# EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA ECUACIÓN GENERALIZADA DE SCHÖDINGER.

**Luz Anglea Flórez Olarte.**
Código:830209

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**MATEMÁTICAS**
**BOGOTÁ**
**2009**

# EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA ECUACIÓN GENERALIZADA DE SCHRÖDINGER.

**LUZ ANGELA FLOREZ OLARTE**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Matemáticas

Director
GUILLERMO RODRÍGUEZ
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**
**BOGOTÁ**
**2009**

**TITULO EN ESPAÑOL:**
El problmea de Cauchy asociado a una ecuacion generalizada de Schrödinger
**TITULO EN INGLES:**
Cauchy's problema associated to Schrödinger's generalized equiation

**Resumen:** El propósito de este trabajo es estudiar el buen planteamiento en los espacios de Sobolev periódicos $H^s(\mathbb{T})$ y no periódicos $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{1}{2}$ del problema de valor inicial asociado a la ecuación de Schrödinger con no-linealidad de tipo no local.

Mas presisamente, en el trabajo, tratamos el problema de Cauchy asociado al problema de valor inicial

$$\begin{aligned} iv_t + v_{xx} + \lambda u|v|^{\sigma-1}v = 0, \\ u - \alpha^2 \partial_{xx}^2 u = |v|^{\sigma+1}, \\ v(0) = v_0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\alpha > 0$, $\sigma = 1, 3, 5, 7, ...$, y $\lambda = \pm 1$.

Exactamente, estudiamos ciertas propiedades de las soluciones de (1) como el buen planteamiento local y global en los espacios de Sobolev en $H^s$ para $s > \frac{1}{2}$ y $\sigma = 1, 3, 5, 7, ...$ tanto en el caso periodico como no periodico, a partir de estudiar la ecuación integral asociada a (1) y via el teorema del punto fijo de Banach, demostramos el buen planteamiento local de (1) en $H^s$ tanto en el caso periodico como no periodico para $s > \frac{1}{2}$. Finalmente probamos que (1) es globalmente bien planteado en $H^s$ en el caso periodico como no periodico para $s = 1$ y $\sigma = 1, 3, 5, 7, ...$ con $\lambda \pm 1$ a partir de las leyes de conservación

$$\begin{aligned} N(v) &= ||v(.,t)||_0^2 = ||\phi||_0^{2Z} \\ H(v) &= ||v_x||_0^2 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1}}{\sigma+1} dx \end{aligned}$$

En este caso para ciertos valores de $\sigma$ la solución de (1) existe en todo tiempo si el dato inicial es suficientemente pequeño,
**Palabras Claves:** Problema de Cauchy, espacios de Sobolev, ecuación de Schrödinger, local y globalmente bien planteado.

**KEY WORDS AND PHRASES:**

Cauchy's problem, Sobolev's spaces, Schrödinger equation, local and globally well posedness

**FIRMA DEL DIRECTOR:**

**Luz Angela Fórez Olarte 1980**

# Índice general

# INTRODUCCIÓN

La ecuacion no lineal de Schrodinger

$$\begin{aligned} iv_t + \Delta v + |v|^{2\sigma} v &= 0, \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \tag{2}$$

Sirve para describir la propagación de un rayo laser en un medio optico no lineal cuyo indice de refracción es proporcional a la intensidad de onda, de igual manera la ecuacion no lineal de Shrödinger tambien moldea otros fenomenos como las ondas de agua en superficies de un fluido ideal, las caidas de plasma.
En este trabajo trataremos el buen planteamiento en los espacios de Sobolev periódicos y no periódicos del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} iv_t + v_{xx} + \lambda u|v|^{\sigma-1} v &= 0, \\ u - \alpha^2 \partial_{xx}^2 u &= |v|^{\sigma+1}, \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \tag{3}$$

con $\alpha > 0$, $\sigma = 1, 3, 5, 7, ...,$ y $\lambda = \pm 1$
Observe que (3) es una generalización de la ecuación no lineal de Schrödinger cuando $\alpha = 0$. El problema de valor inicial (3) fue propuesto en [1] y en dicho trabajo los autores hacen un estudio de existencia y unicidad del problema en los espacios $L^r(\mathbb{R}^d)$ para $1 \leq \sigma \leq 3$. En nuestro caso trataremos el buen planteamiento de (3) en los espacios de Sobolev $H^s$ tanto periódicos como no periódicos para $s > \frac{1}{2}$ y $\sigma = 1, 3, 5, 7, ...$
El trabajo esta Estructurado de la siguiente manera: en el primer capitulo se presenta la notación que se utilizará a lo largo del documento, en el segundo capítulo estudiaremos la solución del problema lineal, el capítulo tres aborda la buena colocación local del problema (3) en $H^s$ con $s > 1/2$, en el capítulo 4 se estudio la buena coloción global del problema (3) en espacios de

sobolev tanto periódicos como no periódicos para $\sigma = 1, 3, 5, 7, ...$ en $H^1$ con $||v_x||_0^2$ suficientemente pequeño y finalmente se presenta un apendice donde se describen algunos resultados que fueron utilizados para el desarrollo de este trabajo.

# Capítulo 1

# Notación

En esta parte del trabajo se muestra la notación que se utiliza a lo largo del documento.

- $||.||_X$ notará la norma en el Espacio de Banach X
- $I = [0, T]$
- $C(I; X)$ es el espacio de las funciones continuas de $I$ en el espacio de Banach $X$ dotado de la norma $||f||_{\infty,X} = sup_{t\in I}||f(t)||_X$
- $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es el espacio de Schwartz,
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es el espacio de las distribuciones Temperadas
- $\mathcal{P} = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T})$; es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables definidas en $\mathbb{T}$ con valores complejos
- $\mathcal{P}'$ es el espacio de la distribuciones Periodicas.
- Para $f \in \mathcal{S}'$, $\hat{f}$ notara la transformada de Fourier
- $\mathfrak{B}(X, Y)$ es el espacio de los operadores lineales acotados de $X$ en $Y$, donde $X, Y$ so espacios de Banach
- Para $f \in \mathcal{P}'$, $\hat{f}$ es la transformada de Fourier

- $||.||_{L^P(X)}$, $1 \leq p \leq \infty$ notará la norma del espacio $L^P(X)$ donde $X = \mathbb{R}$ o $X = \mathbb{T}$; en el caso de ser $p = 2$ notaremos esta norma por $||.||_0$ en vez de $||.||_{L^2(X)}$

- $H^s(X)$, $X = \mathbb{R}$ o $X = \mathbb{T}$; notará el espacio de Sobolev de orden $s \in \mathbb{R}$, dotado de la norma $||f||_s = ||(1 - \partial_x^2)^{s/2} f||_0$ y del producto interno $\langle f, g\rangle_s = \langle (1 - \partial_x^2)^{s/2} f, ((1 - \partial_x^2)^{s/2} g)\rangle_0$ donde $\langle , \rangle_0$ es el producto inteno en $L^2(X)$

# Capítulo 2

# El problema Lineal

En este capítulo trataremos con el problema de Cauchy asociado a la parte lineal de la ecuación (3), tanto en el caso periódico como en el no periódico. Es decir, consideraremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} v_t &= i\partial_x^2 v, \\ v(0) &= \phi \in H^s, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde, $x \in \mathbb{R}$ o $x \in \mathbb{T}$ y es tal que

$$v(t) = e^{it\partial_x^2}\phi = (e^{-it\xi^2}\widehat{\phi})\check{} = \mathbb{V}(t)\phi \tag{2.2}$$

es la única solución. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado cuya demostración puede ser encontrada en [3], sin embargo presentaremos un esbozo de ella en el caso no periódico. La prueba en el caso periódico es esencialmente la misma.

**Teorema 2.1.** *$v$ dada por (2.2) es la única solución de (2.1). Es decir, $v \in C([0,T], H^s)$ es la única que satisface*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - i\partial_x^2 v(t)\right\|_{s-2} = 0. \tag{2.3}$$

*Demostración.* Sea $t \geq 0$ y $h > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - i\partial_x^2 v(t)\right\|_{s-2}^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^{s-2}\left|\frac{e^{-i\xi^2 h}-1}{h} + i\xi^2\right|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como,

$$\left|\frac{e^{-i\xi^2 h}-1}{h}\right| \leq 2|\xi^2|$$

tenemos que (2.4) es acotado por

$$\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - i\partial_x^2 v(t)\right\|_{s-2}^2 \leq 4\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{s-2}|\xi^2|^2|\hat{\phi}|^2 d\xi$$

Como $\dfrac{|\xi^2|^2}{(1+\xi^2)^2} \leq N$, para alguna $N > 0$ y $\forall \xi \in \mathbb{R}$ la desigualdad anterior se transforma en

$$\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - i\partial_x^2 v(t)\right\|_{s-2}^2 \leq 4N||\phi||_s^2 \tag{2.5}$$

La desigualdad (2.5) y $\dfrac{e^{-i\xi^2 h}-1}{h} + i\xi^2 = 0$ nos permite obtener el limite por la derecha gracias al teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Para el limite por la izquierda se procede analogamente. La unicidad es consecuencia de observar que si $v$ es solución de (2.1) entonces $\|v\|_s = \|\phi\|_s$, pues $\partial_t \|v\|_s^2 = 2Re\left\langle i\partial_x^2 v, v\right\rangle_s = 0$ $\square$

**Teorema 2.2.** *La aplicación $t \in [0,\infty] \longrightarrow \mathbb{V}(t) \in B(H^s)$ es un grupo unitario fuertemente continuo.*

*Demostración.* Este resultado es consecuencia de:

**1.** La identidad,

$$||\mathbb{V}(t)\phi||_s^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s |e^{-it\xi^2}\widehat{\phi}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s|\widehat{\phi}|^2 d\xi = ||\phi||_s^2$$

para toda $\phi \in H^s$ y $t \in \mathbb{R}$, implica que $\mathbb{V}(t) \in B(H^s)$ y que $\mathbb{V}(t)$ es una isometría, $t \in \mathbb{R}$. Resta probar que $\mathbb{V}(t)$ es sobre para todo $t \in \mathbb{R}$, en efecto, para $t \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in H^s$ se tiene que $\phi = e^{-i\partial_x^2}\varphi \in H^s$ por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(t)\phi &= e^{it\partial_x^2}(e^{-it\partial_x^2}\varphi) \\
&= e^{it\partial_x^2}[(e^{it\xi^2}\widehat{\varphi})\check{}] \\
&= [e^{-it\xi^2}e^{it\xi^2}\hat{\varphi}]\check{} \\
&= \varphi
\end{aligned}$$

Luego $\mathbb{V}(t)$ es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$

**2.** $\mathbb{V}(0) = \phi$ para todo $\phi \in H^s$

**3.**

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(t+w)\phi &= [e^{((t+w)(-i\xi^2))}]\hat{\phi}]\check{} \\ &= [e^{-ti\xi^2}e^{-wi\xi^2}\hat{\phi}]\check{} \\ &= \mathbb{V}(t)[\mathbb{V}(w)\phi]\end{aligned}$$

para todo $t$, $w \in \mathbb{R}$, y toda $\phi \in H^s$

**4.** La desigualdad,

$$\begin{aligned}||e^{ti\partial_x^2}\phi - e^{iw\partial_x^2}\phi||_s^2 &= ||(e^{-it\xi^2}\hat{\phi})\check{} - (e^{-iw\xi^2}\hat{\phi})\check{}||_s^2 \\ &= |||[(e^{-it\xi^2}\hat{\phi})\check{} - (e^{-iw\xi^2}\hat{\phi})]\check{}||_s^2 \\ &= |||[(e^{-it\xi^2} - e^{-iw\xi^2})\hat{\phi}]\check{}||_s^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s|(e^{-it\xi^2} - e^{-iw\xi^2})\hat{\phi}|^2 d\xi \\ &\leq 4||\phi||_s^2,\end{aligned}$$

para todo $t$, $w \in \mathbb{R}$, y toda $\phi \in H^s$, y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue implican que, $||e^{ti\partial_x^2}\phi - e^{wi\partial_x^2}\phi||_s^2 \to 0$ si $t \to w$

$\square$

# Capítulo 3

# El Problema Local

En este capítulo abordaremos el buen planteamiento local del problema (3) el cual escribiremos en la siguiente forma más comoda para trabajar

$$
\begin{aligned}
v_t &= i\partial_x^2 v + iF(v), \\
v(0) &= \phi,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

donde $F(v) = \lambda u|v|^{\sigma-1}v$, $\sigma = 2m+1, m = 1,2,3,...,$ $u$ es dado por(3) y $\lambda = \pm 1$ . Comenzamos observando que el problema de valor inicial (3.1) es equivalente a la ecuación integral

$$
v(t) = e^{i\partial x^2 t}\phi + i\int_0^t e^{i(t-\tau)\partial^2 x} F(v(\tau))d\tau. \tag{3.2}
$$

Mas exactamente, tenemos:

**Teorema 3.1.** *El problema (3) es equivalente a la ecuación integral (3.2). Mas precisamente, si $v \in C([0,T]; H^s)$ es una solución de (3) entonces $v$ satisface (3.2). Reciprocamente, si $v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ es una solución de (3.2) entonces $v \in C^1([0,T]; H^{s-2})$ y satisface (3).*

*Demostración.* Supongamos que $v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ es solución de (3.1) en $H^{s-2}(\mathbb{R})$, entonces el metodo de variación de parámetros y el hecho de ser $\mathbb{V}$ un grupo implican el resultado. Resta ver que si $v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ es solución de la ecuación integral (3.2) entonces $v \in C^1([0,T]; H^{s-2})$ es solución la ecuación diferencial (3), es decir veamos que,

$$
\lim_{h\to 0} \left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - iAv(t) - F(v(t)) \right\|_{s-2} = 0,
$$

donde $A = \partial_x^2$. Observe que esto es consecuencia de la desigualdad triangular, de las propiedades del grupo y del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. $\square$

Para una prueba mas detallada de este Teorema en el caso periódico puede consultarse [3]. A continuación estableceremos un resultado que es importante en la prueba del buen planteamiento local de (3.1)

**Lema 3.2.**

$$||F(v) - F(w)||_s \leq L(||v||_s, ||w||_s)||v - w||_s, s > 1/2, \tag{3.3}$$

*donde $F$ es dado como en (3.1) y $L$ es un polinomio homogeneo de grado $4m + 2$.*

*Demostración.* Sean $u = (1 - \alpha^2\partial_x^2)^{-1}|v|^{2m+2}$ y $z = (1 - \alpha^2\partial_x^2)^{-1}|w|^{2m+2}$, entonces,

$$\begin{aligned} F(v) - F(w) &= u|v|^{2m}v - z|w|^{2m}w \\ &= u|v|^{2m}v + z|v|^{2m}v - z|v|^{2m}v - z|w|^{2m}w \\ &= |v|^{2m}v(u - z) + z(|v|^{2m}v - |w|^{2m}w). \end{aligned}$$

Aplicando la norma de $H^s$ a esta identidad, la desigualdad triangular, el lema de Sobolev, pues $s > 1/2$ y substituyendo $u, z$ tenemos:

$$\begin{aligned} ||F(v) - F(w)||_s &= |||v|^{2m}v(u - z) + z(|v|^{2m}v - |w|^{2m}w)||_s \\ &\leq |||v|^{2m}v(u - z)||_s + ||z||_s|||v|^{2m} - |w|^{2m}w||_s \\ &\leq |||v|^{2m}v||_s||(u - z)||_s + ||z||_s|||v|^{2m}v - |w|^{2m}w||_s \\ &\leq |||v|^{2m+1}||_s||(u - z)||_s + ||z||_s|||v|^{2m}v - |w|^{2m}w||_s \\ &= \underbrace{|||v|^{2m+2} - |w|^{2m+2}||_s}_{II}||v||_s^{2m+1} \\ &+ ||w||_s^{2m+2}\underbrace{|||v|^{2m}v - |w|^{2m}w||_s}_{I} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Procedemos a estimar $I$ y $II$ en el lado izquierdo de la desigualdad anterior. Comenzaremos con $I$,

$$\begin{aligned} |||v|^{2m}v - |w|^{2m}w||_s &= |||v|^{2m}v - |v|^{2m}w + |v|^{2m}w - |w|^{2m}w||_s \\ &\leq |||v|^{2m}v - |v|^{2m}w||_s + |||v|^{2m}w - |w|^{2m}w||_s \\ &= |||v|^{2m}(v - w)||_s + ||w(|v|^{2m} - |w|^{2m})||_s \\ &\leq |||v|^{2m}||_s||(v - w)||_s + ||w||_s\underbrace{|||v|^{2m} - |w|^{2m}||_s} \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
|v|^{2m}-|w|^{2m} &= (|v|^2-|w|^2)((v.\overline{v})^{m-1}+(v.\overline{v})^{m-2}w.\overline{w}+(v.\overline{v})^{m-3}(w.\overline{w})^2+\\
&+ ...+(v.\overline{v})(w.\overline{w})^{m-2}+(w.\overline{w})^{m-1})\\
&= (|v|^2-|w|^2)\underbrace{[\underbrace{|v|^{2m-2}+|v|^{2m-4}|w|^2}\\
&\quad +|v|^{2m-6}|w|^4+...+|v|^2|w|^{2m-4}+|w|^{2m-2}]}_{G(v,w)}\\
&= (v.\overline{v}+v\overline{w}-v\overline{w}-w\overline{w})G(v,w)\\
&= [v(\overline{v}-\overline{w})+\overline{w}(v-w)]G(v,w)\\
&= v(\overline{v}-\overline{w})G(v,w)+\overline{w}(v-w)G(v,w).
\end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
|||v|^{2m}-|w|^{2m}||_s &= ||v(\overline{v}-\overline{w})G(v,w)+\overline{w}(v-w)G(v,w)||_s\\
&\leq ||v(\overline{v}-\overline{w})G(v,w)||_s+||\overline{w}(v-w)G(v,w)||_s\\
&\leq ||v||_s||\overline{v}-\overline{w}||_s||G(v,w)||_s+||\overline{w}||_s||v-w||_s||G(v,w)||_s\\
&= (||G(v,w)||_s|v||_s+||G(v,w)||_s|w||_s)||v-w||_s
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde

$$\begin{aligned}
||G(v,w)||_s &= |||v|^{2m-2}+|v|^{2m-4}|w|^2+|v|^{2m-6}|w|^4+...\\
&+|v|^2|w|^{2m-4}+|w|^{2m-2}||_s\\
&\leq ||v||_s^{2m-2}+||v||_s^{2m-4}||w||_s^2+||v||_s^{2m-6}||w||_s^4+...\\
&+||v||_s^2||w||s^{2m-4}+||w||_s^{2m-2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
||G(v,w)||_s|v||_s &= ||v||_s^{2m-1}+||v||_s^{2m-3}||w||_s^2+||v||_s^{2m-5}||w||_s^4+...\\
&+||v||_s^3||w||s^{2m-4}+||w||_s^{2m-2}\text{y}\\
||G(v,w)||_s|w||_s &= ||v||_s^{2m-2}||w||_s+||v||_s^{2m-4}||w||_s^3+||v||_s^{2m-6}||w||_s^5+...\\
&+||v||_s^2||w||s^{2m-3}+||w||_s^{2m-1}
\end{aligned}$$

luego,

$$||G(v,w)||_s|v||_s + ||G(v,w)||_s|w||_s = \underbrace{||v||_s^{2m-1} + ||v||_s^{2m-2}||w||_s + ||v||_s^{2m-3}||w||_s^2}$$
$$+ \underbrace{||v||_s^{2m-4}||w||_s^3 + ||v||_s^{2m-5}||w||_s^4 +}$$
$$+ \underbrace{||v||_s^{2m-6}||w||_s^5 + ... + ||v||_s^3||w||s^{2m-4}}$$
$$\underbrace{+||v||_s^2||w||s^{2m-3} + ||w||_s^{2m-2} + ||w||_s^{2m-1}}_{H(||v||_s,||w||_s)}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
|||v|^{2m}v - |w|^{2m}w||_s &\leq ||v-w||_s(H(||v||_s, ||w||_s))||w||_s \\
||v^{2m+1} - w^{2m+1}||_s &\leq (||v||_s^{2m} + ||v||_s^{2m-1}||w||_s + ||v||_s^{2m-2}||w||_s^2 \\
&\quad + ... + ||v||_s^2||w||_s^{2m-2} + ||v||_s||w||_s^{2m-1} + ||w||_s)||v-w||_s \\
&\leq (||v||_s^{2m} + ||w||_s H(||v||_s, ||w||_s))||v-w||_s
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
||w||_s^{2m+2}(||v^{2m+1} - w^{2m+1}||_s) &\leq ||w||_s^{2m+2}(||v||_s^{2m} + ||w||_s H(||v||_s, ||w||_s))||v-w||_s \\
&= (||w||_s^{2m+2}||v||_s^{2m} + ||w||_s^{2m+3} H(||v||_s, ||w||_s))||v-w||_s.
\end{aligned}$$

Analogamente, estimaremos $II$.

$$\begin{aligned}
|||v|^{2m+2} - |w|^{2m+2}||_s &\leq ||v-w||_s(|||v|^{2m+1} + |v|^{2m}|w| + |v|^{2m-1}|w|^2 \\
&\quad + |v|^{2m-2}|w|^2 + ... + |w|^{2m}|v| + |w|^{2m+1}||) \\
&\leq ||v-w||_s|(|v||_s^{2m+1} + ||v||_s^{2m}||w||_s + ||v||_s^{2m-1}||w||_s^2 \\
&\quad + ||v||_s^{2m-2}||w||_s^2 + ... + ||w||_s^{2m}||v||_s + ||w||_s^{2m+1}||)
\end{aligned}$$

Realizando unas cuentas similares a las de $I$ llegamos a:

$$||v^{2m+2} - w^{2m+2}|| \leq ||u-v||_s(||v||_s^{2m+1} + ||v||_s^{2m}||w||_s + H(||v||_s, ||w||_s))||w||_s^2)$$

Luego

$$
\begin{aligned}
||F(v)-F(w)||_s &\leq ||u-w||_s[||w||^{2m+2}(||v||_s^{2m}+||w||_sH(||v||_s,||w||_s)) \\
&+(||v||_s^{2m+1}+||v||^{2m}||w||_s)+H(||v||_s,||w||_s)||w||_s^2] \\
||F(v)-F(w)||_s &\leq \underbrace{||v||_s^{4m+2}+||v||_s^{4m+1}||w||_s+||v||_s^{4m}||w||_s^2+||v||_s^{4m-1}||w||_s^3+...} \\
&+\underbrace{||v||_s^{2m+1}||w||_s^{2m+1}+||v||_s^{2m}||w||_s^{2m+2}+||v||_s^{2m-1}||w||_s^{2m+3}+...} \\
&+\underbrace{||w||^{4m+2}}_{L(||v||_s,||w||_s)}||u-v||_s
\end{aligned}
$$

entonces

$$||F(v)-F(w)||_s \leq L(||v||_s,||w||_s)||u-v||$$

□

Observe que la desigualdad en (3.3) es valida para todo $\alpha \geq 0$.

**Lema 3.3.** *Sea $\phi \in H^s$, $s > 1/2$. Entonces, existen $T_s = T(\|\phi\|_s) > 0$ y $v \in C([0,T_s]; H^s)$ satisfaciendo la ecuación integral 3.2.*

*Demostración.* Sean $M, T > 0$. Consideremos el espacio métrico completo

$$\mathfrak{X}_s(T) = \{v \in C([0,T]; H^s) \,:\, \left\| v(t) - e^{it\partial_x^2}\phi \right\|_s \leq M, \forall t \in [0,T]\}, \tag{3.6}$$

dotado de la métrica $d(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)-v(t)\|_s = ||u-v||_{\infty,s}$ y la aplicación

$$(\Psi v)(t) = e^{it\partial_x^2}\phi + i\int_0^t e^{i(t-\tau)\partial_x^2}F(v(\tau))d\tau \tag{3.7}$$

Una parte esencial de la prueba es probar que existe $T > 0$ tal que $\Psi$ aplica $\mathfrak{X}_s(T)$ en si mismo y es una contracción. Por tal razón hemos dividido la prueba en varias etapas, a saber:
**i.** $\Psi v \in C([0,T]; H^s)$ si $v \in \mathfrak{X}_s(T)$. En efecto, esto es consecuencia de aplicar la norma de $H^s$ a $\Psi(v(t+h)) - \Psi(v(t))$, usar (3.7), posteriormente aplicar la desigualdad triangular teniendo en cuenta que $\mathbb{V}$ es un grupo y que $F$ aplica $H^s$ en si mismo. Finalmente, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue prueba este hecho.

**ii**. Veamos que existe $T_1 > 0$ tal que si $0 < T \leq T_1$ y $v \in \mathfrak{X}_s(T)$ entonces $\Psi(v(t)) \in \mathfrak{X}_s(T)$. En efecto, el lema 3.3, la definición de $\mathfrak{X}_s(T)$ en (3.6) y la desiguandad triangular implican que

$$\begin{aligned}
\left\|\Psi(v(t)) - e^{it\partial_x^2}\phi\right\|_s &= \left\|e^{it\partial_x^2}\phi + i\int_0^t e^{i(t-\tau)\partial_x^2}F(v(\tau))d\tau - e^{it\partial_x^2}\phi\right\|_s \\
&\leq \int_0^t \|F(v(\tau))\|_s\, d\tau \\
&\leq \int_0^t L(\|v(t)\|_s\,, 0)\, \|v(t)\|_s\,, d\tau \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

como,

$$\begin{aligned}
\|v(\tau)\|_s = \left\|v(\tau) - e^{it\partial_x^2}\phi + e^{it\partial_x^2}\phi\right\|_s &\leq \left\|v(\tau) - e^{it\partial_x^2}\phi\right\|_s + \left\|e^{it\partial_x^2}\phi\right\|_s \\
&\leq M + \|\phi\|_s\,,
\end{aligned}$$

si $v \in \mathfrak{X}_s(T)$, entonces (3.8) se tranforma en

$$\begin{aligned}
\|\Psi(v(\tau)) - \mathbb{V}(\tau)\phi\|_s &\leq \int_0^t L(M + ||\phi||_s, 0)(M + ||\phi||_s)d\tau \\
&= L(M + \|\phi\|_s\,, 0)(M + \|\phi\|_s)t \\
&\leq L(M + \|\phi\|_s\,, 0)(M + \|\phi\|_s)T
\end{aligned} \qquad (3.9)$$

Si elegimos $T_1 = \frac{M}{L(M+\|\phi\|_s,0)(M+\|\phi\|_s)}$, tenemos lo requerido.
**iii.** Existe $T_2 > 0$ tal que si $0 < T \leq T_2$, $\Psi$ es una contracción en $\mathfrak{X}_s(T)$. En efecto, aplicamos la norma de $H^s$ a $\Psi(v(t)) - \Psi(w(t))$, posteriormente la desigualdad triangular, el lemma 3.3, la definición de $\mathfrak{X}_s(T)$ en (3.6) y

usamos que $\mathbb{V}$ es grupo para obtener:

$$\begin{aligned} ||\Psi(v(t)) - \Psi(w(t))||_s &\leq \int_0^t \|F(v(t)) - F(w(t))\|_s \, d\tau \\ &\leq \int_0^t L(\|v(\tau)\|_s, ||w(\tau)||_s)||v(\tau) - w(\tau)||_s d\tau \\ &\leq \int_0^t L(M + ||\phi||_s, M + ||\phi||_s)||v(\tau) - w(\tau)||_s d\tau \\ &\leq L(M + ||\phi||_s, M + ||\phi||_s) \int_0^t ||v(\tau) - w(\tau)||_s d\tau \\ &\leq L(M + ||\phi||_s, M + ||\phi||_s) T d(v, w). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Eligiendo,

$$T_2 < \frac{1}{L(M + ||\phi||_s, M + ||\phi||_s)},$$

se obtiene lo requerido □

Haciendo $0 < T \leq \min\{T_1, T_2\}$, **i.**, **ii.**, **iii.** implican el resultado.

**Lema 3.4.** *La solución obtenida en el lema 3.3 es única y depende continuamente del dato inicial* $\phi$

*Demostración.* Supongamos que $u, v \in C([0, T]; H^s)$ son soluciones de (3.1) con datos iniciales $\psi, \phi$ respectivamente. Aplicando la norma $H^s$ a

$$u(t) - v(t) = e^{it\partial_x^2}(\psi - \phi) + \int_0^t e^{i(t-\tau)\partial_x^2}[F(u(\tau)) - F(v(\tau))]d\tau,$$

usamos, la desigualdad triangular, el hecho de ser $e^{it\partial_x^2}$ un grupo unitario en $H^s$ y el lema 3.3, para obtener:

$$\begin{aligned}||u(t)-v(t)||_s &\leq ||e^{it\partial_x^2}(\psi-\phi)||_s + \int_0^t ||e^{i(t-\tau)\partial_x^2}[F(u(\tau))-F(v(\tau))]||_s d\tau \\ &\leq ||\psi-\phi||_s + \int_0^t ||e^{i(t-\tau)\partial_x^2}[F(u(\tau))-F(v(\tau))]||_s d\tau \\ &\leq ||\psi-\phi||_s + \int_0^t L(||u||_s, ||v||_s)||u(\tau)-v(\tau)||_s d\tau \\ &\leq ||\psi-\phi||_s + L\underbrace{(||u||_{\infty,s}, ||v||_{\infty,s})}_{K}\int_0^t ||u(\tau)-v(\tau)||_s d\tau\end{aligned} \tag{3.11}$$

La desigualdad de Gronwall aplicada a (3.11) implica la unicidad, pues

$$||u(t)-v(t)||_s \leq ||\psi-\phi||_s e^{Kt} \tag{3.12}$$

La dependencia continua es consecuencia de la continuidad del tiempo de existencia de la solución de $||\phi||_s$, de (3.6 ) y de (3.11) pero con $K = L(||\phi||_s + M, ||\phi_n||_s + M)$, donde $\phi_n \to \phi$ en $H^s$ y $u_n$ en vez de $v$, donde $u_n$ es la solución de (3.1) con dato inicial $\phi_n$. Además de observar que para $n$ suficientemente grande $K < L(||\phi||_s + M, 1 + ||\phi||_s + M)$. □

**Teorema 3.5.** *El problema de valor inicial (3.1) es localmente bien planteado en $H^s$ para $s > 1/2$*

*Demostración.* Este resultado es consecuencia inmediata de los lemas 3.3, 3.2 y 3.4. □

.

**Nota 3.1**

- Las demostraciociones de los lemas 3.2, 3.3 y 3.4, implican que el tiempo de existencia $T_s$ de la solución de (3.1) es independiente de $\alpha$.
- En el caso periódico el teorema 3.5 es el mismo y su prueba es esencialmente la misma.

# Capítulo 4

# El Problema Global

**Lema 4.1.** *Los funcionales definidos en $H^1$ son leyes de conservación generadas por (3),*

$$
\begin{aligned}
N(v) &= ||v(.,t)||_0^2 = ||\phi||_0^2 && (4.1)\\
H(v) &= ||v_x||_0^2 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1}}{\sigma+1} dx \\
&\quad = H(\phi) = ||\phi'||_0^2 - \frac{\lambda}{\sigma+1} \int_{-\infty}^{\infty} (1-\alpha^2\partial_x^2)^{-1}(|\phi|^{\sigma+1})|\phi|^{\sigma+1} dx && (4.2)
\end{aligned}
$$

*Demostración.* Para demostrar (4.1) multiplicamos el problema (3) por $\overline{v}$ e integramos por partes y tomamos la parte imaginaria,

$$i v_t \overline{v} + v_{xx}\overline{v} + \lambda u |v|^{\sigma-1} v \overline{v} = 0$$

esto es:

$$
\begin{aligned}
i \int v_t \overline{v} dx &= -\int v_{xx}\overline{v} dx - \int u|v|^{\sigma-1}\overline{v} v dx = \int |v_x|^2 dx + \int u|v|^{\sigma+1} dx \\
i \int v_t \overline{v} dx &= \int \partial_t (v\overline{v}) dx = \int (v_t\overline{v} + v\overline{v}_t) = \int 2Re(v_t\overline{v}) dx = 0
\end{aligned}
$$

de donde

$$2Re(v_t\overline{v}) = \frac{\partial}{\partial t}(|v|^2)$$

luego

$$\int |v(x,t)|^2 dx = ||\phi||_0^2$$

La demostración de (4.2) es similar, pero teniendo en cuenta que (3) puede ser escrito en la forma

$$v_t = JH'(v(t)),$$

donde $J$ es el operador de multiplicación por $-i$. $\square$

**NOTA 4.1** El lema anterior es válido en el caso periódico y su demostración es esencialmente la misma.

**Teorema 4.2.** *Sea $s = 1$, $\lambda = -1$ y $\sigma = 1, 3, 5, \ldots$. Entonces el problema (3) es globalmente bien planteado en $H^1$ (de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{T}$)*

*Demostración.* De (4.1) vemos que solo resta acotar $||v_x||_0$. Para ello observe que $\lambda = -1$ y que el operador $(1-\alpha^2\partial_x^2)^{-1}$ preserva positividad. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
||v_x||_0^2 &= ||v_x||_0^2 - \frac{\lambda}{\sigma+1}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1}dx + \frac{\lambda}{\sigma+1}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1}dx \\
&= H(\phi) + \frac{\lambda}{\sigma+1}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1}dx \\
&\leq H(\phi)
\end{aligned}$$

$\square$

Para el caso $\lambda = 1$, tenemos,

**Teorema 4.3.** *Supongamos que $\lambda = 1$ y que $\phi \in H^1(\mathbb{R})$. Entonces,*

- *Si $1 \leq \sigma < 3$ entonces (3) es globalmente bien puesto en $H^1(\mathbb{R})$*
- *Si $\sigma = 3$ y $||\phi||_0$ es suficientemente pequeño entonces (3) es globalmente bien puesto en $H^1(\mathbb{R})$.*
- *Si $\sigma > 3$ y $||\phi||_0$ es suficientemente pequeño entonces (3) es globalmente bien puesto en $H^1(\mathbb{R})$.*

*Demostración.* De (4.2) tenemos que,

$$\begin{aligned}
||v_x||_0^2 &= H(v) + \frac{\lambda}{\sigma+1}\int u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1}dx \\
&= H(\phi) + \frac{1}{\sigma+1}\int u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1}dx.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

La desigualdad de Hölder, el Lema de Sobolev, integración por partes y la definición de $u$ dada en (3) implican

$$\begin{aligned}
\int u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1}dx &\leq ||u||_{L^\infty}|||v|^{\sigma+1}||_{L^1} = ||u||_{L^\infty}\int |v|^{\sigma+1} \\
&= ||u||_{L^\infty}||v||^{\sigma+1}_{L^{\sigma+1}} \leq ||u||_{H^1}||v||^{\sigma+1}_{L^{\sigma+1}} \\
\int u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1}dx &= \int u(x,t)(1-\alpha^2\partial_x^2)u = \int u^2 - \alpha^2 u u_{xx} \\
&= \int u^2 + \alpha^2 u_x^2 \geq C_\alpha ||u||^2_{H^1}
\end{aligned}$$

luego

$$C_\alpha ||u||^2_{H^1} \leq \int u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1}dx \leq \frac{1}{\sigma+1}||v||^{\sigma+1}_{L^{\sigma+1}}||u||_{H^1}$$

entonces:

$$||u||_{H^1} \leq \frac{1}{C_\alpha(\sigma+1)}||v||^{\sigma+1}_{L^{\sigma+1}}. \tag{4.4}$$

Si $\sigma = 1$, (4.4), se transforma en

$$||u(x,t)||_{H^1} \leq \frac{1}{2C_\alpha}||v||_0^2 = \frac{1}{2C_\alpha}||\phi||_0^2$$

y por lo tanto la solución persite en todo tiempo, es decir (3) en este caso es globalmente bien planteado en $H^1$, pues

$$\begin{aligned}
||v_x||_0^2 &= H(\phi) + \frac{1}{2}\int u(x,t)|v(x,t)|^2 dx \\
&\leq H(\phi) + \frac{1}{2}||u||_1||\phi||_0^2 \\
&\leq H(\phi) + C_\alpha ||\phi||_0^4
\end{aligned}$$

Si $\sigma > 1$, la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg implica que

$$||v||_{L^{\sigma+1}} \leq ||v||^{\theta}_{H^1}||v||_0^{1-\theta} \qquad , \tag{4.5}$$

donde,

$$\frac{1}{\sigma+1} = \theta\left(-1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1-\theta}{2}$$

$$\theta = \frac{(\sigma-1)}{2(\sigma+1)}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} ||v||_{L^{\sigma+1}} &\leq ||v||_{H^1}^{\frac{\sigma-1}{2(\sigma+1)}} ||v||_0^{1-\frac{\sigma-1}{2(\sigma+1)}} \\ &\leq ||v||_{H^1}^{\frac{\sigma-1}{2(\sigma+1)}} ||\phi||_0^{\frac{\sigma+3}{2(\sigma+1)}} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Por lo tanto (4.3) se tranforma en

$$\begin{aligned} ||v_x||_0^2 &= H(\phi) + \frac{1}{\sigma+1} \int u(x,t)|v(x,t)|^{\sigma+1} dx \\ &\leq H(\phi) + \frac{1}{\sigma+1} ||u||_1 ||v||_{L^{\sigma+1}}^{\sigma+1} \\ &\leq H(\phi) + C_{\alpha,\sigma} ||v||_{L^{\sigma+1}}^{2(\sigma+1)} \\ &\leq H(\phi) + C_{\alpha,\sigma} ||v||_{H^1}^{(\sigma-1)} ||\phi||_0^{(\sigma+3)}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde en la segunda desigualdad hemos usado (4.4) y en la tercera (4.6).

- Si $\sigma < 3$, (4.1) y las desigualdades (4.7) y de Young implican que $||v||_1 \leq K(\phi)$.
- Si $\sigma = 3$, la desigualdad (4.7) junto con (4.1) implican que $||v||_1 \leq K(\phi)$, siempre que $||\phi||_0$ sea suficientemente pequeño. de 4.7 y 4.1 tenemos

$$\begin{aligned} ||v_x||_0^2 &\leq H(\phi) + C_{\alpha,\sigma} ||v||_{H^1}^2 ||\phi||_0^6 \\ ||v||_1^2 &\leq ||\phi||_0^2 + H(\phi) + C_{\alpha,\sigma} ||\phi||_0^6 ||v||_{H^1}^2 \\ (1 - C_{\alpha,\sigma} ||\phi||_0^6) ||v||_1 &\leq ||\phi||_0^2 + H(\phi) \\ ||v||_1 &\leq \frac{||\phi||_0^2 + H(\phi)}{(1 - C_{\alpha,\sigma} ||\phi||_0^6)} \end{aligned} \tag{4.8}$$

- Si $\sigma > 3$, (4.1), (4.7), implican que,

$$||v||_1^2 \leq ||\phi||_0^2 + H(\phi) + C_{\alpha,\sigma} ||v||_{H^1}^{(\sigma-1)} ||\phi||_0^{(\sigma+3)} \tag{4.9}$$

Haciendo $x(t) = ||u(t)||_1$ y $K(\phi_0) = ||\phi||_0^2 + H(\phi)$ en (4.9) tenemos,

$$x^2 \leq K(\phi) + C_{\alpha,\sigma} x^{2+(\sigma-3)} ||\phi||_0^{(\sigma+3)}. \tag{4.10}$$

Veamos que dado $M > 0$, existe $\delta = \delta(M, \alpha, \sigma) > 0$ tal que si $\phi \in H^1(\mathbb{R})$ con $||\phi||_1 \leq M$ y $||\phi||_0 \leq \delta$, entonces la solución de (3) obtenida en el teorema 3.5 existe en todo tiempo. En efecto, (4.10) con $t = 0$ se transforma en

$$x^2(0) - C_{\alpha,\sigma}\delta^{(\sigma+3)}x^{2+(\sigma-3)}(0) \leq K(\phi),$$

donde, $\delta \in (0, \delta_0)$ es tal que $M^2 - C_{\alpha,\sigma}\delta_0^{(\sigma+3)}M^{2+(\sigma-3)} > 0$, asi que $K(\phi) > 0$ y

$$x^2 \leq K(\phi) + C_{\alpha,\sigma}x^{2+(\sigma-3)}\delta^{(\sigma+3)},$$

que es cierta cuando $x(t) \in [0, c_1(\delta)] \bigcup [c_2(\delta), \infty)$. Fijando $\delta$ tal que $c_1(\delta) > M$, la continuidad de $x(\cdot)$ en $t$ implican que

$$\sup_{[0,T]} ||u||_1 \leq c_1(\delta),$$

es decir, que la solución $u$, puede ser extendida a cualquier intervalo de tiempo.

$\square$

**NOTA 4.2** En el caso periódico el teorema anterior es esencialmente el mismo salvo que la desigualdad (4.6) se modifica por la desigualdad

$$||v||_{L^{\sigma+1}} \leq C(||v||_{H^1})^{\frac{\sigma-1}{2(\sigma+1)}}(||\phi||_0^{\frac{\sigma+3}{2(\sigma+1)}} + ||\phi||_0),$$

pues, para poder aplicar Gagliardo-Nirenberg es preciso tener que la función en consideración tenga media cero, asi que pequeñas modificaciones con respecto al caso real son necesarias. Por lo tanto tenemos:

**Teorema 4.4.** *Supongamos que $\lambda = 1$ y que $\phi \in H^1(\mathbb{R})$. Entonces,*

- *Si $1 \leq \sigma < 3$ entonces (3) es globalmente bien puesto en $H^1(\mathbb{T})$*
- *Si $\sigma = 3$ y $||\phi||_0$ es suficientemente pequeño entonces (3) es globalmente bien puesto en $H^1(\mathbb{T})$.*
- *Si $\sigma > 3$ y $||\phi||_0$ es suficientemente pequeño entonces (3) es globalmente bien puesto en $H^1(\mathbb{T})$.*

# Apéndice

En este capitulo se definiran algunos conceptos que se utilizarán a lo largo de este trabajo, las demostraciones respectivas serán referenciadas dentro de este capítulo.

**Definición 1.** *Sea $H_j$, $j = 1, 2$ un Espacio de Hilbert. Un operador $U \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ es una isometria si $||Uh||_{H_1} = ||h||_{h_2}$ para todo $h \in H_1$ Si $U$ es unitario se trata de una isometria en $H_2$*

**Definición 2.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert. un grupo unitario fuertemente continuo en $H$ es una aplicación $t \in \mathbb{R} \to U(t) \in \mathfrak{B}(H)$ tal que:*

- *$U$ es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$,*
- *$U(t + t') = U(t)U(t')$ para todo $t, t' \in \mathbb{R}$,*
- $\lim_{t \to t'} ||U(t)\phi - U(t')\phi||_H = 0$ *para todo $t \in \mathbb{R}$,*

**Definición 3.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las: $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); (1 + \xi^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, d\xi)$, es decir, $\hat{f}$ es una función medible*

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty.$$

**Teorema 5.5.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces, $H^s(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno*

$$(f|g)_s = \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} \, d\xi.$$

Ademas Cumple: $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R})$ para todo $s \geq r$, donde $\hookrightarrow$ denota, como es usual, contenido densa y continuamente.

*Demostración:* ( Vea por ejemplo [3]) □

**Definición 4.** *Sea $s \in \mathbb{R}$. El espacio de Sobolev $H^s(\pi)$ es el conjunto de todas las $f \in P'$ tal que:*

$$||f||_s^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$$

*En otras palabras, una distribución periodica $f \in H^s$ si y solo si $((1+|k|^2)^{s/2}\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ en donde $\ell^2$ denota el espacio de todas las sucesiones $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ con*

$$||\alpha||_{\ell_s^2} = \left[ 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\alpha k|^2 \right]$$

*esto es $f \in H^s(\pi)$ si y solo si $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$*

**Proposición 5.6.** *Veamos algunas propiedades:*

- *$H^s(\mathbb{T}^2)$, $s \in \mathbb{R}$ es un espacio de Hilbert respecto al producto interno*

$$\langle f, g\rangle_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (1+|k|^2)^s \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

- *$H^s(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T}^2)$ para todo $r, s \in \mathbb{R}$, $s > r$, esto es, $H^s(\mathbb{T}^2)$ está contenido continua y densamente en $H^r(\mathbb{T}^2)$ y*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s$$

  *para todo $f \in H^s(\mathbb{T}^2)$.*

- *$\left(H^s(\mathbb{T}^2)\right)'$, el dual topológico de $H^s(\mathbb{T}^2)$, es isométricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{T}^2)$ para todo $s \in \mathbb{R}$*

*Demostración:* ( Vea por ejemplo [3]) □

**Teorema 5.7.** *(Lema de Sobolev). Si $s > 1$, entonces $H^s(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^2)$ y*

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_s$$

*para todo $f \in H^s(\mathbb{T}^2)$*

*Demostración:* ( Vea por ejemplo [3]) □

**Proposición 5.8.** *Si $s > 1$, $H^s(\mathbb{T}^2)$ es una algebra de Banach. Además, éxiste una constante $C_s \geq 0$ dependiendo solo de $s$ tal que*

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s$$

*para todo $f, g \in H^s(\mathbb{T}^2)$*

*Demostración:* ( Vea por ejemplo [3]) □

**Definición 5.** *Sea $(\wedge, d)$ un espacio metrico. Una contracción en $\wedge$ es una aplicación*

$$\Psi : \wedge \rightarrow \wedge$$

*tal que: $d(\Psi(x), \Psi(y)) \leq \alpha d(x, y)$ para todo $x, y \in \wedge$ y algun $\alpha \in [0, 1]$*

Si $\alpha < 1$ decimos que $\wedge$ es una contracción estricta

**Teorema 5.9.** ***Teorema del punto fijo de Banach*** *Sea $\wedge$ un espacio metrico completo y supongamos que $\Psi : \wedge \rightarrow \wedge$ es una contraccion estricta $\wedge$ tiene un unico punto fijo esto es existe un unico $x_0 \in \wedge$ tal que $\Psi(x_0) = x_0$.*

*Demostración:* ( Vea por ejemplo [3]) □

**Lema 5.10.** ***Desigualdad de Gronwall*** *Sea $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$ y $\alpha \in L^1([a, b])$ con $\alpha \geq 0$ tal que:*

$$f(x) \leq g(x) + \int_a^x \alpha(s) ds.$$

*para $a \leq x \leq b$. Entonces:*

$$f(x) \leq g(x) + \int_a^x \alpha(s) e^{\int_s^x \alpha(\tau) d\tau} g(s) ds.$$

*para $a \leq x \leq b$. Ademas si $g$ es constante entonces:*

$$f(x) \leq g e^{\int_a^x \alpha(\tau) d\tau}$$

*Demostración:* ( Vea por ejemplo [5]) □

**Lema 5.11.** ***Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg.*** *Si* $f \in H^k\mathbb{R}$ *donde* $k$ *es un entero positivo, entonces existe* $C > 0$ *tal que:*

$$||\partial_x^n f||_{L^p} \leq C||\partial_x^m f||_{L^q}^{\theta}||f||_{L^r}^{1-\theta}$$

*donde* $n < m \leq k, C = C(n, m, p, q, r), \theta \in [\frac{n}{m}, 1]$ *y*

$$\frac{1}{p} - n = \theta(\frac{1}{q} - m) + (1 - \theta)\frac{1}{r}$$

*Demostración:* ( Vea por ejemplo [5]) □

**Lema 5.12.** ***Desigualdad de Young*** *Si* $f, g \geq 0, p, q > 1$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *entonces:*

$$fg \leq \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}$$

*Demostración:* ( Vea por ejemplo [5]) □

# Bibliografía

[1] Yanping Cao, Ziad H Musslimani and Edriss S Titi, *"Nonlinear Schrödinger-Helmholtz equation as numerical regularizarion of the nonlinear Schröndinger equation"*, Nonlinearity, 21 2008, 879898

[2] Javier Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Ediciones de la Universidad Autonoma de Madrid, 1991.

[3] Rafael. J. Iório, Jr., Valèria de Magalhães Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001).

[4] Gustavo Ponce, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales de evolución* Universidad del Valle, Escuela de verano en ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y análisis numérico, 1993.

[5] Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equation*, Lectures Notes in Mathematics, vol 840,(1957)