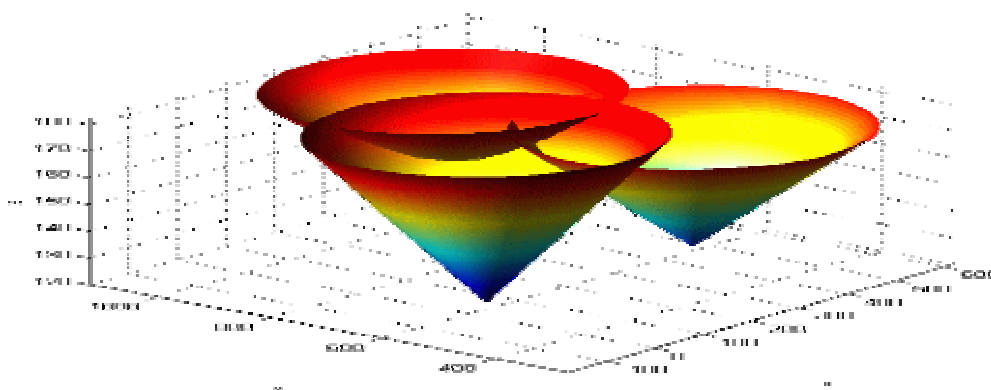


**PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN
A UN PROBLEMA TOPOGRAFICO
PROBLEMA “ALEPH”**



Por:
GONZALO DUQUE ESCOBAR P. A.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SECCIONAL MANIZALES



Manizales, febrero de 1984.

Versión corregida y ampliada por el autor, en marzo 2006

DEDICATORIA

Al Maestro, el Ingeniero CARLOS ENRIQUE RUIZ: Fundador y Director de la Revista "ALEPH" *

* <http://www.revistaaleph.com.co/>

1. INTRODUCCIÓN

Esta creación antes que a otra causa, se debe más a lo que he aprendido de mis alumnos.

También es el esfuerzo de siete años de trabajo, desde la búsqueda hasta la solución de un método topográfico, en las cátedras de Topografía en Ingeniería Civil, útil para la localización de puntos en un espacio tridimensional.

2. ENUNCIADO

Desde tres placas A, B y C definidas por sus tres coordenadas topográficas, se observa un punto P a determinar con los ángulos de inclinación α , β y γ (Figura 1).

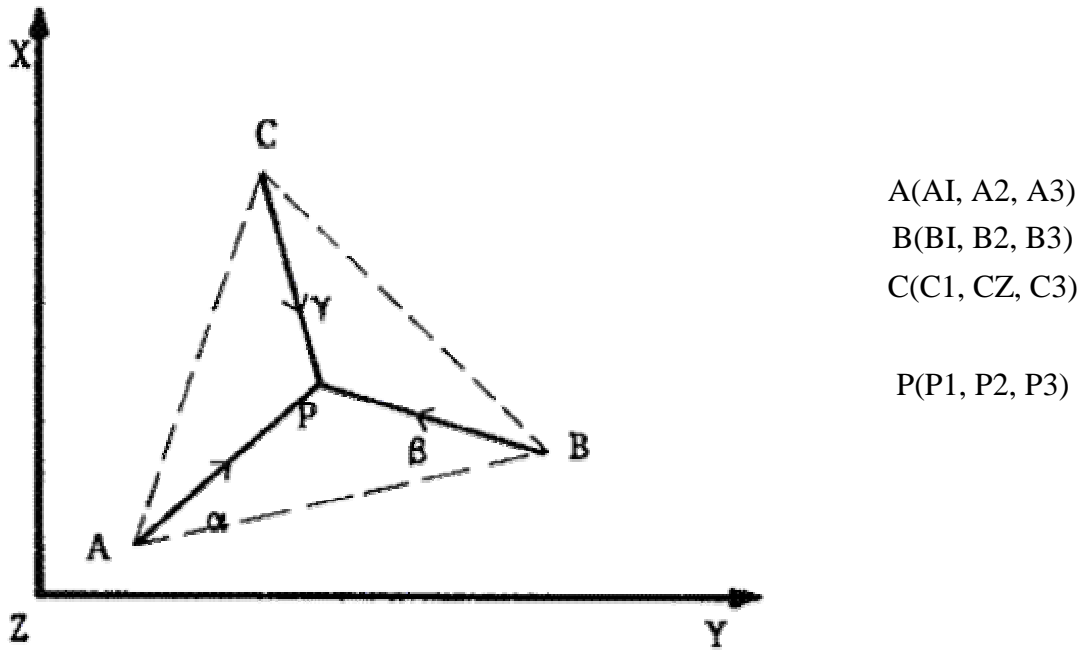


Figura 1: Problema 'ALEPH': planta con ángulos de elevación hacia un punto P por definir, medidos desde tres puntos A, B y C, no intervisibles y de coordenadas X, Y y Z conocidas.

3. DISCUSIÓN

Cada visual, no horizontal, describirá un cono circular recto con vértice en su respectiva placa. El punto P será la intersección común de los tres conos, cuya expresión es de la forma:

$$\tan \varepsilon = \frac{z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \dots\dots\dots(0)$$

Si consideramos las visuales al punto P como generatrices de los conos, a la altura del punto pedido, las directrices serán tres circunferencias interceptadas en P.

4. LA ROSA 'ALEPH'

Supongamos el desplazamiento de las visuales en A y B (Figura 2)

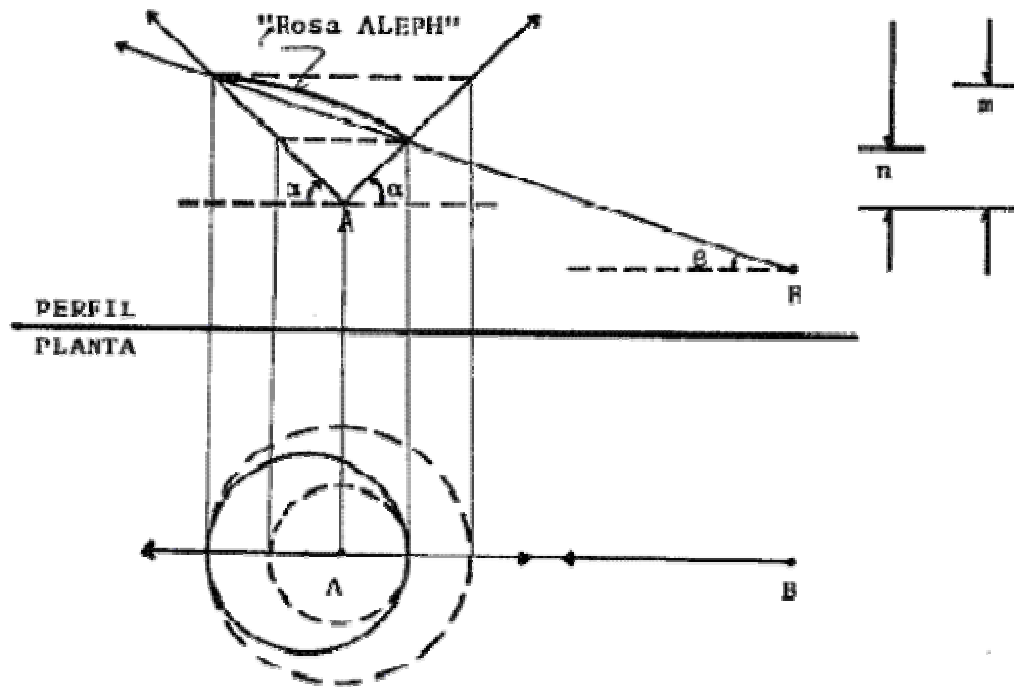


Figura 2: La Rosa ALEPH es la intersección entre dos conos.

Si el ángulo α es mayor que β , la intersección de los dos conos estará entre los círculos directrices del cono A y con alturas relativas \underline{n} y \underline{m} . Esta intersección será "la rosa ALEPH" de pétalos plegados en la dirección AB.

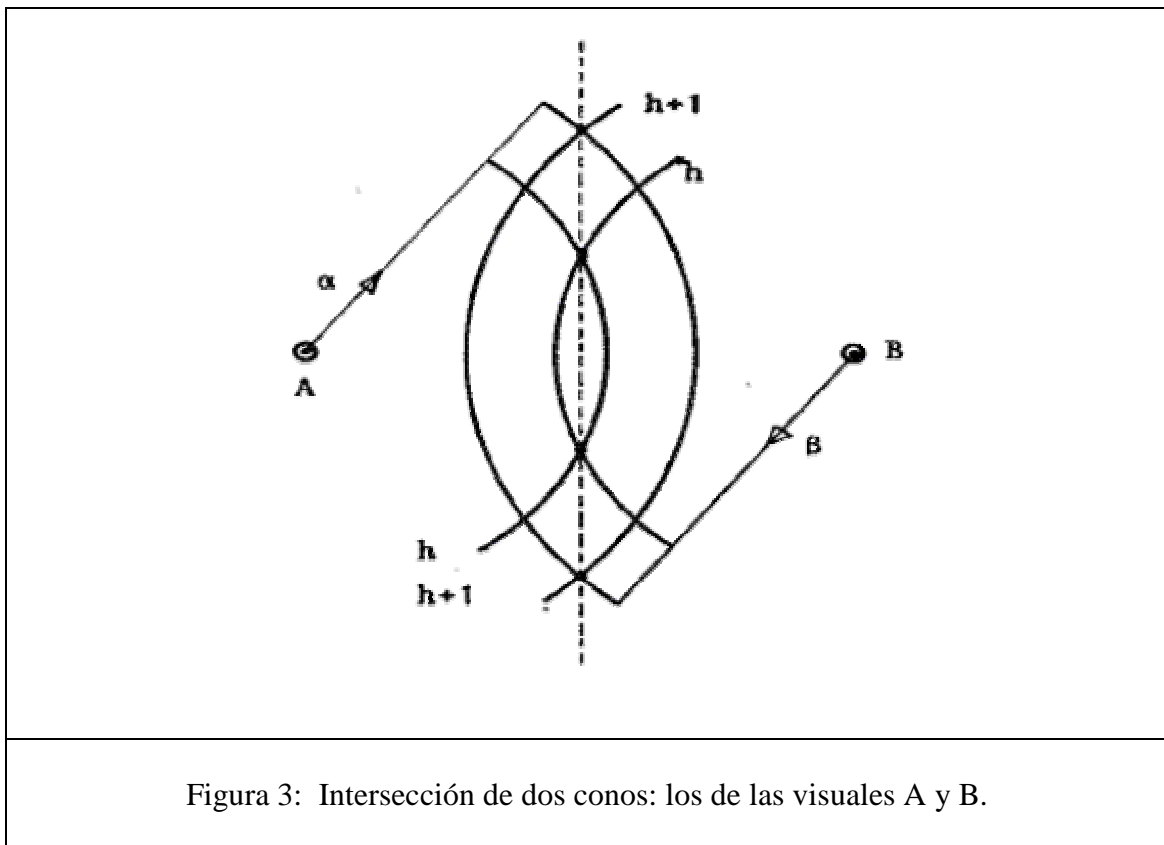
Si α y β son ángulos iguales, la altura \underline{m} será infinita.

La sombra de la rosa es la intersección de las visuales para $-\alpha$ y $-\beta$.

5. SOLUCIÓN GRÁFICA:

Dibujamos en el plano XY las curvas de nivel a intervalo constante, comprendidas entre las alturas relativas \underline{n} y \underline{m} y que pertenezcan a cada uno de los conos, es decir, representamos con directrices a partir de \underline{n} y sobre el plano \underline{Z} , los tres conos según los ángulos α , β y γ .

Uniéndolos puntos de intersección de los círculos de A con B que tengan igual altura, obtenemos la "rosa ALEPH" (Figura 3). Esta es la intersección de los conos, obtenida a partir de sus curvas de nivel.



También se obtiene de las intersecciones de igual cota entre los círculos de A y C, la "rosa ALEPH" correspondiente a este par de conos.

La tercera "rosa ALEPH" generada por los conos B y C, interceptará las rosas anteriores, entregando como solución el punto \underline{P} en la común intersección de todas. (Figura 4).

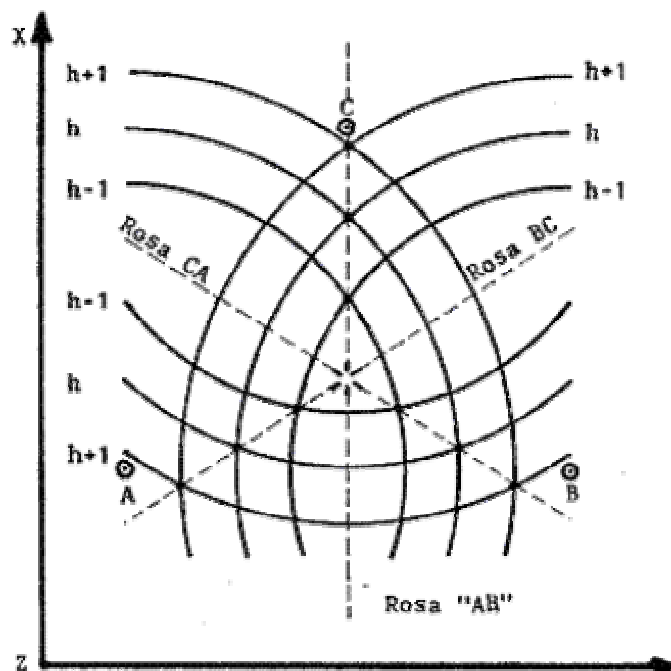


Figura 4: Solución gráfica de "ALEPH: \underline{P} es la intersección de las tres rosas.

6. AJUSTE ANALITICO

Para calcular las coordenadas del punto \underline{P} , con despreciable error topográfico, utilizamos un algoritmo (Supongamos que \underline{P} es interior al triángulo ABC). Si asumimos como valor de tanteo inicial, una altura Z en el punto \underline{P} , tal que su valor supere el de \underline{n} , podrá calcularse las proyecciones de las distancias AZ , BZ y CZ , sobre el plano XY que es el horizonte. Para tal efecto se utilizan las ecuaciones siguientes de la función tangente, donde Z' es la proyección de Z sobre XY :

$$AZ' = (Z - A3) \tan \alpha \dots\dots\dots(1)$$

$$BZ' = (Z - 83) \tan \beta \dots\dots\dots(2)$$

$$CZ' = (Z - C3) \tan \gamma \dots\dots\dots(3)$$

Puede ocurrir con este primer valor de Z, próximo a \underline{P} , que $Z < P_3$, o bien, que $Z > P_3$ (Figura 5). P_3 es la tercera coordenada de P.

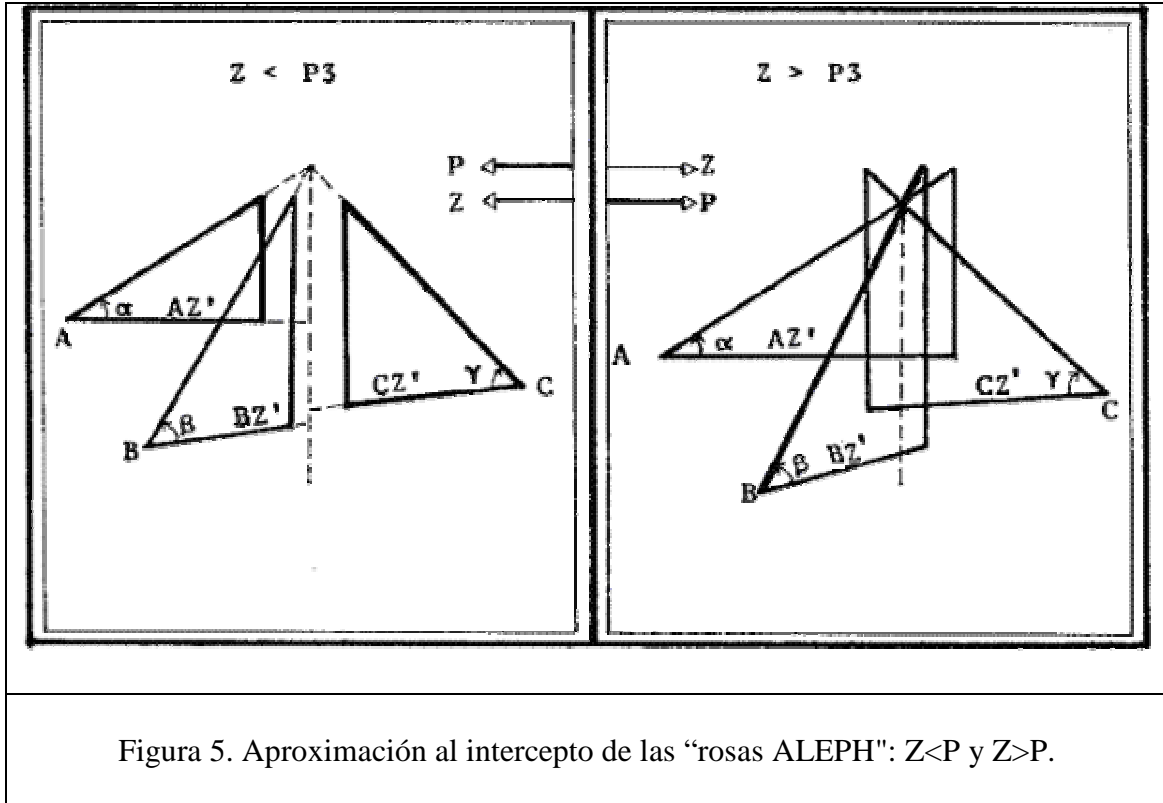


Figura 5. Aproximación al intercepto de las "rosas ALEPH": $Z < P$ y $Z > P$.

NOTA: "Con las tres proyecciones de las visuales, tenemos tres radios de circunferencias directrices o curvas de nivel a la altura Z. La Figura 4 ejemplariza tres cálculos sucesivos con $Z > P_3$ "

Ya podemos calcular los ángulos δ_1 , δ_2 y δ_3 en la vecindad de Z' con las ecuaciones siguientes, según la ley del coseno:

$$\delta_1 = \text{Ar.cos} \left\{ \left(|AZ'|^2 + |BZ'|^2 - |CZ'|^2 \right) / \left(2 |AZ'| |BZ'| \right) \right\} \dots\dots\dots(4)$$

$$\delta_2 = \text{Ar.cos} \left\{ \left(|BZ'|^2 + |CZ'|^2 - |AZ'|^2 \right) / \left(2 |BZ'| |CZ'| \right) \right\} \dots\dots\dots(5)$$

$$\delta_3 = \text{Ar.cos} \left\{ \left(|CZ'|^2 + |AZ'|^2 - |BZ'|^2 \right) / \left(2 |CZ'| |AZ'| \right) \right\} \dots\dots\dots(6)$$

Los valores así calculados quedan evaluados en el plano horizonte XY. En estas ecuaciones todos los términos "prima" son proyecciones de las respectivas líneas en el plano Z mencionado.

AB' , BC' y CA' son calculables con las coordenadas planas $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ respectivamente

La suma de los ángulos δ_1, δ_2 y δ_3 sólo podrá ser 2π cuando Z asumido iguale el valor de \underline{P} ; en caso contrario, esta suma excederá en algo el valor 2π si $Z < P$, o simplemente será excedida si $Z > P$, dado que \underline{P} es punto interior al triángulo de estaciones A, B y C , en este caso. (Figura 6).

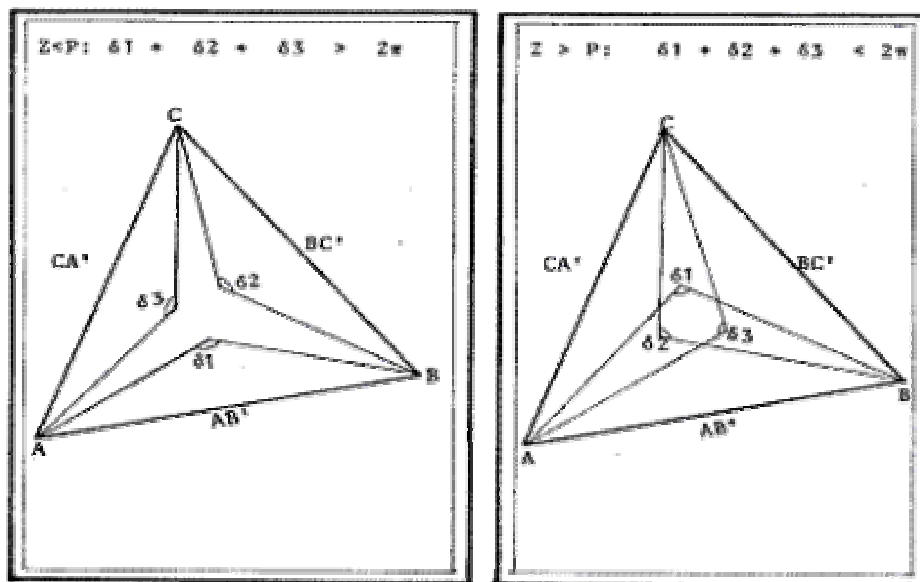


Figura 6: Sólo \underline{P} puede lograr que " $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2\pi$ ".

Un análisis similar puede hacerse para obtener las coordenadas de \underline{P} fuera del triángulo; en tal caso (figura 6)

$$\delta_1 = \delta_2 + \delta_3 \text{ Si } \underline{P} \text{ está a la derecha de } AB \dots (7)$$

$$\delta_2 = \delta_3 + \delta_1 \text{ Si } \underline{P} \text{ está a la derecha de } BC \dots (8)$$

$$\delta_3 = \delta_1 + \delta_2 \text{ Si } \underline{P} \text{ está a la derecha de } CA \dots (9)$$

Se recomienda, para evitar el problema de seleccionar la solución correcta, que en el terreno se determine un punto \underline{P} siempre interior al triángulo ABC , y con base en una

figura bien conformada (el punto P sobresaliendo y los ángulos del triángulo ABC entre 30° y 120° cada uno).

Con lo anterior la solución interior al triángulo es única, pues teóricamente pueden aparecer de 0 a 4 soluciones para la práctica da comúnmente dos soluciones diferenciadas.

Para administrar tanteos de Z en la búsqueda de P, puede graficarse, contra Z, el error en la ecuación:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2\pi \dots\dots\dots(10)$$

El valor de P1 y P2, a partir de P3, se ejecuta obteniendo el ángulo α_1 , (Figura 7), con

$$\alpha_1 = \text{Ar. sen } \left| \frac{(P_3 - C_3) \tan \gamma \text{ sen } \delta_3}{((A_1 - C_1)^2 + (A_2 - C_2)^2)^{1/2}} \dots\dots(11) \right.$$

Con este valor, es inmediato el cálculo de P1 y P2 partiendo de la dirección de AP y su distancia en el plano XY. Esto es, con α_1 se obtienen las coordenadas X e Y del punto P.

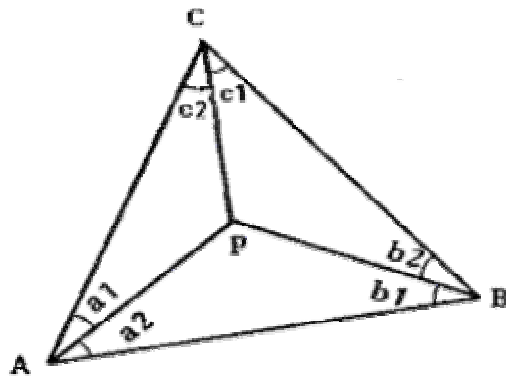


Figura 7: P (P1, P2, P3). Se recomienda P interior al triángulo ABC

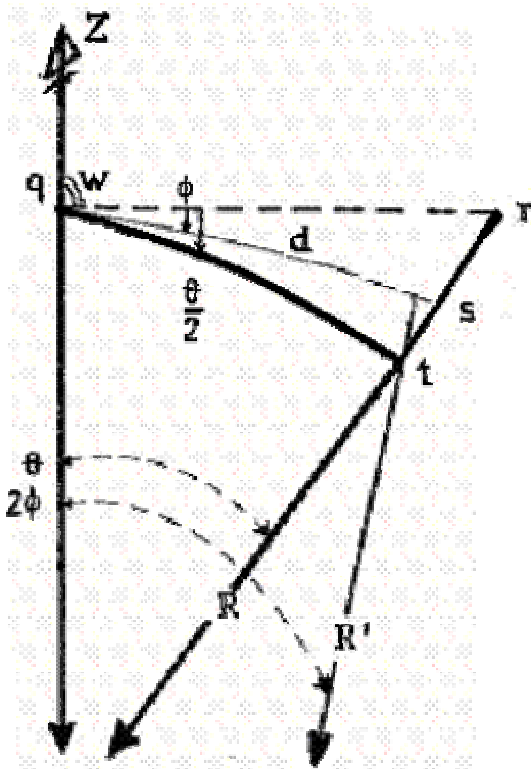
Si se desea constatar la interioridad de P, podemos calcular los seis ángulos horizontales sobre placas y deberá cumplirse:

$$\text{Sen } (a_1) \text{ Sen } (b_1) \text{ Sen } (c_1) = \text{Sen } (a_2) \text{ Sen } (b_2) \text{ Sen } (c_2) \dots\dots\dots (12)$$

Identidad que resulta de igualar el valor de la proyección horizontal de AP obtenido desde la proyección horizontal de CB, por dos rutas de cálculo diferentes en función de los ángulos horizontales c_2 y b_1 , respectivamente. Figura 7.

7. CURVATURA TERRESTRE Y REFRACCIÓN ATMOSFÉRICA:

En la solución gráfica podrá omitirse esta corrección teóricamente administrable. Sólo que si se desea mejorar en la precisión de las coordenadas de \underline{P} , habrá que ajustar el resultado gráfico.



q = Observador
s = Punto observado
qr = horizonte del observador,
tangente en q a los arcos qs y qt.

w = ángulo cenital de la visual qs
w = $\pi/2$ (visual a nivel)

d = visual refractada de longitud qs

R = Radio de la tierra en la zona

$R \gg d$

R' = Radio de curvatura de la visual qs

$R' > R$

qt = superficie de nivel paralela al mar

rt = error de curvatura terrestre

rs = error de refracción atmosférica

Figura 8: Curvatura terrestre y Refracción atmosférica para una visual a nivel.

En la Figura 8, la visual horizontal tendrá aparentemente el itinerario qr, pero se curvará logrando caer al punto s, con un ángulo de refracción ϕ y un radio de curvatura

R'. En la distancia d, el error de curvatura terrestre respecto al *datum* de q, será r_t . Los puntos q y t están sobre un mismo *datum*. En este caso, el arco de círculo qt paralelo al nivel del mar, y cuya curvatura es R y de valor θ .

Si θ es el valor del arco qt, podemos calcular, en términos de ϕ y de θ , la corrección alimétrica doble para el punto s observado con un ángulo vertical cenital w, valor que se denominará \underline{v} .

Llamando K al coeficiente de refracción, dado por:

$$2K = R/R' \dots\dots\dots(13)$$

Podemos decir, por ser θ y ϕ pequeños, que:

$$K = \phi / \theta \dots\dots\dots(14)$$

Y de la gráfica, la corrección st requerida para s, que es la diferencia ($r_t - r_s$), puede ser expresada por el ángulo v , así

$$v = (\theta / 2) - \phi \dots\dots\dots(15)$$

Ángulo cuyo valor según las ecuaciones (13) y (14) se transforma en:

$$v = \theta (0,5 - k) \dots\dots\dots(16)$$

Expresando θ en términos de las distancias planas aproximadas (solución gráfica) y el ángulo \underline{v} en segundos de arco, se llega finalmente a esta expresión:

$$v'' = (0,5 - k)d / R \text{ Sen } 1'' \dots\dots\dots(17)$$

En ángulos estrechos el seno y la tangente se confunden con el arco, por lo que el inverso de $\text{sen } 1''$ equivale a 206.265 que es el número de segundos en un radian.

Ahora, el desnivel H corregido por curvatura terrestre y refracción atmosférica, en la nivelación trigonométrica, cuando no se aplican visuales recíprocas y simultáneas, sino la observación en un solo sentido, estará dado por la siguiente expresión:

$$H = d(\tan \varepsilon) + (0,5 - k)d^2/R + \langle h_1 - h_2 \rangle \dots\dots(18)$$

Donde d es la distancia planimétrica, ε el ángulo vertical medido a partir del horizonte y R el radio de la Tierra. Esta incluyen las alturas instrumentales h₁ del tránsito y h₂ de la señal observada.

En la ecuación (18), el término (0,5-k)d²/R corresponde a la corrección y alcanza valores que superan el medio centímetro, a partir de los 300m. A un kilómetro, la corrección resulta de orden de los 6,8 cm.

8. METODOS NUMÉRICOS:

Para la solución numérica, entrar al enlaces [aleph01](#); para la solución gráfica, al enlace [aleph02](#).

La solución numérica que se presenta, fue elaborada por [Miguel Duque Bernal](#), en marzo de 2006, con el software Matlab, empleando el método iterativo de Newton-Raphson para resolver el sistema no lineal de las tres ecuaciones (1), (2), y (3) del numeral 6, por Miguel Duque Bernal 2006- donde las incógnitas son las tres coordenadas de P, considera que los conos tienen vértice en el eje de inclinación del telescopio sobre cada una de las placas A, B y C, y que sus generatrices son las visuales no refractadas que se encuentran en P. Además supone que no existe curvatura terrestre.

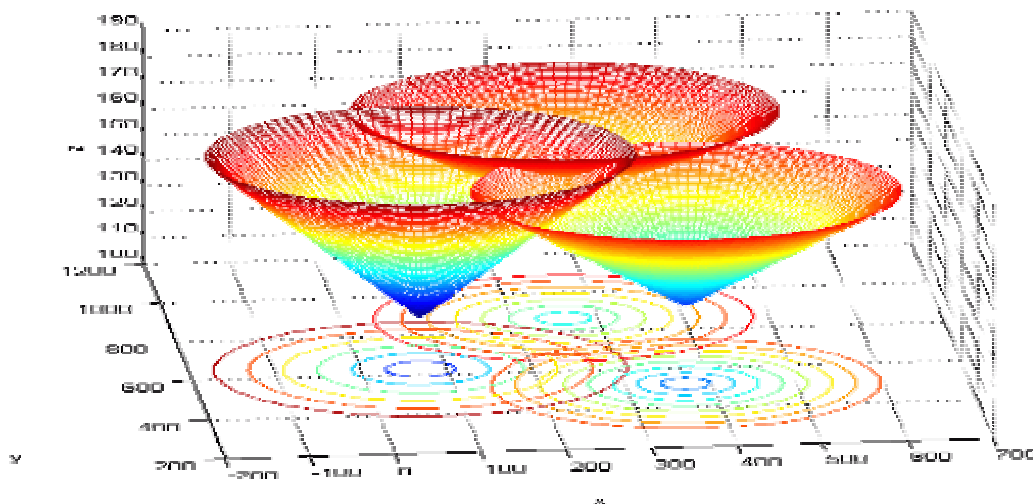


Figura 9: Perspectiva de una intersección cónica con su proyección sobre el plano

horizontal.

Estas ecuaciones son de la forma:

$$\tan \varepsilon = \frac{z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \dots\dots\dots(19)$$

Dadas las coordenadas de A, B y C deben afectarse en su coordenada Z, con la altura instrumental. Igualmente la altura obtenida de P será la de la señal observada.

El problema también obtiene una primera solución para un punto P interior al triángulo ABC, y a partir de ella hace un ajuste por curvatura terrestre y refracción atmosférica, utilizando como radio de curvatura de la tierra 6.35×10^6 m, valor que corresponde a la latitud de Manizales, y a un azimut de 45° .

9. ERRORES EN LA MEDIDA DE LOS ÁNGULOS:

En trabajos de precisión, además de los errores propios de la red de apoyo, asociados a la precisión en las coordenadas de los puntos AB y C, los errores accidentales en la determinación de P son fundamentalmente los de la medida de los ángulos verticales α , β y γ . Expresados en segundos de arco, para cada una de las tres visuales, el máximo error accidental es de la forma:

$$E'' \leq \sqrt{l^2 + t^2 + i^2 + r^2} \dots\dots\dots(20)$$

Donde el máximo error accidental E'' es el resultado acumulado de cuatro errores accidentales elementales, expresados en segundos de arco, así:

El error l'' que es el máximo error en la lectura del ángulo vertical, es función a su vez de la aproximación μ del limbo vertical. Su valor es $2/3 \mu$ por lectura. Si se hace doble lectura, invirtiendo el aparato para compensar su error de colimación, entonces se aplica:

$$l'' \leq \mu\sqrt{2}/3 \dots\dots\dots(21)$$

El error t'' que es el máximo error en puntería al observar P, es función a su vez de la amplificación del telescopio Λ . Si se hace doble lectura, invirtiendo el telescopio para compensar su error de colimación, entonces se aplica:

$$t'' \leq \frac{10''(25 + \Lambda)}{25\Lambda\sqrt{2}} \dots\dots\dots(22)$$

El error i'' que es el máximo error en la verticalidad del instrumento, es función a su vez de la sensibilidad del nivel χ , que se estima en una fracción de la separación entre los reparos para el control de su burbuja. Aunque se hace doble lectura, únicamente se aplica $\chi/12$ únicamente, dado que este error en los ángulos horizontales vale $\chi/3$:

$$i'' \leq \frac{\chi}{12} \dots\dots\dots(23)$$

El error r'' que es el máximo error asociado a los errores k_1 y k_2 propios de la medida de la altura instrumental del aparato y de la señal observa ubicada en P, respectivamente donde influye a su vez de la longitud d de la visual y de su inclinación ϵ . El error r es inversamente proporcional a d y directamente al ángulo ϵ y a los errores k_1 y k_2 . Aunque se hace doble lectura angular, únicamente se aplica el valor de r dado por:

$$r'' \leq \arctan\left\langle \frac{d \tan \epsilon}{d - k_1 + k_2} \right\rangle - \epsilon \dots\dots\dots(24)$$

10. EJERCICIO NUMÉRICO

Sean A (70; 630; 120), B (370; 520; 130), C (260; 870; 140) tres puntos no intervisibles ubicados en una red de apoyo cuyas coordenadas en metros, incluyen en Z la altura instrumental, y desde los cuales se miden los ángulos de elevación $\alpha = 14^\circ$, $\beta = 10^\circ$ y $\gamma = 9^\circ$ para un cuarto punto inaccesible P, interior a ABC, él que se desea conocer para ser utilizado a distancia como complemento de la red de apoyo.

Entonces, la solución aplicando métodos numéricos es: $P1 = 249,26$ m; $P2 = 695,93$ m; $P3 = 167,62$ m. Aquí, las distancias entre P y los puntos A, B y C es del orden de los 200 m.

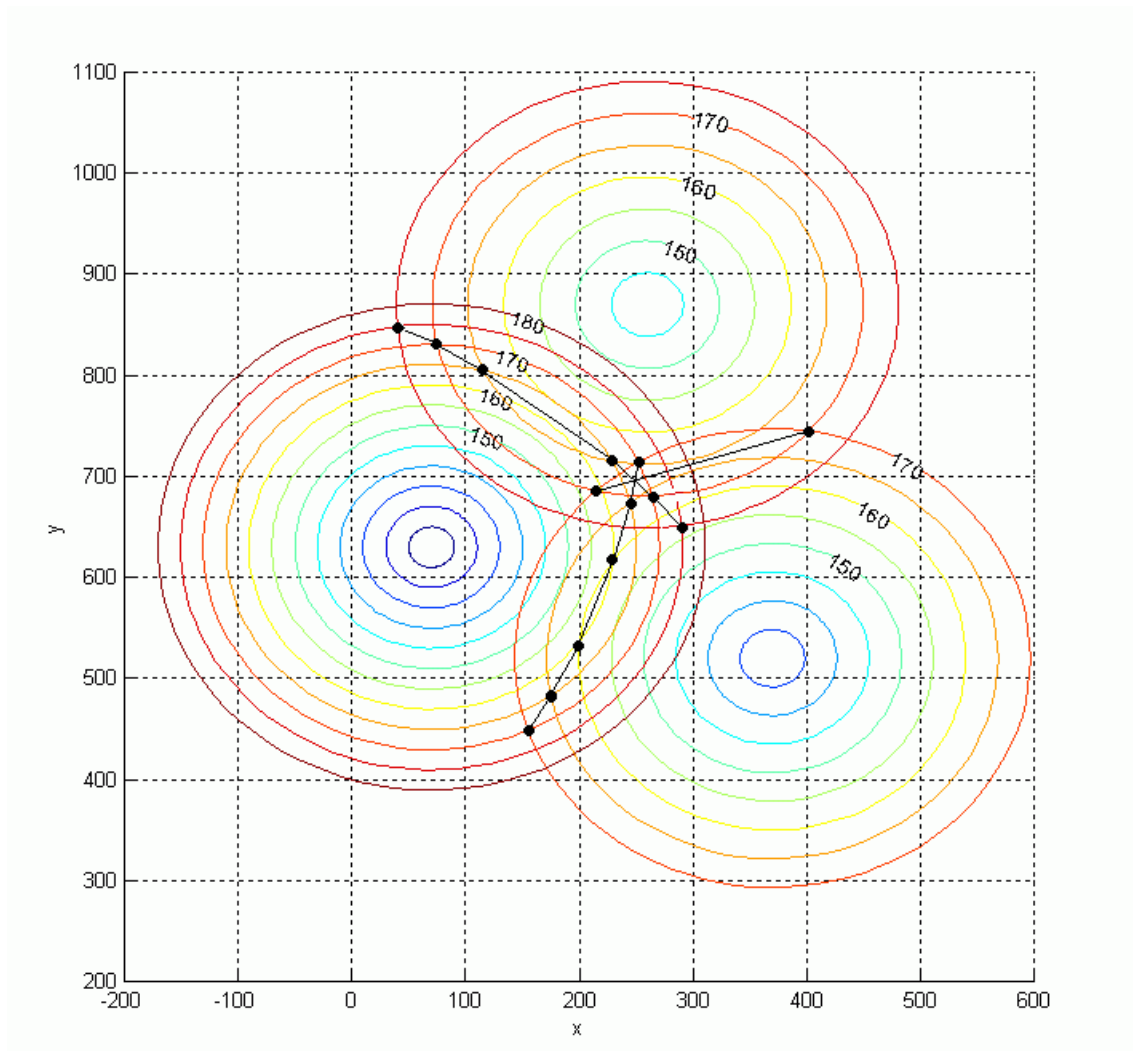


Figura 10: Intersección cónica con su solución gráfica leída en la intersección de las tres rosas Aleph.

Ahora, si se hace esta operación con un equipo de lectura angular a $1''$, de alidada telescópica con 20 aumentos y niveles con sensibilidad de 30 segundos de arco, entonces: para una distancia media de 1 km y visuales de 20° de inclinación, asumiendo que los errores de centrado alcanzan hasta 1 cm, para aplicar las fórmulas (21) a (24), $\mu = 1''$; $\Lambda = 20$; $\chi = 30$; $D = 1000$; $k1$ y $k2$; $\epsilon = 20^\circ$ Así: los errores accidentales máximos,

$$l'' \leq \mu\sqrt{2}/3 \dots\dots\dots = 0''.5$$

$$t'' \leq 10''(25 + \Lambda) / 25\Lambda\sqrt{2} \dots\dots\dots = 0''.6$$

$$i'' \leq \frac{\chi}{12} \dots\dots\dots = 2''.5$$

$$r'' \leq \arctan\left(\frac{d \tan \varepsilon}{d - k_1 + k_2}\right) - \varepsilon \dots\dots\dots = 0''.7$$

Y el máximo valor de E'' en segundos de arco, con la ecuación (20), se puede estimar en:

$$E'' \leq \sqrt{0,5^2 + 0,6^2 + 2,5^2 + 0,7^2} \dots\dots\dots = 2''.7$$

Supongamos el trabajo se desarrolla en la zona cafetera. Evaluemos el error de curvatura terrestre y refracción atmosférica, para una visual de 1 km, si el coeficiente de refracción en la zona de trabajo es 0,07 y el radio de la tierra, dependiendo del azimut en esta latitud, vale entre 6.330 y 6.370 Km.

Según la ecuación (17), aplicada para R = 6,35 x 10⁶ m, valor para un acimut de 45°,

$$v'' = (0,5 - k)d / R \text{ Sen } 1'' = (0,5 - 0,07)1000 / 6,35 \times 10^6 = 4,8481368 \times 10^{-6} = 14''.0$$

Ahora, el ajuste de las 3 medidas de la cota para la determinación de P con la precisión deseada, exige considerar los efectos de la curvatura terrestre y la refracción atmosférica cuando las distancias superan los 300 m. Como las distancias son menores, aquí no procede; más sin embargo, para ilustrarlo se calcularán estas aplicando la ecuación (18), dando a k y R los anteriores valores, y estimando las distancias horizontales AP, BP y CP, en de forma gruesa, así:

Desde A: d_A=191 m; α = 14°; h₁ - h₂= 0. Luego,

$$H_A = 191 \text{ tag } 14^\circ + 0,43 \times 191^2 / 6,35 \times 10^6 = 0,002 \text{ m}$$

Desde B: d_B=214 m; β = 10°; h₁ - h₂= 0. Luego,

$$H_B = 214 \text{ tag } 10^\circ + 0,43 \times 214^2 / 6,35 \times 10^6 = 0,003 \text{ m}$$

Desde C: $d_C=174$ m; $\gamma = 9^\circ$; $h_1 - h_2= 0$. Luego,

$$H_C = 174 \operatorname{tag} 9^\circ + 0,43 \times 174^2 / 6,35 \times 10^6 = 0,003 \text{ m}$$

11. OBSERVACIONES PRÁCTICAS:

Debe procurarse una conformación buena de "ALEPH", para que la solución interna o externa, sea diferenciada e identificable (ya se definió la conformación de 'ALEPH').

Los cenitales que se midan en cada estación deberán ser el promedio de igual número de observaciones en ambas posiciones del telescopio.

Las alturas absolutas A3, B3, C3 serán las de los instrumentos a la altura de su eje de basculamiento.

Puede ejecutarse tanteo, para lograr P3 analíticamente, con la suma de los ángulos a_1 y a_2 (Figura 7).

Son buenos tres cenitales "no próximos al horizonte"; un error angular, en la medición, desplaza las coordenadas P1 y P2 en mayor proporción que a P3, si las visuales no llegan a pendientes del 11% y con gran efecto multiplicador, si son próximas al horizonte.

12. APLICACIONES DE "ALEPH"

"ALEPH" resulta con ventaja para lanzar coordenadas a puntos inaccesibles (campanarios, etc.) facilitando la densificación de las redes de apoyo. También este método ofrece ventajas para el control de deformaciones sobre estructuras y las medidas a distancia de desplazamientos absolutos en masas inestables de suelo y roca.

Esta práctica podría conducir a la supresión de las redes catastrales planimétricas convencionales, las que serían sustituidas por puntos notorios de las ciudades.

El arrastre de coordenadas, entonces, se ejecutaría con la aplicación de los problemas de "HANSEN" o de "POTHENOT" que se estudian en la intersección inversa.

Se tendría así, un procedimiento topográfico de bajo costo y alta eficiencia, ya que minimizaría el número de operaciones escalonadas en la determinación de puntos para el amarre de urbanizaciones, etc.

"ALEPH" como herramienta para la intersección cónica de precisión, sirve para complementar la triangulación topográfica al generar una ecuación de condición adicional, dado que con este método, para determinar un punto notable, basta la medida de tres ángulos cenitales no horizontales a dicho punto, efectuadas una a una desde tres puntos conocidos no intervisibles.

13. BIBLIOGRAFIA

DAVIS, RAIMOND E. FOOTE, FRANCIS S. KELLY, JOE W. (MANTERO JOSE MARIA Traductor). "TRATADO DE TOPOGRAFIA". 3a. ed. Aguilar S.A., Madrid, 1971.

DOMINGUEZ GARCIA; TEJERO, FRANCISCO. "TOPOGRAFIA ABREVIADA" 4a. ed. Dossat S.A. Madrid, 1981.

I.G.A.C. "GEODESIA"
"RESULTADOS DEFINITIVOS DE PARTE DE LAS REDES GEODESICAS ESTABLECIDAS EN EL PAIS. Publicación especial N01. 4a. ed. Bogotá, 1975.

JORDAN, W. (MANTERO, JOCE MARIA Traductor). "TRATADO GENERAL DE TOPOGRAFIA" Tomos I y II. Gustavo Gili S.A. Barcelona, 1944.

TRAITE DE GEODESIE. –Dexieme Edition Entierement Refoundue. PIERRE TARDI & GEORGES LACLAVERE. Libraire Du Bureau Des Longitudes De L'ecole Polytechnique. Paris 1951.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE MANIZALES. BOLETIN DE VIAS, Vol. 10 N° 49. DUQUE ESCOBAR, GONZALO. "PROBLEMA ALEPH". UNA SOLUCION TOPOGRAFICA. Manizales, Jul-oct. 1982.

*Versión revisada y complementada por el autor, en marzo de 2006.