

UNA REVISIÓN DE LOS MÉTODOS MÁS FRECUENTES PARA LA ESTIMACIÓN DEL ESTADO EN PROCESOS QUÍMICOS

A REVISION OF THE MOST FREQUENT METHODS FOR STATE ESTIMATION IN CHEMICAL PROCESSES

HÉCTOR ANTONIO BOTERO CASTRO

Escuela de Ingeniería Eléctrica y Mecánica, Universidad Nacional de Colombia, habotero@unalmed.edu.co

HERNÁN DARÍO ÁLVAREZ ZAPATA

Escuela de Procesos y Energía, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas, hdalvare@gmail.com

Recibido para revisar marzo 5 de 2008, aceptado julio 23 de 2008, versión final agosto 6 de 2008

RESUMEN: En este artículo se muestra una revisión de algunos métodos propuestos en la literatura para la estimación del estado en procesos químicos. La revisión se hace sólo para el caso de estimadores de estado con tiempo de muestreo fijo. El análisis se hace considerando los tipos de estimadores, los tipos de modelos utilizados por los estimadores, las aplicaciones que se le han dado a los estimadores y las ventajas y limitaciones de los mismos. Finalmente, se muestra un problema real que necesita la estimación de estado en un proceso industrial.

PALABRAS CLAVE: Estimador de estado, Observador de estado, Filtro de Kalman, Sistema no lineal.

ABSTRACT: This paper shows a literature review of some proposed methods for state estimation in chemical processes industry. The revision is made for estimators of fixed sampling time. The analysis is done considering the types of estimators, the types of models used by the estimators, the reported applications for those estimators, the advantages and the limitations of estimators use. Finally, a real problem of state estimation in an industrial process is exposed.

KEYWORDS: State estimator, State observer, Kalman filter, Nonlinear system.

1. INTRODUCCIÓN

La medición de variables en los procesos es una tarea necesaria para lograr implementar los lazos de control, realizar el diagnóstico de fallas, y permitir el monitoreo y visualización de variables críticas que indican la calidad de los productos. Esta labor es, en muchos casos, ardua, costosa y difícil de realizar debido a la no disponibilidad de dispositivos confiables, los retardos de tiempo, los errores en el sistema de medición y los altos costos de los dispositivos, por ejemplo en biorreactores [1].

Adicionalmente, la medición de algunas variables se complica debido al medio en el cual debe convivir el elemento primario de medición, que puede llegar a ser corrosivo o con temperaturas extremas, lo cual imposibilita una medición directa, por ejemplo en reactores químicos [2]. En otros casos, los sensores no han sido diseñados para los intervalos que se requieren o su disponibilidad en el mercado es muy baja [3].

Con el fin de realizar la medición de variables difíciles en forma indirecta, se han utilizado los estimadores de estado, agrupados en

observadores de estado, filtros, sensores por software y más genéricamente en Sensores Virtuales Basados en Modelo (SVBM) [4]. Estos estimadores utilizan la medición de algunas variables del proceso conjuntamente con un modelo del mismo, para estimar las variables complicadas de medir o el estado completo. Algunos de estos estimadores se conocen como Filtro de Kalman Extendido (FKE) [5,6], Observadores Luenberger (OL) [7-8], Observadores Asintóticos (OA) [9], Observadores Adaptables (Oad) [9], Observadores de Alta Ganancia (OAG) [10], Observadores por Modos Deslizantes (OMD) [11] entre otros. Estos estimadores se han aplicado tanto en procesos continuos como en procesos por lotes, siendo en estos últimos mucho más complicada la estimación del estado, puesto que son procesos que no tienen un punto de operación fijo.

Con el fin de proporcionar una mirada a los estimadores de estado que más se utilizan en procesos químicos, en este artículo se presenta la revisión de algunos estimadores propuestos en la literatura con énfasis en: los modelos utilizados, las aplicaciones que se les han dado, y las ventajas y limitaciones que tienen. El presente trabajo se limita a los estimadores de estado con periodo de muestreo fijo. La importancia de esta revisión es innegable cuando se piensa en una investigación en los temas de estimación del estado para procesos y control de procesos químicos y biológicos [12], [13]. En tal sentido, tanto la discusión aquí presentada, como la recopilación en tablas, generan un buen punto de arranque para cualquier investigación en el área. Sin embargo, esta revisión no pretende ser exhaustiva ni total, debido a la gran cantidad de investigaciones que en el tema se reportan. De hecho, no se ha encontrado hasta ahora un documento que recoja todas las tendencias.

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la parte 2 se muestra el planteamiento general del problema de diseño de un estimador de estados y se definen algunos conceptos preliminares; en la parte 3 se muestran los estimadores de estado clásicos más utilizados y sus características; en la parte 4 se muestra una revisión de la literatura de las aplicaciones que se le han dado a los estimadores clásicos; en la

parte 5 se analiza una aplicación típica que requiere un estimador de estado para determinar una variable importante y en la parte 6 se dan las conclusiones.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y DEFINICIONES PRELIMINARES

El problema de estimación de estado se puede resumir de la siguiente forma:

Sea un proceso descrito mediante el conjunto de ecuaciones (1), que constituyen un modelo dinámico, obtenido al aplicar principios fenomenológicos, lo que le otorga certeza estructural pero que no garantiza la ausencia de incertidumbre paramétrica:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

con $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^m$ definidos como el estado, las entradas y las salidas del proceso, respectivamente. Este modelo se considera como un repositorio de información suficiente para contener todo el conocimiento disponible del proceso obtenido mediante el análisis, la experiencia y desde datos reales. Adicionalmente, se supone que es conocida una serie de información adicional, como restricciones de estado estable representada mediante $\mathbf{g}(\mathbf{x}_{ss}) = \mathbf{0}$ para condiciones de igualdad y $\mathbf{j}(\mathbf{x}_{ss}) \leq \mathbf{M}$ para condiciones de desigualdad. El objetivo es obtener un estimativo del estado real, denotado por $\hat{\mathbf{x}}$, mediante un estimador de estados, que utilice la información (1) y la información adicional, tal que el error de estimación, dado por $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, tienda a cero cuando el tiempo tienda a infinito, es decir que el estado estimado converja al estado real del sistema (1) de forma asintótica.

Con el fin de abordar las propuestas de solución al problema planteado, pero tratando de evitar al máximo la anarquía etimológica, a continuación se retoman de la literatura algunas definiciones fundamentales que se respetarán en todo el documento.

Estimador de estado: Sistema dinámico, determinístico o estocástico, capaz de reconstruir variables de estado inaccesibles pero importantes en un proceso, diseñado con base en un modelo matemático y algunas mediciones disponibles [7,14].

Observador de estado Estimador de estado para sistemas normalmente determinísticos, capaz de producir un estimativo del vector de estado [6,8].

Filtro de Kalman: Estimador de estado para sistemas normalmente estocásticos, que utiliza observaciones hasta el tiempo en que el estado del sistema dinámico es estimado [6].

Predictor de estado: Estimador de estado que utiliza observaciones –datos- estrictamente anteriores al tiempo en que el estado del sistema dinámico es estimado [5,6].

Suavizador (Smoother): Estimador de estado que utiliza observaciones más allá del tiempo en que el estado del sistema dinámico es estimado [5,6].

Sensor virtual basado en modelo (SVBM) (Soft sensor): Asociación de un sensor -parte física- con algoritmos de estimación -programa de computador- el cual permite mediciones en línea de algunas variables de un proceso, para proporcionar estimaciones en línea de variables no medibles, parámetros del modelo o para superar retardos en la medición [1].

La diferencia entre los últimos tres conceptos se observa en la Figura 1, donde T_e es el tiempo de estimación.

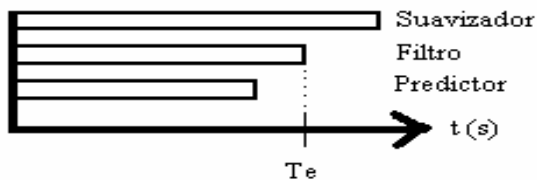


Figura 1. Diferencias filtro, predictor, suavizador (Los rectángulos indican el horizonte de tiempo para los datos)
Figure 1. Differences filter, predictor, smoother (Rectangles indicate the time horizon for the data)

3. ESTIMADORES DE ESTADO CLÁSICOS

En la literatura se encuentra una gran variedad de estimadores de estado, pero es posible agruparlos en estimadores estocásticos y estimadores determinísticos. En el caso estocástico se habla de filtros y en el caso determinístico se habla de observadores de estado. En esta sección se hará énfasis en el filtro de Kalman, por ser un paradigma en la estimación de estado para sistemas estocásticos. Adicionalmente, se analizarán aspectos del observador de estado, por ser un paradigma en la estimación de estado de sistemas determinísticos. El objetivo central es dar una idea de las características más importantes de los estimadores, sin alargarse en una descripción matemática completa, por lo tanto, los detalles de las ecuaciones deberán ser consultados en las referencias citadas.

3.1 El Filtro De Kalman Y Sus Mejoras

El Filtro de Kalman es un estimador de estado que permite calcular el estado de un sistema dinámico lineal, perturbado por señales ruidosas, utilizando mediciones que se relacionan linealmente con el estado, pero que están contaminadas con este tipo de señales. Este estimador es óptimo desde el punto de vista estadístico ya que se obtiene de la solución de un problema cuadrático lineal [5]. Las ecuaciones que rigen la dinámica del modelo de la planta para un filtro Kalman discreto son:

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3)$$

donde \mathbf{x}_k es el estado discreto ($n \times 1$); Φ_k es la matriz de transición ($n \times n$); \mathbf{w}_{k-1} es la incertidumbre de la planta ($n \times 1$); \mathbf{z}_k representa las mediciones de la planta ($l \times 1$); \mathbf{H}_k es la matriz de salida ($n \times l$) y \mathbf{v}_k es el ruido en la medición ($l \times 1$), con las propiedades:

$$\mathbf{E}[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0}; \mathbf{E}[\mathbf{v}_k] = \mathbf{0}; \mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] = \Delta(k-i) \mathbf{Q}_k$$

$$E[v_k v_k^T] = \Delta(k-1)R_k ; E[w_k v_k] = 0$$

donde $E[\cdot]$ es el operador esperanza matemática; $\Delta(k-1)$ es la función delta de Kroenecker y las matrices Q_k y R_k son las matrices de covarianza del ruido en la planta ($n \times n$) y del ruido en la medición ($l \times l$).

El objetivo del filtro Kalman es estimar el vector de estado x_k representado por el estimativo \hat{x}_k que minimice el error medio cuadrático:

$$E[x_k - \hat{x}_k]^T M [x_k - \hat{x}_k] \quad (4)$$

La solución a este problema se encuentra claramente descrita en [5] y viene dada por un conjunto de ecuaciones recursivas de la forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k(-) &= \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1}(+) \\ P_k(-) &= \Phi_{k-1} P_{k-1}(+) \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1} \\ K_k &= P_k(-) H_k^T [H_k P_k(-) H_k^T + R_k]^{-1} \\ P_k(+) &= [I - K_k H_k] P_k(-) \\ \hat{x}_k(+) &= \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)] \quad (5) \end{aligned}$$

donde $(-)$ significa que el valor se toma a priori, es decir, se tienen en cuenta todas las mediciones tomadas, excepto la del tiempo k ; $(+)$ significa que el valor se toma a posteriori, es decir, se tienen en cuenta todas las mediciones tomadas hasta el tiempo k ; K_k es la matriz de ganancias del filtro Kalman ($n \times l$), y P_k es la matriz de covarianzas de la incertidumbre de los estados ($n \times n$).

Debido al éxito que este tipo de filtro ha tenido, se ha producido una evolución del mismo hacia versiones mejoradas las cuales involucran modelos no lineales, restricciones y propiedades estadísticas del ruido. Entre estas mejoras se tienen:

Filtro de Kalman linealizado: En muchas aplicaciones el modelo de la planta es no lineal, de la forma:

$$x_k = f(x_{k-1}, k-1) + w_{k-1} \quad (6)$$

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (7)$$

El filtro de Kalman linealizado utiliza el modelo linealizado del proceso alrededor de una trayectoria nominal. Esta trayectoria nominal es una solución particular del sistema estocástico (6) y (7) cuando las variables aleatorias del modelo asumen sus valores esperados. Si la media de esas variables aleatorias es cero, la trayectoria nominal está dada por [5]:

$$x_k^{nom} = f(x_{k-1}^{nom}, k-1) \quad (8)$$

Alrededor de esa trayectoria nominal se definen las variables de desviación:

$$\delta x_k = x_k - x_k^{nom} \quad (9)$$

$$\delta z_k = z_k - h(x_k^{nom}, k) \quad (10)$$

tal que la expansión en series de Taylor (despreciando los términos de alto orden), de las ecuaciones (6) y (7) produce:

$$\delta x_k = \Phi_{k-1} \delta x_{k-1} + w_{k-1} \quad (11)$$

con Φ_{k-1} el Jacobiano obtenido de (6) evaluado en $x = x_{k-1}^{nom}$.

Un proceso similar se sigue para las salidas obteniéndose:

$$\delta z_k = H_k \delta x_k \quad (12)$$

con H_k el Jacobiano obtenido de (7) evaluado en $x = x_{k-1}^{nom}$.

Filtro Kalman extendido: El filtro de Kalman linealizado tiene problemas porque a medida que el tiempo transcurre se produce una desviación entre la trayectoria real y la trayectoria nominal. Esta desviación hace que la aproximación lineal, despreciando los términos de alto orden, ya no sea válida y se produzcan errores en el cálculo.

Para mejorar la estimación del filtro se realiza la linealización alrededor de la trayectoria estimada y no de la trayectoria nominal; este cambio origina el filtro de Kalman extendido. La palabra extendido se refiere a que este filtro es una extensión de la versión lineal original [5].

Las ecuaciones del filtro Kalman extendido son similares a los del filtro de Kalman linealizado, pero los Jacobianos deben evaluarse en $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_k(-)$.

Filtro de Kalman con restricciones: Cuando se utiliza un filtro de Kalman con el modelo descrito por las ecuaciones de la forma (6) y (7), mucha información heurística y valiosa del proceso, que puede servir para lograr una mejor estimación, no puede ser involucrada en el modelo, por ejemplo límites de variaciones en señales, valores máximos o mínimos de señales, entre otras.

Para considerar esta información se puede utilizar el filtro de Kalman con restricciones [15]. Si se tienen restricciones en el estado, el estimativo con un filtro de Kalman restringido puede ser obtenido en cada instante de tiempo, mediante la proyección de la solución de un filtro de Kalman no restringido sobre la superficie de restricciones del estado. El problema matemático resultante consiste en encontrar un mínimo, sujeto a restricciones, y puede resolverse utilizando multiplicadores de Lagrange. Mediante lo anterior se mejora considerablemente el comportamiento del filtro. Las restricciones en el estado pueden ser lineales o no lineales. En el caso lineal estas restricciones son de la forma

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_k = \mathbf{d}_k \quad (13)$$

donde \mathbf{D} es una matriz ($s \times n$), conocida, \mathbf{d}_k es un vector ($s \times 1$) conocido y s es el número de restricciones.

Filtro de Kalman con modelo restringido: El filtro de Kalman con modelo restringido, al igual que el filtro de Kalman con restricciones, aprovecha las restricciones en las variables de estado para mejorar la estimación realizada. Sin embargo, en este caso no se restringe el

estimativo sobre una superficie sino que se formula un modelo estocástico restringido con las mismas restricciones del estado. La ventaja de este filtro es que se puede encontrar el valor estimado del estado sin necesidad de utilizar la optimización, y se ha demostrado que el comportamiento de la magnitud del error y la covarianza del mismo son menores para este caso que para el filtro de Kalman con restricciones [16].

Filtro de Kalman no lineal con “Unscented Transformation”: El filtro de Kalman extendido es sólo confiable cuando se tienen no linealidades suaves en la escala de tiempo en la que se actualizan los datos. Sin embargo, para no linealidades fuertes, este filtro entrega resultados incorrectos porque se violan las suposiciones de pequeños cambios alrededor de la trayectoria nominal, lo cual propaga errores en el cálculo de la media y la covarianza del estado. Una propuesta ha sido elaborada para considerar el modelo no lineal del proceso y evitar calcular los Jacobianos que introducen inconvenientes en el filtro de Kalman extendido. Esta propuesta se conoce como el filtro Kalman no lineal con “Unscented Transformation” [17] (Hasta el momento, la traducción del término *Unscented Transformation* al idioma castellano no ha sido posible, por eso se deja en inglés). Este filtro se basa en dos principios fundamentales:

- i) Es más fácil hacer una transformación no lineal de un solo punto que de una función de distribución de probabilidad (fdp) completa.
- ii) No es difícil encontrar un conjunto de puntos individuales en el espacio de estado cuya fdp se aproxime a la verdadera fdp del vector de estado.

En concreto se realiza la siguiente lógica de cálculo:

- i) Si se conoce el valor medio y la covarianza del vector de estado \mathbf{x}_k y $\mathbf{P}(\mathbf{k})$,
- ii) se puede encontrar un conjunto de vectores -llamado puntos sigma- cuya media y covarianza sean iguales a las del vector de estado,
- iii) cuando se aplica la función no lineal a cada vector de estados, se obtienen los vectores transformados,

iv) la media y la covarianza de los vectores transformados será un buen estimativo de la verdadera media y covarianza del vector de estado en el instante $k+1$. Un procedimiento para realizar lo anterior se puede encontrar en [18].

3.2 El Observador De Estado Y Sus Mejoras

Según lo planteado por Luenberger un observador de estados es un sistema que produce la estimación del vector de estado para otro sistema [8]. En sus ideas iniciales Luenberger planteó el problema de observar el sistema S_1 (ver Figura 2) libre de entradas, utilizando la información disponible de este sistema cuando maneja otro sistema S_2 .

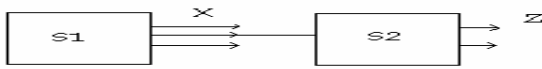


Figura 2. Observador básico
Figure 2. Basic observer

En la Figura 2, el segundo sistema sirve como un observador para el primer sistema, porque el estado del segundo sistema tiende a seguir una transformación del estado del primer sistema. Con base en esta definición elemental, pero que es importante retomar aquí, se han desarrollado observadores no lineales más complejos para procesos, los cuales apuntan a mejorar el desempeño respecto a la estabilidad, la robustez, la exactitud, la sensibilidad respecto a condiciones iniciales y el ruido, entre otras. La literatura en este asunto es muy extensa, sin embargo en la Tabla 1 se trata de resumir las principales propuestas que se tienen, sus ventajas y limitaciones. El criterio que se utilizó para incluir los observadores de la Tabla 1 consistió en que estos hallan sido aplicados en procesos químicos con buenos resultados.

De la Tabla 1 puede decirse que la selección de un observador para una aplicación particular depende de la naturaleza del proceso. Por ejemplo, en el caso de bio-procesos, el observador asintótico aprovecha la estructura del modelo para lograr la estimación del estado sin considerar las cinéticas, las cuales son muy inciertas. De otro lado, si el proceso tiene

parámetros cambiantes se prefiere un observador deslizante, un observador adaptable o un observador de estado y parámetros. Sin embargo, estos tres últimos introducen complicaciones adicionales en el algoritmo a implementar. Otra tendencia muy utilizada es el observador de alta ganancia, el cual tiene muy buenas características de robustez ante incertidumbre paramétrica, pero requiere que el modelo del proceso se pueda llevar a la forma canónica.

Respecto al modelo del proceso, la Tabla 1 muestra la necesidad de obtener una representación no lineal. Sin embargo, en las versiones extendidas (EKO, ELO), el modelo del proceso debe ser linealizado en cada periodo de muestreo para encontrar el vector de ganancias del observador. Detalles adicionales sobre los observadores de estado se pueden encontrar en la Tabla 1 y en las referencias citadas.

A continuación se describen algunas aplicaciones de los estimadores de estado en procesos químicos.

3. APLICACIONES REPORTADAS DE ESTIMADORES DE ESTADO CLÁSICOS

Las aplicaciones que se han dado a los estimadores de estado en procesos químicos son muy variadas; sin embargo, es posible agruparlas de la siguiente forma:

Sensores virtuales basados en modelos: En este caso el estimador de estado se utiliza para obtener información de variables no medibles o de difícil medición.

Diagnóstico de fallas basado en observadores: En estas aplicaciones el estimador de estado se utiliza para generar las variables de estado con base en un modelo dinámico del proceso, las cuales son luego comparadas con mediciones reales. El residual, o error obtenido, de esta comparación se utiliza para indicar posibles fallas en el proceso mediante técnicas de detección de fallas.

Generación del estado del sistema: En este caso se utiliza toda la información del estimador de estado (si es del orden completo) o parte de ella (si es de orden reducido) para lograr la síntesis de leyes de control no lineales, las cuales

requieren medición del estado del proceso. La literatura en este sentido es muy extensa y abarca casi todas las técnicas modernas del control no lineal.

Estimación de estado y parámetros de un proceso: En estas aplicaciones se utiliza el estimador de estado para obtener información del estado del proceso y a la vez identificar algunos parámetros del modelo que lo representa.

En la Tabla 2 se resumen algunas aplicaciones reportadas y sus características principales. Al lector interesado en detalles adicionales se le recomienda consultar las referencias correspondientes. Sin embargo, un análisis de las referencias descritas en la Tabla 2 muestra que aún persisten problemas no resueltos en el diseño de estimadores de estado, entre los cuales se tienen:

- Desviación permanente en las variables estimadas, es decir error de estado estacionario.
- Inestabilidad y divergencia del estimador.
- Dependencia muy fuerte del comportamiento del estimador a las condiciones iniciales –estado inicial- y a la matriz de covarianzas inicial de los estados.
- Necesidad de solucionar ecuaciones complicadas, lo cual involucra alta carga computacional.
- Alta sensibilidad del estimador al ruido en la medición, especialmente si el estimador es de alta ganancia.
- Mal comportamiento del estimador cuando cambia el punto de operación del proceso, debido a que el diseño del estimador se fundamenta en aproximaciones lineales del modelo
- Mal comportamiento del estimador ante envejecimiento de la planta o cambios en la condición de operación. Lo anterior produce cambios paramétricos en la planta y conlleva a tener un estimador con incertidumbre paramétrica.
- Dificultad para modelar en forma estricta la incertidumbre del modelo de la planta y el ruido presente en el sistema de sensado.

Todos estos problemas no resueltos abren camino a futuras investigaciones en el tema. De hecho, actualmente los autores de este artículo

trabajan en una investigación que apunta al diseño de un estimador de estado para un proceso de fluidización de carbón; a continuación se describen algunos detalles.

4. UN PROCESO QUE REQUIERE UN ESTIMADOR DE ESTADO

Un ejemplo de un proceso que requiere estimación del estado es el tratamiento de sólidos en Lecho Fluidizado (LF). La fluidización es la técnica de poner en contacto materiales sólidos granulados con un medio gaseoso o líquido en un lecho [24]. La fluidización tiene gran aplicación en la industria debido a que proporciona un contacto íntimo entre el sólido y el fluido obteniéndose un fácil manejo de sólidos y altas velocidades de transferencia de calor y masa.

A pesar de la popularidad industrial de los LF, su estudio se limita a la experimentación directa en el equipo y a la búsqueda de condiciones óptimas de operación, pero todo con alta incertidumbre sobre una variable crítica llamada el Número de Fluidización (N_F). El N_F es una cantidad adimensional, que relaciona la velocidad a la cual se está alimentando el gas o el líquido de fluidización (V_g), con la velocidad mínima que necesitaría el material sólido particulado para alcanzar un estado de fluidización mínima en el medio (V_{MF}), es decir $N_F = V_g/V_{MF}$.

Este número es el que garantiza que el sistema se encuentra fluidizado, siempre y cuando sea mayor que uno (1.0). Aunque el N_F es visto como parámetro indispensable en esta operación, no hay un reporte significativo de su estudio desde un modelo con fines de control para el reactor. Tal interés surge porque el N_F se ve afectado directamente por la Velocidad Mínima de Fluidización (V_{MF}) y esta por el flujo del fluidizante (fluido que se manipula).

El parámetro V_{MF} ha sido estudiado con la idea de encontrar un valor que permita un acercamiento al control del lecho. Sin embargo, no se reporta como respuesta un valor, sino un intervalo de valores para la V_{MF} , lo que indica la necesidad de medir o estimar el N_F para garantizar una fluidización controlada.

Tabla 1. Observadores más utilizados [9]
Table 1. More used observers [9]

Nombre del observador	Modelo del proceso	Estructura del observador	Características del observador	Desventajas del observador
Observador Kalman extendido (EKO) [9]	<ul style="list-style-type: none"> $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ 	$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$ $\mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}})$ Ganancia del observador	Selección de $\mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}})$ para lograr minimizar el índice de error: $\int_0^t e^T \mathbf{e} dt$. La solución del problema de optimización lleva a la ecuación diferencial matricial de Riccati.	Utiliza un modelo lineal en un punto de operación. Se basa en estructura perfecta del modelo. Puede tener error en la estimación. Requiere resolver la ecuación de Riccati. Los estados iniciales deben comenzar cerca a los reales porque las ganancias se obtienen con base en un modelo linealizado. Sólo garantiza dinámica para convergencia del error en forma arbitraria si el modelo linealizado es observable.
Observador Luenberger extendido (ELO) [9]	<ul style="list-style-type: none"> $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ 	$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$	Selección de $\mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}})$ para lograr que la dinámica del error sea asintóticamente estable. Normalmente se realiza un diseño mediante ubicación de polos.	Se basa en estructura perfecta del modelo. Puede tener error en la estimación. El sistema linealizado debe ser observable
Observador no lineal de alta ganancia [10]	<ul style="list-style-type: none"> $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ que se lleva a una forma canónica con las no linealidades en la última ecuación: $\dot{\hat{x}}_n = \phi(\hat{x}, \mathbf{u})$ y con la salida definida como: $\mathbf{y} = \hat{x}_1$.	$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + p_1 k (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ $\dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + p_{n-1} k^{n-1} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ $\dot{\hat{x}}_n = p_n k^n (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ Donde la ganancia k se calcula con una ley de adaptación.	Partición de la dinámica del sistema en lineal y no lineal. El diseño del observador se realiza de tal forma que la parte lineal de la dinámica domine sobre la parte no lineal. Se utiliza la geometría diferencial, y en particular el álgebra de Lie, para realizar las transformaciones necesarias.	Al aumentar la ganancia del observador baja el error en la estimación y se rechaza mejor la incertidumbre del modelo, pero aumentan las oscilaciones en la respuesta. Si la ganancia es muy alta aumenta la sensibilidad al ruido y el observador puede volverse inestable. No todos los modelos de proceso se pueden llevar a la forma canónica necesaria y por lo tanto las aplicaciones son restringidas.
EKO de estado y parámetros [9]	<ul style="list-style-type: none"> $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \theta)$, $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ 	Similar al EKO y ELO	Los parámetros desconocidos se adicionan al estado generando un estado aumentado. La dinámica de los parámetros desconocidos se iguala a cero.	La sintonía es muy compleja ya que se tienen condiciones iniciales inciertas para los estados a estimar y para los parámetros desconocidos.
Observador deslizante [11]	<ul style="list-style-type: none"> $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \theta)$, $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ que se transforma en el sistema: $\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u})$ $\mathbf{y} = \mathbf{Cz}$ tal que la salida tenga relación lineal con el estado.	$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) + \mathbf{K}(\mathbf{t}) \boldsymbol{\sigma}$ con: $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \text{sign}(y_1 - z_1) \\ \text{sign}(y_2 - z_2) \\ \vdots \\ \text{sign}(y_p - z_p) \end{bmatrix}$	Tiene estabilidad garantizada mediante el criterio de estabilidad de Lyapunov. Tiene robustez garantizada. Se realiza una transformación al modelo tal que las salidas medibles sean las primeras componentes del vector de estado.	Necesita transformar el modelo del proceso, lo cual no siempre es posible para todos los casos. En algunos casos la transformación lleva el modelo a la forma canónica, en otros esta transformación no es requerida. Para el caso de sistemas con varias entradas y varias salidas, se requiere una mayor manipulación matemática; por lo tanto, se deben emplear herramientas que permitan simplificar los cálculos y extender la aplicación del caso de una sola entrada y una sola salida.
Observador adaptable [9]	<ul style="list-style-type: none"> $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \theta)$ $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ 	$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \theta) + \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ con ley de adaptación: $\frac{d\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$	Estima los parámetros desconocidos del modelo. Estos parámetros se suponen como estados extras sin dinámica. Para realizar la estimación se considera un modelo nominal del proceso.	El análisis teórico es muy complejo y el ajuste del observador es difícil en la práctica debido a que se adicionan dinámicas en los parámetros que se deben adaptar.

Tabla 1. (cont). Observadores más utilizados [9]

Table 1. (cont) . More used observers [9]

Nombre del observador	Modelo del proceso	Estructura del observador	Características del observador	Desventajas del observador
Observador con parámetros inciertos como parámetros de diseño [9]	$\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ $\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ \mathbf{x}_1 : Estado medido \mathbf{x}_2 : Estado no medido	Similar al EKO, sin embargo el diseño se realiza tal que el error en el estado \mathbf{x}_2 sea cero.	Utiliza los parámetros poco conocidos como parámetros adicionales para diseñar el observador con el fin de garantizar error en estado estable cero en las variables no medibles.	Corrige para una variable, pero puede generar errores en las otras variables obtenidas, es decir las estimadas por el observador. La estructura del modelo debe ser la correcta, pero se acepta que tenga incertidumbre en los parámetros.
Observador asintótico [9]	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Y}\mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathbf{F} - \mathbf{Q} - \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{v}}\mathbf{x} + \mathbf{U}$ Donde. \mathbf{x} : Concentraciones \mathbf{Y} : Coeficientes estequiométricos \mathbf{r} : Vector de tasas de reacción \mathbf{F} : Flujos de alimento \mathbf{Q} : salidas de gases \mathbf{U} : Intercambio de calor	Transformación: (Invariantes de reacción) $\mathbf{z} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_1^{-1}\mathbf{x}_1$ Observador: $\dot{\hat{\mathbf{z}}} = -\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{U}_2$ $-\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_1^{-1}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_1 + \mathbf{U}_1)$ $\hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_1^{-1}\mathbf{x}_1$ Donde \mathbf{Y}_i contiene los coeficientes estequiométricos. Particiona la dinámica en \mathbf{x}_1 medida y \mathbf{x}_2 no medida. Realiza una transformación de estados que produce un modelo independiente de las cinéticas de la reacción, por lo tanto llega a un modelo que requiere los coeficientes estequiométricos, pero no las cinéticas de la reacción.	La idea de este observador es tomar ventaja de la estructura del modelo bioquímico con cinéticas desconocidas. Se trata de hacer un observador que no dependa de las cinéticas. Para ello se realiza una transformación de variables que elimina el término con incertidumbre. Se fundamenta en que la incertidumbre en el modelo se encuentra en la cinética y no en la estructura. La estructura del modelo se encuentra mediante balances de masa y energía sin requerir las cinéticas (invariantes de reacción) El observador no contiene términos de realimentación del error, pero su dinámica siempre es estable (en el sentido que la norma del error decae a un valor). Tiene estabilidad asintótica garantizada aunque el modelo sea inestable.	Como es un observador en lazo abierto, la tasa de convergencia depende de las condiciones de operación, es decir de los flujos. Necesita realizar una medición por cada reacción que el proceso tenga. No es posible imponerle una dinámica arbitraria, sólo trabaja con la dinámica que le impone el modelo del proceso.
Observador de intervalo [9]	Similar al observador asintótico	Es similar al observador asintótico pero con cotas en algunas variables de estado. Por lo tanto en las ecuaciones del observador se consideran las cotas superiores e inferiores en las variables a estimar. También se consideran las cotas de los flujos de entrada. Esta información se debe tener <i>a priori</i> al diseño del observador.	Genera estimativos con cotas de estimación relacionadas con la incertidumbre del modelo o de la medición. Se basa en el concepto de sistemas cooperativos, entendiéndose aquí como cooperativos a los sistemas cuyos elementos no diagonales de la matriz Jacobiana son siempre positivos.	Se utiliza en modelos de tratamiento de aguas de desecho, donde las concentraciones de los contaminantes no son bien conocidas.

Tabla 2. Algunas aplicaciones de observadores
Table 2. Some observers applications

Autor / Año	Método	Utilización	Modelo / Planta	Base del Método	Características especiales	Desventajas
[2] Oliveira, J et al. (2006)	Medición inversa con base en un modelo, es decir se mide la salida del modelo y se determina la entrada.	Sensado de temperatura en un reactor de lecho fluidizado.	Reactor de lecho fluidizado que trabaja a 800 grados centígrados y tiene un ambiente corrosivo para el elemento primario de medición	Obtención de la temperatura al interior del reactor desde la medición de temperatura en el exterior y un modelo inverso obtenido desde un balance de energía.	La solución del modelo inverso implica el cálculo o medición de la derivada temporal de la temperatura. Para ello se utiliza un polinomio de bajo orden que trabaja como regresor, mediante el cual se estima esta derivada. El método es simple e implementable en un microcontrolador comercial.	La aplicación en un caso muy particular de un modelo con una entrada y una salida. Reportan errores debido al ruido introducido en los amplificadores de las termocuplas.
[19] Bhagwat, A. et al (2005)	Múltiples modelos lineales y observador lineal	Diagnóstico de fallas durante las transiciones de un proceso	Planta de control de PH a escala de laboratorio	Partición del rango de operación. Obtención de múltiples modelos lineales basado en un modelo global de primeros principios y linealización Jacobina. Obtención del modelo lineal en cada región. Diseño de filtros Kalman lineales y observadores para cada modelo en cada punto de operación.	La selección de cada modelo para un punto específico se realiza mediante la solución a un problema de minimización de un índice que considera la norma de los vectores de cambio de las salidas y los esfuerzos de control.	Si el número de regiones es grande se incrementa la exactitud pero aumenta la complejidad, especialmente al resolver el problema de minimización para la selección del modelo en cada instante de muestreo
[20] Bagui, F; Abdelghani M.A; Chafouk, H. (2004)	Filtro de Kalman adaptable	Estimación de la temperatura en un intercambiador de calor en contra corriente	Intercambiador de calor en un laboratorio	Modelo de dinámica local de la temperatura en combinación con filtro Kalman no lineal. Para ello se divide el proceso en n subsistemas y obtención de la representación en el espacio de estado para cada subsistema. Al final se obtiene un espacio de dimensión 3n para el vector de estado. El observador de Kalman se utiliza para corregir los errores de modelado debido a las hipótesis simplificadoras.	Se obtienen errores del orden del 1%	La cantidad de ecuaciones es muy alta lo cual implica alta carga computacional.
[10] Biagola, S; Figueroa, J. (2004)	Observador no lineal de alta ganancia	Observador de estados	CSTR	Observador típico similar al Kalman, sin embargo se realiza una transformación de coordenadas con el fin de hacer más fácil el diseño del observador. El observador sólo utiliza la medida de la salida, el modelo completo del proceso y un procedimiento no lineal evita la pérdida de información de la dinámica como también la debida a simplificaciones como reducción de orden o linealización.	Se realiza un análisis cuantitativo para evaluar la robustez y la convergencia del error y para analizar la incertidumbre de la medida y la incertidumbre del modelo.	La estructura del modelo debe tener una forma que pueda ser transformada.
[21] Park, S; Han, H (2000)	Soft sensor no lineal basado en smoothing	Estimación de la temperatura en una columna de destilación industrial	Columna de destilación industrial de 60 platos	Método Locally Weighted: Regresión que se basa en la suposición de que los valores vecinos de las variables del predictor son los mejores indicadores de la variable respuesta, en el rango de valores del predictor.	Se desarrolla un modelo local móvil en un conjunto cercano de vecinos.	El modelamiento se obtiene a partir de datos y estadística y un modelo inferencial (empírico) mediante análisis de las componentes principales.
[22] Norgaard, M et al (2000)	Observador de estados de sistemas no lineales basado en aproximaciones polinómicas.	Estimador de estado general.	Modelo de un cuerpo cayendo verticalmente.	El método se basa en aproximaciones polinómicas de las transformaciones no lineales obtenidas con una extensión particular de la fórmula de interpolación de Stirling's (Fórmula de interpolación multidimensional)	El método de interpolación, en contraste con la fórmula de Taylor, no necesita la obtención de derivadas	Sólo sirve para algunas funciones que se puedan aproximar mediante polinomios.
[1] De Assis, A; Maciel, R. (2000)	Soft sensor para estimación de variables en bioreactores	Estimación de variables como masa de células, sustrato y concentración de producto en procesos bioquímicos	No se aplica a ninguno específico, sólo se revisan los métodos.	Se explican brevemente los métodos de: - Estimación a través de balances elementales - Observador adaptable - Filtro Kalman extendido - Redes neuronales artificiales	El artículo hace una breve descripción de los métodos y al final concluye que un campo promisorio es la combinación de modelo fenomenológicos con modelos caja negra.	Es un estado del arte, muy general y poco profundo.
[14] Soroush, M (1998)	Estado del arte en estimación de parámetros para control de procesos	Se habla de varios índices de calidad como: densidad, composición, punto flash, número de octanaje, entre otras.	No se tiene un modelo específico ya que es una revisión del tema	Se habla de varios métodos: - Observador Luenberger - Filtro de Kalman - Filtro de Kalman extendido - Optimización en línea - Linealización exacta - Estimación multimuestreo - Estimación adaptable	El artículo deja abiertas varias preguntas: ¿Cómo evaluar el comportamiento del estimado?, ¿Cuál es la definición del comportamiento? ¿Cómo seleccionar el modelo de perturbación tal que el estimador sea robusto con respecto al modelo de la planta? ¿Cuál es la escala apropiada para el problema de estimación? ¿La estimación se debe realizar para la planta completa o para parte de ella?	No tiene una aplicación específica, pero recoge mucha información sobre el tema.
[23] Wilson, J; Zorzetto, L (1997)	Estimación de estado utilizando modelos fenomenológicos y redes neuronales	Estimación de estado	Sistema de tres tanques en cascada	Se utiliza un modelo de base fenomenológica conjuntamente con redes neuronales (RN) para las relaciones no lineales y más complicadas. Además se aplica un filtro de Kalman extendido con el modelo híbrido.	Utiliza un máximo del conocimiento a priori del sistema. Ahorra tiempo en la obtención de dinámicas no lineales o poco entendidas.	Todas la que involucra el filtro Kalman y la RN

En la fluidización con un gas, aparecen varios efectos dinámicos medibles con instrumentos tradicionales: temperatura, presión, velocidad del gas, densidades de gas y sólido. Sin embargo, el N_F , asociado con la V_{MF} , resulta ser un efecto dinámico (y por tanto un estado), que no tiene medición directa. Varios trabajos reportados en la literatura proponen el control de una variable tal que se logren las condiciones necesarias al interior del lecho [25-27], pero ninguno aborda el control del N_F , justamente por la dificultad en su medición (no existe sensor). Para medir N_F se deben medir V_g y V_{MF} ; la primera velocidad es de medición directa, pero la segunda es una variable no medible que debe estimarse a partir de las propiedades del gas, del sólido y de la fluidización misma.

Aunque se tienen reportados algunos intentos para determinar la V_{MF} a través de SVBM [28], las soluciones obtenidas son muy particulares, lo que deja un campo abierto para la investigación en estimadores de estado que brinden un valor del N_F que pueda utilizarse para efectos de control. En este sentido se trabaja actualmente en una Tesis Doctoral en Ingeniería en la Facultad de Minas de la Universidad Nacional de Colombia [29].

5. CONCLUSIONES

Se ha realizado un recorrido por los principales estimadores de estado clásicos que se tienen en reportados en la literatura y cuya aplicación se halla realizado con éxito en procesos químicos. Las estructuras, ventajas, y desventajas de estos estimadores han sido descritas. Finalmente, se realizó la descripción de un proceso práctico en el cual se tienen problemas para la medición de una variable crítica, el número de fluidización, y se mostró que queda abierta la posibilidad de generar conocimiento en este aspecto.

REFERENCIAS

[1] DE ASSIS, ADILSON JOSÉ; MACIEL FILHO, RUBENS. Soft Sensors Development for On – Line Bioreactor State Estimation. *Computers & Chemical Engineering*. Vol 24, pp 1099-1103, 2000.

[2] OLIVEIRA, J; SANTOS J.N., SELEGHIM Jr. P. Inverse Measurement Method for Detecting Bubbles in a Fluidized Bed Reactor—Toward the Development of an Intelligent Temperature Sensor. *Powder Technology*. Vol 169, pp 123–135, 2006.

[3] WALLAS, S. Chemical Process equipment. Selection and design. Butterworth. 1988.

[4] GOLDBERG, H. What is Virtual Instrumentation?. *IEEE Instrumentation & Measurement Mag*. No. 6. 2000.

[5] GREWAL, MOHINDER; ANDREWS, ANGUS. Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab. 2 Ed. John Wiley & Sons Inc. New York, 2001.

[6] KALMAN, RUDOLF, E. A New Approach to Linear Filtering Predictions Problems. *Transactions of ASME J. Basic Eng. Series 82D*. pp 35-45, 1960.

[7] SOROUSH, MASOUD. Nonlinear State Observer Design With Application to Reactors. *Chemical Engineering Sciences*. Vol 52, N 3, pp 387-404, 1997.

[8] LUENBERGER, DAVID. An Introduction to Observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol AC 16, N 6. pp 596-602, 1971.

[9] DOCHAIN, DENIS. State and Parameter Estimation in Chemical and Biochemical Processes: a Tutorial. *Journal of Process Control*. Vol 13, pp 801-818, 2003.

[10] BIAGIOLA, SILVINA I; FIGUEROA JOSÉ L. A High Gain Nonlinear Observer: Application to the Control of an Unstable Nonlinear Process. *Computers and Chemical Engineering* Vol 28, pp 1881–1898, 2004.

[11] WANG, G; PENG, S.; HUANG, H. A Sliding Observers for Nonlinear Process Control. *Chemical Engineering Sciences*. Vol 52, N 5, pp 787-805, 1997.

- [12] PUIGJANER, L., OLLERO, P., DE PRADA, C. Y JIMÉNEZ, L. Estrategias de Modelado, Simulación y Optimización de Procesos Químicos. Editorial Síntesis. Madrid. España 2006.
- [13] EDGAR, T.F. AND HIMMELBLAY, D.M. Optimization of Chemical Processes. McGraw Hill. New York, USA.1988.
- [14] SOROUSH, MASOUD. State and Parameter Estimations and Their Applications in Process Control. Computers & Chemical Engineering. Vol 23, pp 229-245, 1998.
- [15] SIMON, DAN; CHIA, TIEN LI. Kalman Filtering with State Equality Constraints. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol 39, N 1, pp. 128-136, 2002.
- [16] SHANGO, KO; BITMEAD, ROBERT. State Estimation for Nonlinear Systems with State Equality Constraints. Automatica. Vol 43, pp 1363-1368, 2007.
- [17] JULIER, SIMON; UHLMANN, J. K.; DURRANT-WHYTE, H. F. A New Approach for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 45, N 3, pp 477-482, 2000.
- [18] SIMON, DAN. A Comparison of Filtering Approaches for Aircraft Engine Health Estimation. Aerospace Science and Technology. 2007. doi 10.1016/j.ast.2007.06.002.
- [19] BHAGWAT, ANSHUMAN; SRINIVASAN, RAJAGOPALAN; KRISHNASWAMY, P. R. Multi-Linear Model-Based Fault Detection During Process Transitions. Chemical Engineering Science, Vol 58, pp 1649 – 1670, 2003.
- [20] BAGUI, F.; ABDELGHANI-IDRISSI, M. A.; CHAFOUK, H. Heat Exchanger Kalman Filtering With Process Dynamic Acknowledgement. Computers and Chemical Engineering. Vol 28, pp 1465-1473, 2004.
- [21] PARK, SUNGYONG; HAN, HONGHUN. A Nonlinear Soft Sensor Based on Multivariate Smoothing Procedure for Quality Estimation in Distillation Columns. Computers and Chemical Engineering. Vol 24, pp 871-877, 2000.
- [22] NORGAARD, MAGNUS; POULSEN, NIELS K., RAVN, OLE. New Developments in State Estimation for Nonlinear Systems. Automatica. Vol 36, pp 1627 -1638, 2000.
- [23] WILSON, J. A.; ZORZETTO, L. E. A Generalised Approach to Process State Estimation Using Hybrid Artificial Neural Network/Mechanistic Models. Computers. Chemical Engineering. Vol 21, N 9, pp. 951-963, 1997.
- [24] BOGERE, M. A Rigorous Description of Gas-Solid Fluidized Beds. Ch. Eng. Sci. vol. 51, No. 4, 1996.
- [25] GELDART, D. The Effect of Particle Size and Size distribution on the Behavior of Gas-Fluidized Beds. Powder Technology. 6. 201-215, 1973.
- [26] KUNII, D. Fluidization Engineering. John Wiley & Sons, inc, 1969.
- [27] OCAMPO, J, ARENAS E, CHEJNE F., ESPINEL J, LONDOÑO C., AGUIRRE J y PÉREZ J. D. An experimental study of gasification of Colombian coal in fluidised bed. Fuel. Vol 82, pp 161-164, 2003.
- [28] RODRÍGUEZ, H., ALVAREZ, H., LEGUIZAMON, C. AND VÁSQUEZ, C. A Virtual Sensor Based on a Takagi-Sugeno Fuzzy Model Applied to a Solid-Gas Fluidized Bed. Memorias X Congreso Latinoamericano de Control Automático, Guadalajara, (México), 2002.
- [29] BOTERO, H. Formalismo Para la Síntesis de Sensores Virtuales Basados en un Modelo Maestro de Base Fenomenológica. Propuesta de Tesis Doctoral. Doctorado En Ingeniería – Sistemas Energéticos. Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín. 2008.