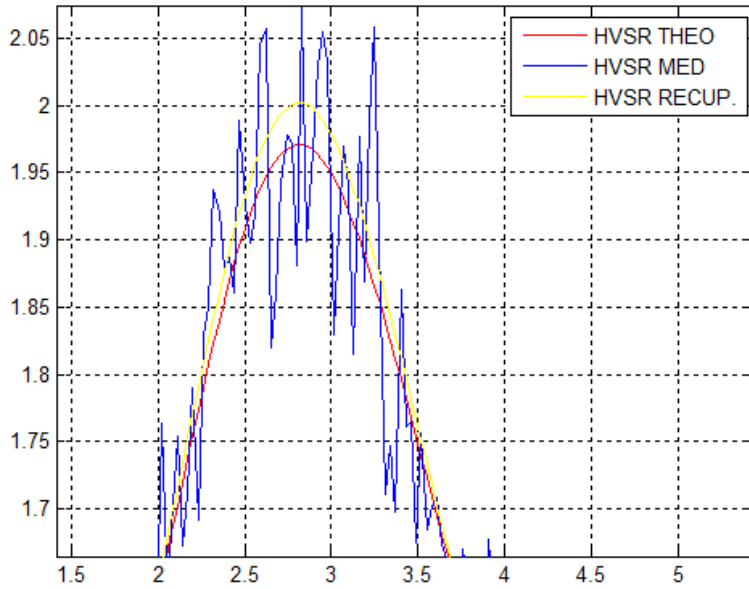
Señal según [11].Solución General





Señal sintética. Ruido 1%, solución general.





Señal sintética. Ruido 5%

A continuación se presentan las tablas comparativas de niveles de error:

Tkalci (Croacia) - REAL								
Vp(t)	Vp(es)							
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)
230	256.37	11.47	223.55	2.804	224.78	2.270	517	124.783
750	728.24	2.90	759.54	1.272	729.22	2.771	909	21.200
2100	2234.9	6.42	2050.2	2.371	2284.8	8.800	2100	0.000

Tkalci (Croacia) - REAL								
Vs(t)	Vs(es)							
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)
115	116.75	1.52	113.6	1.217	117.23	1.939	129	12.174
250	244.29	2.28	253.36	1.344	243.61	2.556	239	4.400
915	817.27	10.68	944.06	3.176	992.57	8.478	915	0.000

Tkalci (Croacia) - REAL								
Qp (t)	Qp(es)							
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)
15	15.884	5.89	15.867	5.780	13.215	11.900	30	100.000
30	29.288	2.37	29.041	3.197	30.65	2.167	30	0.000
150	159.44	6.29	144.6	3.600	142.24	5.173	150	0.000

Tkalci (Croacia) - REAL								
Qs(t)	Qs(es)							
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)
5	4.7168	5.66	5.236	4.720	4.617	7.660	20	300.000
10	10.976	9.76	9.3673	6.327	10.698	6.980	20	100.000
50	52.041	4.08	54.231	8.462	48.523	2.954	50	0.000

Arai & Tokimatsu - REAL									
Vp(t)	Vp(es)								
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)	
330	348.93	5.74	358.25	8.561	295.95	10.318	435	31.818	
740	723.25	2.26	742.47	0.334	760.27	2.739	956	29.189	
1015	1050	3.45	1086.4	7.034	956.32	5.781	1015	0.000	

Arai & Tokimatsu - REAL									
Vs(t)	Vs(es)								
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)	
170	175.19	3.05	178.24	4.847	165.39	2.712	190	11.765	
165	161.32	2.23	163.76	0.752	162.84	1.309	155	6.061	
355	343.57	3.22	354.18	0.231	362.55	2.127	355	0.000	

Arai & Tokimatsu - REAL									
Qp (t)	Qp(es)								
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)	
20	22.288	11.44	24.971	24.855	9.86	50.700	26	30.000	
26	26.398	1.53	25.358	2.469	39.915	53.519	25	3.846	
28	30.682	9.58	25.363	9.418	26.411	5.675	28	0.000	

Arai & Tokimatsu - REAL									
Qs(t)	Qs(es)								
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)	
10	9.4266	5.73	12.73	27.300	7.732	22.680	28	180.000	
13	13.75	5.77	13.962	7.400	12.677	2.485	26	100.000	
14	13.012	7.06	13.264	5.257	13.57	3.071	28	100.000	

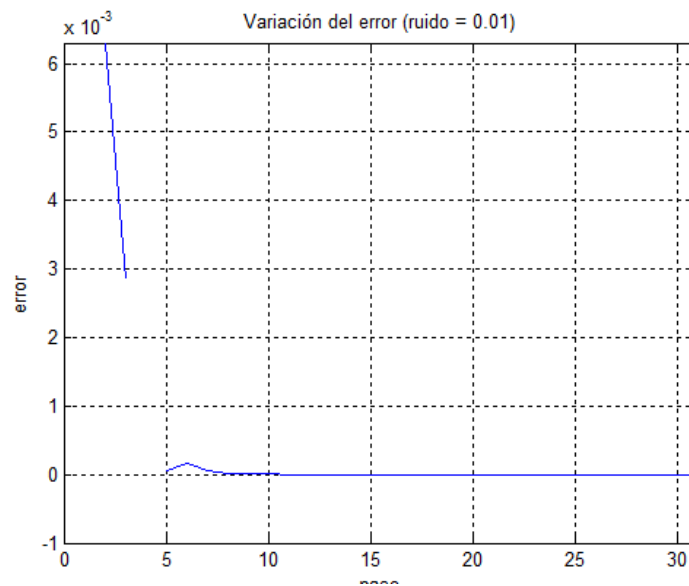
SINETICO									
Vp(t)	Vp(es)								
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)	
300	298.49	0.50	308	2.667	293.03	2.323	505	68.333	
600	616.12	2.69	586.74	2.210	621.93	3.655	755	25.833	
900	872.08	3.10	882.89	1.901	835.77	7.137	900	0.000	

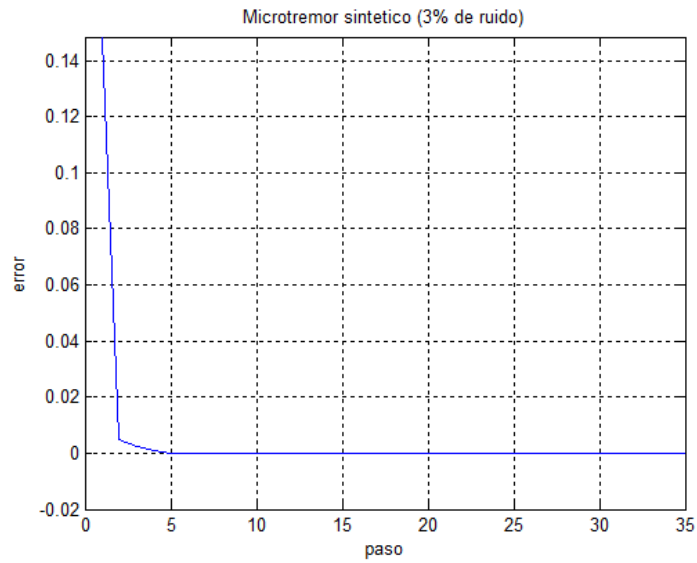
SINETICO									
Vs(t)	Vs(es)								
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)	
100	99.946	0.05	100.31	0.310	99.97	0.030	115	15.000	
200	207.93	3.97	199.63	0.185	207.98	3.990	190	5.000	
300	305.62	1.87	302.95	0.983	286.51	4.497	300	0.000	

SINTETICO								
Qp (t)	Qp(es)							
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)
15	15.785	5.23	12.971	13.527	19.253	28.353	22	46.667
30	24.796	17.35	35.765	19.217	22.819	23.937	15	50.000
60	60.236	0.39	62.384	3.973	59.027	1.622	60	0.000

SINTETICO								
Qs(t)	Qs(es)							
	n=.01	Err. (%)	n=.03	Err. (%)	n=.05	Err. (%)	MHVSR	Err. (%)
5	4.845	3.10	4.8957	2.086	4.785	4.300	20	300.000
10	9.2529	7.47	9.4284	5.716	10.415	4.150	20	100.000
20	21.952	9.76	20.498	2.490	20.12	0.600	20	0.000

La evolución del error se muestra en las siguientes gráficas:





3.3 Conclusiones

Hemos mostrado la aplicación de los métodos enunciados en el capítulo 2, para la solución regularizada de problemas inversos. Como se ve, todas estas soluciones son sensibles al nivel de ruido. EL problema de VSP, al ser un problema medianamente mal condicionado presentó muchos mejores resultados. Sin embargo, los métodos de minimización de Powell, empleados para determinar las características del suelo, presentan buena eficacia comparados con los resultados que se aplican en [11].

4. Conclusiones y recomendaciones

4.1 Conclusiones

1. En el problema de Identificación de parámetros a partir de micro-tremores, la rutina *fminsearch* no arrojó ningún resultado. Se hizo necesario ubicar la rutina de Powell, con la variante de *goldensearch* para lograr que los resultados convergieran.
2. El problema de identificación de parámetros, como todos los problemas inversos, es muy sensible a la presencia de ruido. Resultados aceptables son obtenidos con niveles de ruido de 3%. Niveles superiores, distorsionan en forma notable los resultados esperados.
3. Aunque las pruebas presentadas en el problema de identificación de parámetros contemplan ejemplos con solo 3 capas de suelo, no hay ninguna restricción en que haya más capas presentes. Esto solo afectaría el tiempo de ejecución y posiblemente el número de pasos óptimos de los métodos de optimización.
4. En el problema de VSP, en su versión de una sola capa, al ser un problema medianamente mal condicionado, los resultados obtenidos por métodos de regularización son mucho mejores que los obtenidos en el problema de identificación de parámetros.
5. El problema de VSP, presenta alguna dificultad al tratar de recomponer la señal en modelos de 3 capas con discontinuidad, esto debido posiblemente a la forma de discretización inicialmente descrita.
6. El método de SSA, mostró ser de gran ayuda al momento de filtrar la señal en los problemas de VSP.

4.2 Recomendaciones

1. Se sugiere continuar el estudio de identificación de parámetros de suelo con pruebas reales en nuestro suelo. Este método de análisis podría permitir que zonas de nuestro país que aún no tienen estudios de microzonificación puedan tenerlos a un bajo costo y en un periodo de tiempo relativamente corto.
2. EN un futuro podría analizarse que otros métodos de optimización pueden generar mejores aproximaciones (en

precisión u en tiempo de ejecución) al problema de identificación de parámetros.

Bibliografía

- [1] LUNEDEI, Enrico & ALBARELLO, Darío. "On the Seismic Wavefield in a Weakly Dissipative Layered Earth." *Geophys J. Int* (2009), 1001-1014p.
- [2] ARAI, H. & TOKIMATSU K. "S-Wave Velocity Profiling by Inversion of Microtremor H/V Spectrum". *Bull. Seism. Soc. Am* 94(1,53-63.
- [3] ARAI, H. & TOKIMATSU K. "S-Wave Velocity Profiling by Joint Inversion of Microtremor Dispersion Curve and Horizontal to Vertical (H/V) Spectrum." *Bull. Seism. Soc. Am* 95(5,1766 - 1778.
- [4] NAKAMURA, Y. "A Method for Dynamic Characteristics Estimation of Subsurface Using Microtremor on the Ground Surface". *Quart. Rep. Rail. Tech. Res. Institute.* 30(1), 25-33.
- [5] NAKAMURA, Y. "Clear Identification of Fundamental Idea of Nakamura's Technique and its Applications." *Proceedings of the 12th World Conference on Earthquake Engineering.*
- [6] Venkataraman, P. "Applied Optimization with Matlab Programming", Wiley, 2002.
- [7] Van de Boos A. "Parameter Estimation for Scientists and Engineers", Wiley, 2007.
- [8] Margrave, G. "Numerical Methods of Exploration Seismology", Calgary univ, 2003.
- [9] Carniel, R., et al. "Improvement of Nakamura Technique by SSA", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26(2006), 55-63.
- [10] Samarskii A. & Vabishchevich P., "Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics", de Gruyter, 2000.
- [11] Herak, M., "ModelHVSR - A Matlab tool to model horizontal to vertical spectral ratio of ambient noise", *Computers and Geosciences* 34(2008)1514-1526.

[12]Root, T., Stolk, C et al. "Linearized Inverse Scattering Based on Seismic Reverse Time Migration", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, August 2012, pp 211-238.

[13]Hoop, M., Smith, H. et al. "Seismic Imaging with the Generalized Radon Transform", Inverse Problems 25 025005.

[14]Lizarralde, D. & Swift, S. "Smooth Inversion of VSP Traveltime Data". Geophysics, vol 64 no. 3 pp. 659-661.

[15]Alekseev, A. & Mikhailenko, B. "Mathematical Models of Elastic Wave Processes in Seismology and Seismic Prospecting: Forward and Inverse Problems". Simulation Practice and Theory, 1999(125-151)

[16]Tarantola, Albert, "Inverse Problem Theory (and methods for model parameter estimation", SIAM, 2005

[17]Engl, Hanke and Neubauer, "Regularization of Inverse Problems", Kluwer academic publisher, 1996

[18]Gladwell, G., "Inverse Problems in Vibration", 2nd ed. Kluwer academic publisher, 2005

[19]Vogel, C., "Computational Methods in Inverse Problems", SIAM, 2002

[20]Woodbury, K., "Inverse Engineering Handbook", CRC Press, 2003