Lógica intuicionista dual y álgebras de co-Heyting

Javier Gutiérrez
Código: 830165

Director:
Fernando Zalamea

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá
17 de diciembre de 2009

Índice general

Introducción

Las matemáticas desarrolladas alrededor de la mitad del siglo XX en adelante contienen una amplia gama de conexiones entre distintas ramas de la disciplina. Distingo –entre otros– los siguientes tipos de relaciones, los *"tránsitos"* y los *"mixtos"*[1]. En los tránsitos encontramos aquellas traducciones o diccionarios que permiten interpretar un área en otra, y entreveo en este aspecto un vínculo muy cercano con la teoría de categorías. En los mixtos, clasifico aquellas parejas de áreas que se han podido mezclar para generar una nueva rama de investigación en matemáticas, como por ejemplo el matrimonio entre topología y álgebra, la topología algebraica. Pienso que el presente trabajo pertenece a esa clase de los tránsitos, y describe un estado del arte de algunas relaciones proposicionales entre lógica, álgebra y topología.

El capítulo uno –preliminares– revisa ejemplos y propiedades de algunos sistemas lógicos. Desde una perspectiva sintáctica presentamos los axiomas, reglas y definiciones del sistema lógico clásico PC [Osorio 2007], intuicionista [Bezhanishvili y de Jongh 2006], modal $S4$ [Epstein 1990], cálculos C_n [Carnielli y Marcos 1999] y anti-intuicionista INT^* [Brunner y Carnielli 2005]. Por otro lado, describimos la semántica usual de PC y los modelos de Kripke para INT, $S4$, INT^* y $BiINT$, así como los teoremas de validez y completez de estas semánticas. Rescatamos principalmente de este capítulo los ejemplos –complementados desde la literatura–, que están dirigidos a identificar diferencias entre los razonamientos intuicionistas y clásicos, y la construcción del intuicionismo dual, evidenciando su carácter de lógica refutativa y paraconsistente. También en este capítulo mencionamos el hecho de que INT^* y $DualINT$ son lógicamente equivalentes.

En el capítulo dos empezamos a reconocer algunos tránsitos entre álgebra y lógica, mediante la exploración de ejemplos y teoremas propios de las álgebras de

[1]Aunque he utilizado estos dos términos basado en la lectura y escucha de los trabajos del profesor Fernando Zalamea, –especialmente de su libro [Zalamea 2009]– no pretendo usarlos aquí con la misma complejidad. Simplemente estoy dando una pequeña interpretación, la suficiente para explicar parte de los objetivos del trabajo.

Boole, Heyting, co-Heyting y bi-Heyting. Encontramos que los anteriores cuatro tipos de álgebras constituyen semánticas algebraicas de los sistemas lógicos PC, INT, $DualINT$ y $BiINT$ respectivamente. A lo largo del capítulo estudiamos teoremas sobre estas álgebras, que sirven de conocimiento base para el capítulo tres. Seguimos especialmente en este capítulo a [Reyes y Zolfaghari 1996] y [Balbes and Dwinger 1974].

Finalmente, en el capítulo tres introducimos los operadores modales sobre álgebras de bi-Heyting σ-completas presentados en [Reyes y Zolfaghari 1996] y analizamos algunas relaciones con los sistemas modales. Luego investigamos sobre nuevos resultados que generalizan el teorema de representación de Stone para álgebras de Boole. Al establecer relaciones entre categorías mediante dualidad e isomorfismo, siguiendo [Bezhanishvili et al. 2010], revisamos la categoría **HPstone** de espacios bi-topológicos[2] Heyting y morfismos Heyting bicontinuos, isomorfa a la categoría **Heyt** de álgebras de Heyting y morfismos Heyting, lo que se logra usando la dualidad introducida en [Esakia 1974] entre espacios topológicos ordenados Esakia y álgebras de Heyting. También en [Bezhanishvili et al. 2010] se encuentran dualidades e isomorfismos para categorías compuestas de retículos distributivos con cero y uno, espacios topológicos ordenados Priestley, espacios co-Esakia, bi-Esakia, álgebras de co-Heyting, bi-Heyting, espacios bi-topologicos Stone por parejas y espacios bi-topológicos co-Heyting y bi-Heyting. En el desarrollo del capítulo realizamos la adecuación de teoremas y definiciones al español y la ilustración de algunas definiciones mediante ejemplos.

En el futuro, esperamos poder analizar con más detalle los funtores establecidos para transitar entre estas categorías, y así evidenciar qué información lógica se puede extraer de algunos ejemplos particulares. De la misma manera, esperamos ampliar estas problemáticas al campo de la lógica de predicados, para obtener más información semántica sobre la manera en que actúan las lógicas no clásicas revisadas[3].

Agradezco especialmente al profesor Zalamea por su paciencia y enseñanzas. Al profesor y amigo Alexander Cruz y a todos los que me ayudaron en la elaboración del presente trabajo, pues sin ellos no podría haber logrado la comprensión del tema y la construcción del escrito. A mi hijo Diego, quien desde su inocencia, relajó mis ideas y proporcionó fuerza a mi entendimiento.

[2] Espacios dotados de dos topologías.

[3] Ambas observaciones fueron sugeridas por el profesor Andrés Villaveces, profesor de la Universidad Nacional de Colombia y jurado del trabajo.

CAPÍTULO 1

Lógicas clásica, intuicionista y paraconsistente. Caso de la lógica intuicionista dual

1.1. Lógica clásica

A mediados del siglo XIX en varias publicaciones la lógica clásica aparece explícitamente relacionada con la matemática. George Boole es uno de los autores más destacados e influyentes en estos desarrollos: en [Boole 1984] se observa cómo a partir de la definición de tres tipos de signos[1] establece un lenguaje formal para el estudio de la lógica, otorgándole un tratamiento eficaz a las operaciones entre proposiciones y relaciones algebraicas entre clases. Posteriormente, la teoría de conjuntos empieza a desarrollarse, y aparecen trabajos como los de Cantor y Zermelo. La lógica clásica se convierte en el andamiaje deductivo por excelencia usado en las matemáticas hoy en día.

1.1.1. Lenguaje Formal

Los elementos de un lenguaje $\mathcal{L}(@_1, @_2, \ldots, @_n)$ dependen de dos conjuntos previamente definidos, $PV = \{p_0, p_1, \ldots\}$ el conjunto de variables proposicionales y los r-operadores o conectores $\mathcal{F} = \{@_1, @_2, \ldots, @_n\}$ (dados los intereses del trabajo sólo consideraremos $r = 0, 1$ y 2) 0-arios o constantes, unarios y binarios, donde cada uno es una función de dominio PV^r en $\mathcal{L}$. El *alfabeto* es la unión $\mathcal{A} = PV \cup \mathcal{F}$.

[1]Los *literales* representan los miembros de una clase, por ejemplo xy representa los elementos que pertenecen tanto a la clase x como a y. Los de *operación* $+$ y $-$ con los cuales se reunen y excluyen respectivamente los miembros de una clase con respecto a otra. El de *relación* $=$ para representar la igualdad entre clases.

Definición 1.1.1. Un lenguaje $\mathcal{L}(@_1, @_2, \ldots, @_n)$ es el conjunto de expresiones derivadas del alfabeto por las siguientes condiciones:

- cada $p_i \in PV$ es una fórmula bien formada para cada $i = 0, 1, 2, \ldots$
- Si $@_k \in \mathcal{F}$ es unario y A es una fórmula bien formada, entonces así lo será $@_k A$.
- Si $@_k \in \mathcal{F}$ es binario y A y B fórmulas bien formadas, entonces así lo será $A @_k B$.
- Si $@_k \in \mathcal{F}$ es 0-ario actuará como un elemento de PV, salvo alguna restricción especial.
- Ninguna otra concatenación de símbolos es fórmula bien formada (en caso de ambigüedad se introducirán paréntesis, que obviaremos aquí de manera natural).

Estos elementos serán llamados fórmulas bien formadas (f.b.f).

1.1.2. Semántica

Dotaremos a nuestro lenguaje de un mecanismo que nos permita asignarle un valor de verdad a cada f.b.f mediante una definición inductiva.

Definición 1.1.2.

1. Una asignación funcional entre PV y $\{F, V\}$ es un **asignamiento de valor**.
2. Una función entre el lenguaje $\mathcal{L}$ y $\{F, V\}$ es una **función de valor**.
3. Si $S(p) = F$ entonces p es falso y si $S(p) = V$ entonces p es verdadero.

Definición 1.1.3. Extensión de la función de valor al conjunto de f.b.f.

1. $\overline{S}(p) = S(p)$ si $p \in PV$.
2. $\overline{S}(A \vee B) = F$ si y sólo si $\overline{S}(A) = F$ y $\overline{S}(B) = F$.
3. $\overline{S}(A \wedge B) = V$ si y sólo si $\overline{S}(A) = V$ y $\overline{S}(B) = V$.
4. $\overline{S}(A \to B) = F$ si y sólo si $\overline{S}(A) = V$ y $\overline{S}(B) = F$.
5. $\overline{S}(\neg A) = V$ si y sólo si $\overline{S}(A) = F$.

Un PC-*modelo* para un conjunto de f.b.f es una función $v : PV \longrightarrow \{F, V\}$, la cual se extiende al conjunto de f.b.f mediante la definición 1.1.3. Cuando $v(A) = V$ diremos que v válida A y notaremos esta relación como $v \vDash_{PC} A$. Notemos que existen f.b.f que son válidas independientemente del PC-modelo que se escoja, ellas son las PC-tautologías.

Definición 1.1.4. La relación de consecuencia semántica $\vDash_{PC}$ está definida como:

1. $A \vDash_{PC} B$ si para cada PC-modelo, siempre que $v(A) = V$ entonces $v(B) = V$.

2. Sea Γ una colección de f.b.f, entonces $\Gamma \vDash_{PC} B$ si para cada PC-modelo, $v(B) = V$ siempre que cada f.b.f en Γ es también válida.

3. $\vDash_{PC} A$ si A es válida en todos los PC-modelos, es decir A es una PC-tautología.

Note que $\emptyset \vDash_{PC} A$ quiere decir lo mismo que $\vDash_{PC} A$.

A continuación indicaremos algunas PC-tautologías importantes, que nos permitirán observar diferencias o similitudes con los sistemas lógicos construidos en los próximos capítulos o secciones.

Principio del tercio excluido.

1. $\vDash_{PC} A \vee \neg A$

Principio de no contradicción.

1. $\vDash_{PC} \neg(A \wedge \neg A)$

Principios de la doble negación.

1. $\vDash_{PC} \neg\neg A \to A$

2. $\vDash_{PC} A \to \neg\neg A$

Leyes de De Morgan

1. $\vDash_{PC} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

2. $\vDash_{PC} \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Paradojas de la implicación estricta

1. $\vDash_{PC} A \to (B \to B)$

2. $\vDash_{PC} (A \wedge \neg A) \to B$

Reducción al absurdo

1. $\vDash_{PC} (A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]$

1.1.3. Presentación axiomática

Podemos construir nuestros sistemas lógicos desde presentaciones axiomáticas. En estas nos preguntamos por aspectos diferentes a la validez de las f.b.f y realizamos cuestionamientos tales como: ¿cuál es la lista de axiomas más corta posible que permite obtener un sistema consistente, completo y decidible? o ¿cuál es la lista de axiomas que me permiten "*modelar*" algún tipo de razonamiento? A este tratamiento lo llamamos sintáctico.

El interés de la presente sección será presentar un sistema axiomático para el cual la semántica definida en la sección anterior sea completa, es decir que la lista de todas las PC-tautologías coincida con la lista de todos los PC-teoremas. Un teorema es una f.b.f que puede deducirse de los axiomas y las reglas de inferencias de un determinado sistema lógico.

Adoptaremos la presentación [Osorio 2007] del sistema clásico por su parecido con la presentación que usaremos en el intuicionismo, la cual usa un estilo-Hilbert[2] en su axiomatización. Sea $\neg$ un conector unario y $\rightarrow, \vee, \wedge$ binarios del lenguaje, entonces definimos:

PC sobre $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow, \vee, \wedge)$ como:

Axiomas esquemas clásicos [3]

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
4. $(A \wedge B) \rightarrow A$
5. $(A \wedge B) \rightarrow B$
6. $A \rightarrow (A \vee B)$
7. $B \rightarrow (A \vee B)$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
10. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
11. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

Reglas clásicas

1. $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$ Modus Ponens (MP)

[2]Esta presentación consiste de tres de grupos: axiomas, reglas y definiciones.
[3]Aquí las letras $A, B, C, etc, \ldots$ son cualquier f.b.f.

Una f.b.f es una PC-*derivación* del sistema lógico, si al aplicar modus ponens sobre el grupo de axiomas la obtenemos como conclusión. Cuando A es una derivación de un conjunto de axiomas o f.b.f derivadas del sistema, decimos que A es un PC-teorema, lo cual notamos $\vdash_{PC} A$.

Definición 1.1.5. Dada una colección de f.b.f $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ escribimos $\Sigma \vdash_{PC} A$ cuando A se puede derivar de las f.b.f pertenecientes a Σ usando modus ponens y lo leemos "*A es consecuencia sintáctica de* Σ". Note que en el caso $\Sigma = \emptyset$ A es un PC-teorema.

Teorema 1.1.1 (Teorema de completitud fuerte para PC)**.** *Para cada colección Σ de f.b.f $\Sigma \vdash_{PC} A$ si y sólo si $\Sigma \models_{PC} A$.*

Prueba. Para una prueba detallada consulte [Epstein 1990] página 50. ☐

Corolario 1.1.1 (Completitud débil para PC)**.** *$\vdash_{PC} A$ si y sólo si $\models_{PC} A$. A es un teorema si y sólo si A es una tautología.*

El teorema 1.1.1 muestra cómo nuestras ideas semánticas y sintácticas se pueden usar complementariamente para validar e inferir nuevos argumentos.

1.2. Lógica intuicionista

1.2.1. Introducción

El impulsor del pensamiento intuicionista fue Brouwer quien abogaba por "*investigar las construcciones mentales matemáticas como tales, sin hacer referencia a cuestión alguna acerca de la naturaleza de los objetos construidos, tal como la de si existen independientemente de nuestro conocimiento de ellos.*" [Heyting 1976]. El intuicionismo se fija principalmente en aquellos objetos matemáticos que se pueden construir a partir de otros, es decir aquellos que se pueden definir[4] en un número finito de pasos. Esto plantea una diferencia sustancial con la lógica clásica en cuanto a la consideración del infinito actual, la cual se refleja en el principio del tercio excluido, la eliminación de la doble negación y la ontología de los objetos matemáticos.

Mostremos mediante ejemplos algo de la naturaleza del pensamiento intuicionista:

Ejemplo 1.2.1. ¿Cuál será el valor de verdad de la siguiente afirmación? *45 días antes de que Arquímedes gritará desnudo "eureka", en Siracusa nació un primogénito llamado Platón.* Es evidente que en este momento no tenemos una respuesta sobre la veracidad o falsedad de este enunciado, ya que difícilmente sabremos si el primogénito nació o no en ese día. Con lo que una proposición como *el primogénito llamado Platón que nació 45 días antes de que Arquímedes gritará desnudo "eureka", permaneció toda su vida en Siracusa o no*

[4]Entendiendo su existencia como el resultado de un proceso de construcción a partir de singularidades previamente construidas o aceptadas desde parámetros intuicionistas como por ejemplo el principio de inducción matemática.

permaneció toda su vida en Siracusa no puede ser aceptada según los parámetros intuicionistas. De hacerlo (como por ejemplo en el estilo clásico), asignaríamos propiedades a el "primogénito", con lo que cualquier deducción sobre esta proposición tendría el riesgo de basarse en absurdos. El intuicionismo rechaza esta inseguridad y sugiere que sólo podemos inferir afirmaciones usando al primogénito, cuando hallamos podido comprobar su nacimiento o no.

El siguiente ejemplo está dirigido a mostrar cómo actúa el rechazo del intuicionismo al tercio excluido.

Ejemplo 1.2.2 (Tomado de [Heyting 1976] pág. 13-14)**.**

- Sea k el mayor primo tal que $k-1$ es primo y si tal número no existe entonces $k=1$.
- Sea l el mayor primo tal que $l-2$ es primo y si tal número no existe entonces $l=1$.

Por un lado, $k=3$ ya que para cualquier entero $n>3$, si n es par es divisible por 2 y si es impar $n-1$ será divisible por 2. Por otro lado, saber cual es el valor de l, es establecer si la colección de parejas de números primos gemelos es finita o infinita. Aunque hay razones para pensar que la colección es infinita, dada la infinitud de los números primos, en 1919 Viggo Brun demostró la convergencia de la serie:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\dots$$

de los inversos de los pares de números gemelos. Si esta serie fuera divergente tal y como lo hace $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ la suma de los inversos de los números naturales, entonces podríamos afirmar la infinitud de las parejas de los primos gemelos. Sin embargo, que la serie de Brun converja no muestra si hay infinitas o finitas parejas de primos gemelos, pero sí establece razones para pensar que no sea infinita. Es decir, hasta la fecha no sabemos si la sucesión de primos gemelos es finita o infinita, de hecho no tenemos siquiera elementos que nos permitan conjeturar fuertemente sobre alguno de los dos hechos. Los intuicionistas afirman que l no puede definir un entero dado que no consideran válido el tercio excluido.

Ejemplo 1.2.3 (Basado en [Epstein 1990] pág. 197-198)**.**
Consideremos el número real positivo $b<1$ con expansión decimal $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}$ donde:

$$b_n=\begin{cases}3 & \text{si no aparecen siete sietes consecutivos antes del n-ésimo}\\ & \text{decimal en la expansión decimal de } \pi\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Si suponemos que b es irracional entonces pasaría que $b\neq 0{,}3\dots30\dots$ (en el momento que aparezca un cero el resto de la expansión decimal también serán ceros), con lo que necesariamente $b=0,\overline{3}=\frac{1}{3}$, es decir absurdo. Por otra parte no podremos afirmar que b es racional, no hay forma de escribir b de la forma $\frac{p}{q}$.

Sea A = "b es racional", acabamos de mostrar que $\neg A$ conlleva una contradicción, es decir que $\neg(\neg A)$ tiene sentido intuicionista al haberse construido un prueba de la negación de $\neg A$, sin embargo hemos notado que no podemos establecer A por medios constructibles.

Se han escogido los ejemplos pensando en que exhiban diferencias entre el pensamiento clásico y el intuicionista. El ejemplo 1.2.1 exhibe cómo algunas proposiciones usualmente obvias desde la perspectiva clásica, pueden no serlo en los razonamientos intuicionistas. El ejemplo 1.2.2 muestra usando un contexto matemático la invalidez del principio del tercio excluido. El ejemplo 1.2.3 coloca en evidencia de una manera ingeniosa y elegante cómo a partir de $\neg(\neg A)$ no necesariamente obtenemos A.

1.2.2. Presentación Axiomática

Fue Heyting en el año 1930 quien por primera vez presentó una lista de axiomas con la intención de modelar los razonamientos intuicionistas. En esta no aparecen ni el tercio excluido, ni la doble negación como axiomas. Nuestro sistema axiomático a diferencia del planteado por Heyting incluye una constante $\perp$ que significa contradicción. El uso de $\perp$ permite capturar nuestra definición de la negación intuicionista y así evitar el uso de la negación en el grupo de esquemas axiomáticos que presentaremos.

El lenguaje que usaremos para nuestro sistema intuicionista será $\mathcal{L}(\vee, \wedge, \rightarrow, \perp)$, en donde $\vee, \wedge$ y $\rightarrow$ son binarios y $\perp$ constante.

Existen varias axiomatizaciones que intentan modelar el intuicionismo. Usaremos la presente por comodidad, dado que ella será el punto de partida en la construcción de un sistema lógico "*dual*" al intuicionismo.

El sistema lógico intuicionista estilo Hilbert que adoptaremos es:

INT sobre $\mathcal{L}(\vee, \wedge, \rightarrow, \perp)$ [Bezhanishvili y de Jongh 2006]

Axiomas esquemas intuicionistas

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
4. $(A \wedge B) \rightarrow A$
5. $(A \wedge B) \rightarrow B$
6. $A \rightarrow (A \vee B)$
7. $B \rightarrow (A \vee B)$

8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
9. $\perp \to A$

Reglas intuicionistas

1. $\dfrac{A, A \to B}{B}$ Modus Ponens (MP)

Definiciones intuicionistas

1. $\neg A := A \to \perp$

Definiremos $\vdash_{INT}$ análogamente a como lo hicimos con $\vdash_{PC}$ en la sección 1.1.3.

1.2.3. Semánticas de Kripke

Hay varias semánticas completas para el intuicionismo: los árboles de Beth, semánticas de Gentzen, álgebras de Heyting, entre otras. Sin embargo, entre las más conocidas se encuentran las semánticas de Kripke y sus mundos posibles, las cuales se ajustan perfectamente a lógicas modales y al intuicionismo.

Un modelo de Kripke intuicionista es una terna $< W, R, e >$ en donde W es un conjunto no vacío de elementos denominados "*mundos posibles*", R una relación reflexiva, transitiva y anti-simétrica sobre W y $e : W \longrightarrow \wp(PV)$ una función evaluación (la cual asigna a cada mundo posible un conjunto de proposiciones válidas en él).

Definición 1.2.1 (Semánticas de Kripke intuicionistas)**.** Sea $< W, R, e >$ un modelo de Kripke intuicionista, entonces la relación $\models_{INT}$ entre elementos de W y f.b.f se define como:

1. $w \models_{INT} p$ si y sólo si $p \in e(w)$
2. $w \models_{INT} A \wedge B$ si y sólo si $w \models_{INT} A$ y $w \models_{INT} B$
3. $w \models_{INT} A \vee B$ si y sólo si $w \models_{INT} A$ o $w \models_{INT} B$
4. $w \models_{INT} \neg A$ si y sólo si para todo z tal que wRz, $z \not\models_{INT} A$
5. $w \models_{INT} A \to B$ si y sólo si para todo z tal que wRz, $z \not\models_{INT} A$ o $z \models_{INT} B$

Para A f.b.f leemos $w \models_{INT} A$ como "w valida a A" y $< W, R, e > \models_{INT} A$ si y sólo si para todo $w \in W$, $w \models_{INT} A$. Asumimos que el modelo preserva verdad "hacia el futuro": $w \models_{INT} A$ implica que para todo z tal que wRz, $z \models_{INT} A$.

Es común relacionar los elementos de W con estados de tiempo, así cada instante de tiempo determina estados específicos de validez para las proposiciones. Dicho de otro modo, un "mundo posible" establece ciertos valores de verdad para las proposiciones. Notemos que si tenemos una construcción de un objeto matemático en un determinado mundo posible asociado a un instante de tiempo, para los mundos posibles venideros también se tendrá válida dicha construcción.

Las semánticas de Kripke nos modelan lo anterior de manera adecuada:

Lema 1.2.1. *Para cualquier* $< W, R, e >$ *y* $w \in W$, $w \models_{INT} A$ *si y sólo si para todo* z *tal que* wRz, $z \models_{INT} A$.

Prueba. Consultar [Epstein 1990] página 200. □

Con el fin de facilitar y generar pruebas intuicionísticamente aceptadas es común desarrollar la noción de árboles de Kripke.

Definición 1.2.2. Un árbol de Kripke es una cuaterna $< W, R, e, w >$ donde $< W, R, e >$ es un modelo de Kripke con la condición adicional de que R es transitiva y $w \in W$ es tal que si zRw entonces $z = w$ (punto inicial).

Teorema 1.2.4 (Completitud de las semánticas de Kripke para INT, [Epstein 1990])**.**

1. $\Gamma \vdash_{INT} A$ *si y sólo si cada modelo de Kripke que valida a* Γ *valida* A.
2. $\Gamma \vdash_{INT} A$ *si y sólo si cada árbol de Kripke que valida* Γ *valida* A.

Corolario 1.2.1.

- $\nvdash_{Int} A \vee \neg A$
- $\nvdash_{Int} \neg\neg A \to A$

Prueba. Consultar [Epstein 1990] página 202-203. □

1.2.4. El intuicionismo desde un punto de vista modal

Las lógicas modales se introducen para calibrar los conceptos de necesidad ($\Box$) y posibilidad ($\Diamond$), los cuales se relacionan al igual que en el intuicionismo con los mundos posibles. En estos establecemos que una variable proposicional A es posible si ella es válida en algún mundo posible, y necesaria si dado un mundo posible ella es válida en todos los mundos posibles accesibles. Mediante las semánticas de Kripke formalizamos lo válido en las lógicas modales. En esta sección presentaremos el sistema $S4$ según Maddux y Epstein en [Epstein 1990].

Formalización de $S4$

El sistema modal $S4$ [Epstein 1990] se define siguiendo la definición 1.1.1 sobre $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \Box)$ considerando $\wedge$ binario y $\neg$, $\Box$ unarios.

Axiomas esquemas

Todos los axiomas de PC adicionando los tres siguientes:

1. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
2. $\Box A \to A$
3. $\Box A \to \Box\Box A$

Reglas

1. $\dfrac{A, A \to B}{B}$ Modus Ponens (MP)
2. $\dfrac{\vdash_{S4} A}{\vdash_{S4} \Box A}$

Definiciones

1. $\Diamond A := \neg\Box\neg A$

Semánticas de Kripke para lógicas modales

Los sistemas modales comparten la misma estructura de semánticas de Kripke. Frente al intuicionismo difieren en que se debilita R al expresarla como una relación binaria arbitraria sobre W.

Definición 1.2.3. Un modelo de Kripke modal es una terna $< W, R, e >$ donde W es un conjunto no vacío cuyos elementos son denominados "mundos posibles", R una relación binaria sobre W llamada relación de accesibilidad y e una función de dominio W y codominio $\mathcal{P}(PV)$ la cual asigna a cada mundo posible el conjunto de variables proposicionales válidas clásicamente en él.

Los valores de verdad de las variables proposicionales estarán determinados bajo las reglas de PC al interior de cada mundo posible.

Definición 1.2.4 (Semánticas de Kripke Modales, [Epstein 1990])**.**

1. $w \models p$ si y sólo si $p \in e(w)$
2. $w \models A \wedge B$ si y sólo si $w \models A$ y $w \models B$
3. $w \models \neg A$ si y sólo si para todo z tal que wRz entonces $z \not\models A$
4. $w \models A \to B$ si y sólo si para todo z tal que wRz, no se tiene a la vez $z \models A$ y $z \not\models B$

Usando $\Box A := \neg\Diamond\neg A$ y $\Diamond A := \neg\Box\neg A$ otorgamos semánticas para los conectores de necesidad y posibilidad:

5. $w \models \Box A$ si y sólo si para todo z, si wRz entonces $z \models A$.
6. $w \models \Diamond A$ si y sólo si para algún z, wRz y $z \models A$.

Teorema 1.2.5 ([Epstein 1990])**.** *Una f.b.f A es un $S4-$teorema si y sólo si podemos validar A en todos los modelos de Kripke reflexivos y transitivos.*

Notemos que similarmente al intuicionismo el teorema anterior exige que R sea transitiva y reflexiva. De manera, que es posible relacionar algunos sistemas modales con INT. Esto se logra formalmente usando la traducción * de $\mathcal{L}(\vee, \wedge, \rightarrow, \perp)$ en $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \Box)$ definida por:

- $p^* = \Box p$
- $(A \wedge B)^* = A^* \wedge B^*$
- $(A \vee B)^* = A^* \vee B^*$
- $(A \rightarrow B)^* = \Box(A^* \rightarrow B^*)$
- $(\neg A)^* = \Box\neg(A^*)$[5]
- $\Gamma^* = \{A^* : A \in \Gamma\}$

Gracias a que todo modelo de Kripke en INT da lugar a un modelo de Kripke para lógica modal podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 1.2.6. $\Gamma \vdash_{INT} A$ *si y sólo si* $\Gamma^* \vdash_{S4} A^*$

Prueba. Consultar [Epstein 1990] página 210. $\Box$

1.3. Lógica paraconsistente

1.3.1. Introducción

El desarrollo de la lógica paraconsistente[6] se originó principalmente en Brasil con los trabajos de Newton da Costa, Polonia con Jaśkowski, y Australia y Nueva Zelanda con Priest y Routley. En los años 80 da Costa y sus colaboradores posicionan a la lógica paraconsistente como una rama importante en el estudio de la lógica.

Construir una lógica que acepte contradicciones no es un problema, el verdadero problema está en construir una lógica que acepte contradicciones y que no sea trivial, es decir, establecer un sistema lógico que acepte proposiciones contradictorias y donde falle el principio de Pseudo-Escoto[7]. Da Costa establece una jerarquía de sistemas lógicos paraconsistentes[8] denominados los cálculos C_n de da Costa, al subrayar las siguientes tres condiciones:

1. El principio de no contradicción no es válido en general.
2. Para dos premisas contradictorias existe una fórmula que no podamos deducir de ellas.

[5] Recordemos que $\neg A := A \rightarrow \perp$

[6] Una teoría es consistente si no es posible deducir de la teoría una proposición y su negación, en caso contrario es inconsistente.

[7] El cual consiste en asegurar que a partir de una contradicción podemos deducir como verdadera cualquier proposición.

[8] Un sistema lógico paraconsistente es un sistema lógico inconsistente pero no trivial.

3. Es posible incluir los esquemas más importantes y reglas de la lógica clásica de forma compatible con las dos primeras condiciones.

1.3.2. La jerarquía de los cálculos C_n de da Costa

La presentación que daremos de la jerarquía de los cálculos C_n de da Costa se basará en la publicada por Carnielli y Marcos en [Carnielli y Marcos 1999]. La razón de su elección es la similitud que posee en su grupo de axiomas con INT.

C_n sobre $\mathcal{L}(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow)$[9] para $1 \leq n < \omega$.

Axiomas esquemas

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
4. $(A \wedge B) \rightarrow A$
5. $(A \wedge B) \rightarrow B$
6. $A \rightarrow (A \vee B)$
7. $B \rightarrow (A \vee B)$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
9. $A \vee \neg A$ (tercio excluido)
10. $\neg\neg A \rightarrow A$ (eliminación de doble negación)
11. $B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$
12. $(A^{(n)} \wedge B^{(n)}) \rightarrow ((A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \rightarrow B)^{(n)})$

Reglas

1. $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$ Modus Ponens (MP)

Definiciones

1. $B^{\circ} := \neg(B \wedge \neg B)$
2. $B^{n+1} := (B^n)^{\circ}$ donde $B^0 := B$ y $0 \leq n < \omega$
3. $B^{(n+1)} := B^{(n)} \wedge B^{n+1}$ donde $B^{(1)} := B^1$ y $1 \leq n < \omega$

[9] Siguiendo la definición 1.1.1, con $\neg$ unario y $\vee, \wedge, \rightarrow$ binarios.

Cada C_n es más fuerte que C_{n-1} (incluyendo el caso $n = 0$, el cual es equivalente a PC). Con el fin de evitar que estos sistemas se trivialicen cuando n crece, se constituye como sistema límite a C_ω, el cual se conforma con los axiomas 1 al 8 (es decir lógica intuicionista positiva INT^+) el principio del tercio excluido y la eliminación de la doble negación.

La inclusión de 11 no es arbitraria, pues en [Urbas 1989] se comenta que el axioma de reducción $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ posibilita que la jerarquía colapse en la lógica clásica. A B° lo leeremos como "B se comporta clásicamente" o "B se comporta bien con respecto a la negación $\neg$".

En los trabajos [Arruda 1980], [Marconi y da Costa 1989], [da Costa 1974] y [Urbas 1989] entre otros, encontramos desarrollos teóricos detallados en relación con los cálculos C_n.

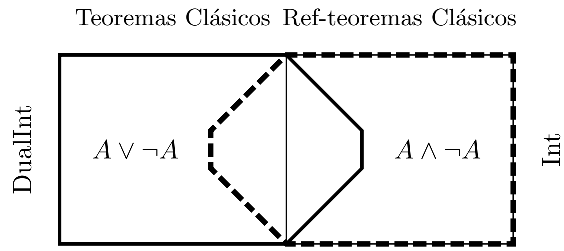
1.3.3. Lógica intuicionista dual

Nicolas Goodman, valiéndose de los secuentes de Gentzen, introduce en [Goodman 1981] por primera vez un sistema de lógica intuicionista dual. Luego, Walter Carnielli y Andreas Brunner en [Brunner y Carnielli 2005] construyen, a partir de consideraciones generales de lógicas duales, un sistema de lógica intuicionista dual. Las propiedades de dicho sistema se describen enmarcadas en lo que ellos denominan sistemas *refutativos.* Afirman que su sistema dual a INT es un sistema de lógica paraconsistente y además equivalente al sistema introducido por Goodman.

En un sistema deductivo razonamos a partir de verdades para obtener teoremas. En cambio, en un sistema refutativo razonamos a partir de estamentos falsos para obtener de nuevo un estamento falso. Mientras nuestros sistemas deductivos se basan en la noción de tautología, los sistemas refutativos se centran en las contradicciones. Prefijaremos con *ref* los axiomas, reglas y teoremas de un sistema refutativo. Analogamente a la definición 1.1.5 un *ref-teorema*[10] será un argumento del tipo $A \vdash \emptyset$, también podemos notarlo $\dashv A$.

En [Brunner y Carnielli 2005], [Priest 2002] y [Urbas 1989] se expresa la relación entre la lógica clásica, intuicionismo dual e intuicionismo, la cual resumimos en el siguiente gráfico:

[10] En [Brunner y Carnielli 2005] se refieren a *"counter-theorems"*.



Formalización

La *"lógica intuicionista dual"* ($DualInt$) corresponderá al sistema introducido en [Goodman 1981] y el *"anti-intuicionismo"* presentado en [Brunner y Carnielli 2005] lo notaremos como INT^*.

El lenguaje para nuestro sistema INT^* se define, usando 1.1.1, como $\mathcal{L}^*(\vee, \wedge, —, \top)$ en donde $\vee, \wedge, —$ son binarios y $\top$ constante. — es la pseudo-diferencia, leída como *"excluye a"* y $\top$ será el dual de $\bot$, es decir, una tautología.

Definición 1.3.1. La función de traducción * definida de $\mathcal{L}(\vee, \wedge, \rightarrow, \bot)$ en $\mathcal{L}^*(\vee, \wedge, —, \top)$ se establecerá por inducción como:

1. $p^* := p$ para cualquier p atómica.
2. $\bot^* := \top$
3. $(\neg A)^* := \neg^* A^*$
4. $(A \wedge B)^* := A^* \vee B^*$
5. $(A \vee B)^* := A^* \wedge B^*$
6. $(A \rightarrow B)^* := B^* — A^*$

Aplicando (6) y (2) a $A \rightarrow \bot$ obtenemos que $\neg^* A = \top — A$, lo cual nos define la negación anti-intuicionista, interpretada como A es excluida por todo argumento tautológico.

Nuestro sistema estilo Hilbert anti-intuicionista INT^* es:

INT* sobre $\mathcal{L}^*(\vee, \wedge, , \top)$[Brunner y Carnielli 2005]

Ref-axiomas esquemas

1. $(A — B) — A$
2. $((C — A) — ((C — B) — A)) — (B — A)$

3. $((A \vee B)—B)—A$

4. $A—(A \vee B)$

5. $B—(A \vee B)$

6. $(A \wedge B)—A$

7. $(A \wedge B)—B$

8. $((C—(A \wedge B))—(C—B))—(C—A)$

9. $A—\top$

Ref-reglas

1. $\dfrac{A, B—A}{B}$ Dual Modus Ponens (DMP)

Definiciones

1. $\neg^* A := \top—A$

Para dar una idea de cómo debe entenderse el anterior sistema refutativo ilustremos el ref-axioma (4) y la regla (DMP). (4) es un argumento rechazado por ser ref-axioma, lo cual significa que rechazamos que A excluya a $B \vee A$. En cuanto a (DMP), tenemos que rechazamos tanto a A como a $B—A$, es decir que B no excluye a A, por tanto A y B poseen un contenido lógico común, y como A es rechazado así lo es también B.

La relación de consecuencia sintáctica $\Gamma \dashv_{INT^*} A$ significará que si todas las f.b.f de Γ son rechazadas, así también lo será A. $\dashv_{INT^*} A$ denotará que A es un ref-teorema.

Dualizando las semánticas de Kripke para INT establecemos las *semánticas Kripke anti-intuicionistas* a partir de la siguiente definición

Definición 1.3.2 (Módelo de Kripke Anti-intuicionista, [Brunner y Carnielli 2005])**.**

Sea W un modelo de Kripke intuicionista $< W, R, e >$ donde R es una relación de orden parcial entre mundos posibles de W, entonces la relación $\models_{INT^*}$ entre elementos de W y f.b.f de $\mathcal{L}^*(\vee, \wedge, —, \top)$ se define como:

1. $w \models_{INT^*} p$ si y sólo si $p \in e(w)$

2. $w \models_{INT^*} A \wedge B$ si y sólo si $w \models_{INT^*} A$ y $w \models_{INT^*} B$

3. $w \models_{INT^*} A \vee B$ si y sólo si $w \models_{INT^*} A$ o $w \models_{INT^*} B$

4. $w \models_{INT^*} A—B$ si y sólo si existe z tal que wRz y $z \models_{INT^*} A$ y $z \not\models_{INT^*} B$

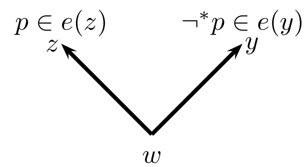
5. $w \models_{INT^*} \neg^* A$ si y sólo si existe z tal que wRz y $z \not\models_{INT^*} A$

Para A f.b.f leemos $w \models_{INT^*} A$ como "w válida anti-intuicionisticamente a A" y $< W, R, e > \models_{INT^*} A$ si y sólo si para todo $w \in W$, $w \models_{INT^*} A$.

Nota 1.3.1. Para $w \in W$, si $w \not\models_{INT^*} A$ entonces, para todo z tal que wRz, $z \not\models_{INT^*} A$.

A diferencia del intuicionismo, en donde al establecer la validez de una f.b.f en un mundo posible, ésta es válida en todos los mundos posibles "posteriores", en el anti-intuicionismo nos concentramos en el rechazo de una f.b.f y su rechazo en los mundos posibles "anteriores".

Consideremos el siguiente árbol de Kripke anti-intuicionista en donde p y q son elementos de PV



Ya que $z \models_{INT^*} p$ y $y \models_{INT^*} \neg^* p$ entonces $w \models_{INT^*} p$ y $w \models_{INT^*} \neg^* p$ con lo que $w \models_{INT^*} p \wedge \neg^* p$. Adicionalmente obtenemos que $w \not\models_{INT^*} q$, dicho de otro modo, INT^* es paraconsistente.

Teorema 1.3.2 (Validez [Brunner y Carnielli 2005])**.** *Si A es un ref-teorema, entonces para cada modelo Kripke $< W, R, e >$ se tiene que $w \not\models_{INT^*} A$ para todo $w \in W$.*

Teorema 1.3.3 (Completez [Brunner y Carnielli 2005])**.** *Si A no es un ref-teorema, entonces existe un modelo de Kripke $< W, R, e >$ tal que $w \models_{INT^*} A$ para un $w \in W$.*

En el próximo capítulo estableceremos una equivalencia entre $DualINT$ e INT^* mediante semánticas algebraicas.

1.3.4. BiINT

El sistema $BiINT$ es la unión entre $DualInt$ e Int. Es decir que las f.b.f. de $BiINT$ pertenecen al lenguaje $\mathcal{L}(\vee, \wedge, \rightarrow, \text{—}, \bot, \top)$. Las semánticas de Kripke se pueden definir de manera natural sobre marcos de Kripke y mundos posibles al relacionar $\models_{INT}$ y $\models_{INT^*}$ mediante la función de traducción definida en 1.3.1 y los teoremas 1.3.2 y 1.3.3.

Definición 1.3.3 (Modelo de Kripke bi-intuicionista [Goré and Postniece 2007])**.** Sea $< W, R, e >$ un modelo de Kripke intuicionista, entonces la relación $\models_{BiINT}$ entre elementos de W y f.b.f se define como:

1. $w \models_{BiINT} p$ si y sólo si para todo z tal que wRz, $p \in e(z)$
2. $w \models_{BiINT} A \wedge B$ si y sólo si $w \models_{BiINT} A$ y $w \models_{BiINT} B$

3. $w \models_{BiINT} A \vee B$ si y sólo si $w \models_{BiINT} A$ o $w \models_{BiINT} B$
4. $w \models_{BiINT} A \rightarrow B$ si y sólo si para todo z tal que wRz, $z \not\models_{BiINT} A$ o $z \models_{BiINT} B$
5. $w \models_{BiINT} A$—B si y sólo si existe z tal que zRw, $z \models_{BiINT} A$ y $z \not\models_{BiINT} B$
6. $w \models_{BiINT} \neg A$ si y sólo si para todo z tal que wRz, $z \not\models_{BiINT} A$
7. $w \models_{BiINT} \neg^* A$ si y sólo si existe z tal que zRw, $z \not\models_{BiINT} B$

Note que si eliminamos 5. y 7. de la anterior definición obtenemos las semánticas de Kripke intuicionistas. En cambio si eliminamos 4. y 6. obtenemos semánticas de Kripke para el intuicionismo dual (las cuales coinciden con las semánticas de Kripke anti-intuicionistas).

Podemos encontrar por primera vez una formalización estilo Hilbert de $BiINT$ en [Rauszer 1974] y semánticas de Kripke para $BiINT$ en [Rauszer 1977][11]. Sin embargo, recientemente se han encontrado algunas dificultades en $BiINT$, especialmente en la regla de cortadura libre que atañe a los conectivos $\rightarrow$ y —. En [Goré et al. 2008] se pueden observar con detalle las discusiones que sobre este hecho se han adelantado.

$BiINT$ es paraconsistente, ya que no acepta en general el principio de contradicción. A la vez, es una lógica deductiva y refutativa (ver figura de la sección 1.3.3) en la cual podemos capturar aquellas contradicciones de la lógica clásica y sus tautologías.

[11]En estos trabajos se le denomina a $BiINT$ H-B álgebras o Heyting-Brouwer álgebras.

CAPÍTULO 2

Semánticas reticulares: álgebras de Boole, álgebras de Heyting y álgebras de co-Heyting

2.1. Álgebras de Boole

Definición 2.1.1. Un par $(P, \leq)$, donde P es un conjunto diferente de vacío y $\leq$ es un operación binaria sobre P reflexiva, transitiva y anti-simétrica lo llamaremos *"conjunto parcialmente ordenado"* (Poset). Si para $x, y \in P$ tenemos que $x \neq y$ y $x \leq y$ escribimos $x < y$.

Definición 2.1.2. Un homomorfismo entre dos conjuntos parcialmente ordenados $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ es una aplicación φ de P en Q tal que para todo p y $s \in P$ tenemos que si $p \leq_P s$ entonces $\varphi(p) \leq_Q \varphi(q)$.

Definición 2.1.3. Sea $(L, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado:

1. Si $min\{z : x \leq z \text{ y } y \leq z\} \in P$ notamos a éste elemento como $x + y$.

2. Si $max\{z : z \leq x \text{ y } z \leq y\} \in P$ notamos a éste elemento como xy.

Definición 2.1.4. Un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ es un *"retículo"*, si para cada par de elementos $x, y \in L$ existen $x + y$ y xy.

Definición 2.1.5. Sea $(L, \leq)$ un retículo, si para cada $c \in L$ sucede que:

1. si $c \leq z$ implica que $c = z$, entonces a este elemento máximo lo notamos 1.

2. si $z \leq c$ implica que $c = z$, entonces a este elemento mínimo lo notamos 0.

Definición 2.1.6. Un retículo $(L, \leq)$ es distributivo si y sólo si se tiene $x(y + z) = xy + xz$ o $x + (yz) = (x + y)(x + z)$ para todo $x, y, z \in L$.

Definición 2.1.7. Un retículo $(L, \leq)$ con 0 y 1 es complementado si y sólo si para todo $x \in L$ existe un $y \in L$ tal que $xy = 0$ y $x + y = 1$. A un elemento de este estilo lo notamos $\overline{x}$ y lo llamamos un complemento de x.

Nota 2.1.1. En un retículo distributivo $(L, \leq)$ el complemento de un elemento es único.

Prueba. Supongamos que x tiene dos complementos $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$ en L, entonces $\overline{x}_1 = \overline{x}_1 1 = \overline{x}_1(x + \overline{x}_2) = \overline{x}_1 x + \overline{x}_1\overline{x}_2 = 0 + \overline{x}_1\overline{x}_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2$, así $\overline{x}_1 \leq \overline{x}_2$, por otro lado, $\overline{x}_1 = \overline{x}_1 + 0 = \overline{x}_1 + x\overline{x}_2 = (\overline{x}_1 + x)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = 1(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$, con lo que $\overline{x}_2 \leq \overline{x}_1$, es decir $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$. ☐

Definición 2.1.8 ([Balbes and Dwinger 1974])**.** Un retículo $(B, \leq)$ distributivo y complementado es un álgebra de Boole.

Ejemplo 2.1.2. El retículo $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un álgebra de Boole, en donde para $x, y \in \mathcal{P}(X)$, $x + y = x \cup y$, $xy = x \cap y$, $1 = X$, $0 = \emptyset$ y si $\overline{x} = X - x$ tenemos que $\overline{x} \cup x = X$ y $\overline{x} \cap x = \emptyset$.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos el sistema PC que definimos en 1.1.3 con su lenguaje $\mathcal{L}$. Definimos una relación de equivalencia sobre $\mathcal{L}$ como, $A \sim B$ si y sólo si tenemos que $\vdash_{PC} A \to B$ y $\vdash_{PC} B \to A$.

$(\mathcal{L}/\sim, \leq)$ es un álgebra de Boole, tal que, $[A] \leq [B]$ si y sólo si $A \to B$ es válida, $[A] = [B]$ se tiene si y sólo si $A \leftrightarrow B$ es válida, $[A] + [B] = [A \vee B]$ y $[A][B] = [A \wedge B]$. Notemos que si definimos $\overline{[A]} = [\neg A]$, entonces para todo $[A] \in \mathcal{L}/\sim$, $[A] + [\neg A] = [A \vee \neg A] = 1$ y $[A][\neg A] = [A \wedge \neg A] = 0$.

Teorema 2.1.4 (Leyes de De Morgan)**.** *En un álgebra de Boole B se cumple:*

1. $\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$.

2. $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$.

para todo $x, y \in B$

Prueba. (1) Sabemos que $(x + y)\overline{x}\,\overline{y} = x\overline{x}\,\overline{y} + y\overline{x}\,\overline{y} = 0$. Usando un argumento parecido al de la prueba de la primera parte de la nota 2.1.1, obtenemos que $\overline{x}\,\overline{y} \leq \overline{x + y}$. Adicionalmente tenemos $\overline{x}\,\overline{y} = (\overline{x}\,\overline{y})1 = \overline{x}\,\overline{y}(\overline{x + y} + (x + y)) = (\overline{x}\,\overline{y})\overline{x + y} + \overline{x}\,\overline{y}(x + y) = \overline{x}\,\overline{y}(\overline{x + y})$ y usando la segunda parte de la prueba de la nota 2.1.1, tenemos $\overline{x + y} \leq \overline{x}\,\overline{y}$. (2) Usamos un procedimiento dual al anterior. ☐

Así 2.1.4 interpretado en el ejemplo 2.1.3 significaría tener las siguientes igualdades $[\neg A][\neg B] = [\neg A \wedge \neg B] = [\neg(A \vee B)]$ y $[\neg A] + [\neg B] = [\neg A \vee \neg B] = [\neg(A \wedge B)]$. Hemos establecido un resultado al interior de PC teniendo en cuenta únicamente propiedades de las álgebras de Boole, lo cual nos muestra como el sistema lógico PC puede interpretarse desde una visión algebraica.

Es sencillo observar que las álgebras de Boole son una semántica completa para el sistema PC, por esto, de ahora en adelante siempre que hablemos de álgebras de Boole implícitamente estaremos hablando de lógica clásica.

2.2. Álgebras de Heyting

Al igual que PC guarda una relación con las álgebras de Boole, INT también tiene un significado algebraico. En la presente sección presentaremos las álgebras de Heyting, observaremos algunos ejemplos y mostraremos como estas álgebras se relacionan con el intuicionismo.

Definición 2.2.1 ([Reyes y Zolfaghari 1996])**.** Un retículo distributivo con cero es un álgebra de Heyting si y sólo si para cada par a y b en el retículo, existe un elemento c que satisface:

$$a \wedge c \leq b \text{ si y sólo si } c \leq a \to b.$$

$a \to b$ es el pseudo-complemento de a con respecto a b. El pseudo-complemento de a se define por $\neg a =: a \to 0$

El siguiente resultado nos muestra una opción para calcular $a \to b$. Definamos $\bigvee U = sup(U)$ y $\bigwedge U = inf(U)$

Teorema 2.2.1. *Para cualquier álgebra de Heyting $\mathfrak{H}$ tenemos que:*

$$a \to b = \bigvee\{z : a \wedge z \leq b\}.$$

Prueba. $a \to b \leq a \to b$, así que $a \wedge (a \to b) \leq b$, con lo que $a \to b \leq \bigvee\{z : a \wedge z \leq b\}$. Por otro lado, si $c \in \{z : a \wedge z \leq b\}$, $a \wedge c \leq b$ con lo que $c \leq a \to b$. □

Nota 2.2.2. En un álgebra de Heyting $\mathfrak{H}$, si $\bigvee H$ existe entonces, para cada $a \in \mathfrak{H}$, $\bigvee\{a \wedge h : h \in H\} = a \wedge \bigvee H$.

Ejemplo 2.2.3. Sabemos que siempre en un álgebra de Boole se cumple, $x \wedge y \leq u \vee v$ si y sólo si $x \wedge \overline{v} \leq \overline{y} \vee u$. Definiendo $a \to b = \overline{a} \vee b$, observamos que toda álgebra de Boole es de Heyting.

Ejemplo 2.2.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces el retículo $(\tau, \subseteq)$ con $0 = \emptyset$ en donde para $U, V \in \tau$, $U \vee V = U \cup V$, $U \wedge V = U \cap V$ y $U \to V = (U^c \cup V)^\circ$ es un álgebra de Heyting. Sea $S = \{A : U \cap A \subseteq V\}$, sabemos que $U \cap (U^c \cup V)^\circ \subseteq U \cap (U^c \cup V) = (U \cap U^c) \cup (U \cap V) = \emptyset \cup (U \cap V) = U \cap V \subseteq V$, así que $U \to V \in S$. Por otro lado, $\bigvee S = \bigcup S = U \to V$ ya que si $A \in S$ entonces $A \subseteq U^c \cup V \subseteq (U^c \cup V)^\circ$.

Ejemplo 2.2.5 ([Bezhanishvili y de Jongh 2006])**.** Es posible relacionar las semánticas de Kripke con las álgebras de Heyting.

Sea $\mathfrak{W} =< W, R, e >$ un modelo de Kripke intuicionista, definamos $\widetilde{w} := \{z : wRz\}$, $\widetilde{w}^{-1} := \{z : zRw\}$. Para un $M \subseteq W$ extendemos la definición como $\widetilde{M} := \bigcup_{w \in M} \widetilde{w}$ y $\widetilde{M}^{-1} := \bigcup_{w \in M} \widetilde{w}^{-1}$. M es llamado super-cerrado si siempre que $w \in M$ y wRz entonces $z \in M$. La definición dual la denominamos sub-cerrado.

Consideremos el conjunto $\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}}$ de todos los M super-cerrados contenidos en $\mathfrak{W}$, entonces $(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}}, \subseteq)$ es un álgebra de Heyting, en donde $M \vee N := M \cup N$,

$M \wedge N := M \cap N$, $0 = \emptyset$, $1 = W$ y $M \to N := \{w \in W :$ para cada $v \in W$ tal que wRv, si $v \in M$ entonces $w \in N\}$[1].

$(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}}, \subseteq)$ es un álgebra de Heyting. Observemos que si $x \in M \cap (M \to N)$ entonces para todo v tal que xRv, si $v \in M$, $x \in N$. Como $x \in M$ entonces $v \in M$ y $x \in N$, es decir $M \cap (M \to N) \subseteq N$. Por otro lado, consideremos un conjunto super-cerrado A tal que $M \cap A \subseteq N$. Sea $w \in A$ y $v \in W$ tal que wRv, entonces si $v \in M$, $v \in N$. En particular tenemos que wRw y entonces $w \in N$, mostrando que $A \subseteq M \to N$.

Ejemplo 2.2.6. Consideremos todas las f.b.f definidas en la sección 1.2.2 correspondientes al sistema INT de la lógica intuicionista. Definamos una relación de equivalencia $\sim$ sobre estos elementos como $A \sim B$ si y sólo si $\vdash_{INT} A \to B \wedge B \to A$. Si consideramos las siguientes definiciones entre clases de equivalencia:

- $[A \wedge B] = [A] \wedge [B]$
- $[A \vee B] = [A] \vee [B]$
- $[A \to B] = [A] \to [B]$[2]
- $[A] \leq [B]$ si y sólo si $\vdash_{INT} A \to B$

Entonces $(\mathcal{L}/\sim, \leq)$ con $\wedge, \vee, \to$ operaciones binarias y $[\perp]$ constante, es un álgebra de Heyting.

En los siguientes dos teoremas se encuentran similitudes entre lo que sucede en las álgebras de Heyting con respecto a lo que sucede en lógica.

Teorema 2.2.7. *En un álgebra de Heyting $\mathfrak{H}$, $a \leq \neg\neg a$ para todo $a \in \mathfrak{H}$ (recíproco de la eliminación de la doble negación).*

Teorema 2.2.8. *En un álgebra de Heyting $\mathfrak{H}$, los siguientes estamentos son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{H}$ es un álgebra de Boole.*
2. *$a = \neg\neg a$ para todo $a \in \mathfrak{H}$.*
3. *$a \vee \neg a = 1$ para todo $a \in \mathfrak{H}$.*

Análogamente al anterior teorema, tenemos en lógica que la clausura modus pones de INT unido a $a \vee \neg a$ es igual a PC, que a su vez es igual a la clausura modus pones de INT unido a $\neg\neg a \to a$.

Para finalizar, presentamos el siguiente teorema que nos establece que la negación Heyting considerada como un operador reversa el orden. Usaremos este resultado en la sección 3.2.

Teorema 2.2.9. *Sean $a, b \in \mathfrak{H}$ en un álgebra de Heyting, si $a \leq b$ entonces $b \to c \leq a \to c$ para todo $c \in \mathfrak{H}$. En particular si $c = 0$, $\neg b \leq \neg a$.*

[1] Dada la transitividad de R, tenemos que $M \to N$ es super-cerrado.

[2] Las cuales estan bien definidas.

2.3. Álgebras de co-Heyting

Definición 2.3.1 ([Reyes y Zolfaghari 1996]). Un retículo distributivo con 1 es un álgebra de co-Heyting si y sólo si para cada par a, b en el retículo existe un elemento c que satisface:

$$a \setminus b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \vee c.$$

Leemos $a \setminus b$ como "a menos b" o "a excluye a b". Escribimos $\sim a := 1 \setminus a$.

Podemos extender, mediante dualidad, los resultados de la sección 2.2 a las álgebras de co-Heyting, intercambiando de manera adecuada, $\rightarrow$ por $\setminus$, uniones por intersecciones, menor igual por mayor igual, interior por clausura, elemento máximo por mínimo, etc,....

Teorema 2.3.1. *En un álgebra de co-Heyitng tenemos que:*

$$a \setminus b = \bigwedge \{c : a \leq b \vee c\}.$$

Nota 2.3.2. En un álgebra de co-Heyting $\mathfrak{C}$, si $\bigwedge C$ existe entonces, para cada $a \in \mathfrak{C}$, tenemos que $a \vee \bigwedge C = \bigwedge \{a \vee c : c \in C\}$.

Ejemplo 2.3.3. Toda álgebra de Boole es un álgebra de co-Heyting, tomando $a \setminus b := a \vee \overline{b}$.

Notemos que en un álgebra de co-Heyting no necesariamente $a \wedge \sim a = 0$, por lo cual presentamos la siguiente definición.

Definición 2.3.2. La frontera $\partial(a)$ de un elemento $a \in \mathfrak{C}$ es $a \wedge \sim a$. De manera dual definimos $\partial_d(a) = a \vee \neg a$ como la frontera dual de a si a está en un álgebra de Heyting.

Ejemplo 2.3.4. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea τ_c la colección de todos los conjuntos cerrados bajo τ. Entonces $(\tau_c, \subseteq)$ es un álgebra de co-Heyting en donde, para dos conjuntos cerrados de τ_c tenemos que $A \setminus B := \overline{(A \cap B^c)}$[3]. La frontera de un elemento de τ_c como la acabamos de definir coincide con el concepto de frontera en topología.

Teorema 2.3.5. *En un álgebra de co-Heyting $\mathfrak{C}$, $\sim\sim a \leq a$ para todo $a \in \mathfrak{C}$.*

Teorema 2.3.6. *En un álgebra de co-Heyting $\mathfrak{C}$, los siguientes estamentos son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{C}$ es un álgebra de Boole.*
2. *$\sim\sim a = a$ para todo $a \in \mathfrak{C}$*
3. *$a \wedge \sim a = 0$*

[3] $\setminus$ Representará la operación sobre el álgebra, no la diferencia de conjuntos como usualmente sucede.

Las álgebras de co-Heyting conforman una semántica algebraica completa para $DualINT$ (ver [Goodman 1981]) y también para INT^* (ver [Brunner y Carnielli 2005]) de manera que ellas coinciden como sistemas lógicos.[4]

Ejemplo 2.3.7. Dualmente podemos reconstruir el ejemplo 2.2.6 en $DualINT$, al considerar $(\mathcal{L}^*/\sim, \leq)$ sobre $\mathcal{L}^*(\vee, \wedge, —, \top)$ y:

- $[A \wedge B] = [A] \wedge [B]$
- $[A \vee B] = [A] \vee [B]$
- $[A — B] = [A] \setminus [B]$
- $[A] \leq [B]$ si y sólo si $\vdash_{DualINT} A — B$

Al trasladar algunos resultados de álgebras de co-Heyting a la lógica podemos conjeturar que en $DualINT$ la eliminación de la doble negación es válida, y que la clausura bajo modus pones de $DualINT$ unido con $\sim\sim a = a$ es igual a PC, que a su vez es igual a la clausura bajo modus pones de $DualINT$ unido con $a \wedge \sim a$.

Para terminar, establezcamos que la negación co-Heyting reversa el orden, teorema que usaremos en la próxima sección.

Teorema 2.3.8. *Sean $a, b \in \mathfrak{C}$ en un álgebra de co-Heyting, si $a \leq b$ entonces $c \setminus b \leq c \setminus a$ para todo $c \in \mathfrak{C}$. En particular si $c = 0$, $\sim b \leq \sim a$.*

[4] De manera que, de ahora en adelante para hablar de un sistema lógico dual al intuicionista usaremos únicamente $DualINT$.

CAPÍTULO 3

Álgebras de bi-Heyting y operadores modales

3.1. Álgebras de bi-Heyting

Definición 3.1.1. [Reyes y Zolfaghari 1996] Un álgebra $\mathfrak{B}$ que es a su vez Heyting y co-Heyting es un álgebra de bi-Heyting.

Ejemplo 3.1.1. Toda álgebra de Boole es de bi-Heyting.

Ejemplo 3.1.2. Llamaremos "clopen" un subconjunto de un espacio topológico (X, τ) que sea abierto y cerrado. Sea τ_{cl} la colección de todos los clopens de (X, τ), entonces $(\tau_{cl}, \subseteq)$ es un álgebra de bi-Heyting. Además tenemos que en $(\tau_{cl}, \subseteq)$, $U \to V = (U \setminus V)^c$, a saber, si tanto U y V son clopens entonces $(U^c \cup V)^\circ = \overline{(U^c \cup V)} = \overline{(U \cap V^c)^c} = \overline{(U \cap V^c)}^c = (U \setminus V)^c$. Es decir que en τ_{cl} la frontera de un clopen coincide con el complemento de su frontera dual y viceversa.

Cada elemento clopen de un espacio topológico genera inmediatamente una disconexión del espacio. Es decir que la colección de clopens de cualquier espacio disconexo es un álgebra de bi-Heyting distinta de la cadena de dos elementos. Un espacio topológico con base de clopens nos mostraría un ejemplo de álgebra de bi-Heyting no trivial. Tales espacios también son denominados cero-dimensionales, un espacio cero-dimensional Hausdorff es totalmente disconexo.

Ejemplo 3.1.3. Un espacio de Cantor, es un espacio topológico homeomorfo a el conjunto de cantor 2^ω, el cual es el producto enumerable del conjunto de dos elementos. Todo espacio de Cantor posee una base de clopens, es decir es cero-dimensional. Ellos son caracterizados como aquellos espacios topológicos perfectos[1], compactos, totalmente disconexos y metrizables.

[1]Sin puntos aislados.

Algunos resultados de operadores modales que describiremos en el transcurso de esta sección, necesitan que el álgebra de bi-Heyting satisfaga la propiedad enunciada en la siguiente definición.

Ejemplo 3.1.4. $\mathcal{L}(\vee, \wedge, \rightarrow, -, \top, \perp)$ da a lugar un álgebra de bi-Heyting $(\mathcal{L}/\sim, \leq)$, al relacionar los ejemplos 2.3.7 y 2.2.6 en uno sólo.

Definición 3.1.2 ([Reyes y Zolfaghari 1996])**.** Sea (a_n) una sucesión de elementos de un álgebra de bi-Heyitng $\mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B}$ es un álgebra σ-completa si y sólo si para todo $b \in \mathfrak{B}$ tenemos que:

1. $b \leq \bigwedge_n a_n$ si y sólo si $b \leq a_n$ para todo n.
2. $\bigvee_n a_n \leq b$ si y sólo si $a_n \leq b$ para todo n.

Usaremos esta definición en 3.2.2

Teorema 3.1.5 ([Reyes y Zolfaghari 1996])**.** *Un álgebra de bi-Heyting $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Boole si y sólo si $\neg a = \sim a$ para todo a en $\mathfrak{B}$.*

Ejemplo 3.1.6. El siguiente ejemplo muestra un álgebra de bi-Heyting que es álgebra de Boole sólo en dos casos particulares. Cadenas con cero y uno en donde:

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } b < a \end{cases} \qquad a \setminus b = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq b \\ a & \text{si } b < a \end{cases}$$

Las negaciones quedan establecidas como:

$$\neg a = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \qquad \sim a = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 = a \\ 1 & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

Observemos que $\neg a = \sim a$ si y sólo si consideramos las cadenas de a lo sumo un elemento, de manera que por 3.1.5 sólo existen dos cadenas bi-Heyting y Boole a la vez.

Teorema 3.1.7. *Para todo $a \in \mathfrak{B}$ en un álgebra de bi-Heyting se tiene que $\neg a \leq \sim a$.*

Demostración. Consideremos $b, a \in \mathfrak{B}$ tales que $b \leq \neg a$, es decir, $b \leq a \rightarrow 0$, de donde por definición $b \wedge a \leq 0$. Uniendo a ambos miembros de la desigualdad $\sim a$, obtenemos $(b \wedge a) \vee \sim a \leq 0 \vee \sim a$. De donde, $b \leq \sim a$ y tomando $\neg a = b$ obtenemos el resultado. □

Conectando los resultados de secciones precedentes con el teorema anterior establecemos lo siguiente:

Teorema 3.1.8 ([Reyes y Zolfaghari 1996])**.** *Para todo $a \in \mathfrak{B}$ en un álgebra de bi-Heyting se tiene que $\neg \sim a \leq \sim \neg a$.*

En efecto, $\neg \sim a \leq \sim\sim a \leq a \leq \neg\neg a \leq \sim \neg a$.

3.2. Operadores modales

En la presente sección se construirán operadores modales de posibilidad ($\Diamond$) y necesidad ($\Box$) sobre álgebras de bi-Heyting. Todos los resultados de la presente sección estarán basados en el artículo [Reyes y Zolfaghari 1996] parte dos. Se realizarán algunas variaciones en la notación y en las pruebas al simplificarlas.

Definición 3.2.1. Sean $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. φ y ψ dos homomorfismos entre conjuntos parcialmente ordenados de P en Q y de Q en P respectivamente. Decimos que hay una conexión de Galois entre φ y ψ si para todo $p \in P$ y $q \in Q$ tenemos $\varphi(p) \leq_Q q$ si y sólo si $p \leq_P \psi(q)$.

Teorema 3.2.1. *Hay una conexión de Galois entre los operadores $\sim \neg$ y $\neg \sim$.*

Prueba. Si $\sim \neg a \leq b$, entonces $\sim b \leq \sim\sim \neg a \leq \neg a$, por lo que $a \leq \neg \sim b$. $\Box$

Pasemos a definir por recursión los operadores modales previstos, usando la negación y la co-negación de un álgebra de bi-Heyting. Veremos al finalizar que se puede mostrar un resultado que conecta $\Box$ y $\Diamond$ de la misma manera como sucede tradicionalmente en las lógicas modales (ver sección 1.2.4).

Definición 3.2.2. Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de bi-Heyting σ-completa, entonces:

1. $\Box_0 = \Diamond_0 = Id$
2. $\Box_{n+1} = \neg \sim \Box_n$
3. $\Diamond_{n+1} = \sim \neg \Diamond_n$

Teorema 3.2.2. *Para todo n se cumple que:*

1. *$\Box_n$ y $\Diamond_n$ preservan el orden.*
2. *$\Box_{n+1} \leq \Box_n \leq Id \leq \Diamond_n \leq \Diamond_{n+1}$.*
3. *Hay una conexión de Galois entre $\Diamond_n$ y $\Box_n$.*

Prueba.

1. Se sigue inmediato de los teoremas 2.3.8 y 2.2.9.
2. Se sigue de 3.1.8.
3. Si $\sim \neg a \leq b$, tenemos que $\sim \neg(\sim \neg a) \leq \sim \neg b$ y entonces $b \leq \sim \neg b \leq \neg \sim (\sim \neg a) \leq \sim \neg(\sim \neg a)$.

$\Box$

Definición 3.2.3. Sobre un álgebra σ-completa definamos:

1. $\Box a = \bigwedge_n \Box_n a$
2. $\Diamond a = \bigvee_n \Diamond_n a$

Caractericemos los operadores de posibilidad y necesidad mediante el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3. *En un álgebra de bi-Heyting σ-completa tenemos que:*

1. *$\Box a$ es el elemento complementado más grande tal que $x \leq a$.*
2. *$\Diamond a$ es el elemento complementado más pequeño tal que $a \leq x$.*

Prueba. Probemos primero que $\Box a$ es complementado. Supongamos $b \leq \Box_1 \Box a$, usando el teorema 3.2.2 dos veces obtenemos $\Diamond_1 b \leq \Box a$, $\Diamond_1 b \leq \Box_n a$ y $b \leq \Box_1 \Box_n a$ para todo n. Por definición y la propiedad de ser un álgebra σ-completa tenemos que $b \leq \Box_{n+1} a$ y $b \leq \Box a$. Por otro lado, como $\neg \sim \Box a \leq \neg \sim \Box a = \Box_1 \Box a$ el resultado anterior asegura $\neg \sim \Box a \leq \Box a$. Finalmente, usando el hecho de que $\Box a \leq \Box a$ podemos inferir que $\Box a \leq \neg \sim \Box a$, obteniendo la igualdad $\Box a = \neg \sim \Box a$. Esto implica que $0 = \neg \sim \Box a \wedge \sim \Box a = \Box a \wedge \sim \Box a$ y como $\Box a \vee \sim \Box a = 1$, $\Box a$ es complementado. De manera análoga se prueba que $\Diamond a$ es complementado.

Adicionalmente tenemos que si un elemento b del álgebra de bi-Heyting es complementado, entonces $\sim b = \neg b$, de donde $b = \neg \sim b = \sim \neg b$. Procediendo por inducción obtenemos que $b = \Box b = \Diamond b$.

Para terminar la prueba, sea c un elemento complementado tal que $\Box a \leq c$ y $c \leq a$. Usando resultados de la presente sección sabemos que $c = \Box c \leq \Box a$, de manera que $c = \Box a$. Dualmente se prueba para $\Diamond a$. $\Box$

Finalizaremos la sección mostrando cómo los operadores de posibilidad y necesidad sobre un álgebra de bi-Heyting σ-completa, caracterizados por el teorema anterior, se relacionan de manera análoga a cómo lo hacen los operadores similares de la lógica modal.

Teorema 3.2.4. *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de bi-Heyting σ-completa junto con los operadores $\Box$ y $\Diamond$ definidos en 3.2.2, entonces:*

1. *$\Box a = \sim \Diamond \sim a$*
2. *$\Diamond a = \neg \Box \neg a$*

Note adicionalmente que si a es complementado entonces $\Box a = \neg \Diamond \neg a$ y $\Diamond a = \neg \Box \neg a$.

Prueba.

1. Partiendo de $\Box \neg a \leq \neg a$, utilizando propiedades de $\neg$ y $\Diamond$, más el hecho de que $\Box \neg a$ es complementado, obtenemos que $a \leq \neg\neg a \leq \neg \Box \neg a$, $\Diamond a \leq \Diamond \neg \Box \neg a$, $\Diamond \neg \Box \neg a = \neg \Box \neg a$ y $\Diamond a \leq \neg \Box \neg a$. Por otro lado, usando el hecho de que $\neg \Diamond a$ es complementado y considerando propiedades de $\neg$ y $\Box$ tenemos que $a \leq \Diamond a$ implica $\neg \Diamond a \leq \neg a, \Box \neg \Diamond a \leq \Box \neg a, \neg \Diamond a \leq \Box \neg a$ y $\neg \Box \neg a \leq \Diamond a$.
2. Se prueba de manera dual a 1.

$\Box$

Al inicio de la sección hemos llamado a $\Box$ operador necesidad y a $\Diamond$ operador posibilidad. La siguiente tabla nos muestra que estos nombres se ajustan a su significado en lógica modal. La tabla muestra qué condiciones debe tener a para que cada una de las igualdades se obtenga. Por ejemplo, que la necesidad de a sea una contradicción depende de que a sea una contradicción o de que a no sea un teorema.

$=$	1	0
$\Box a$	$a=1$	$a=0$ o si $a \neq 0$, $a \neq 1$
$\Box\neg a$	$a=0$	$a \neq 0$
$\Box \sim a$	$a=0$	$a \neq 0$
$\Diamond a$	$a=1$ o si $a \neq 1$, $a \neq 0$	$a=0$
$\Diamond\neg a$	$a \neq 1$	$a=1$
$\Diamond \sim a$	$a \neq 1$	$a=1$

Los anteriores resultados dan lugar a herramientas para la identificación de traducciones entre $BiINT$ y alguna lógica modal. En el primer capítulo señalamos la traducción de INT a $S4$, de la misma manera podría realizarse una traducción entre $DualINT$ y algún sistema modal. De manera que debería ser posible construir una traducción de $BiINT$ en algún sistema modal.

Usando las traducciones definidas en las secciones 1.2.4 y 1.3.3 podemos prever que las siguientes dos traducciones establecen lo enunciado en el anterior párrafo.

- La aplicación $^\circ$ entre el lenguaje $\mathcal{L}(\vee, \wedge, —, \top)$ y $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \Diamond)$ (Recordemos que $\Box A = \neg\Diamond\neg A$) induce una función de traducción de $DualINT$ a $S4$.
  - $p^\circ = \Diamond p$
  - $(A \wedge B)^\circ = A^\circ \wedge B^\circ$
  - $(A \vee B)^\circ = A^\circ \vee B^\circ$
  - $(A—B)^\circ = \Diamond(A^\circ — B^\circ)$
  - $(\sim A)^\circ = \Diamond\neg(A^\circ)$[2]
  - $\Gamma^\circ = \{A^\circ : A \in \Gamma\}$
- La aplicación $^\sharp$ entre el lenguaje $\mathcal{L}(\vee, \wedge, —, \rightarrow, \bot, \top)$ y $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \Diamond, \Box)$ induce una función de traducción entre $BiINT$ y $S4$.
  - $p^\sharp = \Box p$
  - $(A \wedge B)^\sharp = A^\sharp \wedge B^\sharp$
  - $(A \vee B)^\sharp = A^\sharp \vee B^\sharp$
  - $(A—B)^\sharp = \Diamond(A^\sharp — B^\sharp)$
  - $(\sim A)^\sharp = \Diamond\neg(A^\sharp)$
  - $\Gamma^\sharp = \{A^\sharp : A \in \Gamma\}$
  - $(A \rightarrow B)^\sharp = \Box(A^\sharp \rightarrow B^\sharp)$
  - $(\neg A)^\sharp = \Box\neg(A^\sharp)$

[2]Recordemos que $\sim A := \top — A$

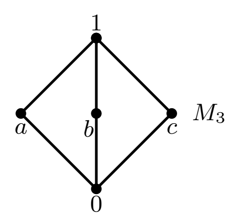
3.3. Topologías ordenadas

El teorema de representación de Stone permite representar clases de álgebras de Boole mediante clases de espacios topológicos. De manera que es posible preguntarse si existen teoremas de representación para otras álgebras. Los espacios espectrales y de Priestley responden el interrogante para el caso de los retículos distributivos con cero y uno. Usando bi-topologías es posible generalizar las definiciones de espacios de Stone y de Priestley y obtener resultados similares en relación con los retículos distributivos. Adicionalmente, mediante los espacios de Esakia es posible establecer dualidades con categorías cuyos objetos son álgebras de Heyting, co-Heyting y bi-Heyting. Describiremos en la presente sección los desarrollos hechos por Bezhanishvili y sus colaboradores en [Bezhanishvili et al. 2010]. Inicialmente mostraremos un ejemplo de espacio topológico ordenado que es a su vez Priestley y luego resumiremos los principales resultados publicados en [Bezhanishvili et al. 2010] sobre álgebras de Heyting.

Definición 3.3.1. Sea un conjunto parcialmente ordenado P. Denominamos topología del orden la topología generada por la sub-base cuyos elementos son $(a,\infty) = \{x \in P : a < x\}$ y $(-\infty, a) = \{x \in P : x < a\}$. $(P, \tau, \leq)$ bajo esta topología se llama espacio topológico ordenado.

Definición 3.3.2. Un subconjunto $(A, \leq) \subseteq (P, \leq)$ parcialmente ordenado es super-cerrado (sub-cerrado) si dado $x \in A$ entonces $x \leq y$ $(y \leq x)$ implica $y \in A$.

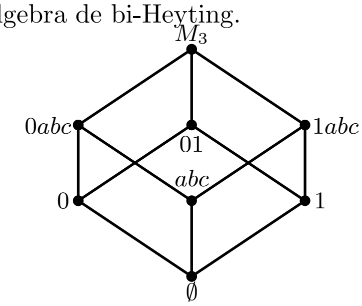
Ejemplo 3.3.1. Ilustremos, con un ejemplo nuestro, las anteriores dos definiciones sobre el retículo M_3. Por comodidad abreviaremos con $xyz...$ a los subconjuntos $\{x, y, z, ...\}$ de M_3. La figura muestra la notación adoptada para cada vértice.



Observemos que la topología τ_{M_3} para $(M_3, \tau_{M_3}, \leq)$ como espacio topológico ordenado corresponde a: $\{\emptyset, 0, 1, 01, abc, abc0, abc1, M_3\}$. Los super-conjuntos serán $\{\emptyset, 1, 1a, 1b, 1c, 1ab, 1ac, 1bc, 1abc, M_3\} = Up(M_3)$ y los sub-conjuntos son $\{\emptyset, 0, 0a, 0b, 0c, 0ab, 0ac, 0bc, 0abc, M_3\} = Dow(M_3)$. Notemos que tanto $Up(M_3)$ como $Dow(M_3)$ son también topologías sobre M_3 determinadas por su relación de orden $\leq$. También podemos observar que los abiertos pertenecientes a $Up(M_3)$ según τ_{M_3} son $\{\emptyset, 1, 1abc, M_3\} = OpUp(M_3)$, la cual coincide con la colección de cerrados en $Up(M_3)$, $ClUp(M_3)$. De nuevo obtenemos dos topologías que dependen de τ_{M_3}. Análogamente podemos construir las colecciones de abiertos sub-cerrados $OpDow(M_3)$, cerrados sub-cerrados $ClDow(M_3)$.

Todos los elementos de τ_{M_3} son clopens. Es decir que $(M_3, \tau_{M_3}, \leq)$ es disconexo, compacto y cero dimensional.

En la siguiente gráfica exhibimos el retículo por inclusión de los elementos de τ_{M_3}, el cual es un álgebra de bi-Heyting.



Observemos que los conjuntos super-cerrados quedaron en la frontera derecha y los sub-cerrados en la izquierda.

3.4. Representaciones en bi-topologías

La escritura de la presente sección esta basada exclusivamente en el artículo [Bezhanishvili et al. 2010], con variaciones en la adaptación al español de las definiciones y teoremas referenciados.

Definición 3.4.1. Un espacio topológico ordenado $(X, \tau, \leq)$ es un espacio de Priestley si es compacto y siempre que $y < x$ entonces existe un super-conjunto clopen A tal que $x \in A$ y $y \notin A$.

Ejemplo 3.4.1. $(M_3, \tau_{M_3}, \leq)$ es un espacio de Priestley.

Definición 3.4.2. Un espacio topológico (X, τ) compacto, Hausdorff y cero dimensional es un espacio de Stone.

Definición 3.4.3. Un espacio bi-topológico es un conjunto no vacío dotado de dos topologías. Lo denotaremos (X, τ_1, τ_2).

Existen varias maneras de describir la propiedades de los espacios bi-topológicos. Sin embargo, nos limitaremos a mostrar aquellas que se apellidan "*por parejas*" (en inglés se prefijan "*pairwise*").

Las siguientes tres definiciones nos permitirán generalizar la noción de espacio de Stone para espacios bi-topológicos.

Definición 3.4.4. (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por parejas si se tiene alguna de las siguientes condiciones. Dados dos puntos x, y de X:

1. existen disyuntos $U \in \tau_1$ y $V \in \tau_2$ tales que $x \in U$ y $y \in V$.

2. existen disyuntos $U \in \tau_2$ y $V \in \tau_1$ tales que $x \in U$ y $y \in V$.

Definición 3.4.5. (X, τ_1, τ_2) es cero dimensional por parejas si abiertos en (X, τ_1) y cerrados en (X, τ_2) forman una base para (X, τ_1) y si abiertos en (X, τ_2) y cerrados en (X, τ_1) forman una base para (X, τ_2).

Definición 3.4.6. (X, τ_1, τ_2) es compacto por parejas si para cada cubrimiento $\{U_i : i \in I\}$ de X con $U_i \in \tau_1 \cup \tau_2$ existe en $\tau_1 \cup \tau_2$ subcubrimiento finito de X.

Definición 3.4.7. Un espacio bi-topológico (X, τ_1, τ_2) compacto por parejas, Hausdorff por parejas y cero dimensional por parejas es un espacio de Stone por parejas.

En [Bezhanishvili et al. 2010] se construyen dos funtores mediante los cuales es posible establecer dualidades entre la categoría **Pries** de los espacios de Priestley y funciones continuas que preservan el orden, y la categoría **PStone** de los espacios de Stone por parejas y funciones bi-continuas (funciones continuas con respecto a las dos topologías). Igualmente se exhiben dualidades entre la categoría **DLat** (de los retículos distributivos con cero y uno y homomorfismos entre Posets) y **PStone**.

En efecto, para establecer el funtor entre **PStone** y **Pries** asociamos a cada espacio de Stone (X, τ_1, τ_2) el espacio de Priestley $(X, \tau, \leq)$ dotado de la topología $\tau_1 \cup \tau_2$. Dado que los espacios de Stone son cero dimensionales por parejas es posible definir $\leq$ sobre X mediante un orden que en [Bezhanishvili et al. 2010] llaman orden especializado de (X, τ) y que hace de X un espacio de Priestley. En la otra dirección, podemos establecer para un espacio $(X, \tau, \leq)$ de Priestley un espacio de Stone, al considerar sobre X las topologías $OpUp = \tau_1$ y $OpDow = \tau_2$. De manera que (X, τ_1, τ_2) es un espacio de Stone (en el ejemplo 3.3.1 se pueden observar construcciones sobre M_3 para estas topologías). Para los morfismos usamos la funciones bi-continuas y las funciones continuas que preservan el orden. Bajo estas relaciones funtoriales, **PStone** y **Pries** son isomorfas.

Por otro lado, es posible construir sobre cualquier retículo distributivo con cero y uno dos topologías τ_+ y τ_- sobre el conjunto de los filtros primos de L, $(pf(L))$. τ_+ depende de los conjuntos de filtros primos que contienen cierto elemento y τ_- depende de los conjuntos de filtros primos que excluyen cierto elemento. En [Bezhanishvili et al. 2010] se muestra que $(pf(L), \tau_+, \tau_-)$ es un espacio de Stone por parejas. También, dado un espacio de Stone por parejas (X, τ_1, τ_2) podemos asociar el retículo $(\beta_1, \cap, \cup, \emptyset, X)$ distributivo con cero y uno. Usando homomorfismos entre Posets y funciones bi-continuas es posible establecer un funtor entre **PStone** y **DLat** y otro entre **DLat** y **PStone** que hacen estas dos categorías dualmente equivalentes.

Culminamos la sección presentando las ideas expuestas en [Bezhanishvili et al. 2010] sobre dualidades entre las siguientes nueve categorías, mediante los teoremas 3.4.2 y 3.4.3. Las definiciones 3.4.8, 3.4.9 y 3.4.10 nos mostrarán detalles en la formalización de las categorías.

Categoría	Objetos	Morfismos
Heyt	álgebras de Heyting	morfismos Heyting
coHeyt	álgebras de co-Heyting	morfismos co-Heyting
biHeyt	álgebras de bi-Heyting	morfismos bi-Heyting
Esa	espacios de Esakia	morfismos Esakia
coEsa	espacios de co-Esakia	co-morfismos Esakia
biEsa	espacios de bi-Esakia	bi-morfismos Esakia
HPStone	espacios bi-topológicos Heyting	morfismos Heyting bi-continuos
coHPStone	espacios bi-topológicos co-Heyting	morfismos co-Heyting bi-continuos
biHPStone	espacios bi-topológicos bi-Heyting	morfismos bi-Heyting bi-continuos

Definición 3.4.8 ([Bezhanishvili et al. 2010])**.** Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley entonces,

1. $(X, \tau, \leq)$ es un espacio de Esakia si $A \in Cp(X)$ implica $\downarrow A \in Cp(X)$.
2. $(X, \tau, \leq)$ es un espacio de co-Esakia si $A \in Cp(X)$ implica $\uparrow A \in Cp(X)$.
3. $(X, \tau, \leq)$ es un espacio de bi-Esakia si es a la vez espacio Esakia y co-Esakia.

$Cp(X)$ es la colección de subconjuntos clopens de X, $\downarrow A = \{x : x \leq y$ para algún $y \in A\}$ y $\uparrow A = \{x : y \leq x$ para algún $y \in A\}$.

Teorema 3.4.2.

1. ***Heyt*** *es dualmente equivalente a* ***Esa****.*
2. ***coHeyt*** *es dualmente equivalente a* ***coEsa****.*
3. ***biHeyt*** *es dualmente equivalente a* ***biEsa****.*

En [Esakia 1974] se otorga una prueba de la dualidad entre **Esa** y **Heyt** usando los "morfismos Esakia", los cuales se establecen desde la noción de p-homomorfismo, entendido como un homomorfismo de X en X' tal que para cada $x \in X$ y $x' \in X'$, si $f(x) \leq x'$ se sigue que existe $y \in X$ tal que $x \leq y$ y $f(y) = x'$. Dualmente establecemos los "co-morfismos Esakia" y "bi-morfismos Esakia", con los que en [Esakia 1975] se exhiben dualidades entre espacios de co-Esakia y bi-Esakia, y álgebras de co-Heyting y bi-Heyitng respectivamente.

Definición 3.4.9 ([Bezhanishvili et al. 2010])**.**

1. (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi-topológico Heyting si $A \in DPC(X)$ implica $Cl_1(A) \in DPC(X)$.

2. (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi-topológico co-Heyting si $A \in DPC(X)$ implica $Cl_2(A) \in DPC(X)$.

3. (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi-topológico bi-Heyting si es a la vez espacio bi-topológico de Heyting y co-Heyting.

$Cl_1(A)$ y $Cl_2(A)$ son la clausura de A con respecto a τ_1 y τ_2 respectivamente. Un subconjunto Y de X es "doble compacto por parejas" si tanto Y como Y^c son compactos por parejas vistos como subespacios bi-topológicos de X, $DPC(X)$ es la colección de subconjuntos doble compactos por parejas de X .

Definición 3.4.10 ([Bezhanishvili et al. 2010])**.**

1. Una función f de X en X' dos espacios bi-topológicos Heyting es un "morfismo Heyting" si f es bi-continua y $f(Cl_2(x)) = Cl'_2(f(x))$ para cada $x \in X$.

2. Una función f de X en X' dos espacios bi-topológicos co-Heyting es un "morfismo co-Heyting" si f es bi-continua y $f(Cl_1(x)) = Cl'_1(f(x))$ para cada $x \in X$.

3. Una función f de X en X' dos espacios bi-topológicos bi-Heyting es un "morfismo bi-Heyting" si f es morfismo Heyting y co-Heyting.

Teorema 3.4.3 ([Bezhanishvili et al. 2010])**.**

1. *Las categorías **Heyt** y **HPStone** son isomorfas.*

2. *Las categorías **coHeyt** y **coHPStone** son isomorfas.*

3. *Las categorías **biHeyt** y **biHPStone** son isomorfas.*

Bibliografía

[Arruda 1980] Arruda, A., "A survey of paraconsistent logic", *Mathematical logic in latin america*, (1980):1-41.

[Balbes and Dwinger 1974] Balbes, R. y Dwinger, P., *Distributive Lattices*, Missouri: University of Missouri Press, 1974.

[Bezhanishvili et al. 2010] Bezhanishvili, N., Bezhanishvili, G., Gabelaia, D., y Kurz, A., "Bitopological duality for distributive lattices and Heyting Algebras", *Mathematical Structures in Computer Science*, http://www.cs.le.ac.uk/people/nb118/Publications/PairwiseStone.pdf, 20(2010):1-35.

[Bezhanishvili y de Jongh 2006] Bezhanishvili, N. y de Jongh, D., *Intuitionistic Logic*, Amsterdam: Institute for Logic, Language and Computation, http://www.cs.le.ac.uk/people/nb118/Publications/ESSLLI %2705.pdf, 2006.

[Boole 1984] Boole, G., *El análisis matemático de la lógica*, Madrid: Ediciones Cátedra, 1984.

[Brunner y Carnielli 2005] Andreas B. y Carnielli, W., "Anti-intuitionism and paraconsistency", Technical report, *Journal Applies Logic*, 1(3)(2005):161-184.

[Carnielli y Marcos 1999] Carnielli, W. y Marcos, J., "Limits for paraconsistent calculi", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 3(40)(1999):375-390.

[da Costa 1974] da Costa, N. C., "On the theory of inconsistent formal systems", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 4(15)(1974):497-510.

[Epstein 1990] Epstein, R. L., *The semantic foundations of logic*, Boston: Kluwer academic publishers, 1990.

[Esakia 1974] Esakia, L., “Topological kripke models”, *Soviet Math Dokl*, 15(1974):147-151.

[Esakia 1975] Esakia, L., “The problem of dualism in the intuitionistic logic and browerian lattices”, *Internacional Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Canada, (1975):7-8

[Goodman 1981] Goodman, N. D., “The logic of contradiction”, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 27(8-10)(1981):119-126.

[Goré and Postniece 2007] Goré, R. and Postniece, L., “A cut-free sequent calculus for bi-intuitionistic logic”, *Lecture Notes in Computer Science*, (4548)(2007):90-106.

[Goré et al. 2008] Goré, R., Postniece, L., y Tiu, A., “Cut-elimination and proof-search for bi-intuitionistic logic using nested sequents”, *Advances in Modal Logic*, (7)(2008):43-66.

[Heyting 1976] Heyting, A., *Introducción al intuicionismo*, Madrid: Tecnos, 1976.

[Marconi y da Costa 1989] Marconi, D. y da Costa, N. C. A., “An overview of paraconsistent logic in the 80’s”, *The Journal of Non-Classcal Logic*, 1(6)(1989):5-31.

[Osorio 2007] Osorio, M., preprint, “Programas lógicos disyuntivos y la demostrabilidad de Átomos en C_ω”, *5° Mexican Internantional Conference on Artificial Intelligence*, (2007).

[Priest 2002] Priest, G., “Paraconsistent Logic” *Handbook of Philosophical Logic volume 6*, (2002):287-390.

[Rauszer 1974] Rauszer, C., “A formalization of the propositional calculus of H-B logic”, *Stuida Logic: AN International Journal for Sybolic Logic*,33(1)(1974):23-34.

[Rauszer 1977] Rauszer, C., “Aplications of de kripke models to heyting-brouwer logic”, *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, 36(1)(1997):61-71.

[Reyes y Zolfaghari 1996] Reyes, G. y Zolfaghari, H., “Bi-heyting algebras, toposes and modalities”, *Journal of Philosophical Logic*, 25(1996):25-43.

[Urbas 1989] Urbas, I., “Paraconsistency and the c-systems of da costa”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30(4)(1989):583-585.

[Zalamea 2009] Zalamea, F., *Filosofía sintética de las matemáticas contemporaneas*, Bogotá: Editorial Unversidad Nacional de Colombia – Colección Obra Selecta, 2009.