EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA ECUACION DEL TIPO KURAMOTO-SIVASHISKY BIDIMENSIONAL PERIODICA

JUVITSA MILENA CAMPOS PALOMINO.
Código:830182

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2009

EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA ECUACION DEL TIPO KURAMOTO-SIVASHISKY BIDIMENSIONAL PERIODICA

JUVITSA MILENA CAMPOS PALOMINO
CODIGO 830182

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Matemáticas

DIRIGIDO POR:
GUILLERMO RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ,2009

TÍTULO EN ESPAÑOL:
El problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo Kuramoto-Sivashisky bidimensional periódica.

TÍTULO EN INGLÉS:
The problem of Cauchy associated to an equation of type Kuramoto-Sivashisky two-dimensional periodic.

RESUMEN:
El propósito de este trabajo es abordar la buena colocación en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^2)$ para $s \geq 1$ del problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo Kuramoto-Sivashisky bidimensional periódica; que modela fenómenos físicos que ocurren en películas delgadas y plasma. Más precisamente en este trabajo, tratamos con el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\triangle H - \triangle^2 H - HH_x, t > 0, (x,y) \in \mathbb{T}^2 \\ H(0) = \phi(x) \in H^s(\mathbb{T}^2) \end{cases}, \qquad (a)$$

que es equivalente a la ecuación integral

$$H(t) = \mathbb{V}(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau \qquad (b)$$

donde, $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\mathbb{V}(t)\phi = \left[e^{t\left(-|k|^4+k_1^2+ik_1|k|^2\right)}\hat{\phi}\right]^\vee$ y la derivada en el tiempo es calculada en la topología de $H^{s-4}(\mathbb{T}^2)$.
Más exactamente, nos interesó estudiar ciertas propiedades de las soluciones reales de (a) como la buena colocación local y global en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^2)$ para $s \geq 1$.
A partir de estudiar la ecuación lineal asociada a (a) la cual permite establecer propiedades de regularización del semigrupo asociado a dicha ecuación, demostramos el buen planteamiento local de (a) en $H^s(\mathbb{T}^2)$ para $s \geq 1$. Finalmente, probamos que (a) es globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T}^2)$ para $s \geq 1$ a partir de las estimativas apriori $\|H\|_0^2 \leq \|\phi\|_0^2$ y $\|\nabla H\|_0^2 \leq \|\nabla\phi\|_0^2 e^{C_\epsilon(1+\|\phi\|_0^4)t}$.

ABSTRACT:
The purpose of this work is to establish the well-posedness in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{T}^2)$ for $s \geq 1$ for the Cauchy problem associated for the Kuramoto-Sivashisky two-dimensional equation in the periodical setting, that model

physical phenomenas that occur in plasma and thin films. More exactly in this work we treat with the Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\triangle H - \triangle^2 H - HH_x, t > 0, (x,y) \in \mathbb{T}^2 \\ H(0) = \phi(x) \in H^s(\mathbb{T}^2), \end{cases}, \qquad (a)$$

that is equivalent to the integral equation

$$H(t) = \mathbb{V}(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau \qquad (b)$$

where, $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\mathbb{V}(t)\phi = \left[e^{t\left(-|k|^4 + k_1^2 + ik_1|k|^2\right)}\hat{\phi}\right]^{\vee}$ and the derivate in the time is calculated in the Topology of $H^{s-4}(\mathbb{T}^2)$.
More exactly, our interest is to study certain properties of the real solutions of (a) such that the local and global well-posedness in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{T}^2)$ para $s \geq 1$.
We study the lineal equation associated to (a) which permits to establish properties of regularization of the semigroup too, we show the local well-posedness of (a) in $H^s(\mathbb{T}^2)$ para $s \geq 1$. Finally, we proved that (a) is global well-posedness in $H^s(\mathbb{T}^2)$ for $s \geq 1$ from the apriori estimate $\|H\|_0^2 \leq \|\phi\|_0^2$ y $\|\nabla H\|_0^2 \leq \|\nabla\phi\|_0^2 e^{C_\epsilon(1+\|\phi\|_0^4)t}$.

PALABRAS CLAVES:
Problema de Cauchy, Espacio de Sobolev bidimensional, Ecuación de Kuramoto-Sivashisky, Local y globalmente bien puesto.

KEY WORDS AND PHRASES:
Problem of Cauchy, Sobolev space two-dimensional, equation of Kuramoto-Sivashisky, Local and globally well-posedness.

FIRMA DEL DIRECTOR: ______________________

Juvitsa Milena Campos Palomino 1981

Índice general

INTRODUCCIÓN

En este trabajo trataremos el buen planteamiento del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\triangle H - \triangle^2 H - HH_x, t > 0, (x,y) \in \mathbb{T}^2 \\ H(0) = \phi(x) \in H^s(\mathbb{T}^2) \end{cases} \tag{1}$$

donde $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

La ecuación en (1) modela fenómenos físicos que ocurren en películas delgadas (ver [1], [2]), plasma (ver [3],[4]) y es del tipo de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky

$$H_t = -H_{xxx} - H_{xx} + H_x^2, \tag{2}$$

que modela la dinámica de la interfase que separa dos fases durante la transición de las mismas, (vea [7]) para una presentación mas detallada a este respecto. Ejemplos de este tipo de fenómenos, se presentan en los procesos de solidificación, (vea [8]), y de combustion (vea [9]), donde H representa la posición de la interfase sólido-liquido o material quemado y no quemado.
Observe que la ecuación en (1) puede verse como una generalización bidimensional de ecauciones del tipo de Kuramoto-Sivashinsky, Kuramoto-Velarde con dispersión (vea [12]) y KdV con disipación.
Hasta donde conocemos el problema del buen planteamiento del problema (1) en el caso periódico no hasido tratado, asi que nosotros asumimos este reto.
Este trabajo esta organizado de la siguiente manera: Un primer capítulo de notación y resultados preliminares, un segundo capítulo destinado al estudio del problema lineal asociado a (1), un tercer capítulo dedicado al estudio del buen planteamiento local de (1) y por último un capítulo destinado al estudio del buen planteamiento global de (1).

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dedicado a introducir la notación básica, como a enunciar algunos resultados estandar que serán útiles a lo largo de este trabajo, cuyas demostraciones omitidas. Sin embargo, indicaremos una referencia donde pueden encontrarse.

- $L^p(\mathbb{T}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$ es el espacio de funciones medibles en $\mathbb{T}^2$ tales que $\int_{\mathbb{T}^2} |f(x)|^p dx < \infty$ si $1 \leq p < \infty$ o $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{T}^2} |f(x)| < \infty$, si $p = \infty$. Notaremos con $\|\cdot\|_{L^p}$, la norma de dichos espacios. En el caso $p = 2$, $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L^2}$.
- $\mathfrak{B}(X,Y)$ es el espacio de los operadores lineales acotados de X en Y, donde X, Y so espacios de Banach
- $C([0,T],X)$ es el espacio de Banach de las funciones continuas de $[0,T]$ en el espacio de Banach X, dotado de la norma $\|u\|_{X,\infty} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X$
- $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$, donde $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$
- $\triangle = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ es el operador laplaciano y $\triangle^2$ es el operador bilaplaciano.

Definición 1. *La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ es la sucesión compleja $\mathfrak{F}(f) = \hat{f} = \left(\hat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}^2}$ definida para $k \in \mathbb{Z}^2$ por:*

$$\mathfrak{F}(f)(k) = \hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(x) e^{-ik\cdot x} dx,$$

donde $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$*,* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$ *y* $k \cdot x = k_1x_1 + k_2x_2$*. La serie*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}(k)e^{ik\cdot x}$$

se denomina la serie de Fourier de la función f*.*

Proposición 1.1. *Enumeraremos algunas propiedades de la transformada de fourier:*

1. $\wedge \in \mathfrak{B}(L^1(\mathbb{T}^2), l^\infty(\mathbb{Z}^2))$*. Además,*

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{(2\pi)^2}\|f\|_{L^1(\mathbb{T}^2)},$$

con $k \in \mathbb{Z}^2$*.*

2. $\hat{f}(k) \mapsto 0$ *cuando* $|k| \mapsto \infty$*, si* $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ *(Lema de Riemann-Lebesgue).*

Demostración: (Vea por ejemplo [6] para una demostración similar) □

En lo que sigue $\mathcal{P} = C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Este espacio dotado con la métrica,

$$d(\phi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\frac{\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}{1 + \|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty},$$

donde $\phi, \psi \in \mathcal{P}$, es un espacio metrico completo.
$\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$, es el espacio de las sucesiones que decrecen rápidamente, es decir,

$$\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2) \Leftrightarrow \|\alpha\|_{\infty,j} = \sup_{k\in\mathbb{Z}^2} |k^j\alpha_k| < \infty$$

para toda $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$ y $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ donde $k^j = k_1^{j_1}k_2^{j_2}$

Proposición 1.2. *Sea* $\phi \in \mathcal{P}$*. Entonces,* $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ *y*

$$\widehat{(\partial^j\phi)}(k) = (ik)^j\hat{\phi}(k),$$

donde $(ik)^j = (ik_1)^{j_1}(ik_2)^{j_2}$*. Además, vale la fórmula de inversión*

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \alpha_k e^{ik\cdot x}$$

para toda $\alpha = (\alpha_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$*.*

Demostración: (Vea por ejemplo [6] para una demostración similar) $\square$

Definición 2. *Sea* $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$. *La transformada inversa de Fourier de* α *es la función*

$$\check{\alpha}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \alpha_k e^{ik\cdot x},$$

donde $x \in \mathbb{T}^2$

Teorema 1.3. *La transformada de Fourier* $\mathfrak{F} : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ *es un isomorfismo y un homeomorfismo, es decir, es lineal, biyectiva y continua con inversa continua.*

Demostración: (Vea por ejemplo [6]) $\square$

Ahora hablaremos de la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{T}^2)$, las funciones bidimensionales, medibles y periodicas cuyo cuadrado es integrable.

Proposición 1.4. *(Identidad de Parseval)* $\wedge \in \mathfrak{B}(L^2(\mathbb{T}^2), l^2(\mathbb{Z}^2))$. *es un operador unitario, es decir es una isometría sobre.*

Demostración: (Vea por ejemplo [6]) $\square$

$\mathcal{P}'$ es el espacio de distribuciones bidimensionales periódicas, y sus elementos son los funcionales lineales continuos de $\mathcal{P}$. Para $f \in \mathcal{P}'$ se define su transformada de Fourier $\hat{f}$ por:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}(\langle f, e^{ik\cdot x}\rangle), \tag{1.1}$$

donde $k \in \mathbb{Z}^2$

Definición 3. *Una sucesión compleja* $(\alpha_k)^2_{k\in\mathbb{Z}}$ *es llamada de crecimiento lento si existe* $C > 0$ *y* $N \in \mathbb{N}^2$ *tal que*

$$|\alpha_k| \leq C|k^N|$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^2 - 0$. *Al espacio de tales sucesiones será notado por* $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^2)$.

Teorema 1.5. *La transformada de Fourier* $\mathfrak{F} = \wedge : \mathcal{P}' \mapsto \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^2)$ *es un isomorfismo y un homeomorfismo. Además*

$$\widehat{(\partial^j f)}(k) = (ik)^j \hat{f}(k)$$

para cada $k \in \mathbb{Z}^2$, $f \in \mathcal{P}'$ *y* $j \in \mathbb{N}^2$.

Definición 4. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^2)$ es el conjunto de todas las $f \in P'(\mathbb{T}^2)$ tal que*

$$\|f\|_s^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+|k|^2)^s|\hat{f}(k)|^2 < \infty$$

Proposición 1.6. *Enumeraremos algunas propiedades de los espacios de Sobolev:*

1. *$H^s(\mathbb{T}^2)$, $s \in \mathbb{R}$ es un espacio de Hilbert respecto al producto interno*

   $$\langle f, g\rangle_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+|k|^2)^s\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

2. *$H^s(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T}^2)$ para todo $r, s \in \mathbb{R}$, $s > r$, esto es, $H^s(\mathbb{T}^2)$ está contenido continua y densamente en $H^r(\mathbb{T}^2)$ y*

   $$\|f\|_r \leq \|f\|_s$$

   para todo $f \in H^s(\mathbb{T}^2)$.

3. *$(H^s(\mathbb{T}^2))'$, el dual topológico de $H^s(\mathbb{T}^2)$, es isométricamente isomorfo a$H^{-s}(\mathbb{T}^2)$ para todo $s \in \mathbb{R}$*

Demostración: (Vea por ejemplo [6]) □

Teorema 1.7. *(Lema de Sobolev). Si $s > 1$, entonces $H^s(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^2)$ y*

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_s$$

para todo $f \in H^s(\mathbb{T}^2)$

Demostración: (Vea por ejemplo [6]) □

Proposición 1.8. *Si $s > 1$, $H^s(\mathbb{T}^2)$ es una algebra de Banach. Además, éxiste una constante $C_s \geq 0$ dependiendo solo de s tal que*

$$\|fg\|_s \leq C_s\|f\|_s\|g\|_s$$

para todo $f, g \in H^s(\mathbb{T}^2)$

Demostración: (Vea por ejemplo [6]) □

Lema 1.9. *Sean a, $b \in [0, +\infty)$ y $\lambda \geq 0$. Entonces existen constantes positivas c_λ y C_λ dependiendo solo de λ tal que*

$$c_\lambda(a^\lambda + b^\lambda) \leq (a+b)^\lambda \leq C_\lambda(a^\lambda + b^\lambda) \tag{1.2}$$

Demostración. Si $a = 0$ no hay nada que probar. Supongamos que $a > 0$, entonces, 1.2 es equivalente a

$$c_\lambda\Big[1 + \Big(\frac{b}{a}\Big)^\lambda\Big] \leq \Big(1 + \frac{b}{a}\Big)^\lambda \leq C_\lambda\Big[1 + \Big(\frac{b}{a}\Big)^\lambda\Big].$$

Así que es suficiente probar que existen constantes c_λ y C_λ tal que

$$c_\lambda(1 + r^\lambda) \leq (1+r)^\lambda \leq C_\lambda(1 + r^\lambda)$$

para cualquier $r \in [0, \infty)$, pero esto se sigue gracias a que la función

$$F(r) = \frac{(1+r)^\lambda}{1 + r^\lambda}$$

es acotada y $\frac{1}{F(r)}$ acotada. □

Lema 1.10. *(Desigualdad de Gronwall). Sean $g \in C([a,b];\mathbb{R})$ tales que*

$$0 \leq g(x) \leq \alpha + \beta \int_a^x g(s)ds$$

Entonces,

$$g(t) \leq \alpha e^{\beta t}; \forall t \in [a,b]$$

Demostración: (Vea por ejemplo [10]) □

Lema 1.11. *(Desigualdad de Young). Sean $a, b \geq 0$ y $1 < p < \infty$. Entonces,*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

donde, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Demostración: (Vea por ejemplo [10]) □

Lema 1.12. *(Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg). Sea u una función medible en $\mathbb{T}$ con media cero. Entonces, para $p, q, r > 1$ y $j, m \geq 0$, existe $C > 0$ tal que*

$$\|D^j u\|^p_{L(\mathbb{T}^d)} \leq C\|D^m u\|^\theta_{L^r(\mathbb{T}^d)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{T}^d)}$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\right) + \frac{(1-\theta)}{q}$ y d es la dimensión.

Demostración: (Vea por ejemplo [11]) □

Lema 1.13. *Sean $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\beta + \gamma > 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ y g una función no negativa tal que $t^{\gamma-1}g(t)$ es integrable localmente sobre $0 \leq t \leq T$, y suponga que*

$$g(t) = a + b\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\tau^{\gamma-1}g(\tau)d\tau$$

en $(0, T)$. Entonces,

$$g(t) \leq aE_{\beta,\gamma}\left((b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\nu}}t\right)$$

donde $\nu = \beta + \gamma - 1 > 0$, $E_{\beta,\gamma}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{m\nu}$ con $c_0 = 1$, y $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(m\nu+\gamma)}{\Gamma(m\nu+\gamma+\beta)}$ para $m \geq 0$.

Demostración: (Vea por ejemplo [10]) □

Capítulo 2

El problema Lineal

El objetivo de este capítulo es establecer ciertas propiedades de la solución de la parte lineal de la ecuación del tipo Kuramoto-Sivanshinky bidimensional periódica. Con este fin, consideremos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} H \in C\left([0,\infty); H^s(\mathbb{T}^2)\right) \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\triangle H + \triangle^2 H = 0, t > 0, (x,y) \in \mathbb{T}^2 \\ H(0) = \phi \in H^s(\mathbb{T}^2) \end{cases} \tag{2.1}$$

cuya única solución es de la forma:

$$H(t) = \left[e^{t\left(-|k|^4 + k_1^2 + ik_1|k|^2\right)}\hat{\phi}\right]^{\vee} = \mathbb{V}(t)\phi \tag{2.2}$$

donde $k = (k_1, k_2)$. Esta observación es consecuencia de:

Teorema 2.1. *Sea $H(t)$ como en (2.2). Entonces,*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{H(t+h) - H(t)}{h} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\triangle + \triangle^2\right)H(t)\right\|_{s-4}^2 = 0 \tag{2.3}$$

uniformemente con respecto a $t \geq 0$.

Demostración: Sea $t \geq 0$ y $h > 0$. Entonces,

$$\left\| \frac{H(t+h)-H(t)}{h} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\triangle + \triangle^2 \right) H(t) \right\|_{s-4}^2 =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (1+|k|^2)^{s-4} e^{2t(-|k|^4+k_1^2)} \times$$

$$\times \left| \frac{e^{-h(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)}-1}{h} + (|k|^4 - k_1^2 - ik_1|k|^2) \right|^2 |\hat{\phi}(k)|^2 \tag{2.4}$$

Como,

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{e^{-h(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)}-1}{h} + (|k|^4 - k_1^2 - ik_1|k|^2) \right| = 0$$

y

$$\left| \frac{e^{-h(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)}-1}{h} \right| \leq ||k|^4 - k_1^2 - ik_1|k|^2|, \forall k \in \mathbb{Z}^2$$

que es consecuencia de la desigualdad del valor medio, tenemos que

$$(1+|k|^2)^{s-4} e^{2t(-|k|^4+k_1^2)} \left| \frac{e^{-h(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)}-1}{h} + (|k|^4 - k_1^2 - ik_1|k|^2) \right|^2 |\hat{\phi}(k)|^2$$

$$\leq 4(1+|k|^2)^{s-4} e^{2t(-|k|^4+k_1^2)} \left| |k|^4 - k_1^2 - ik_1|k|^2 \right|^2 |\hat{\phi}(k)|^2$$

$$= 4(1+|k|^2)^{s-4} \left| |k|^4 - k_1^2 - ik_1|k|^2 \right|^2 |\hat{\phi}(k)|^2$$

$$\leq 4(1+|k|^2)^{s} |\hat{\phi}(k)|^2$$

Por lo tanto, el criterio de M-Weierstrass implica el resultado por la derecha. Para el calculo del límite por la izquierda se procede de la siguiente forma: Elegimos $t > 0$ (fijo) y $h \in (0, \frac{t}{2})$, así que la norma en (2.3) se transforma en:

$$\left\| \frac{H(t-h)-H(t)}{h} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial^2} + \frac{\partial}{\partial x}\triangle + \triangle^2 \right) H(t) \right\|_{s-4}^2 =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (1+|k|^2)^{s-4} e^{t(-|k|^4+k_1^2)\frac{t}{2}} | \frac{e^{-(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)\frac{t}{2}} - e^{-(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)(\frac{t}{2}-h)}}{h}$$

$$+ (|k|^4 - k_1^2 - ik_1|k|^2) e^{-(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)\frac{t}{2}} |^2 |\hat{\phi}(k)|^2$$

Razonando de igual forma como para el límite por la derecha, demostramos se demuestra lo requerido. $\square$

Teorema 2.2. *La aplicación $t \in [0,\infty) \mapsto \mathbb{V}(t) \in \mathfrak{B}(H^r(\mathbb{T}^2))$ es un semi-grupo de contracción para $r \in \mathbb{R}$. Además,*

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|\mathbb{V}(t)\phi_1 - \mathbb{V}(t)\phi_2\|_r \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_r \tag{2.5}$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

Demostración: Es claro que $\mathbb{V}(0) = \mathbb{I}$ y que

$$\|\mathbb{V}(t)\phi\|_r^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (1+|k|^2)^r e^{-2(|k|^4-k_1^2)} |\hat{\phi}(k)|^2| \leq \|\phi\|_r^2$$

para todo $t \in [0,\infty)$. Además,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(t+t')\phi &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} e^{-(t+t')(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)} \hat{\phi}(k) e^{ik(\cdot)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} e^{-t(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)} e^{-t'(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)} \hat{\phi}(k) e^{ik(\cdot)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} e^{-t(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)} \left(\mathbb{V}(t')\phi\right)^{\wedge} e^{ik(\cdot)} \\
&= \mathbb{V}(t)\mathbb{V}(t')\phi
\end{aligned}$$

Resta probar que $\lim_{h\to 0} \|\mathbb{V}(t+h)\phi - \mathbb{V}(t)\phi\|_r^2 = 0$, para cada $\phi \in H^r(\mathbb{T}^2)$. Con esto en mente debemos considerar los límites laterales y proceder de manera análoga como en la prueba del teorema 2.1. $\square$

Teorema 2.3 (Teorema de Regularización)**.** *Sea $\phi \in H^r(\mathbb{T}^2), r \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0, t > 0$. Entonces existe una K_λ, que depende solo de λ, tal que:*

$$\|\mathbb{V}(t)\phi\|_{s+\lambda} \leq K_\lambda \left[1 + \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{\frac{\lambda}{4}}\right] \|\phi\|_s \tag{2.6}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{V}(t)\phi\|_{s+\lambda}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+|k|^2)^{s+\lambda}\left|e^{-t(|k|^4-k_1^2-ik_1|k|^2)}\hat{\phi}(k)\right|^2\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+|k|^2)^{s+\lambda}e^{-2t(|k|^4-k_1^2)}|\hat{\phi}(k)|^2\\
&\le \left\{\sup_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+|k|^2)^{\lambda}e^{-2t(|k|^4-k_1^2)}\right\}\|\phi\|_s^2\\
&\le C_1\left\{\sup_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+|k|^{2\lambda})e^{-2t(|k|^4-k_1^2)}\right\}\|\phi\|_s^2
\end{aligned}$$

Donde C_1 depende solo de λ; hallemos el *sup* de la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
&\sup_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+|k|^{2\lambda})e^{-2t(|k|^4-k_1^2)} =\\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}^2} e^{-2t(|k|^4-k_1^2)} + (k_1^2+k_2^2)^{\lambda}e^{-2t(|k|^4-k_1^2)}\\
&\le C_2 \sup_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}\\ k_2\in\mathbb{Z}}}\left\{e^{-2t(k_1^4-k_1^2)}e^{-2tk_2^4} + k_1^{2\lambda}e^{-2t(k_1^4-k_1^2)}e^{-2tk_2^4} + k_2^{2\lambda}e^{-2t(k_1^4-k_1^2)}e^{-2tk_2^4}\right\}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+|k|^{2\lambda})e^{-2t(|k|^4-k_1^2)} \le C_2\left\{1+\sup_{k_1\in\mathbb{Z}}k_1^{2\lambda}e^{-2t(k_1^4-k_1^2)} + \sup_{k_2\in\mathbb{Z}}k_2^{2\lambda}e^{-2tk_2^4}\right\} \tag{2.7}$$

Hallemos el *sup* de la desigualdad (2.7). Comenzemos por hallar el $\sup_{k_2\in\mathbb{Z}} k_2^{2\lambda}e^{-2tk_2^4}$; consideremos la función $f(r) = r^{2\lambda}e^{-tr^4}$ para $r > 0$. Entonces $f'(r) = (2\lambda r^{2\lambda-1} - 8r^{3+2\lambda})e^{-tr^4}$, luego $f'(r) = 0$; implica que $r = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4t}}$ y en este valor de r, $f(r)$ alcanza el máximo

$$f\left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{4t}}\right) = \left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{4t}}\right)^{2\lambda} e^{-t\left(\frac{\lambda}{4t}\right)} \le \left(\frac{\lambda}{4t}\right)^{\frac{\lambda}{2}}$$

Por último hallemos $\sup_{k_1\in\mathbb{Z}} k_1^{2\lambda}e^{-2t(k_1^4-k_1^2)}$, observemos que:

$$\sup_{|k_1|\ge 2} k_1^{2\lambda}e^{-2t(k_1^4-k_1^2)} \le \sup_{|k_1|\ge 2} k_1^{2\lambda}e^{-tk_1^4} \tag{2.8}$$

Para (2.8)razonamos como en (2.7) para obtener lo que se quiere. $\square$

Teorema 2.4. *Sea* $\psi \in L^1(\mathbb{T}^2)$ $s > 0$. *Entonces:*

$$\|\mathbb{V}(t)\|_s \leq C_s \left[1 + \frac{M(t)}{t^{\frac{2s+1}{8}}}\right] \|\psi\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}, \tag{2.9}$$

para todo $t > 0$, *donde* C_s *depende sólo de* s *y* $M(t)$ *es una función continua y creciente con* $M(0) = 3$.

Demostración: De

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{V}(t)\psi\|_s^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (1+|k|^2)^s \left| e^{-t(|k|^4 - k_1^2 - ik_1|k|^2)} \hat{\psi}(k) \right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (1+|k|^2)^s e^{-2t(|k|^4 - k_1^2)} |\hat{\psi}(k)|^2 \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}^2} \left\{ |\hat{\psi}(k)|^2 \right\} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (1+|k|^2)^s e^{-2t(|k|^4 - k_1^2)} \\
&\leq C_s^{(1)} \|\psi\|^2_{L^1(\mathbb{T}^2)} \left(1 + \sum_{|k|>1} (k_1^{2s} + k_2^{2s}) e^{-2t(k_1^2 - k_2^2)} e^{-2tk_2^4} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq C_s^{(1)} \|\psi\|^2_{L^1(\mathbb{T}^2)} \left(1 + \sum_{|k|>1} k_1^{2s} e^{-2t(k_1^2 - k_2^2)} e^{-2tk_2^4} + \sum_{|k|>1} k_2^{2s} e^{-2t(k_1^2 - k_2^2)} e^{-2tk_2^4} \right)$$

tenemos que

$$\|\mathbb{V}(t)\psi\|_s^2 \leq C_s^{(2)} \|\psi\|^2_{L^1(\mathbb{T}^2)} C(t),$$

donde,

$$\begin{aligned}
C(t) = 1 &+ \sum_{|k_1|\geq 1} k_1^{2s} e^{-2t(k_1^4 - k_1^2)} \sum_{|k_2|\geq 1} e^{-2tk_2^4} + \sum_{|k_2|\geq 1} k_2^{2s} e^{-2tk_2^4} \cdot \\
\cdot \sum_{|k_1|\geq 1} e^{-2t(k_1^4 - k_1^2)} &+ \sum_{|k_2|\geq 1} k_2^{2s} e^{-2tk_2^4} + \sum_{|k_1|\geq 1} k_1^{2s} e^{-2t(k_1^4 - k_2^2)}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Analicemos cada sumando de (2.10). Para ello, comenzaremos con la primera serie en (2.10) para obtener,

$$\sum_{|k_1|\geq 1} k_1^{2s} e^{-2t(k_1^4-k_1^2)} = 2\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{2s} e^{-2t(k_1^4-k_1^2)} = 2\left(1+\sum_{k_1=2}^{\infty} k_1^{2s} e^{-2t(k_1^4-k_1^2)}\right)$$
$$\leq 2\left(1+\sum_{k_1=2}^{\infty} k_1^{2s} e^{-6tk_1^2}\right) \leq 2\left(1+\int_2^{\infty} x^{2s} e^{-6tx^2}dx + \sup_{x\in\mathbb{R}} x^{2s}e^{-6tx^2}\right). \tag{2.11}$$

Observe que, $\sup_{x\in\mathbb{R}}(x^{2s}e^{-6tx^2}) = \left(\frac{s}{6t}\right)^s e^{-s}$ y que la integral en (2.11) es acotada por

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} x^{2s}e^{-6tx^2}dx &\leq \int_0^{\infty} x^{2s}e^{-6tx^2}dx = \frac{1}{2\,(6t)^{s+\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} y^{s-\frac{1}{2}}e^{-y}dy \\ &= \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{2\,(6)^{s+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{t^{\frac{2s+1}{2}}}\end{aligned} \tag{2.12}$$

Por lo tanto , la serie en 2.11 es acotada por,

$$\sum_{|k_1|\geq 1} k_1^{2s} e^{-2t(k_1^4-k_1^2)} \leq 1+\left(\frac{s}{6t}\right)^s e^{-s} + \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{2\,(6)^{s+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{t^{\frac{2s+1}{2}}} \tag{2.13}$$

Para las otras sumas en (2.10) hacemos un análisis similar, para obtener:

$$\sum_{|k_2|\geq 1} e^{-2tk_2^4} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{2t}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \tag{2.14}$$

$$\sum_{|k_2|\geq 1} k_2^{2s}e^{-2tk_2^4} \leq \frac{\Gamma\left(\frac{2s+1}{4}\right)}{2\,(2t)^{\frac{2s+1}{4}}} + 2\left(\frac{s}{4t}\right)^{\frac{s}{2}} \tag{2.15}$$

$$\sum_{|k_1|\geq 1} e^{-2t(k_1^4-k_1^2)} \leq 2+\frac{\sqrt{\pi}}{(6t)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.16}$$

(2.13),(2.14),(2.15),(2.16),implican que (2.10) sea acotado por,

$$\|\mathbb{V}(t)\psi\|_s^2 \leq C_s\|\psi\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}^2\cdot$$
$$\left(1+\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{t^{\frac{4s+3}{4}}}+\frac{1}{t^{\frac{4s+1}{4}}}+\frac{1}{t^{\frac{2s+1}{4}}}+\frac{1}{t^{\frac{s}{2}}}+\frac{1}{t^{\frac{2s+3}{4}}}\frac{1}{t^{\frac{s+1}{2}}}+\frac{1}{t^{\frac{2s+1}{2}}}+\frac{1}{t^{s}}\right)$$

$$\leq C_s\|\psi\|^2_{L^1(\mathbb{T}^2)}\cdot$$
$$\left(1+\frac{1}{t^{\frac{1}{8}}}+\frac{1}{t^{\frac{4s+3}{8}}}+\frac{1}{t^{\frac{4s+1}{8}}}+\frac{1}{t^{\frac{2s+1}{8}}}+\frac{1}{t^{\frac{s}{4}}}+\frac{1}{t^{\frac{2s+3}{8}}}\frac{1}{t^{\frac{s+1}{4}}}+\frac{1}{t^{\frac{2s+1}{4}}}+\frac{1}{t^{\frac{s}{2}}}\right) \tag{2.17}$$

Realizando algunas operaciones en (2.17) nos queda:

$$\|\mathbb{V}(t)\psi\|^2_s \leq C_s\|\psi\|^2_{L^1(\mathbb{T}^2)}\left(1+\frac{3+2t^{\frac{2}{8}}+t^{\frac{4s+5}{8}}+t^{\frac{2s+2}{8}}+t^{\frac{4s+2}{8}}+t^{\frac{2s}{8}}}{t^{\frac{4s+2}{8}}}\right) \tag{2.18}$$

Tomando raíz cuadrada en (2.18), se demuestra el teorema. Cuando $s=1$ esta proposición nos queda:

$$\|\mathbb{V}(t)\psi\|^2_{s=1} \leq C_{s=1}\left[1+\frac{M(t)}{t^{\frac{3}{8}}}\right]\|\psi\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \tag{2.19}$$

□

Capítulo 3

El Problema Local

El objetivo de este capítulo es establecer el buen planteamiento local para el problema de valor inicial (1), el cual es equivalemte a la ecuación integral

$$H(t) = \mathbb{V}(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau \tag{3.1}$$

donde $\mathbb{V}(t)$ es como en (2.2), lo cual es consecuencia de:

Teorema 3.1. *Sea $H \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2))$ con $H(0) = \phi$ y $s \geq 1$. Entonces, H es la solucion de la ecuación integral (3.1) en $H^s(\mathbb{T}^2)$ si y solamente si, H es la solución del problema (1) donde la derivada en el tiempo es tomada en la topología de $H^{s-4}(\mathbb{T}^2)$*

Demostración: Supongamos que H es solución de la ecuación integral (3.1); entonces, H satisface la condición inicial de (1). Denotemos por $w(t)$ la parte integral de (3.1). Así, (3.1) se puede escribir de la forma:

$$H(t) = \mathbb{V}(t)\phi - \frac{1}{2}w(t)$$

El Teorema 2.1 implica que;

$$\partial_t e^{-t\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\triangle+\triangle^2\right)}\phi = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\triangle+\triangle^2\right)e^{-t\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\triangle+\triangle^2\right)}\phi, \tag{3.2}$$

donde, la derivada en (3.2) se toma en la topología de $H^{s-4}(\mathbb{T}^2)$; ahora, calculemos $\partial_t w$. Sea $h > 0$ y $0 \leq t \leq T$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{w(t+h)-w(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t} \mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau + \frac{1}{h}\int_0^{t} \mathbb{V}(t+h-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t} \mathbb{V}(t+h-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t} [\mathbb{V}(t+h-\tau)-\mathbb{V}(t-\tau)]\partial_x H^2(\tau)d\tau \\
&\quad +\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau \\
= \frac{\mathbb{V}(h)-\mathbb{I}}{h}\int_0^{t} \mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau &+ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Haciendo tender $h \mapsto 0^+$ se sigue que:

$$\partial_t^+ w(t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\triangle + \triangle^2\right) w(t) - \partial_x H^2(t) \tag{3.3}$$

en $H^{s-4}(\mathbb{T}^2)$. La igualdad (3.3) es consecuencia del Teorema 2.1 y del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue. Para la derivada por la Izquierda de $w(t)$, elegimos $0 < t \leq T$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{w(t-h)-w(t)}{-h} &= \frac{1}{-h}\int_0^{t-h} \mathbb{V}(t-h-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau \\
&\quad -\frac{1}{-h}\int_0^{t} \mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau + \frac{1}{-h}\int_0^{t-h} \mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau \\
&\quad -\frac{1}{-h}\int_0^{t-h} \mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t-h} [\mathbb{V}(t-\tau)-\mathbb{V}(t-h-\tau)]\partial_x H^2(\tau)d\tau \\
&\quad +\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} \mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable, $\eta = h + \tau$ y $\theta = t - \tau$ respectivamente

$$\begin{aligned}\frac{w(t-h)-w(t)}{-h} &= \frac{1}{h}\int_h^t [\mathbb{V}(t-\eta+h)-\mathbb{V}(t-\eta)]\partial_x H^2(t-\eta)d\eta \\ &- \frac{1}{h}\int_h^0 \mathbb{V}(\theta)\partial_x H^2(t-\theta)d\theta \\ = \frac{\mathbb{V}(h)-\mathbb{I}}{h}\int_h^t \mathbb{V}(t-\eta)\partial_x H^2(t-\eta)d\eta &+ \frac{1}{h}\int_0^h \mathbb{V}(\theta)\partial_x H^2(t-\theta)d\theta\end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando $h \mapsto 0^+$, concluimos que:

$$\partial_t^+ w(t) = \partial_t^- w(t) \tag{3.4}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\partial_t H(t) &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\triangle + \triangle^2\right)\mathbb{V}(t)\phi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\triangle + \triangle^2\right)w(t) \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial_x H^2(t) \\ &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\triangle + \triangle^2\right)\left(\mathbb{V}(t)\phi - \frac{1}{2}w(t)\right) - \frac{1}{2}\partial_x H^2(t) \\ &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\triangle + \triangle^2\right)H(t) - \frac{1}{2}\partial_x H^2(t)\end{aligned}$$

Reciprocamente, sea H la solución del problema de valor inicial (1), es decir

$$H_\tau + \partial_x\triangle H + \triangle^2 H + \partial_x^2 H = -\frac{1}{2}\partial_x H^2(\tau) \tag{3.5}$$

en $H^{s-4}(\mathbb{T}^2)$. Aplicando $\mathbb{V}(t-\tau)$ a (3.5), $0 \leq t-\tau \leq T$, tenemos,

$$\mathbb{V}(t-\tau)[H_\tau + \partial_x\triangle H + \triangle^2 H + \partial_x^2 H] = -\frac{1}{2}\mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau) \tag{3.6}$$

Como,

$$\partial_t\mathbb{V}(t-\tau)H(\tau) = \mathbb{V}(t-\tau)[H_\tau + \partial_x\triangle H + \triangle^2 H + \partial_x^2 H], \tag{3.7}$$

en $H^{s-4}(\mathbb{T}^2)$, (3.6) y (3.7) implican que,

$$\partial_t\mathbb{V}(t-\tau)H(\tau) = -\frac{1}{2}\mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau) \tag{3.8}$$

Integrando de 0 a t en (3.8) obtenemos (3.1). $\square$

Teorema 3.2. *Sea $\phi \in H^s(\mathbb{T}^2)$ para $s \geq 1$. Entonces, existe $T_s = T(\|\phi\|_s) > 0$ y una única solución $H \in C([0, T_s]; H^s(\mathbb{T}^2))$ de la ecuación integral (3.1)*

Demostración. Usaremos el teorema del punto fijo de Banach en un subespacio adecuado $C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2))$ para demostrar la existencia de la solución de la ecuación integral (3.1). En efecto, consideremos el espacio métrico completo $(\mathbb{X}(T), d_{s,T})$ definido por:

$$\mathbb{X}(T) = \left\{ H \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2)) : \|H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\|_s \leq M \right\}$$

donde $M > 0$, dotado de la métrica:

$$d_{s,T}(H,G) = \sup_{t \in [0,T]} \|H(t) - G(t)\|_s = \|H - G\|_{s,\infty},$$

con $H, G \in \mathbb{X}(T)$. En dicho espacio definimos la aplicación

$$\mathbb{F}H(t) = \mathbb{V}(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\left(H^2(\tau)\right)_x d\tau \tag{3.9}$$

para un $T > 0$ adecuado y probemos que es una contracción. Con esto en mente, veamos primero que si $H \in \mathbb{X}(T)$, entonces $\mathbb{F}H(t) \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2))$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{F}H(t+h) - \mathbb{F}H(t)\|_s \leq{}& \|\mathbb{V}(t+h)\phi - \mathbb{V}(t)\phi\|_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_t^{t+h} \|\mathbb{V}(t+h-\tau)\left(H^2(\tau)\right)_x\|_s d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\left\| \mathbb{V}(h) - \mathbb{I}\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\left(H^2(\tau)\right)_x d\tau \right\|_s \end{aligned} \tag{3.10}$$

El primer y tercer término de la derecha de la desigualdad (3.10) tienden a cero cuando $h \mapsto 0$; puesto que $\mathbb{V}(t)$ es un semigrupo fuertemente continuo. Que el segundo término de la derecha de la desigualdad (3.10) tienda a cero cuando $h \mapsto 0$ es consecuencia de los teoremas 2.3 y 2.4 para $s > 1$ y$s = 1$ respectivamente.

Ahora, probemos que para $s \geq 1$, existe $T_1 > 0$ tal que $\mathbb{F}H \in \mathbb{X}(T_1)$, siempre que $H \in \mathbb{X}(T_1)$. Es decir, veamos que

$$\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\|_s \leq M. \tag{3.11}$$

Con esto en mente trabajaremos por separado el caso $s > 1$ y el caso $s = 1$. Comenzaremos primero con el caso $s > 1$,

$$\begin{aligned}\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\|_s &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \|\mathbb{V}(t-\tau)\left(H^2(\tau)\right)_x\|_s d\tau \\ &\leq \frac{K_1}{2}\|H\|_{s,\infty}^2 \int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{(t-\tau)}\right)^{\frac{1}{4}}\right] d\tau,\end{aligned}$$

que es consecuencia del teorema 2.3 con $\lambda = 1$. Por lo tanto,

$$\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\|_s \leq KF(t)(M + \|\phi\|_s)^2$$

donde $F(t) = t^{\frac{3}{4}}$ y $K > 0$ es una constante. Eligiendo $0 < T_1 \leq \frac{M^{\frac{4}{3}}}{K^{\frac{4}{3}}(M+\|\phi\|_s)^{\frac{8}{3}}}$ tenemos que

$$\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\|_s \leq M,$$

para $t \in [0, T_1]$. El caso $s = 1$ es similar salvo que en vez de usar el teorema 2.3 usamos el teorema 2.4,

$$\begin{aligned}\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\|_1 &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \|\mathbb{V}(t-\tau)\left(H^2(\tau)\right)_x\|_1 d\tau \\ &\leq K\|H\|_{1,\infty}^2 \int_0^t \left[1 + \frac{3}{(t-\tau)^{\frac{3}{8}}}\right] d\tau \\ &\leq KP(t)(M + \|\phi\|_1)^2,\end{aligned}$$

donde $P(t) = t^{\frac{5}{8}}$ y $K > 0$ es una constante. Eligiendo $0 < T_1 \leq \frac{M^{\frac{8}{5}}}{K^{\frac{8}{5}}(M+\|\phi\|_1)^{\frac{16}{5}}}$ tenemos que

$$\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\|_1 \leq M,$$

para $t \in [0, T_1]$.
Resta demostrar que la aplicación $\mathbb{F} : \mathbb{X}(T_2) \mapsto \mathbb{X}(T_2)$ es una contracción para algún $T_2 > 0$. Con esto en mente, procederemos como antes separando el caso $s > 1$ y el caso $s = 1$. En el caso $s > 1$ utilizamos el teorema 2.3 con $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned}\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{F}G(t)\|_s &\leq \int_0^t \|\mathbb{V}(t-\tau)\left(\left(H^2(\tau)\right)_x - \left(G^2(\tau)\right)_x\right)\|_s d\tau \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^t K_1\left[1 + \left(\frac{1}{(t-\tau)}\right)^{\frac{1}{4}}\right] \|\left(H^2(\tau)\right)_x - \left(G^2(\tau)\right)_x\|_{s-1} d\tau,\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $H(t), G(t) \in \mathbb{X}(T)$. La desigualdad

$$\begin{aligned}
\| \left(H^2(\tau)\right)_x - \left(G^2(\tau)\right)_x \|_{s-1} &= \| \left(H^2(\tau) - G^2(\tau)\right)_x \|_{s-1} \\
&\leq K_s \|H^2(\tau) - G^2(\tau)\|_s \\
&\leq K_s \|H(\tau) - G(\tau)\|_s \|H(\tau) + G(\tau)\|_s \\
&\leq K_s \|H(\tau) - G(\tau)\|_s \left(\|H(\tau)\|_s + \|G(\tau)\|_s\right) \\
&\leq K_s^{'}(M + \|\phi\|_s)\|H - G\|_{s,\infty},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

que es consecuencia de $\|H\|_s = \|H(t) - \mathbb{V}(t)\phi + \mathbb{V}(t)\phi\|_s \leq (M + \|\phi\|_s)$ y de ser el operador ∂_x acotado de H^s en H^{s-1} implica que (3.12) se tranforme en

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{F}G(t)\|_s &\leq K(M + \|\phi\|_s)\|H - G\|_{s,\infty} \int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{(t-\tau)}\right)^{\frac{1}{4}}\right] d\tau \\
&\leq K(M + \|\phi\|_s) F(t) \|H - G\|_{s,\infty}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $F(t) = t^{\frac{3}{4}}$. Eligiendo $0 < T_2 < \frac{1}{K^{\frac{4}{3}}(M+\|\phi\|_s)^{\frac{4}{3}}}$ tenemos que $\mathbb{F}$ es una contracción. Para el caso $s = 1$ procedemos de forma similar que en caso $s > 1$ salvo que en este caso en vez de emplear el teorema 2.3, empleamos el teorema 2.4. Luego,

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{F}G(t)\|_1 &\leq \int_0^t \|\mathbb{V}(t-\tau)\left(\left(H^2(\tau)\right)_x - \left(G^2(\tau)\right)_x\right)\|_1 d\tau \\
&\leq K \int_0^t \left[1 + \frac{3}{(t-\tau)^{\frac{3}{8}}}\right] \|HH_x(\tau) - GG_x(\tau)\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} d\tau \\
&\leq K \int_0^t \left[1 + \frac{3}{(t-\tau)^{\frac{3}{8}}}\right] \|H - G\|_1 (\|H\|_1 + \|G\|_1) d\tau \\
&\leq K \int_0^t \left[1 + \frac{3}{(t-\tau)^{\frac{3}{8}}}\right] \|H - G\|_1 (M + \|\phi\|_1) d\tau \\
&\leq K P(t) \|H - G\|_{1,\infty} (M + \|\phi\|_1)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde $P(t) = t^{\frac{5}{8}}$. Observe que la tercera desigualdad en (3.15) es consecuencia de

$$\begin{aligned}\|HH_x - GG_x\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} &\leq \|(H-G)H_x\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} + \|G(H-G)_x\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\\ &\leq \|(H-G)\|_0\|H_x\|_0 + \|G\|_0\|(H-G)_x\|_0\\ &\leq \|H-G\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}(\|H\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} + \|G\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}).\end{aligned}$$

Eligiendo $0 < T_2 < \frac{1}{K^{\frac{8}{5}}(M+\|\phi\|_1)^{\frac{8}{5}}}$ en (3.15) tenemos que que $\mathbb{F}$ es una contracción. Haciendo $T_s \leq \{T_1, T_2\}$, el Teorema del punto fijo de Banach garantiza que existe una única $H(t) \in \mathbb{X}(T_s)$ tal que

$$\mathbb{F}H(t) = H(t).$$

Resta mostrar la unicidad de la solución en el espacio $C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2))$, para ello procederemos como antes, separando el caso $s > 1$ y el caso $s = 1$. En el caso $s > 1$ utilizamos el teorema 2.3 con $\lambda = 1$. Con esto en mente, sean H y G soluciones del problema de Cauchy (1) con condiciones iniciales $H(0) = \phi$ y $G(0) = \varphi$ respectivamente,

$$\begin{aligned}\|H(t) - G(t)\|_s \leq \|\mathbb{V}(\phi-\varphi)\|_s + &\\ + \frac{1}{2}\int_0^t \|\mathbb{V}(t-\tau)\cdot\left(\left(H^2(\tau)\right)_x - \left(G^2(\tau)\right)_x\right)\|_s d\tau &\\ \leq \|\phi-\varphi\|_s + \frac{1}{2}\int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{(t-\tau)}\right)^{\frac{1}{4}}\right] &\\ \cdot \|\left(\left(H^2(\tau)\right)_x - \left(G^2(\tau)\right)_x\right)\|_{s-1} d\tau &\end{aligned} \tag{3.16}$$

eligiendo T_s si es necesario, para que $\frac{1}{\sqrt[4]{t-\tau}} \geq 1$, (3.16) se transforma en

$$\begin{aligned}\|H(t) - G(t)\|_s \leq \|\phi-\varphi\|_s + K(\|H\|_{s,\infty} + \|G\|_{s,\infty})\cdot &\\ \cdot\int_0^t \frac{1}{\sqrt[4]{t-\tau}}\|H(\tau) - G(\tau)\|_s d\tau &\end{aligned} \tag{3.17}$$

El Lema 1.13 con $a = \|\phi - \varphi\|_s$, $b = \mathbb{K} = K(\|H\|_{s,\infty} + \|G\|_{s,\infty})$, $g(t) = \|H(\tau) - G(\tau)\|_s$, $\gamma - 1 = 0$, $\beta - 1 = -\frac{1}{4}$, y (3.17) implican que

$$\|H(t) - G(t)\|_s \leq \|\phi - \varphi\|_s \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left((\mathbb{K}\Gamma(3/4))^{4/3}\, t\right)^{\frac{3m}{4}} \tag{3.18}$$

donde $\nu = \frac{3}{4}$, $C_0 = 1$, $\frac{C_{m+1}}{C_m} = \frac{\Gamma(\frac{3m}{4}+1)}{\Gamma(\frac{3m}{4}+1+\frac{3}{4})}$, y Γ es la función Gama que satisface la siguiente identidad (ver [11])

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-1/2} e^{-x} e^{\frac{\theta(x)}{12x}}, \tag{3.19}$$

para $x > 0$ y implica que $\frac{C_{m+1}}{C_m} \mapsto 0$ cuando $m \mapsto \infty$, es decir que la serie (3.19) converge uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$. Por lo tanto si $\phi = \varphi$, (3.18) implica la unicidad para $s > 1$.
Aplicando el Teorema 2.4 para $s = 1$,

$$\begin{aligned} \|H(t) - G(t)\|_1 \leq \|\phi - \varphi\|_1 + \frac{1}{2}\int_0^t K\left[1 + \frac{1}{(t-\tau)^{3/8}}\right] \\ \cdot \| \left(\left(H^2(\tau)\right)_x - \left(G^2(\tau)\right)_x\right) \|_{L^1(\mathbb{T}^2)} d\tau \end{aligned} \tag{3.20}$$

Eligiendo $T_1 > 0$, si es necesario, para que $\frac{1}{(t-\tau)^{3/8}} \geq 1$, (3.20) se transforma en

$$\begin{aligned} \|H(t) - G(t)\|_1 \leq \|\phi - \varphi\|_1 + K[\|H\|_{1,\infty} - \|G\|_{1,\infty}] \cdot \\ \cdot \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/8}} \|H(\tau) - G(\tau)\|_1 d\tau \end{aligned} \tag{3.21}$$

Análogamente, con el fin de utilizar el Lema 1.13, con $a = \|\phi - \varphi\|_1$, $g(t) = \|H(t) - G(t)\|_1$,$b = \mathbb{K} = K[\|H\|_{1,\infty} - \|G\|_{1,\infty}]$, $\beta = 3/8$, $\gamma = 1$, obtenemos,

$$\|H(t) - G(t)\|_1 \leq \|\phi - \varphi\|_1 \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\left(\mathbb{K}\Gamma(3/8)\right)^{8/3} t\right)^{3m/8}, \tag{3.22}$$

donde $C_0 = 1$ y $\frac{C_{m+1}}{C_m} = \frac{\Gamma(3m/8+1)}{\Gamma(3m/8+1+3/8)}$, para $m \geq 0$. Al igual que la serie (3.18) la serie (3.22) converge uniformente en compactos de $\mathbb{R}$. Si $\phi = \varphi$ en (3.22) se obtiene la unicidad para $s = 1$ □

Teorema 3.3. *El problema (1) para $s \geq 1$ es localmente bien planteado. Mas precisamente, existen $T > 0$ y una única $H \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2))$ satisfaciendo (1). Además, la aplicación $\phi \mapsto H$ es continua en el siguiente sentido:Si $\phi_n \mapsto \phi_\infty$ en $H^s(\mathbb{T}^2)$ y si $H_n \in C([0,T_n]; H^s(\mathbb{T}^2))$, son las soluciones de (1) con dato inicial $H_n(0) = \phi_n$. Entonces las soluciones H_n pueden extenderse si es necesario para todo n suficientemente grande al interval $[0,T]$ y*

$$\lim_{n\mapsto\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|H_n(t) - H_\infty(t)\|_s = 0$$

Demostración: La existencia y la unicidad de la solución se siguen del Teoremas 3.1 y del Teorema 3.2. Falta demostrar la dependencia continua. En efecto, la demostración del teorema 3.2 implica que el tiempo de existencia T es una función continua de $\|\phi\|_s$. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T_n > T$ para todo $n \geq \mathbb{N}$. Así que H_n esta definido en $[0, T]$ para tales n. Como H_n, $n = 1, 2, ...\infty$ es solución de 1 con dato inicial $H_n(0) = \phi_n$, $n = 1, 2, ...\infty$ se sigue,

$$\|H_n(t)\|_s - \|\phi_n\|_s \leq M$$

que para todo $n \geq N$. Luego

$$\|H_n(t)\|_s \leq \|\phi_n\|_s + M \leq R + M \tag{3.23}$$

donde $R = \sup_{1\leq n\leq\infty} \|\phi_n\|_s$. Si $s > 1$ combinamos (3.17) con (3.23) para obtener

$$\begin{aligned} \|H_n(t) - H_\infty(t)\|_s \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_s + K(R + M)\cdot \\ \cdot \int_0^t \frac{1}{\sqrt[4]{(t-\tau)}} \|H_n(\tau) - H_\infty(\tau)\|_s d\tau \end{aligned} \tag{3.24}$$

Para 3.24 se hace un tratamiento semejante que el hecho a 3.17 y se obtiene que

$$\|H_n(t) - H_\infty(t)\|_s \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_s \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left((\mathbb{K}\Gamma(3/4))^{4/3}\, t \right)^{\frac{3m}{4}} \tag{3.25}$$

para todo $t \in [0, T]$, donde $\mathbb{K} = K(M + R)$. Si $s = 1$ procedemos como lo hecho para 3.21 salvo que tenemos en cuenta la acotación 3.23 y obtenemos exactamente 3.22 salvo que en este caso $\mathbb{K} = K(M + R)$. $\square$

Teorema 3.4. *Si $H \in C([0, T]; H^s(\mathbb{T}^2))$, $s \geq 1$ es la solución de (1) con dato inicial $H(0) = \phi \in H^s(\mathbb{T}^2)$ obtenida en el Teorema 3.3, entonces $H \in C((0, T]; H^r(\mathbb{T}^2))$ para $r > s$. Es decir $H \in C((0, T]; \mathcal{P})$*

Demostración. Si $0 < \lambda < 3$ y $s > 1$ el Teorema 2.3, con $r = s - 1$, implica que

$$\begin{aligned} \|H\|_{s+\lambda} \leq \left[1 + \left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda/4} \right] \|\phi\|_s \\ + K_1 \int_0^t 1 + \left(\frac{1}{(t-\tau)} \right)^{\frac{1+\lambda}{4}} d\tau \end{aligned} \tag{3.26}$$

Como la integral de (3.27) es finita, tenemos que $H \in C^1((0,T];H^{s+\lambda}(\mathbb{T}^2))$. Iterando este argumento obtenemos lo requerido para $s > 1$. Si $0 < \lambda < 5/2$ y $s = 1$ el Teorema 2.4, implica que

$$\begin{aligned} \|H\|_{1+\lambda} \leq & \left[1 + \left(\frac{1}{t}\right)\right] \|\phi\|_s \\ & + K_2 \int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{t-\tau}\right)^{3/8+\lambda/4}\right] \| \left(H^2(\tau)\right) \|_{L^1(\mathbb{T}^2)} d\tau \\ \leq & \left[1 + \left(\frac{1}{t}\right)\right] \|\phi\|_s \\ & + K_2 \|H\|_{s,\infty} \int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{t-\tau}\right)^{3/8+\lambda/4}\right] d\tau \end{aligned} \tag{3.27}$$

Donde la última integral de (3.27) es finita. Por lo tanto $H \in C^1((0,T];H^{s+\lambda}(\mathbb{T}^2))$. Iterando este argumento obtenemos lo requerido para $s = 1$. $\square$

Capítulo 4

El problema Global

El objetivo de este capítulo es establecer estimativas apriori de las soluciones de (1) con el fin de obtener el buen planteamiento global en $H^s(\mathbb{T}^2)$, para $s \geq 1$.

Teorema 4.1. *Sean*

$$T^* = \sup\left\{T > 0 : \exists! H \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2)) \text{ satisfaciendo (1)}\right\},$$

donde $s \geq 1$ y G la solución maximal de (1) en $[0, T^*)$. Si $T^* < \infty$, entonces

$$\lim_{t \uparrow T^*} \|G\|_s = \infty,$$

Demostración: Supongamos que $T^* < \infty$ y que existe $B > 0$ tal que,

$$\|G(t)\|_s \leq B \tag{4.1}$$

para todo $t \in [0, T^*)$. La ecuación integral (3.1), los teoremas 2.3 y 2.4 y la hipótesis de acotación (4.1) implican que existe $\lim_{t \uparrow T^*} G(t) = \psi$ en H^s, pues $\{G(t)\}_t$ es una red de Cauchy en H^s. Por lo tanto, el principio de extensión implicaría que $[0, T^*)$ no será el intervalo maximal de existencia lo cual contradice la elección de T^* $\square$

Proposición 4.2. *Sea $H \in C([0,T]; H^1(\mathbb{T}^2))$ la solución de (1) dada por el Teorema 3.3. Entonces,*

$$\|H\|_0^2 \leq \|\phi\|_0^2 \tag{4.2}$$

$$\|H_x\|_0^2 \leq \|\phi_x\|_0^2 \cdot e^{C_\epsilon (1 + \|\phi\|_0^4) t} \tag{4.3}$$

$$\|H_y\|_0^2 \leq \|\phi_y\|_0^2 \cdot e^{C_\epsilon (1 + \|\phi\|_0^4) t} \tag{4.4}$$

observe que (4.3) y (4.4) implican que $\|\nabla H\|_0^2 \leq \|\nabla \phi\|_0^2 e^{C_\epsilon (1 + \|\phi\|_0^4) t}$

Demostración: La estimativa en(4.2) es consecuencia del Teorema 3.4, de multiplicar (1) por H y luego integrar por partes. Posteriormente, tenemos en cuenta que $\int_{\mathbb{T}^2} H^2 H_x dxdy = 0$, que $\langle \partial_x \triangle H, H \rangle_0 = 0$, que $\langle \partial_x^2 H, H \rangle_0 = -\langle \partial_x H, \partial_x H \rangle_0$ y que $\langle \Delta^2 H; H \rangle_0 = -\|\triangle H\|_0^2$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t \|H\|_0^2 &= -\|\triangle H\|_0^2 + \|\partial_x H\|_0^2 \\
&= -\sum_{k_1,k_2} (k_1^4 + k_2^4)|\hat{H}(k_1,k_2,t)|^2 + \sum_{k_1,k_2} k_1^2 |\hat{H}(k_1,k_2,t)|^2 \\
&= \sum_{k_1,k_2} \left[k_1^2 - (k_1^4 + k_2^4)\right] |\hat{H}(k_1,k_2,t)|^2 \\
&\leq \sum_{k_2} \sum_{|k_1| \geq 2} (-k_1^4 + k_1^2)|\hat{H}(k_1,k_2,t)|^2 - \sum_{k_1,k_2} k_2^4 |\hat{H}(k_1,k_2,t)|^2 \\
&\leq \sum_{k_2} \sum_{|k_1| \geq 2} -3k_1^2 |\hat{H}(k_1,k_2,t)|^2 - \sum_{k_1,k_2} k_2^4 |\hat{H}(k_1,k_2,t)|^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\frac{1}{2}\partial_t \|H\|_0^2 \leq 0$ que integrando de 0 a t, implica 4.2.
Para demostrar (4.3), hacemos uso del Teorema 3.4 y luego derivamos (1) con respecto a x, para obtener

$$
H_{tx} + H_x^2 + H H_{xx} + \partial_x \triangle H_x = -\triangle^2 H_x - \partial_x^2 H_x. \tag{4.5}
$$

Haciendo $V = H_x$ en (4.5), dicha equación se transforma en,

$$
V_t + V^2 + H V_x + \partial_x \triangle V = -\triangle^2 V - \partial_x^2 V \tag{4.6}
$$

Ahora, multipliquemos (4.6) por V e integremos sobre $\mathbb{T}^2$, para obtener

$$
\frac{1}{2}\partial_t \|V\|_0^2 = -\int_{\mathbb{T}^2} V^3 dxdy - \int_{\mathbb{T}^2} H V V_x dxdy - \|\triangle V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2 \tag{4.7}
$$

Observemos que $\int_{\mathbb{T}^2} H V V_x dxdy = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2} V^3 dxdy$, por lo tanto (4.7) se transforma en:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t \|V\|_0^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} H V V_x dxdy - \|\triangle V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{T}^2} |H||V||V_x| dxdy - \|\triangle V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

En (4.8) aplicando Hölder, Cauchy-Schwartz, y (4.2) obtenemos que

$$\frac{1}{2}\partial_t\|V\|_0^2 \leq -\|\triangle V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2 + \|V\|_\infty\|\phi\|_0\|V_x\|_0 \tag{4.9}$$

La desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (Lema 1.12) tranforma (4.9) en:

$$\frac{1}{2}\partial_t\|V\|_0^2 \leq -\|\triangle V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2 + \|\triangle V\|_0^{\frac{3}{2}}\|V\|_0^{1/2}\|\phi\|_0 \tag{4.10}$$

La desigualdad de Young con $p = 4$ transforma (4.10) en

$$\frac{1}{2}\partial_t\|V\|_0^2 \leq -\|\triangle V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon^4}\left(\|V\|_0^{1/2}\|\phi\|_0\right)^4 + \frac{3}{4}\varepsilon^{\frac{4}{3}}\|\triangle V\|_0^2 \tag{4.11}$$

Eligiendo $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{3}{4}\varepsilon^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$ se obtiene que

$$\partial_t\|V\|_0^2 \leq -\|\triangle V\|_0^2 + 2\|\partial_x V\|_0^2 + C_\varepsilon\|\phi\|_0^4\|V\|_0^2 \tag{4.12}$$

Como $-\|\triangle V\|_0^2 + 2\|\partial_x V\|_0^2 \leq \|V\|_0^2$ tenemos que (4.12) lo podemos escribir de la siguiente forma,

$$\partial_t\|V\|_0^2 \leq C_\varepsilon(1 + \|\phi\|_0^4)\|V\|_0^2$$

Si integramos de 0 a t tenemos:

$$\|V\|_0^2 \leq \|\phi_x\|_0^2 + C_\varepsilon(1 + \|\phi\|_0^4)\int_0^t \|V(t')\|_0^2 dt' \tag{4.13}$$

Por lo tanto la desigualdad de Gronwall aplicada a (4.13) implica que

$$\|H_x\|_0^2 \leq \|\phi_x\|_0^2 e^{C_\varepsilon(1+\|\phi\|_0^4)t}. \tag{4.14}$$

Para demostrar (4.4), hacemos uso del Teorema 3.4 y luego derivamos (1) con respecto a y, para obtener

$$H_{ty} + H_y H_x + H H_{xy} + \partial_x\triangle H_y = -\triangle^2 H_y - \partial_x^2 H_y. \tag{4.15}$$

Haciendo $W = H_y$ en (4.15), dicha equación se transforma en,

$$W_t + WV + HW_x + \partial_x\triangle W = -\triangle^2 W - \partial_x^2 W \tag{4.16}$$

Ahora, multipliquemos (4.16) por W e integremos sobre $\mathbb{T}^2$, para obtener

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|W\|_0^2 = &-\int_{\mathbb{T}^2} HW_xWdxdy - \int_{\mathbb{T}^2} W^2Vdxdy - \int_{\mathbb{T}^2} HVV_xdxdy \\ &- \|\triangle W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2\end{aligned} \tag{4.17}$$

Observemos que $\int_{\mathbb{T}^2} VW^2dxdy = -2\int_{\mathbb{T}^2} WW_xHdxdy$, por lo tanto (4.17) se transforma en:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|W\|_0^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} HWW_xdxdy - \|\triangle W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^2} |H||W||W_x|dxdy - \|\triangle W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2\end{aligned} \tag{4.18}$$

En (4.18) aplicando Hölder, Cauchy-Schwartz, y (4.2) obtenemos que

$$\frac{1}{2}\partial_t\|W\|_0^2 \leq -\|\triangle W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2 + \|W\|_\infty\|\phi\|_0\|W_x\|_0 \tag{4.19}$$

La desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (vea Lema 1.12) tranforma (4.19) en:

$$\frac{1}{2}\partial_t\|V\|_0^2 \leq -\|\triangle W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2 + \|\triangle W\|_0^{\frac{3}{2}}\|W\|_0^{1/2}\|\phi\|_0 \tag{4.20}$$

La desigualdad de Young con $p = 4$ transforma (4.20) en

$$\frac{1}{2}\partial_t\|W\|_0^2 \leq -\|\triangle W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon^4}\left(\|W\|_0^{1/2}\|\phi\|_0\right)^4 + \frac{3}{4}\varepsilon^{\frac{4}{3}}\|\triangle W\|_0^2 \tag{4.21}$$

Eligiendo $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{3}{4}\varepsilon^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$ se obtiene que

$$\partial_t\|W\|_0^2 \leq -\|\triangle W\|_0^2 + 2\|\partial_x W\|_0^2 + C_\varepsilon\|\phi\|_0^4\|W\|_0^2 \tag{4.22}$$

Como $-\|\triangle W\|_0^2 + 2\|\partial_x W\|_0^2 \leq \|W\|_0^2$ tenemos que (4.22) lo podemos escribir de la siguiente forma,

$$\partial_t\|W\|_0^2 \leq C_\varepsilon(1 + \|\phi\|_0^4)\|W\|_0^2$$

Si integramos de 0 a t tenemos:

$$\|W\|_0^2 \leq \|\phi_y\|_0^2 + C_\varepsilon(1 + \|\phi\|_0^4)\int_0^t \|W(t')\|_0^2dt' \tag{4.23}$$

Por lo tanto la desigualdad de Gronwall aplicada a (4.23) implica que

$$\|H_y\|_0^2 \leq \|\phi_y\|_0^2 e^{C_\varepsilon(1+\|\phi\|_0^4)t}. \tag{4.24}$$

$\square$

Teorema 4.3. *El problema (1) es globalmente bien puesto es $H^s(\mathbb{T}^2)$, para $s \geq 1$*

Demostración: Como consecuencia de la proposición 4.2 el problema (1) es globalmente bien puesto en $H^1(\mathbb{T}^2)$. Supongamos que $0 < \theta < \frac{5}{2}$ y utilicemos el Teorema 2.4,

$$\begin{aligned}
\|H\|_{1+\theta}^2 &\leq \|\mathbb{V}(t)\phi\|_{1+\theta} + \int_0^1 \|\mathbb{V}(t-\tau)\left(HH_x(\tau)\right)\|_{1+\theta} d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{1+\theta} + \int_0^t K_1 \left[1 + \frac{M(t)}{(t-\tau)^{\frac{2(1+\theta)+1}{8}}}\right] \|HH_x\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{1+\theta} + K_2 \int_0^t \left[1 + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3+2\theta}{8}}}\right] \|H\|_0 \|H_x\|_0 d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{1+\theta} + K_2 \int_0^t \left[1 + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3+2\theta}{8}}}\right] \|H\|_1 d\tau
\end{aligned}$$

como $\|H\|_1$ es acotada entonces, $\|H\|_{1+\theta}$ es acotada, como consecuencia de la proposición anterior 4.2. Supongamos ahora $0 < \theta < 3$, el Teorema 2.3 implica que

$$\begin{aligned}
\|H\|_{1+2\theta}^2 &\leq \|\phi\|_{1+2\theta} + \frac{1}{2} \int_0^t K \left[1 + 2\left(\frac{1+\theta}{2(t-\tau)}\right)^{\frac{1+\theta}{4}}\right] \|\partial_x H^2(\tau)\|_\theta d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{1+2\theta} + \frac{1}{2} \int_0^t K \left[1 + 2\left(\frac{1+\theta}{2(t-\tau)}\right)^{\frac{1+\theta}{4}}\right] \|H^2(\tau)\|_{1+\theta} d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{1+2\theta} + \frac{1}{2} \int_0^t K \left[1 + 2\left(\frac{1+\theta}{2(t-\tau)}\right)^{\frac{1+\theta}{4}}\right] \|H(\tau)\|_{1+\theta}^2 d\tau
\end{aligned}$$

Ya que $\|H\|_{1+\theta}$ es acotada podemos afirmar que $\|H\|_{1+2\theta}$ también lo es. Continuando con esta iteración concluimos que el problema (1) es globalmente bien puesto es $H^s(\mathbb{T}^2)$, para $s \geq 1$ $\square$

Nota 1. *Los casos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ se tratan de forma similar y se obtienen resultados semejantes.*

Bibliografía

[1] S. Sergey, E. A. Demekhin, S. Kalliadasis *Two-dimensional wave dynamic in thin films. I. Stationary solitary pulses*, Physics of Fluids, 17, 117105, (2005).

[2] S. Toh, H. Iwasaki, and T. Kawahara, *Two-dimensional pulses of a nonlinear equation with dissipation and dispersion*, Phys. Rev. A 40, 5472 (1989).

[3] V. E. Zakharov, and E. A. Kuznetsov, *On Three-dimensional solitons*,Sov. Phys. JETP 39, 285 (1974).

[4] E. A. Kusnetsov, A. M. Rubenchik, and V. E. Zakharov, *Soliton stability in plasmas and hydrodynamics*, Phy. Rep. 142, 103 (1986).

[5] D. Pilod, and F. Linares,*The Cauchy problem for the dispersive Kuramoto-Velarde equation*, IMPA, (2006).

[6] R. J. Iório, Jr., Valèria de Magalhães Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001).

[7] A. J. Bernoff, and A.L. Bertozzi,*Singularities in a modified Kumamoto-Sivashinsky equation describing interface transition*,Phy. D 85 (1995), pp. 373-404

[8] J.S Langer, *Instabilities and pattern formation in crystal growth*,Rev. Mod. Phys.52 (1980), pp. 1-27.

[9] B.J.Martkowsky and G.I: Sivashinsky, *An asymptotic derivation of two models in flame propagation theory associated with the constant density approximation* , SIAM J. Appl. Math., 37 (1979), pp. 686-699

[10] Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equation*, Lectures Notes in Mathematics, vol 840,(1957)

[11] L.V.Ahlfors, *Complex analysisan introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*,New York McGraw-Hill (1979)

[12] Cristiane R. Ribeiro Argento, *O problema de Cauchy para a equação de Kuramoto-Velarde generalizada com dispersão* Tese de Doutorado, IMPA, (1998)