

GENERALIDADES DE UN MODELO DE
SIMULACIÓN ESTOCÁSTICO PARA LA
CONTAMINACIÓN DEL AIRE POR
PARTÍCULAS DE MATERIA

Biviana Marcela Suárez Sierra
bmsuarezs@unal.edu.co
Directora: Profesora Liliana Blanco Castañeda
lblancoc@unal.edu.co
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ciencias
Departamento de Matemáticas

9 de febrero de 2010

Agradecimientos

Quiero dar mis agradecimientos por este logro alcanzado a personas que fueron fundamentales en mi carrera profesional. Primero que todo a Dios por darme la salud necesaria para llevar a feliz termino el presente trabajo, a la Universidad Nacional de Colombia (UNAL) por todos los espacios proporcionados en mi proceso de aprendizaje; a mi directora de trabajo final por el apoyo y guía incondicional para hacer posible el presente trabajo; al CIMAT (Centro de investigación en Matemáticas de México) y a los profesores José Alfredo López Mimbela y Luis Gorostiza, por brindarme las bases teóricas que soportan el presente trabajo; a William Oquendo estudiante del doctorado en física de la UNAL de Bogotá y miembro del grupo de simulación de la misma por su colaboración en la simulación que se presenta al final; a mi familia, en especial a mi abuela por la paciencia y el acompañamiento durante todo el proceso y en general, a todos los que me tendieron su mano y me escucharon.

Prefacio

Uno de los problemas más graves que afecta actualmente a las grandes ciudades es el problema de la contaminación del aire. Por esta razón es de sumo interés poder desarrollar modelos matemáticos, tanto de tipo determinístico como estocástico que expliquen el comportamiento de las partículas contaminantes, desde el punto de vista de su distribución, con el fin de poder tomar medidas de prevención para proteger a un gran porcentaje de población vulnerable a enfermedades del sistema respiratorio, de la visión y de la piel, entre otros. En el presente trabajo se presentarán inicialmente, en los capítulos 1 y 2, los conceptos y resultados básicos de las teorías de semi-grupos, procesos de Markov y procesos de ramificación necesarios para la formulación de los modelos estocásticos de contaminación ambiental a considerar. En el capítulo 3 se estudiarán en detalle algunos procesos clásicos de contaminación de tipo determinístico. Se expondrán las propiedades de cada uno de ellos y se discutirán las ventajas y desventajas de su aplicación. En el capítulo 4 se presentará el modelo estocástico de contaminación ambiental propuesto por Gorostiza et.al, el cual busca determinar la distribución del tamaño y de la localización de las partículas contaminantes del aire. En el capítulo 5 se presentan las conclusiones. Se incluye un apéndice que contiene los resultados acerca de filtros de Kalman necesarios para el desarrollo de la presente tesis y unos anexos que muestran una simulación sencilla de algunos resultados teóricos.

Índice general

Agradecimientos	I
Prefacio	III
1. PRELIMINARES	3
1.1. INTRODUCCIÓN	3
1.2. PROCESOS DE MARKOV, CONCEPTOS BÁSICOS	4
1.2.1. Procesos de Markov y familias de Markov	4
1.2.2. Funciones de transición de un proceso de Markov	5
1.2.3. Familias de Markov	6
1.3. FAMILIA DE OPERADORES ASOCIADOS A PROCESOS DE MARKOV	8
1.3.1. Operadores conectados con la función de transición del proceso de Markov	9
1.3.2. Propiedades del operador P^{st} en el espacio B	11
1.3.3. Operadores en el espacio V	11
1.3.4. Propiedades de los operadores P^{st} en el espacio V	11
1.3.5. Significado probabilístico de P^{st}	12
1.3.6. Familia Markov-Feller	13
1.3.7. Correspondencia entre las familias Feller-Markov y las familias de operadores P^{st}	14
1.3.8. Familias de Markov homogéneas	18
1.4. OPERADORES INFINITESIMALES	19
1.4.1. Operador Infinitesimal de un Semigrupo	19
1.4.2. Operadores infinitesimales en B_0	20
1.4.3. El espacio D_A	22
1.4.4. Principio del máximo	23
1.4.5. Una clase importante de semigrupos	23
1.4.6. Operadores infinitesimales sobre espacios de medidas	24

1.5.	RESOLVENTE, TEOREMA DE HILLE-YOSIDA	25
1.5.1.	Resolvente de un semigrupo de operadores	25
1.5.2.	Operador inverso de R_λ sobre B_0	27
1.5.3.	Teorema de Hille-Yosida	30
2.	MODELOS ESTOCÁSTICOS	31
2.1.	ANTECEDENTES	31
2.2.	CONCEPTOS BÁSICOS	33
2.2.1.	El proceso de Galton-Watson	34
2.2.2.	El proceso de Bellman-Harris	41
2.3.	Teoría de renovación	46
2.4.	Comportamiento Asintótico de $M(t) := EZ_t$	49
2.5.	El proceso inmerso de Galton-Watson	53
2.6.	Procesos de ramificación con estado continuo	54
3.	MODELOS DETERMINISTAS	59
3.1.	MODELOS MATEMÁTICOS DE DISPERSIÓN DEL TIPO ESTADÍSTICO (MMDE)	64
3.2.	MODELOS MATEMÁTICOS DE DISPERSIÓN DEL TIPO DETERMINÍSTICO (MMDD)	66
3.2.1.	Modelos Eulerianos	67
3.2.2.	Modelos de caja	68
3.2.3.	Modelos Lagrangianos	70
3.2.4.	Modelos Gaussianos	72
4.	MODELO ESTOCÁSTICO DE CONTAMINACIÓN AM- BIENTAL	77
4.1.	Transporte de partículas de materia y contaminación de aire .	78
4.2.	El modelo	79
4.3.	Simulación	89
4.3.1.	programa para la generación de la distribución de partícu- las	89
4.3.2.	Resultados de la simulación	93
4.3.3.	Resultados cuantitativos	96
5.	CONCLUSIONES	97
A.	FILTROS DE KALMAN	99

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. INTRODUCCIÓN

Reconociendo la importancia de la teoría de los semigrupos en la estructura de modelos matemáticos que describen procesos en fenómenos naturales, inmersos en un contexto aleatorio, como el que se expondrá en el capítulo 4 del presente trabajo, se presentan a continuación algunos conceptos, propiedades y relaciones de los semigrupos de operadores lineales y la relación que estos tienen con los procesos de Markov.

Se empezará por la definición y propiedades de un proceso de Markov, sobre el cual se define una familia de Markov, entendida como un conjunto de variables aleatorias sobre una σ -álgebra específica con una función de transición determinada, para luego presentar la relación entre las familias de operadores lineales con los procesos de Markov sobre dos espacios de Banach B y V . El primero, contiene todas las funciones numéricas acotadas y el segundo, es el espacio de todas las funciones numéricas aditivas de conjuntos o cargas sobre el espacio medible (X, \mathfrak{B}) , cada uno con una norma específica.

El concepto de operador P^{st} y sus propiedades sobre cada uno de los espacios B y V respectivamente, se proporciona para establecer una correspondencia entre una familia de Markov con una familia de operadores dada.

Por consiguiente se define el operador lineal como una característica importante que especifica, el semigrupo de operadores conectado con una familia de Markov, definiéndose así el espacio B_0 donde están definidos los operadores infinitesimales y finalmente, se establece el importante concepto

de la resolvente y el teorema de Hille-Yosida, pues es por la resolvente que en la mayoría de los casos se logra determinar de manera única un semigrupo de operadores P^t sobre el espacio B_0 .

1.2. PROCESOS DE MARKOV, CONCEPTOS BÁSICOS

1.2.1. Procesos de Markov y familias de Markov

A continuación se explica qué se entiende por proceso estocástico de Markov o simplemente proceso de Markov. Consideremos un espacio medible (X, \mathfrak{B}) en el cual todos los conjuntos unitarios son medibles. Podemos llamar a éste conjunto el espacio de fase. Los puntos en el espacio de fase se llaman estados. Ésta terminología proviene de la física; el valor de una variable aleatoria ξ_t es interpretado como el estado de algunos, tal vez sistemas físicos al tiempo t .

Consideremos un proceso aleatorio $\xi_t, t \in T \subseteq \mathbb{R}^1$ con valores en el espacio de fase (X, \mathfrak{B}) . Para algún $t \in T$, se introducen ahora las σ -álgebras $\mathfrak{F}_{\leq t}, \mathfrak{F}_{\geq t}$ y $\mathfrak{F}_{=t}$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_T &= \sigma\{\xi_t, t \in T\}, & \mathfrak{F}_{\leq t} &= \sigma\{\xi_s, s \leq t\} \\ \mathfrak{F}_{\geq t} &= \sigma\{\xi_s, s \geq t\}, & \mathfrak{F}_{[s,t]} &= \sigma\{\xi_u, s \leq u \leq t\}\end{aligned}$$

Definición 1 (Proceso de Markov). El proceso aleatorio ξ_t es llamado proceso de Markov si, para algún $t \in T$ y algún $A \in \mathfrak{F}_{\leq t}, B \in \mathfrak{F}_{\geq t}$, tenemos

$$P(AB \mid \mathfrak{F}_{=t}) = P(A \mid \mathfrak{F}_{=t})P(B \mid \mathfrak{F}_{=t}) \quad (1.1)$$

casi seguramente. Es decir, conociendo el presente, el futuro es independiente del pasado.

Observamos que en virtud de la simetría de la ecuación (1.1), si $\xi_t, t \in T$ es un proceso de Markov, el proceso con tiempo reverso $\xi_{-t}, t \in -T$ es también un proceso de Markov.

La ecuación (1.1) es equivalente a alguna de las siguientes dos expresiones:

Para algún $t \in T$ y $B \in \mathfrak{F}_{\geq t}$ casi seguramente

$$P(B \mid \mathfrak{F}_{\leq t}) = P(B \mid \mathfrak{F}_{=t}) \quad (1.2)$$

Para algún $t \in T$ y $A \in \mathfrak{F}_{\leq t}$ casi seguramente

$$P(A \mid \mathfrak{F}_{\geq t}) = P(A \mid \mathfrak{F}_{=t}) \quad (1.3)$$

Un proceso de Markov definido sobre un conjunto T de números enteros, es decir, una sucesión de Markov, se llama cadena de Markov. Las cadenas de Markov discretas, es decir, cadenas para las cuales X es un conjunto finito o numerable (y la σ -álgebra es por supuesto, la σ -álgebra de todos sus subconjuntos) son particularmente simples. Las cadenas discretas contienen cadenas finitas (para las cuales el espacio de fase es finito).

Otra clase importante de procesos de Markov es la de procesos con tiempo continuo ($T = [0, \infty)$ o $T = (-\infty, \infty)$), pero con X finito o numerable. Estos son algunas veces llamados cadenas de Markov (discretas) con tiempo continuo.

Para cadenas de Markov discretas con tiempo discreto o continuo, la propiedad de Markov puede ser definida sin la probabilidad condicional con respecto a las σ -álgebras $\mathfrak{F}_{\leq t}$, $\mathfrak{F}_{\geq t}$ o $\mathfrak{F}_{=t}$, de la siguiente manera:

Para cualquier $s_1 \leq \dots \leq s_m \leq t \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $s_i, t, t_i \in T$ y cualquier $x_1 \leq \dots \leq x_m \leq x \leq y_1 \leq \dots \leq y_n \in X$ tal que $P\{\xi_t = x\} \neq 0$, se debe tener

$$\begin{aligned} P\{\xi_{s_1} = x_1, \dots, \xi_{s_m} = x_m, \xi_{t_1} = y_1, \dots, \xi_{t_n} = y_n \mid \xi_t = x\} = \\ P\{\xi_{s_1} = x_1, \dots, \xi_{s_m} = x_m \mid \xi_t = x\} P\{\xi_{t_1} = y_1, \dots, \xi_{t_n} = y_n \mid \xi_t = x\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.2.2. Funciones de transición de un proceso de Markov

Definición 2 (Función de transición del proceso de Markov). Decimos que una función $P(s, x, t, \Gamma)$ definida para $s, t \in T$, $s \leq t$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ es la función de transición del proceso de Markov ξ_t , $t \in T$ si

1. Para s, t, x fijas, la función $P(s, x, t, \bullet)$ es medida de probabilidad sobre la σ -álgebra \mathfrak{B} .
2. Para s, t, Γ fijas, la función $P(s, \bullet, t, \Gamma)$ es medible con respecto a la σ -álgebra \mathfrak{B} .
3. $P(s, x, s, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$, donde $\delta_x(\Gamma)$ es la función delta de Dirac sobre Γ .

4. Para algún $s \leq t$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$,

$$P\{\xi_t \in \Gamma \mid \xi_s\} = P(s, \xi_s, t, \Gamma), \text{ casi seguramente} \quad (1.5)$$

Observe que la medibilidad del lado derecho de la ecuación (1.5) con respecto a la σ -álgebra $\sigma(\xi_s)$ se sigue automáticamente de la condición 2 de la definición 2.

Las condiciones 1. a 3. dadas de la definición 2 son impuestas sólo sobre la función $P(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet)$, y no involucra el proceso aleatorio $\xi_t(\omega)$, mientras que 4. de la misma definición hace la conexión entre estos dos objetos.

De las ecuaciones (1.2) y (1.5):

$$P\{\xi_t \in \Gamma \mid \mathfrak{F}_{\leq s}\} = P(s, \xi_s, t, \Gamma), \text{ casi seguramente} \quad (1.6)$$

La ecuación (1.5) puede ser escrita de manera diferente sin alterar su significado.

$$P(s, x, t, \Gamma) = P\{\xi_t \in \Gamma \mid \xi_s = x\} \quad (1.7)$$

Es decir, el lado izquierdo es una probabilidad condicional. Así, el valor de la función de transición $P(s, x, t, \Gamma)$ puede ser interpretado como la probabilidad condicional que, al tiempo t , el sistema esté en un estado de Γ , dado que al tiempo s anterior a t , el sistema estuvo en el estado x .

1.2.3. Familias de Markov

Podemos definir ahora una familia de Markov de procesos aleatorios (brevemente una familia de Markov). Este concepto surge de la idea de movimiento aleatorio, en un sistema físico, que inicia en un punto arbitrario del espacio de fase.

Dados un conjunto T sobre el eje real, un espacio de fase (X, \mathfrak{B}) , una función dada $P(s, x, t, \Gamma)$ que satisface las condiciones (1)-(3) de la anterior sección, un espacio Ω de eventos y una función arbitraria $\xi_t(\omega)$ sobre $T \times \Omega$, asumiendo valores en X , asociamos una σ -álgebra definida en la sección (1.2.1) a $\xi_t(\omega)$ para hacer de $\xi_t(\omega)$ un proceso estocástico.

Definición 3 (Familia de Markov). Asumimos que para cada $s \in T$ y cada $x \in X$, una medida de probabilidad $P_{s,x}$ es definida sobre la σ -álgebra

$\mathfrak{F}_{\geq s}$. Decimos que el conjunto $(\xi_t(\omega), P_{s,x})$ es una familia de Markov si para algún s, x se satisface:

1. El proceso aleatorio $\xi_t(\omega)$, $t \in T \cap [s, \infty)$ sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}_{\geq s}, P_{s,x})$ es un proceso de Markov.
2. Este proceso de Markov tiene una función de transición.
3. $P_{s,x}\{\xi_s = x\} = 1$.

A continuación se dan detalles de la anterior definición.

Requerimos que la familia de procesos (ξ_t) , $t \in T \cap [s, \infty)$ tenga las siguientes propiedades sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}_{\geq s}, P_{s,x})$:

1. La familia es una familia de procesos de Markov, es decir, para todo s, t , $t \geq s$, $A \in \mathfrak{F}_{[s,t]}$, $B \in \mathfrak{F}_{\geq t}$, se tiene que

$$P_{s,x}(AB \mid \xi_t) = P_{s,x}(A \mid \xi_t)P_{s,x}(B \mid \xi_t) \quad (1.8)$$

$P_{s,x}$ -casi seguramente.

2. Esta familia de procesos aleatorios debe ser una familia de procesos de Markov con una función de transición común $P(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet)$ es decir, para $s \leq t \leq u$ de T y para algún $x \in X$ y $\Gamma \in \mathfrak{B}$ se satisface que

$$P_{s,x}\{\xi_u \in \Gamma \mid \mathfrak{F}_{[s,t]}\} = P(t, \xi_t, u, \Gamma) \quad (1.9)$$

Observamos que esta expresión es independiente no sólo del comportamiento del proceso sobre el segmento entre s y t , con excepción del último punto, si no también de s y de x .

3. La condición 3. significa que con probabilidad 1 (seguramente) el proceso inicia en el estado x al tiempo s

Las ecuaciones (1.8) y (1.9) pueden ser escritas en forma integral si se recuerda la definición de probabilidad condicional con respecto a una σ -álgebra. Por ejemplo la ecuación (1.9) significa que, para algún $A \in \mathfrak{F}_{[s,t]}$

$$P_{s,x}(A \cap \{\xi_u \in \Gamma\}) = \int_A P(t, \xi_t(\omega), u, \Gamma) P_{s,x}(d\omega). \quad (1.10)$$

En particular, si tomamos todo Ω por A y hacemos $t = s$ y si tomamos t en vez de u , obtenemos

$$P_{s,x}\{\xi_t \in \Gamma\} = \int_{\Omega} P(s, \xi_s(\omega), t, \Gamma) P_{s,x}(d\omega). \quad (1.11)$$

Ya que por la condición 3. de la definición de familia de Markov, tenemos que $\xi_s = x$ casi seguramente ($P_{s,x}$), el integrando es igual a $P(s, x, t, \Gamma)$ casi en cualquier parte, y esto significa que

$$P_{s,x}(A \cap \{\xi_u \in \Gamma\}) = P(s, x, t, \Gamma). \quad (1.12)$$

La función de transición está determinada de manera única para una familia de Markov, no por un proceso individual.

Ejemplo 1. Consideremos la familia $(W_t)_{t \geq 0}$ con función de transición dada por:

$$p(s, x, t, y) = [2\pi(t-s)]^{-\frac{r}{2}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2(t-s)}}$$

es decir, con función de transición

$$p(s, x, t, \Gamma) = [2\pi(t-s)]^{-\frac{r}{2}} \int_{\Gamma} e^{-\frac{|y-x|^2}{2(t-s)}} dy, \quad s < t.$$

$(W_t)_t$ se llama proceso de Wiener.

1.3. FAMILIA DE OPERADORES ASOCIADOS A PROCESOS DE MARKOV

Sea (X, \mathfrak{B}) un espacio medible. Podemos asociar con éste dos espacios de Banach (un espacio lineal, normado y completo). El primero, B , es el espacio de todas las funciones numéricas \mathfrak{B} -medibles acotadas $f(x)$ sobre X con la norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. El segundo, V , es el espacio de todas las funciones numéricas aditivas numerables del conjunto (medidas con signo o cargas), definidas sobre la σ -álgebra \mathfrak{B} . Para la norma del elemento $v \in V$, se toma su variación total sobre su espacio entero: $\|v\| = |v|(X) = v^+(X) + v^-(X)$.

Para establecer una relación entre los espacios B y V definimos:

$$\begin{aligned} \langle v, f \rangle &= \int_X f(x)v(dx) \\ &= \int_X f(x)v^+(dx) - \int_X f(x)v^-(dx) \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.3. FAMILIA DE OPERADORES ASOCIADOS A PROCESOS DE MARKOV9

donde $v = v^+ - v^-$ es la expansión de Jordan. Asociamos cada elemento $v \in V$ con la funcional $\langle v, \bullet \rangle$ sobre B y a cada elemento $f \in B$ asociamos una funcional $\langle \bullet, f \rangle$ sobre V . Así, obtenemos una relación natural de V en B^* entendido como el espacio conjugado de B (es decir, el conjunto de todas las funcionales lineales continuas sobre B), y de B en V^* (espacio conjugado de V).

La norma del elemento y la norma de la correspondiente función lineal coinciden.

$$\|v\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle v, f \rangle|, \quad (1.14)$$

$$\|f\| = \sup_{\|v\|=1} |\langle v, f \rangle|, \quad (1.15)$$

Si T es un operador definido sobre el espacio B entonces se escribirá $T(f)$ con $f \in B$ como sigue:

$$T(f) = Tf$$

Si T es un operador definido sobre el espacio V entonces convendrá escribir $T(v)$, $v \in V$ como sigue:

$$T(v) = vT$$

1.3.1. Operadores conectados con la función de transición del proceso de Markov

Podemos definir operadores P^{st} conectados con la función de transición del proceso de Markov, la medibilidad de los primero se tiene a partir de la medibilidad de la función de transición. Se comienza por introducir los operadores P^{st} , $s \leq t$, $s, t \in T$ sobre el espacio B

Definición 4 (Definición del operador P^{st} sobre B). Para $f \in B$, se define $P^{st}f$ como una función cuyo valor en el punto x está dado por

$$P^{st}f(x) = \int_X P(s, x, t, dy) f(y) \quad (1.16)$$

Aquí la existencia de la integral es garantizada por el hecho de que $P(s, x, t, \bullet)$ es una medida finita; la X -medibilidad de $P^{st}f$ es garantizada por la medibilidad de $P(s, \bullet, t, \Gamma)$.

Observese que diferentes familias de operadores corresponden a diferentes funciones de transición. Sin embargo, no toda familia de operadores posee una función de transición.

Ejemplo 2. Para el caso del proceso Wiener se tiene que la familia de operadores asociada a su función de transición es (P^{st}) con

$$P^{st}f = \int_{\mathbb{R}} p(s, x, t, y) f(y) dy = [2\pi(t-s)]^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}} f(y) dy \quad (1.17)$$

Este ejemplo está basado en los operadores integrales simples.

Las propiedades del operador P^{st} son: Es claro de la definición del operador P^{st} que éstos son operadores lineales. Ya que $P(s, x, t, \bullet)$ es una medida, se sigue que el operador P^{st} transforma funciones no negativas en funciones no negativas. Por otra parte, como $P(s, x, t, \bullet)$ es una medida de probabilidad entonces para toda $f \in B$ se tiene que.

$$|P^{st}f(x)| \leq \int_X P(s, x, t, dy) \|f\| = \|f\| \quad (1.18)$$

De lo anterior se sigue que $P^{st}1 \equiv 1$ y que $\|P^{st}f\| \leq \|f\|$ o $\|P^{st}\| \leq 1$. De $P(s, x, s, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$, encontramos que P^{ss} es el operador identidad. De la ecuación de Chapman-Kolmogorov se obtiene que: Para $s \leq t \leq u$

$$\begin{aligned} P^{su}f(x) &= \int_X P(s, x, u, dz) f(z) \\ &= \int_X \int_X P(s, x, t, dy) P(t, y, u, dz) f(z) \\ &= \int_X P(s, x, t, dy) \int_X P(t, y, u, dz) f(z) \\ &= P^{st}(P^{tu}f)(x) \end{aligned}$$

En otras palabras, $P^{su} = P^{st} \cdot P^{tu}$

Definición 5 (Contracción). Un operador A en un espacio de Banach se llama contracción si $\|A\| \leq 1$.

Así nosotros podemos establecer las siguientes propiedades de los operadores P^{st} en el espacio B .

1.3. FAMILIA DE OPERADORES ASOCIADOS A PROCESOS DE MARKOV 11

1.3.2. Propiedades del operador P^{st} en el espacio B

1. P^{st} son operadores lineales.
2. P^{st} son contracciones, es decir, $\|P^{st}\| \leq 1$
3. P^{st} son operadores que preservan el signo de un elemento, es decir, ellos transforman elementos positivos en elementos positivos.
4. $P^{st}1 \equiv 1$.
5. $P^{ss} = E$ el cual es el operador identidad.
6. $P^{su} = P^{st} \cdot P^{tu}$ para $s \leq t \leq u$.

1.3.3. Operadores en el espacio V

Se denotaran los operadores en el espacio V por P^{st} , siendo $s \leq t$ y $t \in T$. Para diferenciar la notación de la dada para los operadores en el espacio B , convendremos en colocar a $v \in V$ en el lugar izquierdo del operador. Esto es, se define:

$$vP^{st}(\Gamma) = \int_X v(dx)P(s, x, t, \Gamma) \quad (1.19)$$

La existencia de esta integral es garantizada por la x -medibilidad de las probabilidades de transición. El hecho de que $P(s, x, t, \Gamma)$ sea una medida de probabilidad implica que $\|vP^{st}\| < \|v\|$ y $vP^{st}(X) = v(X)$.

1.3.4. Propiedades de los operadores P^{st} en el espacio V

1. P^{st} son operadores lineales.
2. P^{st} son contracciones
3. P^{st} son operadores los cuales preservan el signo de un elemento, es decir, ellos transforman elementos positivos en elementos positivos.
4. $vP^{st}(X) = v(X)$, en particular, las medidas de probabilidad son transformadas en medidas de probabilidad.
5. $P^{ss} = E$, el cual es el operador identidad.
6. $P^{su} = P^{st} \cdot P^{tu}$ para $s \leq t \leq u$.

La ecuación de Chapman-Kolmogorov en este caso, es

$$vP^{su} = (vP^{st})P^{tu} \quad (1.20)$$

para $s \leq t \leq u$, o

$$P^{su} = P^{st} \cdot P^{tu} \quad (1.21)$$

Los operadores P^{st} en los espacios V y B están relacionados, de la siguiente manera: para $f \in B$, $v \in V$,

$$\langle v, P^{st} f \rangle = \langle vP^{st}, f \rangle \quad (1.22)$$

La validez de la ecuación (1.22) se sigue del hecho de que ambos lados son iguales a

$$\int_X \int_X v(dx) P(s, x, t, dy) f(y). \quad (1.23)$$

La anterior relación permite derivar las propiedades de los operadores P^{st} sobre un espacio a partir de las propiedades del operador en el otro.

1.3.5. Significado probabilístico de P^{st}

Entendemos por significado probabilístico de P^{st} a la relación existente entre los procesos de Markov y las familias de Markov con los operadores P^{st} .

La definición dada por la ecuación (1.16) puede ser reescrita en la forma

$$P^{st} f(x) = E_{s,x} f(\xi_t), \quad f \in B \quad (1.24)$$

donde, para alguna función f \mathfrak{B} -medible y $s \leq t$

$$E_{s,x} f(\xi_t) = \int_X P(s, x, t, dy) f(y) \quad (1.25)$$

Estos operadores nos permiten formular la propiedad de Markov de otra forma

$$E_{s,x}(f(\xi_u) | \mathfrak{F}_{[s,t]}) = P^{tu} f(\xi_t) \quad (1.26)$$

Establecer cómo los operadores P^{st} están relacionados a procesos de Markov o familias de Markov se hace de manera simple cuando se trabaja

1.3. FAMILIA DE OPERADORES ASOCIADOS A PROCESOS DE MARKOV 13

con el espacio de medidas de la siguiente manera: supongamos que v es una medida de probabilidad sobre (X, \mathfrak{B}) . Si consideramos el proceso en el tiempo s desde un punto aleatorio con distribución v , es decir consideramos ξ_t con $t \in T \cap [s, \infty]$ correspondiendo a la medida de probabilidad

$$P_{s,v}(A) = \int_X v(dx) P_{s,x}(A), \quad (1.27)$$

con $A \in \mathfrak{F}_{\geq s}$, la distribución para $t \geq s$ será vP^{st} , donde

$$vP^{st}(\Gamma) = P_{s,v}\{\xi_t \in \Gamma\}. \quad (1.28)$$

De esta manera, los operadores P^{st} en V describen la evolución de una distribución en el tiempo.

1.3.6. Familia Markov-Feller

El operador P^{st} opera sobre el espacio B y así transforma alguna función desde C (el espacio de todas las funciones continuas sobre X) en una función perteneciente a B , sin embargo, en general, estos operadores no pueden ser considerados operando sobre el espacio de funciones continuas. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 6 (Familia Feller). Sea X un espacio métrico, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_X$, y C el espacio de funciones continuas acotadas sobre X entonces, la familia $(\xi_t, P^{s,x})$ es llamada una familia Feller, si $P^{st}C \subseteq C$ para algún $s \leq t$. En otras palabras, para cualquier función continua y acotada f sobre X , la función $P_{st}f(x)$ es continua en x .

Se tiene que, si (ξ_t, P^{st}) es una familia de Feller, entonces

$$\int_X P(s, x, t, dy) f(y) \rightarrow \int_X P(s, x_0, t, dy) f(y) \quad \text{si } x \rightarrow x_0 \in X \quad (1.29)$$

Así la condición de Feller impuesta sobre una familia de Markov demanda que la distribución $P(s, x, t, \bullet)$ converga fuertemente a $P(s, x_0, t, \bullet)$ cuando $x \rightarrow x_0$. Esta es una condición natural pero, por supuesto, ésta no es satisfecha por todas las familias de Markov.

Ejemplo 3. Supóngase que una partícula se mueve en la recta real de la siguiente manera: la partícula parte del origen y se mueve cada vez una unidad hacia la derecha con velocidad unitaria. Si ξ_t representa la posición de la partícula en el tiempo t entonces $\xi_t = \xi_s + t - s$ con $s \leq t$. La función

de transición de este proceso naturalmente será $P(s, x, t, \Gamma) = \delta_{x+t-s}(\Gamma)$. Consideremos la familia de operadores

$$P^{st}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(s, x, t, dy)f(y) = f(x+t-s), \quad (1.30)$$

esto corresponde a un movimiento a la izquierda $t-s$ unidades. Como se observa, este operador transforma funciones continuas en funciones continuas y por consiguiente (ξ_t, P^{st}) es una familia de Feller.

Ejemplo 4. Consideremos ahora la familia de procesos en $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}^1)$, los cuales consisten en movimientos de una partícula que se mueve al azar sobre la línea recta a partir del cero. La partícula se mueve tanto a la izquierda como a la derecha del cero con igual probabilidad, equivalente a $\frac{1}{2}$. Esto es si ξ_t representa la posición de la partícula en t , entonces:

$$\begin{aligned} P_{s,x}\{\xi_t = x+t-s, t \geq s\} &= 1, & x > 0, \\ P_{s,x}\{\xi_t = x-(t-s), t \geq s\} &= 1, & x < 0, \\ P_{s,0}\{\xi_t = t-s, t \geq s\} &= P_{s,0}\{\xi_t = -(t-s), t \geq s\} = \frac{1}{2}, & x > 0. \end{aligned}$$

Se tiene que (ξ_t, P_{st}) es una familia de Markov donde P_{st} es:

$$P^{st}f(x) = \begin{cases} f(x+(t-s)), & x > 0; \\ f(x-(t-s)), & x < 0; \\ \frac{1}{2}f(t-s) + \frac{1}{2}f(-(t-s)), & x = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

La figura (1.1) muestra el efecto del operador P^{st} sobre una función continua acotada arbitraria f . La función $P^{st}f$ tiene una discontinuidad en el origen, es decir, esta no es una familia Feller. La distribución de los puntos cercanos al cero por derecha está localizado cerca al punto $t-s$ y la distribución de los puntos cercanos al cero por izquierda está cerca del punto $-(t-s)$ (ver esquema derecho de la fig (1.1)).

1.3.7. Correspondencia entre las familias Feller-Markov y las familias de operadores P^{st}

Por definición se tiene que a una familia Feller-Markov le corresponde una familia de operadores P^{st} sobre el espacio C , los cuales satisfacen las seis

1.3. FAMILIA DE OPERADORES ASOCIADOS A PROCESOS DE MARKOV15

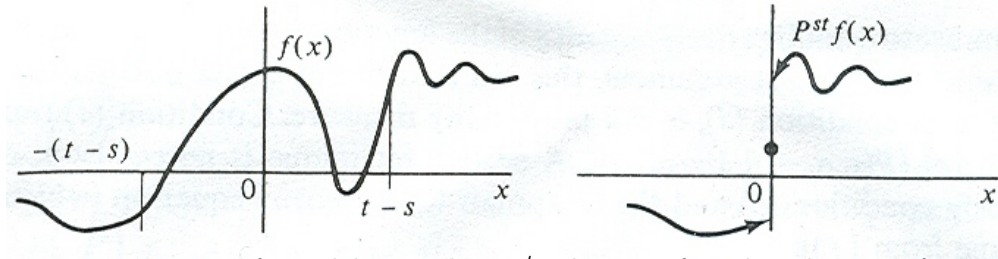


Figura 1.1: Efecto del operador P^{st} sobre una función arbitraria f

condiciones mencionadas en (1,2,2). A continuación veremos que el recíproco también es válido en el caso de espacios de fase.

Teorema 5. *Sea X un espacio métrico compacto, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_X$ y P^{st} , $s \leq t$, $s, t \in T \subseteq \mathbb{R}^1$ una familia de operadores definida sobre el espacio C de funciones continuas sobre X que satisfacen las condiciones de la sección (1.2.2) entonces existe una familia Feller-Markov $(\xi_t, t \in T; P_{s,x})$, cuya familia de operadores es precisamente P^{st} .*

Demostración 1. Es suficiente mostrar que $P^{st}f$ puede ser escrito en la forma

$$P^{st}f(x) = \int_X P(s, x, t, dy) f(y) \quad (1.32)$$

donde $P(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet)$ satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov y las condiciones de la sección (1.3.2)

Sean s, t, x fijas. De las dos primeras condiciones de la sección (1.3.2), la función $P^{st}f(x)$ es una funcional lineal acotada sobre C (con norma ≤ 1) y por consiguiente $P^{st}f(x)$ puede ser escrito en la forma de una integral de f respecto a una medida con signo denotada por $P(s, x, t, \bullet)$. Esta medida será, por supuesto, dependiente de s, t, x . De lo anterior se tiene la ecuación (1.33) y esto permite establecer las propiedades de la función $P(s, x, t, \Gamma)$.

En otras palabras se verifica que

$$P^{st}f(x) = \int_X P(s, x, t, dy) f(y) \quad (1.33)$$

lo cual es lo que se quería demostrar. Veamos ahora que $P(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet)$ de la función de transición dadas en la definición 2.

La condición 2. exige que la función $P(s, x, t, \Gamma)$ sea x -medible o equivalentemente $\int_X P(s, x, t, dy)\chi_\Gamma(y)$ sea x -medible. Esta última integral tiene la misma forma de la ecuación (1.33). Obsérvese, sin embargo, que en este caso la función f no es continua sino discontinua. Comenzamos suponiendo que el conjunto Γ es cerrado. Conocemos que para un conjunto cerrado Γ , podemos construir en el espacio métrico X una función continua f sobre X que toma el valor de 1 y valores sobre el intervalo $(0, 1)$ sobre Γ^c . Obsérvese que f^n pertenece a C para toda potencia positiva n . Veamos que $P(s, x, t, \Gamma)$ es medible con respecto a x . En efecto; puesto que

$$(P^{st} f^n)(x) = \int_X P(s, x, t, dy) f^n(y) \quad (1.34)$$

es una función medible, entonces

$$\begin{aligned} P(s, x, t, \Gamma) &= \int_X P(s, x, t, dy)\chi_\Gamma(y) \\ &= \int_X P(s, x, t, dy) \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X P(s, x, t, dy) f^n(y) \end{aligned}$$

es medible con respecto a x .

A continuación se establece que la ecuación de Chapman-Kolmogorov es válida para $P^{su} f^n$. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_X P(s, x, u, dz) f^n(z) &= P^{su}(f^n)(x) \\ &= P^{st}(P^{tu} f^n)(x) \\ &= \int_X P(s, x, t, dy) \int_X P(t, y, u, dz) f^n(z) \end{aligned}$$

Ahora pasamos al límite cuando $n \rightarrow \infty$ y obtenemos

$$P(s, x, t, \Gamma) = \int_X P(s, x, t, dy) \int_X P(t, y, u, \Gamma) \quad (1.35)$$

Nótese que (1.35) es válido para cualquier Γ cerrado.

1.3. FAMILIA DE OPERADORES ASOCIADOS A PROCESOS DE MARKOV17

Ejemplo 6. Consideremos la siguiente ecuación parabólica

$$\frac{\partial u(s, x)}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (1.36)$$

con la restricción de frontera

$$\left. \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (1.37)$$

La ecuación (1.36) describe la propagación del calor en una vara y la condición de frontera (1.37) corresponde al caso del aislamiento térmico en los extremos de la vara. Se tiene que existe una única solución única del problema definido por (1.36) y (1.37) para $(s, x) \in (-\infty, t] \times [0, 1]$ la cual satisface la siguiente condición para $s = t$ (Ver [40])

$$u(t, x) = f(x), \quad (1.38)$$

donde $f \in C = C[0, 1]$.

A continuación se mostrará que dicha solución puede ser representada como un operador P^{st} en el punto (s, x) , $s \leq t$, $x \in [0, 1]$. Así, cuando $s = t$, se tiene que $P^{ss}f(x) = u(t, x) = f(x)$, es decir, el operador $P^{ss} = E$. Para $s < t$, la función $P^{st}f(x)$ es diferenciable con respecto a x y, en consecuencia, es continua. Esto significa que P^{st} transforma C en C . Del hecho que P^{st} es un operador lineal, se sigue que este operador es una contracción que preserva la positividad. Desde el punto de vista físico, esto corresponde al hecho de que el calor no puede fluir del punto más frío al más caliente por conducción termal, así que la temperatura máxima no se incrementa y la temperatura mínima no decrece en el transcurso del tiempo. Se sigue que $P^{st}1 = 1$ pues

$$\frac{\partial 1}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 1}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (1.39)$$

y

$$\left. \frac{\partial 1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial 1}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (1.40)$$

Obsérvese que, debido a las ecuaciones de Champman Kolmogorov, es posible resolver la ecuación sobre el intervalo de tiempo total $[s, u]$ de la siguiente manera: primero se resuelve la ecuación sobre $[t, u]$ y luego sobre $[s, t]$ con el $u(t, x)$ previamente obtenido; en otras palabras

$$P^{su}f = P^{st}(P^{tu}f), \quad f \in C \quad \text{o} \quad P^{su} = P^{st}P^{tu}. \quad (1.41)$$

De esta manera se obtienen satisfechas todas las propiedades del operador P^{st} , así que una familia de Markov corresponde a la familia de operadores P^{st} . La clase de familias de operadores asociadas a la ecuación de conducción térmica, y a otras ecuaciones parabólicas, es una clase muy importante de procesos conocidos como procesos de difusión.

1.3.8. Familias de Markov homogéneas

La función de transición $P(s, x, t, \Gamma)$ es llamada homogénea (en el tiempo) si ésta, al ser definida para $s, t \in T = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}^1, \mathbb{Z}_+$, no cambia bajo una traslación a lo largo del eje tiempo, es decir:

$$P(s + h, x, t + h, \Gamma) = P(s, x, t, \Gamma) \quad (1.42)$$

Una función de transición de este tipo depende sólo de la distancia $t - s$, por esta razón es posible introducir una función $P(t, x, \Gamma)$ de tres argumentos tal que $P(s, x, t, \Gamma) = P(t - s, x, \Gamma)$. Por la definición 2, se tiene que la función $P(t, x, \Gamma)$ satisface las siguientes condiciones

1. Para t, x fijas, la función $P(t, x, \bullet)$ es una medida de probabilidad sobre la (X, \mathfrak{B}) .
2. Para t, Γ fijas, la función $P(t, \bullet, \Gamma)$ es medible.
3. $P(0, x, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$, donde $\delta_x(\Gamma)$ es la función delta de Dirac sobre Γ .
4. para $s, t \geq 0, x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}$,

$$P(t + s, x, \Gamma) = \int_X P(t, x, dy) P(s, y, \Gamma).$$

La función $P(t, x, \Gamma)$ es la probabilidad de transición al tiempo t , desde el estado x a un estado en Γ .

De esta manera, la función de transición homogénea puede ponerse en correspondencia con familias de operadores dependientes de un parámetro.

$$P^t f(x) = \int_X P(t, x, dy) f(y), \quad v P^t(\Gamma) = \int_X v(dx) P(t, x, \Gamma)$$

con f y v como en la sección (1.3) y $t \in [0, \infty)$, para procesos con tiempo continuo, o $t = 0, 1, 2, \dots$ para cadenas. Los operadores P^{st} pueden

ser expresados en términos de los operadores uni-paramétricos, como sigue: $P^{st} = P^{t-s}$. Las propiedades del operador uni-paramétrico P^t sobre los espacios B y V se consiguen sustituyendo P^{st} por P^t en las propiedades de las secciones (1.3.2) y (1.3.4) respectivamente.

1.4. OPERADORES INFINITESIMALES

1.4.1. Operador Infinitesimal de un Semigrupo

En esta sección conoceremos el operador infinitesimal como la característica que especifica el semigrupo de operadores relacionado con una familia de Markov.

Considérese un semigrupo de operadores lineales acotados P^t , $0 \leq t < \infty$, $P^0 = E$ (definido como en la sección 1.3.2), en un espacio de Banach \mathcal{E} (por ejemplo B o V definidos en la sección (1.3)). El operador P^t definido en la sección anterior está definido sobre el espacio total \mathcal{E} . El operador infinitesimal por su parte estará definido sobre un subespacio de \mathcal{E} , el cual denotaremos D_A , como se mostrará a continuación. Este operador infinitesimal resulta ser lineal, pero no acotado.

Definición 7. $D_A := \left\{ f \in E : \lim_{t \downarrow 0} \frac{P^t f - f}{t} \text{ existe} \right\}$

Definición 8. Se define el operador infinitesimal A sobre D_A como sigue:

$$Af := \lim_{t \downarrow 0} \frac{P^t f - f}{t}, \quad \text{si } f \in D_A \quad (1.43)$$

La siguiente es una definición alternativa de generador infinitesimal dada en [37] donde es un límite fuerte en el espacio de Banach:

$$Af := s \lim_{t \downarrow 0^+} \frac{P^t f - f}{t}, \quad \text{si } f \in D_A$$

con s simbolizando el límite fuerte, entendiéndose este límite como: si B es un espacio de Banach y $(h_n)_n$ es una sucesión en B entonces se dice que $h_n \rightarrow h$ fuertemente, si y sólo si, $\|h_n - h\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Observe que Af es la derivada derecha de $P^t f$ en el origen, es decir:

$$Af = \frac{d^+}{dt} P^t f |_{t=0}. \quad (1.44)$$

A es un operador lineal.

El operador infinitesimal puede ser definido para algunos semigrupos de operadores lineales en espacios de Banach independientemente de que ellos estén conectados con procesos de Markov.

El operador infinitesimal de un semigrupo relacionado con una familia (o proceso) de Markov será llamado operador infinitesimal de la familia Markov (proceso).

Ejemplo 7. Sea B el espacio dado en la sección (1.3) y utilizando la ecuación (1.26), entonces se tiene que:

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P^t f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E_x(f(x)) - f(x)}{t}, \quad (1.45)$$

donde $f \in D_A$ y $E_x(f(x))$ el valor esperado de que $f(x)$ tome el valor de x al tiempo t .

Ejemplo 8. Consideremos el semigrupo relacionado con un proceso determinístico de movimiento a la derecha con velocidad unitaria, es decir, $P^t f(x) = f(x + t)$, donde $f \in B$, en este caso

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} = \frac{d^+ f(x)}{dx} \quad (1.46)$$

Puesto que para un t fijo las funciones $g(x) := \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ son uniformemente continuas en x y acotadas entonces, su límite $\frac{d^+ f(x)}{dx}$ es uniformemente continuo y acotado, en consecuencia f es una función diferenciable. En otras palabras, D_A está constituido por funciones f uniformemente continuas y acotadas junto con sus primeras derivadas: $f \in C_{unif}^{(1)}$ y $Af(x) = f'(x)$.

1.4.2. Operadores infinitesimales en B_0

Nosotros enfocaremos nuestra atención a semigrupos de contracciones sobre el espacio de funciones medibles acotadas B (definido en la sección (1.3)), concepto importante relacionado con semigrupos de operadores y operadores infinitesimales.

Sea B_0 un subespacio de B , constituido por todas las funciones para las cuales

$$\|P^t f - f\| \longrightarrow 0 \quad (t \downarrow 0). \quad (1.47)$$

Éstas son funciones sobre las cuales el semigrupo de operadores P^t (definido en (1.3.8)) es fuertemente continuo a la derecha del origen. B_0 es un subespacio lineal y es además cerrado: en efecto, cuando $f_n \rightarrow f$, $f_n \in B_0$, se tiene que:

$$\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \|P^t f - f\| \leq \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \|P^t f - P^t f_n\| + \lim_{t \downarrow 0} \|P^t f_n - f_n\| + \|f_n - f\| \quad (1.48)$$

El segundo término sobre el lado derecho es cero, y

$$\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \|P^t f - P^t f_n\| = \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \|P^t(f - f_n)\| \leq \|f - f_n\| \quad (1.49)$$

Ya que la norma es pequeña, el lado izquierdo de la ecuación (1.49) es cero y $f \in B_0$. De lo anterior se sigue que si $f \in B_0$, la función $P^t f$ con valores en el espacio de Banach es uniformemente continua $[0, \infty)$. En efecto: para $s \leq t$

$$\|P^t f - P^s f\| = \|P^s(P^{t-s} f - f)\| \leq \|P^{t-s} f - f\| \rightarrow 0, \quad ((t-s) \rightarrow 0). \quad (1.50)$$

De aquí se sigue que el espacio B_0 es invariante con respecto al operador P^t : para $f \in B_0$ se tiene que $P^t f \in B_0$ ya que $P^h P^t f = P^{h+t} f \rightarrow P^t f$ cuando $h \downarrow 0$.

A continuación se verá que $D_A \subseteq B_0$. En efecto, puesto que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{P^t f - f}{t} \quad (1.51)$$

existe, entonces

$$\left\| \frac{P^t f - f}{t} \right\| = O(1) \quad (1.52)$$

y

$$\|P^t f - f\| = O(t) \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow 0). \quad (1.53)$$

donde los símbolos $O(t)$ y $o(t)$ se definen como sigue:

$$A(t) = O(t), \quad t \rightarrow a \quad \text{entonces} \quad \frac{A(t)}{t} \rightarrow C, \quad t \rightarrow a.$$

y

$$A(t) = o(t), \quad t \rightarrow a \quad \text{entonces} \quad \frac{A(t)}{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow a.$$

con a y C constantes. Por tanto si $f \in D_A$, tenemos que $P^t f \in B_0$, $\frac{P^t f - f}{t} \in B_0$ y de ahí que $Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P^t f(x) - f(x)}{t} \in B_0$. Eso significa que el dominio de valores de A sobre D_A representado por AD_A de los operadores infinitesimales está también contenido en B_0 .

1.4.3. El espacio D_A

Definición 9 (Convergencia fuerte). Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones definidas sobre un espacio de Banach B . Se dice que f_n converge fuertemente a f , si y sólo si,

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty.$$

y se denota con $f = s \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$

Por lo anterior y la definición 8. se tiene que Af es la derivada derecha de $P^t f$ al origen en el sentido de convergencia fuerte. Podemos mostrar que si $f \in D_A$, entonces $P^t f \in D_A$ y

$$AP^t f = P^t Af = \frac{d}{dt} P^t f \quad (1.54)$$

en el mismo sentido de convergencia. Por definición

$$AP^t f = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P^h P^t f - P^t f}{h}, \quad (1.55)$$

y si usamos la propiedad de semigrupo, encontramos que esta expresión no es otra que:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{P^{h+t} f - P^t f}{h}, \quad (1.56)$$

es decir, la derivada por la derecha de $P^t f$. A continuación probaremos que la existencia de $AP^t f$ es equivalente a la existencia de $\frac{d^+}{dt} P^t f$. Usamos una vez más la propiedad de semigrupo:

$$P^h P^t f - P^t f = P^{h+t} f - P^t f = P^t (P^h f - f) \quad (1.57)$$

y se muestra que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{P^t (P^h f - f)}{h} = P^t Af. \quad (1.58)$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P^t(P^h f - f)}{h} - P^t A f \right\| &= \left\| P^t \left[\frac{(P^h f - f)}{h} - A f \right] \right\| \\ &\leq \left\| \frac{(P^h f - f)}{h} - A f \right\| \rightarrow 0, \quad (h \downarrow 0). \end{aligned}$$

Para probar la ecuación (1.55) lo que resta es verificar que la derivada izquierda de $P^t f$ es igual a esta expresión. Tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(P^{t-h} f - P^t f)}{-h} - P^t A f \right\| &\leq \left\| P^{t-h} \left[\frac{(f - P^h f)}{-h} - P^{t-h} A f \right] \right\| \\ &\quad + \|P^{t-h} A f - P^t A f\|. \end{aligned}$$

De la anterior expresión se tiene que la primera norma del término de la derecha es menor o igual que $\left\| \frac{(P^h f - f)}{h} - P^t A f - A f \right\| \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ y la segunda norma del mismo término tiende a 0, ya que $A f \in B_0$.

Si denotamos $P^t f$ por u_t , nosotros encontramos que u_t satisface la ecuación diferencial $\frac{du_t}{dt} = A u_t$ con la condición inicial de que $u_0 = f$. La forma integral de la ecuación (1.55) es:

$$P^t f = f + \int_0^t A P^s f ds = f + \int_0^t P^s A f ds \quad (1.59)$$

1.4.4. Principio del máximo

Teorema 9 (Principio del máximo). *Si una función f tiene un máximo absoluto en un punto x , es decir, $f(x) \geq f(y)$ para todo $y \in X$, siendo X un espacio métrico y si $f \in D_A$, entonces $A f(x) \leq 0$*

Demostración 2. Como $E_x f(\xi_t) \leq f(x)$ entonces $E_x f(\xi_t) - f(x) \leq 0$, siendo $E_x f(\xi_t)$ el valor esperado de $f(\xi_t)$ dado que $\xi_t = x$. De aquí se tiene que $A f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{E_x f(\xi_t) - f(x)}{t} \leq 0$ por (1.45).

1.4.5. Una clase importante de semigrupos

Podemos intentar construir un semigrupo desde su generador A cuando A es acotado. Para tal fin, la siguiente notación es necesaria.

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad A^0 = E$$

donde A^n es la n -ésima iteración de A , es decir, $A^n = A \cdot A^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$. Puesto que

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \quad (1.60)$$

y como A es acotada, se sigue que la serie que define a e^A es absolutamente convergente.

De esta manera, una clase importante de semigrupos definidos sobre un espacio de Banach \mathcal{E} arbitrario está definida por

$$P^t = e^{tA} = E + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots \quad (1.61)$$

donde A es un operador lineal acotado definido sobre \mathcal{E} . La convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ a e^{tA} es tanto en norma como fuerte (ver definición 9).

La propiedad de semigrupo se obtiene al establecer que $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ que es fácil verificar (en general, $e^{A+B} = e^A e^B$ si los operadores A y B conmutan). El hecho de que el operador infinitesimal del semigrupo e^{tA} es A , es verificado como sigue:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{e^{tA}f - f}{t} - Af \right\| &= \frac{tA^2f}{2} + \dots + \frac{t^{n-1}A^n f}{n!} + \dots \\ &\leq \frac{t\|A\|^2\|f\|}{2} + \dots + \frac{t^{n-1}\|A\|^n\|f\|}{n!} + \dots \\ &\leq t\|A\|^2\|f\|[1 + t\|A\| + (t\|A\|)^2 + \dots] \\ &= \frac{t\|A\|^2\|f\|}{[1 - t\|A\|]} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

1.4.6. Operadores infinitesimales sobre espacios de medidas

Para el semigrupo de operadores uni-paramétricos P^t actuando sobre medidas (o sobre, funciones aditivas numerables de un conjunto), podemos considerar un operador infinitesimal A de la siguiente manera:

$$\mu A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mu P^t - \mu}{t}, \quad (1.62)$$

Por como se definió el operador actuando sobre el espacio de medidas V en la sección (1.3.3) y teniendo en cuenta la norma de los elementos del espacio de Banach V (variación total, sección 1.3) se tiene que el μA existe en el sentido de convergencia en variación. Su dominio será denotado por

AD. De $\langle \mu, P^t f \rangle = \langle \mu P^t, f \rangle$ (ver ecuación (1.22)) se sigue que, para $f \in D_A$, $\mu \in AD$,

$$\langle \mu, Af \rangle = \langle \mu A, f \rangle. \quad (1.63)$$

1.5. RESOLVENTE, TEOREMA DE HILLE-YOSIDA

1.5.1. Resolvente de un semigrupo de operadores

Definición 10 (Resolvente). Sea $\{P^t; t \geq 0\}$ un semigrupo de contracciones sobre un espacio de Banach B , y sea

$$R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f dt, \quad f \in B, \quad \lambda > 0. \quad (1.64)$$

La familia de operadores $\{R_\lambda, \lambda > 0\}$ es llamada la resolvente del semigrupo.

La resolvente del semigrupo de operadores P^t es la transformada de Laplace del semigrupo P^t o lo que es lo mismo, es la transformada de Laplace de las funciones continuas $P^t f$. Profundizaremos a continuación en esta definición. La integral (1.64) puede ser definida para un semigrupo en un espacio de Banach arbitrario, pero por motivos de simplificación, fijaremos nuestra atención en el espacio B definido en la sección (1.3).

Sea $(\xi_t, 0 \leq t < \infty; P_x)$ una familia de Markov, donde ξ_t es progresivamente medible con respecto a la familia de σ -álgebras $\mathfrak{F}_{\leq t}$. La familia $P^t f$ es medible en (t, x) para toda función $f \in B$. Para $f \in B, x \in X$

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f(x) dt. \quad (1.65)$$

La convergencia de la integral (1.65) se sigue de que $|P^t f| \leq \|f\|$. La función R_λ es medible y es acotada: Como $\lambda > 0$, el dominio de R_λ es todo B . Además como

$$\|R_\lambda f\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|P^t f\| dt \leq \frac{\|f\|}{\lambda}, \quad (1.66)$$

entonces R_λ es acotado. Si conocemos $R_\lambda f(x)$ para todo $\lambda > 0$ podemos determinar la función $P^t f(x), t \geq 0$. Si $f \in B_0$, la función $P^t f(x)$ es continua en t y puede ser determinada por $R_\lambda f(x), \lambda > 0$ completamente.

Esto significa que, desde la resolvente R_λ podemos determinar de manera única el semigrupo P^t sobre el espacio B_0 . Por esta razón, la resolvente

determina de manera única la función de transición y , de ahí, todas las distribuciones finito dimensionales de la familia Markov.

Ejemplo 10. Podemos determinar la resolvente para una familia de procesos Wiener uni-dimensionales. Tenemos

$$\begin{aligned} R_\lambda f(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_{-\infty}^\infty p(t, x, y) f(y) dy \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) f(y) dt \right] dy \end{aligned}$$

donde la densidad es $p(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$. Puesto que:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|}. \quad (1.67)$$

entonces,

$$R_\lambda f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|} f(y) dy. \quad (1.68)$$

A continuación mostramos que el operador P^h y la resolvente R_λ conmutan. Usando el teorema de Fubini y la propiedad de semigrupo, tenemos

$$\begin{aligned} P^h R_\lambda f(x) &= R_\lambda P^h f(x) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^{t+h} f(x) dt = e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} P^s f(x) ds, \end{aligned} \quad (1.69)$$

En particular, P^h , R_λ , R_μ conmutan, donde

$$R_\mu R_\lambda f := \frac{R_\lambda f - R_\mu f}{\mu - \lambda}, \quad \lambda, \mu > 0, \quad \lambda \neq \mu \quad (1.70)$$

La ecuación (1.70) es llamada la ecuación resolvente y puede ser reescrita en la forma $R_\mu R_\lambda = R_\lambda R_\mu = \frac{R_\lambda f - R_\mu f}{\mu - \lambda}$.

La ecuación resolvente (1.70) establece que el rango de valores del operador R_λ es el mismo para todo $\lambda > 0$: $R_\lambda B = R_\mu B$. En general, una función arbitraria del espacio de Banach B no puede ser escrita en la forma $R_\lambda f$, sin embargo, si ésto se logra, entonces ésta función arbitraria puede escribirse de la forma $R_\lambda f$, también puede ser escrita en la forma $R_\mu[f + (\mu - \lambda)R_\lambda f]$.

Ya que la transformada de Laplace determina de manera única $P^t f$, todas las propiedades de P^t pueden ser reflejadas en las propiedades de R_λ de la siguiente manera:

1. $\|P^t\| \geq 1$ corresponde a $\|R_\lambda\| \geq \frac{1}{\lambda}$.
2. Ya que P^t preserva positividad, se sigue que el operador R_λ también lo hace: $R_\lambda f \geq 0$ para $f \geq 0$.
3. La propiedad de semigrupo $P^{t+s} = P^t P^s$ corresponde a la ecuación de resolvente (1.70).
4. La propiedad de que para todo $f \in B_0$,

$$f = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R_\lambda f, \quad (1.71)$$

corresponde a la propiedad $P^0 = E$ (o más precisamente, al hecho de que $\lim_{t \downarrow 0} P^t f = E f = f$).

1.5.2. Operador inverso de R_λ sobre B_0

El operador R_λ sobre B_0 , es el inverso del operador $\lambda E - A$, definido sobre D_A . En otras palabras, estos operadores ejecutan aplicaciones inversas y mutuamente únicas de B_0 sobre D_A , y viceversa (ver figura 1.2).

Ahora, podemos mostrar en la siguiente proposición que para $f \in B_0$, la función $R_\lambda f \in D_A$ y $(\lambda E - A)R_\lambda f = f$, y que para $f \in D_A$, tenemos que $R_\lambda(\lambda f - Af) = f$.

Proposición 11. *Sea $\{P^t; t \geq 0\}$ un semigrupo de operadores fuertemente continuo sobre un espacio de Banach arbitrario B y sea A el generador de éste semigrupo. Entonces para cada $\lambda > 0$,*

$$R_\lambda : B \rightarrow D_A. \quad (1.72)$$

Adicionalmente, la aplicación

$$(\lambda E - A) : D_A \rightarrow B \quad (1.73)$$

es uno a uno y

$$R_\lambda = (\lambda E - A)^{-1} \quad (1.74)$$

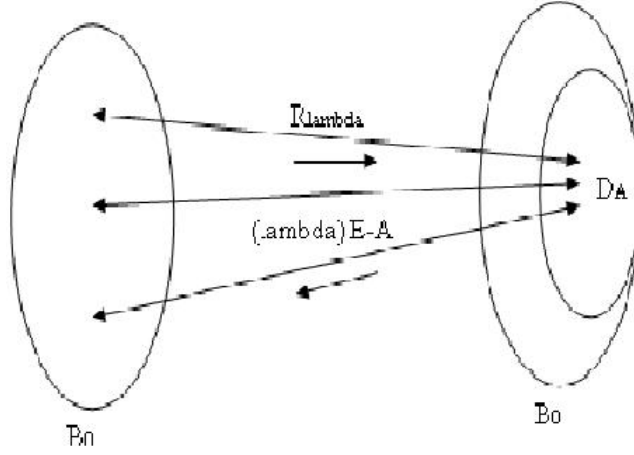


Figura 1.2: Esquema de un mapeo único y mutuamente inverso de B_0 sobre D_A .

Demostración 3. Primero se probará que (1.72) se satisface. Para tal fin escribimos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t}(P^t - E)R_\lambda f &= \frac{1}{t}(P^t - E) \int_0^\infty e^{-\lambda s} P^s f ds \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \{P^{s+t} f - P^s f\} ds \\
 &= \frac{1}{t} \left\{ e^{\lambda t} \int_t^\infty e^{-\lambda u} P^u f du - \int_0^\infty e^{-\lambda s} P^s f ds \right\} \\
 &= -\frac{1}{t} e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda u} P^u f du + \frac{1}{t} (e^{\lambda t} - 1) \int_0^\infty e^{-\lambda s} P^s f ds \\
 &= -\frac{1}{t} e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda u} P^u f du + \frac{1}{t} (e^{\lambda t} - 1) R_\lambda f
 \end{aligned}$$

Haciendo que $t \rightarrow 0^+$, vemos que

$$AR_\lambda f = -f + \lambda R_\lambda f. \quad (1.75)$$

Por lo tanto, el límite

$$s \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(P^t - E)R_\lambda f}{t} \quad (1.76)$$

existe, lo cual prueba (1.72).

De la ecuación (1.75), se obtiene que

$$\lambda R_\lambda f - AR_\lambda f = f. \quad (1.77)$$

esto es $g = R_\lambda f$, es una solución de la ecuación

$$\lambda g - Ag = f. \quad (1.78)$$

Para completar la prueba tenemos que mostrar que (1.78) tiene una solución única g para cada $\lambda > 0$.

Asumimos que f_1 y f_2 son dos soluciones de (1.78); entonces, $\varphi = f_1 - f_2 \in D_A$ y

$$\lambda \varphi - A\varphi = 0 \quad (1.79)$$

Por otro lado, de la ecuación (1.54), vemos que $P^t \varphi \in D_A$ y satisface

$$\frac{dP^t \varphi}{dt} = P^t A \varphi = \lambda P^t \varphi. \quad (1.80)$$

De esta manera,

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} P^t \varphi) = 0 \quad (1.81)$$

Por tanto, para todo $t \geq 0$,

$$e^{-\lambda t} P^t \varphi = C \quad \text{con } C \text{ constante.} \quad (1.82)$$

Para $t = 0$, tenemos que $C = \varphi$, resultando

$$0 \leq \|\varphi\| \leq e^{-\lambda t} \|P^t \varphi\| \leq e^{-\lambda t} \|\varphi\| \rightarrow 0. \quad (1.83)$$

cuando $t \rightarrow +\infty$, así que $\|\varphi\| = 0$. Esto muestra que $\lambda E - A$ es uno a uno sobre D_A . Finalmente de (1.78), obtenemos que

$$R_\lambda = (\lambda E - A)^{-1}$$

y que

$$A = \lambda E - R_\lambda^{-1}$$

1.5.3. Teorema de Hille-Yosida

En las secciones previas hemos establecido que todo operador acotado genera un semigrupo de la forma $P^t = e^{tA}$. Un operador no acotado, puede no ser el generador de un semigrupo. A partir de ésto surge la siguiente pregunta: ¿Bajo que condiciones un operador no acotado es el generador de un semigrupo? Esta pregunta es respondida por el teorema de Hille Yosida, el cual caracteriza los operadores que son generadores de semigrupos. Su prueba se encontrará en [37], sección (9.5). El teorema establece que: un operador lineal A con dominio D_A en espacio de Banach E es el operador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones P^t (es decir, $P^t f \rightarrow f$ cuando $t \rightarrow \infty$ para algún $f \in E$), si y sólo si, las siguientes condiciones se satisfacen

1. D_A es en toda parte denso en E .
2. Para toda $\lambda > 0$, existe el operador $(\lambda E - A)^{-1}$ definido en toda parte sobre E .
3. $\|(\lambda E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$

Para un subespacio arbitrario del espacio de funciones medibles acotadas B :

1. La condición necesaria y suficiente para que el operador $(\lambda E - A)^{-1}$ conserve positividad es que el semigrupo conserve positividad.
2. La condición para que $P^t 1 = 1$ es que $1 \in D_A$, y $A1 = 0$.

Capítulo 2

MODELOS ESTOCÁSTICOS

2.1. ANTECEDENTES

Uno de los temas que más ha interesado a la humanidad durante mucho tiempo ha sido el relacionado con la supervivencia de poblaciones biológicas y es de ahí que surgen preguntas como por ejemplo ¿cuáles poblaciones se extinguen?, ¿cómo se comportan aquellas que no lo hacen?, si alguna especie crece más allá de todo límite ¿qué tasa de crecimiento posee?, etc. [2] Los primeros problemas propuestos relacionados con los procesos de ramificación se encuentran en el siglo XVIII en el libro del investigador Thomas Malthus, titulado "Essay on the principles of populations", en el cual plantea que una población no controlada debe crecer exponencialmente. Malthus relata también que, en un pueblo de Berna de las 487 familias burguesas existentes, 379 se extinguieron en el lapso de dos siglos (1583-1783); sin embargo, él no estudia el porqué de esta aparente paradoja. El primero en tratar de explicar el problema fue el matemático francés I.J. Bienayme (1796-1878). Parece ser (no hay constancia escrita) que él fue capaz de relacionar correctamente la probabilidad de extinción con el promedio de hijos varones de cada individuo.

Independientemente de Bienayme, el matemático inglés Sir Francis Galton (1822-1911) aportó precisiones al problema, el cual puede formularse de la siguiente manera. En una población supondremos que el número de hijos de cada individuo x es una variable aleatoria ε_x con distribución $p := (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, siendo $p_n :=$ "la probabilidad de n hijos" y con $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ (para evitar situaciones triviales, supondremos $p_0 + p_1 < 1$). El número de

hijos que cada individuo tiene es independiente de su historia familiar y del número de hijos de los demás individuos. Los hijos tienen sus propios hijos con la misma distribución $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Supongamos que se inicia el proceso con un individuo quien constituye la 0-ésima generación, sus hijos forman la primera generación, sus nietos la segunda y así sucesivamente. Si la variable aleatoria Z_n denota el número de individuos de la n -ésima generación, entonces tenemos que $Z_0 = 1$ y que Z_1 tiene distribución p . Si en la n -ésima generación hay $i \geq 1$ individuos, entonces en la $(n+1)$ -ésima generación habrá $Z_n^1 + Z_n^2 + \dots + Z_n^i$ individuos, donde Z_n^k denota el número de hijos del k -ésimo individuo de la n -ésima generación, $k=1,2,\dots,i$. Galton se pregunta por la probabilidad de extinción del proceso $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, esto es, calcula $q := \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0) = P(Z_n \rightarrow 0)$.

Más en general, Galton pretendía inicialmente encontrar la proporción de apellidos que se extinguen luego de n generaciones y calcular con qué frecuencia r personas tienen el mismo apellido, donde las longitudes de vida de los individuos son una unidad de tiempo, además se asume que, las leyes de probabilidad de vida, reproducción y movimiento de todos los descendientes son las mismas del padre y las evoluciones de cada uno de ellos son independientes unas de otras.

El problema inicialmente formulado por Galton fue la piedra angular de lo que luego se llamó procesos de ramificación, cuyo tipo más simple es el proceso de Galton-Watson, seguido por procesos más complejos como el proceso de Bellman Harris. Los procesos de ramificación llevan este nombre, porque además de estar enmarcados en la teoría de los procesos estocásticos, permiten representar procesos de fragmentación de las partículas presentes en un sistema.

El proceso original de Galton-Watson y sus generalizaciones están relacionados con anteriores trabajos de Niels Abel en 1881 sobre ecuaciones funcionales e iteraciones de funciones. Los procesos de ramificación han resultado ser una herramienta muy útil en la descripción de ciertas situaciones que se presentan en la vida real como son el crecimiento de tumores cancerosos, la propagación de partículas contaminantes en el aire, la descomposición de moléculas, etc. Tal es el caso, de los estudios realizados por G.U. Yule en 1925 acerca de la formación de nuevas especies y de la teoría de radiación cósmica formulada por H.J Brabha y W. Heitler en 1937 y por J.F Carlson y J.R. Oppenheimer en 1937 de manera independientemente.

Otras de las aplicaciones de los procesos de ramificación, se encuentran en el estudio que hizo Kolmogorov (1938) acerca de la probabilidad de sobrevivencia de los apellidos familiares luego de un número grande de generaciones. Por su parte A.J Lotka (1931) aplica la idea de Galton usando los datos de fertilidad de los hombres norteamericanos para determinar la probabilidad de extinción de la descendencia masculina. N. Semenov usa el modelo de Galton Watson en 1935 en un tratado teórico sobre reacciones químicas en cadena y W. Shockley y J.R Pierce en 1938 emplean el modelo para estudiar la multiplicación de electrones presentes en un mecanismo de detección electrónica. En 1940, los científicos D. Hawkins y S. Ulam vinculados al proyecto Alamos en la segunda guerra mundial, utilizan el proceso de Galton-Watson para la descripción de las cadenas químicas nucleares, las cuales son la base teórica de la fabricación de la bomba atómica. Este último modelo después de 15 años desde su aparición se continuó citando en numerosos artículos en Inglaterra, la Unión Soviética y Estados Unidos.

Recientemente se ha propuesto un modelo de sistemas de partículas ramificadas para describir la propagación de la contaminación de aire por partículas de materia [19]. En dicho trabajo se busca determinar la distribución de ciertas partículas contaminantes, en un tiempo t y una región dada A , bajo el supuesto de que se conoce la distribución inicial de sus masas y sus posiciones.

En la sección 2.2 se hará una presentación de la teoría básica de procesos de ramificación mostrando sus principales características, clasificación y relaciones entre éstas. Al final se hará una descripción, enmarcada dentro del contexto de los procesos de ramificación del modelo de contaminación ambiental que se estudiará en detalle en la sección 2.3.

2.2. **CONCEPTOS BÁSICOS**

Los modelos clásicos de contaminación del aire, como son los modelos estadísticos y determinísticos, que se desarrollarán en el siguiente capítulo, no aportan información acerca del comportamiento de las partículas emitidas por fuentes contaminantes, como por ejemplo, la extinción de un grupo de partículas, la distribución espacial de las mismas y el cambio de esta distribución, todo en función del tiempo t . Como se mencionará en el próximo capítulo los modelos estadísticos se basan en datos para hacer pronósticos

de concentraciones futuras de contaminación, mientras los modelos determinísticos recurren a metodologías de aproximación, ecuaciones de conservación de masa y energía y demás herramientas matemáticas para calcular concentraciones, ubicaciones y velocidades de partículas contaminantes dependientes del tiempo y del espacio. Por lo anterior, los interesados en hallar la distribución o distribuciones de posición, tamaño y demás características de determinadas partículas contaminantes en el aire, encuentran buenos resultados en los procesos de ramificación los cuales estudiaremos en detalle en las siguientes secciones del presente capítulo

2.2.1. El proceso de Galton-Watson

En esta sección se definirá formalmente el proceso de Galton- Watson y se estudiarán algunas de sus propiedades más importantes.

Definición 11 (Proceso de Galton-Watson). Un proceso de Galton-Watson (Z_n) con $n \in N_0$ se define como una cadena de Markov homogénea, con conjunto de estados los enteros no negativos. Sus probabilidades de transición π_{ij} con $i, j \in N_0$ se expresan en términos de una distribución dada $p_k, k = 1, 2, \dots, p_k \geq 0$ y $\sum_k p_k = 1$ mediante:

$$\pi_{ij} = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} p_j^{*i} & \text{si } i \geq 1, j \geq 0, \\ \delta_{ij} & \text{si } i = 0, j \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker y p_j^{*i} con $j = 0, 1, \dots$ es la j -ésima componente de la i -ésima convolución de $p_k, k = 0, 1, \dots$

El proceso de Galton-Watson resulta ser un modelo adecuado para describir el crecimiento de una población que se comporta de tal manera que una partícula inicial en el tiempo $t = 0$ vive exactamente una unidad de tiempo y en el momento de morir es reemplazada por un número aleatorio de descendientes acorde a una distribución de probabilidad dada. Como se mencionó anteriormente, uno de los problemas que interesa resolver, es encontrar la probabilidad de extinción del proceso, esto es, se quiere determinar a qué es igual $q = P(Z_n \rightarrow 0)$, siendo Z_n el número de individuos en la n -ésima generación. Para esto, notemos que si un individuo tiene k hijos, entonces su descendencia se extingue con probabilidad q^k por consiguiente, $q = \sum_{k=0}^{\infty} P(k \text{ hijos})P(\text{extinción} | k \text{ hijos}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k q^k$. Esto es, q es solución de la ecuación $s = f(s)$, donde $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = E s^{Z_1}$, $0 \leq s \leq 1$

es la función generadora de la distribución de la variable aleatoria Z_1 . Para $0 \leq s \leq 1$ se tiene que la función $f(s)$ es continua, estrictamente creciente y convexa; además $f(0) = P(Z_1 = 0) = p_0$ y $f(1) = 1$. Por tanto

$$f'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \quad (2.2)$$

es estrictamente creciente, de donde se deduce que la ecuación $f(s) = s$ tiene a lo más dos soluciones. Obsérvese que $m := f'(1)$ denota el número de hijos promedio de cada individuo. Tenemos que (Ver figura 2.1)

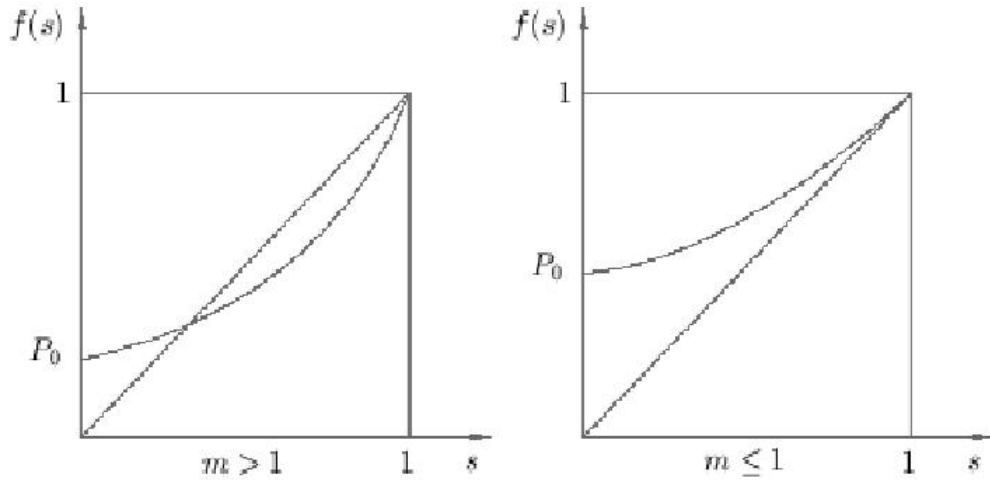
- Si $m := f'(1) \leq 1$, entonces $f'(1) < 1$ para $0 \leq s < 1$. Por lo tanto toda la gráfica de $f(s)$ en el intervalo $(0, 1)$ se encuentra encima de la diagonal. De esta manera se llega a la conclusión de Watson en la que 1 es la única solución de la ecuación $f(s) = s$, esto es, $q = 1$.
- $m := f'(1) > 1$, entonces $f'(s_0) > 1$ para algún $s_0 < 1$ suficientemente cercano a 1. Se tiene que en el intervalo $(s_0, 1)$ la gráfica de $f(s)$ debe estar por debajo de la diagonal. Si $p_0 > 0$, entonces debe existir t , $0 < t < 1$, tal que $f(t) = t$. Puesto que q es la menor solución no negativa de la ecuación $f(s) = s$ se deduce que $0 < q < 1$. En el caso en que $p_0 = 0$ se tiene que $f(0) = 0$ y por tanto $q = 0$.

Siguiendo lo anterior, un proceso de Galton-Watson se puede clasificar según m .

Definición 12. Un proceso de Galton Watson $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ se denomina subcrítico si $m < 1$, crítico si $m = 1$ o supercrítico si $m > 1$, donde $m = f'(1)$.

Por lo tanto se tiene que, en los casos crítico y subcrítico el proceso se extingue con probabilidad 1, es decir, $P[Z_n = 0 \text{ para algún } n] = 1$, y en el caso supercrítico, $P[Z_n = 0 \text{ para algún } n] = q$. Así pues, el proceso de reproducción se extingue con probabilidad q y sobrevive con probabilidad $(1 - q)$.

Es fácil verificar que el proceso $W_n := \frac{Z_n}{m^n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ es una martingala con respecto a la filtración generada por los Z_n y en consecuencia el teorema de convergencia de martingalas garantiza la existencia de una variable aleatoria no negativa W tal que



$m :=$ "número esperado de hijos de cada individuo"

Figura 2.1: Esquema de modelo gaussiano

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = W \quad (2.3)$$

En los casos crítico y subcrítico se tiene $W = 0$. En el caso supercrítico, W tiene una distribución absolutamente continua en $(0, \infty)$, tiene valor medio $E(W) = 1$ y varianza $Var(W) = \frac{\sigma^2}{m^2 - m}$, y $P[W=0]=q$ [17]. Veamos estos y otros resultados en los siguientes teoremas.

Teorema 12. Sea $m := E(Z_1)$, $\sigma^2 = Var(Z_1)$ entonces:

1. $E(Z_n) = m^n$

2. $Var(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 \frac{m^n(m^n - 1)}{m(m - 1)} & \text{si } m \neq 1, \\ \sigma^2 n & \text{si } m = 1 \end{cases}$

3. $Cov(Z_n, Z_{n+k}) = m^k Var(Z_n)$

Demostración 4. Notamos que

$$f'_n(s) = f'_{n-1}(f(s))f'(s) \quad (2.4)$$

en particular para $s = 1$ se tiene que

1.

$$\begin{aligned}
E(Z_n) &= f'_n(1) = f'_{n-1}(f(1))m \\
&= E(Z_{n-1})m = f'_{n-1}(1)m \\
&= f'_{n-2}(f(1))m \cdot m \quad \text{para } n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $E(Z_n) = m^n$

2.

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &:= \text{Var}(Z_n) = f''_n(1) + E(Z_n) - (E(Z_n))^2 \\
&= f''_n(1) + m^n - m^{2n}
\end{aligned}$$

Se verifica que:

$$\begin{aligned}
f''_n(1) &:= f''(1)[f'_{n-1}(1)]^2 + f'(1)f''_{n-1}(1) \\
&= f''(1)m^{2n-2} + mf''_{n-1}(1) \\
&= (\sigma^2 + m^2 - m)m^{2n-2} + m(\sigma_{n-1}^2 + m^{2n-2} - m^{n-1})
\end{aligned}$$

Por lo cual, $\sigma_n^2 = \sigma^2 m^{2n-2} + m\sigma_{n-1}^2$, es decir

$$\frac{\sigma_n^2}{m^n} = \frac{\sigma^2 m^{n-1}}{m} + \frac{\sigma_{n-1}^2}{m^{n-1}} \quad (2.5)$$

Si notamos $\alpha_n := \frac{\sigma_n^2}{m^n}$, se tiene de (2.5) que:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \alpha_1 m^{n-1} + \alpha_{n-1} \\
&= \alpha_1 m^{n-1} + \alpha_1 m^{n-2} + \alpha_{n-2} \\
&\vdots \\
&= \alpha_1 \left(\sum_{r=0}^{n-1} m^r \right) \\
&= \begin{cases} \alpha_1 \frac{m^n(m^n - 1)}{(m - 1)} & \text{si } m \neq 1, \\ \sigma^2 n & \text{si } m = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\alpha_1 = \frac{\sigma^2}{m}$, entonces

$$\sigma_n^2 = \begin{cases} \sigma^2 \frac{m^n(m^n - 1)}{m(m - 1)} & \text{si } m \neq 1, \\ \sigma^2 n & \text{si } m = 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

3. En seguida se tiene que:

$$E(Z_n Z_{n+k}) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial u} E(u^{Z_n} v^{Z_{n+k}}) \right) \Big|_{u=1, v=1} \quad (2.7)$$

Como $E(Z_n Z_{n+k}) = f_n''(1)f_k'(1) + f_n'(1)f_k'(1)$

Con lo cual,

$$Cov(Z_n Z_{n+k}) = (\sigma_n^2 + m^{2n})m^k - m^n m^{n+k} = m^k \sigma_n^2$$

Teorema 13. Sea $0 < m < \infty$ y sean $W_n := \frac{Z_n}{m^n}$ y \mathfrak{F}_n la σ -álgebra generada por Z_0, Z_1, \dots, Z_n . Entonces $(W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una martingala con respecto a \mathfrak{F}_n . Más aún, como $W_n \geq 0$ entonces existe una variable aleatoria no negativa W con $E(W) \leq 1$ tal que

$$W_n \rightarrow W \quad \text{casi siempre} \quad (2.8)$$

Demostración 5. Se tiene que

$$\begin{aligned} E(W_{n+1} | \mathfrak{F}_n) &= E\left(\frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}} \mid \mathfrak{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} E(Z_{n+1} \mid Z_n) \\ &= \frac{m}{m^{n+1}} Z_n = W_n. \end{aligned}$$

Esto es, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es un martingala no negativa relativa a la filtración \mathfrak{F}_n . Por otra parte,

$$\sup_n E|W_n| = \sup_n E(W_n) < \infty$$

Por lo cual, aplicando el teorema de convergencia de martingalas, existe una variable aleatoria no negativa W talque $W_n \rightarrow W$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 14 (T. Harris). Si $m > 1$, $\sigma^2 < \infty$ y $Z_0 = 1$, entonces:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} E(W_n - W)^2 = 0$
2. $E(W) = 1$ y $Var(W) = \frac{\sigma^2}{m^2 - m}$
3. $P(W = 0) = q$

Demostración 6. 1. Se mostrará a continuación que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de Cauchy en L^2 .

$$\begin{aligned}
E(W_{n+k} - W_n)^2 &= E(W_{n+k})^2 - 2E(W_{n+k}W_n) + E(W_n)^2 \\
&= \frac{E(Z_{n+k}^2)}{m^{2(n+k)}} - 2\frac{E(Z_{n+k}Z_n)}{m^{2n+k}} + \frac{E(Z_n^2)}{m^{2n}}. \\
&= \frac{(Var(Z_{n+k}) + m^{2(n+k)})}{m^{2(n+k)}} - 2\frac{(Cov(Z_{n+k}, Z_n) + m^{2n+k})}{m^{2n+k}} \\
&\quad + \frac{(Var(Z_n) + m^{2n})}{m^{2n}} \\
&= \frac{Var(Z_{n+k})}{m^{2(n+k)}} + 1 - 2\frac{Var(Z_n)}{m^{2n}} - 2 + \frac{Var(Z_n)}{m^{2n}} + 1.
\end{aligned}$$

Como $m > 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
E(W_{n+k} - W_n)^2 &= \sigma^2 \frac{m^{n+k}(m^{n+k}-1)}{m(m-1)m^{2(n+k)}} + 1 - 2\sigma^2 \frac{m^n(m^n-1)}{m(m-1)m^{2n}} - 2 + \sigma^2 \frac{m^n(m^n-1)}{m(m-1)m^{2n}} + 1 \\
&= \frac{\sigma^2}{m(m-1)} \left[\frac{(m^{n+k}-1)}{m^{n+k}} - \frac{(m^n-1)}{m^n} \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{m(m-1)} \frac{1}{m^n} \left(1 - \frac{1}{m^k} \right) \\
&\leq \frac{\sigma^2}{m(m-1)} \frac{1}{m^n}.
\end{aligned}$$

Por tanto $E(W_{n+k} - W_n)^2 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como el espacio L^2 es completo, entonces existe $W \in L^2$ talque

$$E(W_n - W) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Entonces, $E(W_n) = E\left(\frac{Z_n}{m^n}\right) \rightarrow E(W) = E\left(\frac{Z_1}{m}\right) = \frac{m}{m}$ cuando $n \rightarrow \infty$ y en consecuencia $E(W) = 1$.

2. Tenemos que

$$\begin{aligned}
E(W_n)^2 &= E\left(\frac{Z_n^2}{m^{2n}}\right) \\
&= \frac{1}{m^{2n}} [Var(Z_n) + m^{2n}] \\
&= \frac{\sigma^2 m^n(m^n-1)}{m(m-1)m^{2n}} + 1 \\
&= \frac{\sigma^2(1 - m^{-n})}{m^2 - m} + 1.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que:

$$\text{Var}(W) = \frac{\sigma^2}{m^2 - m}$$

3. Sea $r := P(W=0)$. Entonces $r < 1$, ya que $E(W) = 1$. Puesto que

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} P(W = 0 \mid Z_1 = k)P(Z_1 = k)$$

y

$$\begin{aligned} P(W = 0 \mid Z_1 = k) &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{m^n} = 0 \mid Z_1 = k\right) \\ &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{n-1}^{(1)} + Z_{n-1}^{(2)} + \dots + Z_{n-1}^{(k)}}{m^n} = 0 \mid Z_1 = k\right) \end{aligned}$$

donde las $Z_{n-1}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, k$ son variables aleatorias independientes todas con la misma distribución de Z_1 . La variable aleatoria $Z_{n-1}^{(i)}$ puede ser interpretada como el número de descendientes en la $(n-1)$ -ésima generación del i -ésimo individuo de la primera generación. Con lo cual, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(W = 0 \mid Z_1 = k) &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \frac{Z_{n-1}^{(1)} + Z_{n-1}^{(2)} + \dots + Z_{n-1}^{(k)}}{m^{n-1}} = 0\right) \\ &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \frac{Z_{n-1}^{(1)}}{m^{n-1}} = 0, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \frac{Z_{n-1}^{(k)}}{m^{n-1}} = 0\right) \\ &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \frac{Z_{n-1}^{(1)}}{m^{n-1}} = 0\right) \dots P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \frac{Z_{n-1}^{(k)}}{m^{n-1}} = 0\right) \\ &= [P(W = 0)]^k, \end{aligned}$$

entonces:

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} p_k r^k,$$

es decir, r es solución de la ecuación $f(s) = s$ y por lo tanto $r = q$.

En resumen, en los casos crítico y subcrítico, el proceso Z_n se extingue, y en el caso supercrítico se extingue con probabilidad q y crece geoméricamente y asintóticamente como $m^n W$, cuando $n \rightarrow \infty$, con probabilidad

$1 - q$. Esto último es el análogo de la ley de Malthus sobre el crecimiento geométrico de la población.

En el caso crítico $m = 1$ se tiene que la distribución de la variable aleatoria $\frac{Z_n}{n}$, condicionada a la no extinción, es exponencial, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{Z_n}{n} \leq x | Z_n > 0 \right] = 1 - \exp \left(-\frac{2x}{\sigma^2} \right), x \geq 0 \quad (2.9)$$

En el caso supercrítico ($m > 1$), el resultado (2.3) es del tipo de una ley fuerte para N_n , análoga a la ley fuerte de los grandes números, pero en este caso el límite es una variable aleatoria, no una constante. Además, para el caso supercrítico, es posible que $W = 0$ con probabilidad 1, sin embargo, si $\sigma^2 = \text{Var}(Z_n) < \infty$, entonces se puede asegurar que W es no degenerado, como lo establece el resultado del teorema de Harris. En [31] se presentan algunas condiciones más débiles que garantizan la convergencia de W_n a un límite no degenerado W . Para este caso, también se tiene un límite de fluctuaciones de Z_n respecto al crecimiento $m^n W$. En efecto, si $p_0 = 0$ entonces:

$$\frac{Z_n - m^n W}{Z_n^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \text{Var}(W)) \quad (2.10)$$

cuando $n \rightarrow \infty$ y donde \Rightarrow denota convergencia en distribución. Es decir, el término izquierdo de la ecuación anterior converge en distribución a la normal con valor medio 0 y varianza $\text{Var}(W)$; es decir, para cada $x \in (-\infty, \infty)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{Z_n - m^n W}{Z_n^{\frac{1}{2}}} \leq x \right] = \frac{1}{(2\pi\sigma^2/(m^2 - m))^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2/(m^2 - m)} \right\} dy \quad (2.11)$$

Este resultado se parece al teorema central del límite, pero en este caso la fluctuación es con respecto a una variable aleatoria (no al valor medio), y para la normalización en lugar de $n^{\frac{1}{2}}$, se tiene la variable aleatoria $Z_n^{\frac{1}{2}}$.

2.2.2. El proceso de Bellman-Harris

En el modelo de Galton-Watson cada individuo vive una unidad de tiempo y por lo tanto todos los individuos que coexisten pertenecen a la misma generación [17]. En el proceso de Bellman-Harris los individuos se reproducen de la misma forma que en el de Galton-Watson, pero cada uno tiene

su propia duración de vida aleatoria, independiente unos de otros, con función de distribución G . El proceso de Bellman-Harris es un proceso más general que el anterior proceso considerado, ya que los tiempos de vida de las partículas son variables aleatorias no negativas con distribuciones arbitrarias. Es decir, una partícula inicial nace en el tiempo $t_0 = 0$ y vive un tiempo t , el cual es una variable aleatoria con función de distribución acumulada $G(t)$. En el momento de su muerte, la partícula inicial produce un número aleatorio de descendientes de acuerdo a una distribución dada con función generadora de probabilidad (pgf) $f(s)$. Los descendientes se reproducen, de manera similar al individuo inicial, independientemente unos de otros. Cuando G es la distribución exponencial de parámetro V ,

$$G(t) = 1 - e^{-Vt}, t \geq 0. \quad (2.12)$$

entonces $Z(t)$ tiene la propiedad de Markov. Entre más compleja sea la función de distribución G , más difícil será el análisis del proceso de Bellman-Harris. Al igual que para el proceso de Galton-Watson, en los casos crítico y subcrítico, el sistema se extingue con probabilidad 1 casi siempre.

Asumamos que el tiempo de vida de la partícula inicial es igual a τ . Entonces para tiempos $t < \tau$, el proceso consta de una sola partícula, el padre. Para tiempos $t \geq \tau$, el número de partículas en el proceso es igual a la suma del número de partículas en todos los subprocesos empezando por los descendientes presentes en la primera generación de la partícula inicial. Esto es,

$$Z(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < \tau, \\ \sum_{i=1}^X Z^{(i)}(t - \tau) & \text{si } t \geq \tau \end{cases} \quad (2.13)$$

donde X es el número de descendientes del individuo original, presentes en el tiempo t y $Z^{(i)}(s - \tau)$ representa el número de individuos, con edad $t - \tau$, que son descendientes del i -ésimo individuo presente en el tiempo t . Sea $F(s, t) = \sum_{r=0}^{\infty} P(Z(t) = r) s^r$, $t \geq 0$, $|s| \leq 1$, entonces es fácil ver que:

$$F(s, t) = \begin{cases} s, & \text{si } t < \tau, \\ f[F(s, t - \tau)] & \text{si } t \geq \tau \end{cases} \quad (2.14)$$

La función $F(s, t)$ recibe el nombre de función generadora de $Z(s)$. El concepto de función generadora se define como sigue para procesos estocásticos en general $Z(t)$.

Definición 13. Sea $(Z(t))_{t \in T}$ un proceso estocástico. Se define la función generadora de $Z(t)$ como sigue $F(s, t) = \sum_{r=0}^{\infty} P\{Z(t) = r\} s^r$, $t \geq 0$, $|s| \leq 1$. Observemos que:

$$F(s, t) = E(s^{Z(t)}) = \int_{\Omega} s^{Z(t, \omega)} dP(\omega)$$

donde se interpreta a $0^0 = 1$ y $s^{\infty} = 0$ aún si $|s| = 1$

A continuación presentaremos un resultado relacionado con la función generadora, el cuál será de gran utilidad en el desarrollo de la teoría que nos ocupa en la presente sección.

Teorema 15. *La función generadora F satisface la ecuación integral*

$$F(s, t) = s[1 - G(t)] + \int_{[0, t]} f[F(s, t - u)] dG(u) \quad (2.15)$$

donde G es la función de distribución de reproducción de los individuos presentes en el proceso de Bellman-Harris y f es a función definida en (2.2).

Demostración 7. Ver [22] pag 132.

Para algunos casos específicos de funciones G es posible encontrar soluciones explícitas de (2.15) debido a que en tales casos, las ecuaciones generadas son más simples.

Observe que el teorema 15 garantiza la existencia de una solución de la ecuación integral (2.15), pero no dice nada acerca de la unicidad de la solución. A continuación vamos a presentar dos sucesiones que convergen a una solución de (2.15).

Se define la primera sucesión de variables aleatorias como sigue:

$$\begin{aligned} Z_t^{(0)} & : = 0 \\ Z_t^{(n)} & : = \text{ " número de individuos presentes en el tiempo } t \\ & \quad \text{ pertenecientes a la generaciones } 0, 1, \dots, n - 1 \text{ " } \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

Se puede ver que:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{n+1}(s, t) & : = E(s^{Z_t^{(n+1)}}) \\ & = [1 - G(t)]s + \int_0^t (\hat{F}_n(s, t - u)) dG(u) \end{aligned}$$

argumentando de manera similar a como se hizo para $F(s, t)$.

Por otra parte tenemos que para cada t se satisface:

$$Z_t^{(0)} \leq Z_t^{(1)} \leq \dots \leq Z_t^{(n)} \leq \dots$$

y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_t^{(n)} = Z_t.$$

Por lo tanto, $s^{Z_t^{(n)}} \downarrow s^{Z_t}$ para $0 < s < 1$ y en consecuencia se tiene que:

$$1 = \hat{F}_0 \geq \hat{F}_1 \geq \hat{F}_2 \geq \dots$$

y

$$F(s, t) = E(s^{Z_t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}_n(s, t), \text{ con } 0 < s < 1$$

Veamos que $|\hat{F}_n(s, t)| \leq 1$ para todo n y $|s| \leq 1$.

Se tiene que para $n = 1$

$$\begin{aligned} |\hat{F}_1(s, t)| &= |[1 - G(t)]s + p_0 G(t)| \\ &\leq 1 - G(t) + G(t) = 1 \end{aligned}$$

Si suponemos válido para n que $|\hat{F}_n(s, t)| \leq 1$, se tiene que

$$|\hat{F}_{n+1}(s, t)| \leq 1 - G(t) + G(t) = 1$$

Esto es, $|\hat{F}_n(s, t)| \leq 1$ para todo $n \geq 0$ y $|s| \leq 1$.

Puesto que las funciones \hat{F}_n son series de potencias con coeficientes no negativos y $|\hat{F}_n| \leq 1$ para $|s| \leq 1$ entonces se garantiza que:

$$\hat{F}_n(s, t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(s, t)$$

para $|s| < 1$, uniformemente en t .

Por otra parte, la sucesión $F_n^*(s, t)$ definida como sigue (para una interpretación probabilística de esta sucesión, ver Harris pág.133):

$$\begin{aligned} F_0^*(s, t) &: = 0 \\ F_{n+1}^*(s, t) &: = s[1 - G(t)] + \int_0^t f(F_n^*(s, t - u))dG(u) \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$; $|s| \leq 1$ y $t \geq 0$, satisface las siguientes condiciones:

1. Las F_n^* son series de potencias en s para $|s| \leq 1$, con coeficientes no negativos.
2. $|F_n^*| \leq 1$
3. Si $0 \leq s \leq 1$ entonces

$$F_0^*(s, t) \leq F_1^*(s, t) \leq \dots$$

Por lo tanto, $F_n^*(s, t) \uparrow F^*(s, t)$, donde $F^*(s, t)$ es una solución de (2.15) y $F^*(s, t)$ es una serie de potencias convergente para $|s| \leq 1$.

En principio esto podría hacernos pensar que la solución de la ecuación (2.15) no es única. Sin embargo Harris demostró que la solución sí es única. Esta situación se muestra en el siguiente teorema cuya demostración puede ser consultada en [22] pág.134.

Teorema 16. *Para cada s , $0 \leq s < 1$, existe una única s -solución no negativa de la ecuación integral (2.15), llamada $F(s, t)$.*

Por otro lado, aún no se garantiza que $F(1^-, t) = 1$, es más, eventualmente podría tenerse que $F(1^-, t) < 1$. Sin embargo, si $P(Z_t < \infty) = 1$ para todo t , entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} F(1^-, t) &= \lim_{s \rightarrow 1^-} F(s, t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_t = k) \cdot s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_t = k) \\ &= P(Z_t < \infty) = 1 \diamond \end{aligned}$$

El siguiente teorema nos ofrece una condición suficiente para garantizar la "finitud" del proceso Z_t .

Teorema 17. *Si $G(0^+) = 0$ y $m := h'(1) < \infty$ entonces $P(Z_t < \infty) = 1$ para cada $t \geq 0$.*

Demostración 8. Ver [22] pág. 138-139.

La condición $G(0^+) = 0$ indica que la probabilidad de muerte instantánea es cero.

Un proceso $(Z_t)_{t \geq 0}$ que satisfaga la condición $P(Z_t < \infty) = 1$ para todo $t \geq 0$ se dice *regular*.

Para los procesos de ramificación considerados en este trabajo se asumirá que $G(0^+) = 0$ y $m < \infty$.

2.3. Teoría de renovación

La teoría de renovación se ocupa de la investigación acerca de la salida fuera de servicio y el reemplazo de partes (elementos) dentro de un sistema en funcionamiento.

Definición 14. Sean K y X funciones medibles, $K \geq 0$ acotada y F una función de distribución. La relación:

$$X(t) = K(t) + \int_0^t X(t-u)dF(u), \quad t \geq 0$$

se llama *ecuación de renovación*.

En otras palabras:

$$X = K + X * F$$

Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias no negativas, independientes e igualmente distribuidas con función de distribución F donde $F(0) = 0$.

Consideremos las variables aleatorias N_t con valores en los enteros no negativos definida como sigue:

$$N_t := n, \text{ si y sólo si, } X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t < X_1 + X_2 + \dots + X_{n+1} \quad (2.16)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} H(t) &: = EN_t \\ &= E(E(N_t | X_1)) \\ &= \int_0^t [E(N_{t-\tau}) + 1]dF(\tau) + \int_t^\infty 0.dF(\tau) \\ &= F(t) + \int_0^t H(t-\tau)dF(\tau) \end{aligned}$$

es decir:

$$H = F + H * F$$

En otras palabras, H satisface la ecuación de renovación dada en la definición 14.

Como ejemplo, supongamos que tenemos un lote de bombillas eléctricas y que una vez una se funde ella es inmediatamente reemplazada.

Sea $X_i :=$ " tiempo de duración de la i -ésima bombilla", con $i = 1, 2, \dots$. Suponemos que las X_i son variables aleatorias independientes igualmente distribuidas, con distribución común F .

Entonces, si

$N_t :=$ " número de reemplazos realizados en $(0, t]$ "

Es claro que las variables aleatorias N_t satisfacen (2.16)

Observe que si $0 \leq \tau \leq t$ entonces

$$E(N_t | X_1 = \tau) = 1 + E(N_{t-\tau}). \diamond$$

Lema 18. Sea $H(t) := EN_t$. Entonces:

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)$$

Demostración 9.

$$\begin{aligned} H(t) &= EN_t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(N_t = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N_t \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t). \end{aligned}$$

Lema 19. Sea $X := K + K * H$. Entonces X satisface la ecuación de renovación dada en la definición 14.

Demostración 10.

$$\begin{aligned} K + X * F &= K + (K + K * H) * F \\ &= K + K * F + K * H * F \\ &= K + K * (F + H * F) \\ &= K + K * H = X. \end{aligned}$$

Definición 15. Sea G una función de distribución. Decimos que G es una *función de distribución Δ -reticulada* si es constante en los intervalos de la forma $[\Delta, 2\Delta), [2\Delta, 3\Delta), \dots, [n\Delta, (n+1)\Delta), \dots$ y $\sum_{n=0}^{\infty} [G(n\Delta^+) - G(n\Delta)^-] = 1$ y donde Δ es el mayor número positivo que satisface dicha condición.

Si X es una variable aleatoria real cuya función de distribución es Δ -reticulada entonces decimos que X es Δ -reticulada.

Ejemplos

1. Si $P(X = 2) = P(X = 4) = \frac{1}{2}$, X es 2-reticulada.
2. Si $P(X = 4\pi) = P(X = 6\pi) = \frac{1}{2}$, X es 2π -reticulada.
3. Si $P(X = \sqrt{2}) = P(X = \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$, X no es reticulada.
4. Si $P(X = \sqrt{2}) = P(X = \sqrt{8}) = \frac{1}{2}$, X es $\sqrt{2}$ -reticulada.
5. Si $X \stackrel{d}{=} \text{Exp}(\lambda)$ entonces X no es reticulada.
6. Si $X = \frac{1}{Y+1}$ donde Y tiene distribución Poisson de parámetro λ entonces X no es reticulada. \diamond

Se supondrá de ahora en adelante que F es una función de distribución no reticulada.

Los teoremas que se presentan a continuación son fundamentales en el desarrollo de la teoría de renovación.

Teorema 20 (Teorema Elemental de Renovación). Si $m_1 := \int u dF(u) < \infty$ entonces

$$\frac{H(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m_1}$$

Demostración 11. Ver [10]

Teorema 21 (Teorema de Blackwell).

$$H(t+s) - H(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{s}{m_1}$$

para todo $s > 0$.

Demostración 12. Ver [12] pág. 360.

Teorema 22 (Teorema Fundamental). Sea $K(\cdot)$ monótonamente decreciente e integrable sobre $[0, \infty)$ entonces:

$$(K * H)(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m_1} \int_0^{\infty} K(u) du$$

Demostración 13. Idea de la demostración

$$(K * H)(t) = \int_0^t K(t-u)dH(u)$$

es para t suficientemente grande, aproximadamente igual a:

$$\int_0^\infty K(t-u) \cdot \frac{du}{m_1} = \frac{1}{m_1} \int_0^\infty K(u)du.$$

Para una demostración detallada del teorema fundamental, ver [12] pág. 363.

Teorema 23. *Supongamos que K es monótonamente decreciente e integrable sobre $[0, \infty)$. Si X es una solución de la ecuación de renovación dada en la definición 14. entonces*

$$X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m_1} \int_0^\infty K(u)du$$

Demostración 14. Puesto que $X = K + K * H$, ya que la solución de la ecuación de renovación es única y $X = K + K * H$ es una solución de la ecuación de renovación, entonces se sigue del teorema anterior que

$$X(t) = K(t) + (K * H)(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 + \frac{1}{m_1} \int_0^\infty K(u)du.$$

2.4. Comportamiento Asintótico de $M(t) := EZ_t$

El comportamiento asintótico de $M(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ puede ser determinado, en muchos casos de interés, usando los resultados de la teoría de renovación.

Definición 16. El *parámetro Malthusiano* α se define como la raíz (si existe) de la ecuación:

$$m \int_0^\infty e^{-\alpha t} dG(t) = 1$$

donde $m := h'(1)$.

Si $1 < m < \infty$ entonces el parámetro Malthusiano siempre existe.

Si $m < 1$ entonces el parámetro Malthusiano no siempre existe. Sin embargo, en caso de existir es necesariamente negativo.

En los casos subcrítico y crítico, el análisis de la probabilidad de extinción del proceso es análoga a la desarrollada para el caso del proceso de Galton-Watson. En el caso supercrítico, el parámetro de Malthus juega un papel fundamental en dicho análisis, como se expone a continuación.

Propiedades asintóticas del proceso en el caso supercrítico

En el caso supercrítico, cuando el parámetro de Malthus existe, se obtienen para el proceso de Bellman-Harris resultados similares a los obtenidos para el proceso de Galton-Watson. Más precisamente si consideramos el proceso $(W_t)_{t \geq 0}$ definido por:

$$W_t = \frac{Z_t}{n_1 e^{\alpha t}} \quad (2.17)$$

donde α es el parámetro de Malthus y

$$n_1 = \frac{m - 1}{\alpha m^2 \int_0^\infty u e^{-\alpha u} dG(u)}, \quad (2.18)$$

entonces, existe una variable aleatoria no negativa W tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_t = W \quad c.s \quad (2.19)$$

En el año 1972 Athreya y Ney prueban que se tiene además convergencia r-media de W_t a W . Resultado que se presenta a continuación como teorema.

Teorema 24 (Athreya y Ney 1972). *Suponga que $m > 1$, $f''(1-) < \infty$, $mG(0+) < 1$ y G es una distribución no reticulada. Entonces W_t converge con probabilidad 1 y en media cuadrada a una variable aleatoria W , cuando $t \rightarrow \infty$, donde*

$$E(W) = 1 \quad (2.20)$$

$$Var(W) = \frac{[m + f''(1-)] \int_0^\infty e^{-2\alpha u} dG(u) - 1}{1 - m \int_0^\infty e^{-2\alpha u} dG(u)} \quad (2.21)$$

La varianza de W es positiva.

Demostración 15. (ver [24])

Por otra parte, se tiene que $\mu(t) := E(Z_t)$ tiene, asintóticamente, un comportamiento de tipo exponencial. Para hacer la demostración de éste hecho se requiere del siguiente teorema.

Teorema 25. *El valor esperado $M(t)$ satisface la ecuación de renovación*

$$M(t) = [1 - G(t)] + m \int_0^t M(t-u) dG(u) \quad (2.22)$$

donde $m = h'(1)$.

M es acotada sobre cada intervalo t – finito y es la única solución de (2.11) que tiene esta propiedad.

Demostración 16. Sabemos que

$$F(s, t) = s[1 - G(t)] + \int_0^t h(F(s, t-u)) dG(u)$$

Si $|s| < 1$ entonces podemos derivar ambos lados de la ecuación anterior con respecto a F , ya que F es una serie de potencias convergente para $|s| < 1$.

Tenemos:

$$\frac{\partial F(s, t)}{\partial s} = [1 - G(t)] + \int_0^t h'(F(s, t-u)) \cdot \frac{\partial F(s, t-u)}{\partial s} dG(u) \quad (2)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(s, t)}{\partial s} &\leq [1 - G(t)] + m \int_0^t \frac{\partial F(s, t-u)}{\partial s} dG(u) \\ &= [1 - G(t)] + m \left(\frac{\partial F(s, t)}{\partial s} * G \right) \end{aligned}$$

Iterando la inecuación obtenemos:

$$\frac{\partial F(s, t)}{\partial s} \leq [1 - G(t)] * U_m(t) \quad (3)$$

donde

$$U_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n G^{*n}(t)$$

Se puede demostrar que $U_m(t)$ es acotada para todo t – intervalo finito. Por lo tanto, si tomamos en (3) el límite cuando $s \rightarrow 1^-$ entonces se obtiene que $M(t)$ es acotada sobre todo intervalo t – finito.

Además de (2) se obtiene, tomando el límite cuando $s \rightarrow 1^-$, que

$$M(t) = [1 - G(t)] + m \int_0^t M(t-u) dG(u).$$

Teorema 26. Si $m > 1$ y G no es reticulada entonces

$$M(t) \sim n_1 e^{\alpha t}$$

cuando $t \rightarrow \infty$ y donde α es el parámetro Malthusiano asociado a (m, G) y siendo

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha t} [1 - G(t)] dt}{m \int_0^\infty t e^{-\alpha t} dG(t)} \\ &= \frac{m - 1}{\alpha m^2 \int_0^\infty t e^{-\alpha t} dG(t)} \end{aligned}$$

Demostración 17. Sea $M_0(t) := e^{-\alpha t} M(t)$. Del teorema anterior obtenemos:

$$M_0(t) = [1 - G(t)]e^{-\alpha t} + m \int_0^t M_0(t-u)e^{-\alpha u} dG(u)$$

Esto es,

$$M_0(t) = K_0(t) + m \int_0^t M_0(t-u) \cdot e^{-\alpha u} dG(u)$$

Es decir, $M_0(t)$ satisface la ecuación de renovación con

$$\begin{aligned} K_0(t) &= [1 - G(t)]e^{-\alpha t} \\ F(t) &= \int_0^t m e^{-\alpha u} dG(u) \end{aligned}$$

Como $K_0(t)$ es monótona decreciente e integrable entonces podemos aplicar el teorema 20 y obtener:

$$M_0(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{m_1} \int_0^\infty K_0(u) du$$

donde $m_1 = \int_0^\infty u dF(u)$. Esto es,

$$e^{\alpha t} M(t) \longrightarrow \frac{\int_0^\infty [1 - G(u)] e^{-\alpha u} du}{\int_0^\infty u \cdot m \cdot e^{-\alpha u} dG(u)}$$

es decir

$$M(t) \sim n_1 e^{\alpha t}$$

donde

$$n_1 = \frac{\int_0^\infty [1 - G(u)] e^{-\alpha u} du}{m \int_0^\infty u e^{-\alpha u} dG(u)}$$

En el caso en que G sea exponencial, se tiene que $(W_t)_{t \geq 0}$ es un martingala, no negativa y entonces se prueba directamente a partir del teorema de convergencia de martingalas la existencia de W . En los casos crítico y subcrítico $W = 0$ y en el caso supercrítico la variable aleatoria W es absolutamente continua en $(0, \infty)$.

Análogo al caso del proceso de Galton-Watson, en el proceso de Bellman Harris, la población se extingue o crece exponencialmente como $n_1 e^{\alpha t} W$ asintóticamente cuando $t \rightarrow \infty$; de ahí que se haya llamado a α parámetro de Malthus, pues determina la forma del crecimiento exponencial de la población. En el caso crítico un resultado análogo a (2.9) es el siguiente:

Si $\int_0^\infty t dG(t) = \mu < \infty$ y $t^2[1 - G(t)] \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{Z_t}{t} \leq x | Z_t > 0 \right] = 1 - \exp \left(-\frac{2\mu x}{\sigma^2} \right), \quad x \geq 0 \quad (2.23)$$

De la misma manera se puede establecer un resultado de fluctuación análogo a (2.10) en el caso supercrítico con G exponencial (en este caso $n_1 = 1$) es el siguiente:

$$\frac{Z_t - e^{V(m-1)t} W}{Z_t^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \text{Var}(W)) \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

donde W es el límite de $e^{V(m-1)t} Z_t$ cuando $t \rightarrow \infty$, dado por (2.19). Es claro que, si $m = 1$ entonces $M(t) = 1$.

2.5. El proceso inmerso de Galton-Watson

A partir del proceso $(Z_t)_{t \geq 0}$ podemos construir un proceso de Galton-Watson de manera natural como explicaremos a continuación:

Definición 17. La 0-ésima generación del proceso $(Z_t)_{t \geq 0}$ está constituida por todos los individuos existentes en $t = 0$.

La $(n + 1)$ -ésima generación del proceso $(Z_t)_{t \geq 0}$ está conformada por todos los hijos de los individuos de la n -ésima generación.

Definición 18. Definimos $\zeta_n :=$ "número de individuos de la n -ésima generación", para $n = 0, 1, 2, \dots$

Para cada $\delta > 0$ se define $Z_n := Z_{n\delta}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Teorema 27. Para cada $\delta > 0$ el proceso $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es un proceso de Galton-Watson con función generadora de probabilidades $g(s) := F(s, \delta)$.

Demostración 18. Sea $\delta > 0$ fijo. Como $(Z_t)_{t \geq 0}$ es una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias, lo mismo sigue siendo válido para $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned} E(s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = i) &= E(s^{Z_1} \mid Z_0 = i) \\ &= E(s^{Z_\delta} \mid Z_0 = i) \\ &= F_i(s, \delta) \\ &= (F(s, \delta))^i \\ &= \left[E(s^\delta \mid Z_0 = 1) \right]^i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es un proceso de Galton-Watson con $F(s, \delta)$ como función generadora de probabilidades.

A continuación se presentan algunos casos especiales de los procesos de ramificación con parámetro de tiempo continuo.

2.6. Procesos de ramificación con estado continuo

Los procesos de Galton-Watson y de Bellman-Harris solamente toman valores enteros no negativos. Ahora veremos unos procesos de ramificación con espacio de estados continuo: $[0, \infty)$. Cuando el número de partículas de un sistema es muy grande, en lugar de considerar las partículas individuales conviene estudiar la densidad de partículas. Este enfoque, que se usa en física estadística, se emplea para obtener los procesos con estado continuo.

Consideremos el proceso de Galton-Watson, pero en lugar de una sola partícula inicial, como antes ($N_0 = 1$), ahora habrá muchas partículas iniciales. Antes supusimos implícitamente que cada partícula tiene una masa unitaria, y ahora las partículas tendrán masas muy pequeñas. Además, en una unidad de tiempo ocurrirán muchas ramificaciones, y la ley de ramificación será asintóticamente crítica. Más precisamente, se considera $(N_n^{(r)})_{n=0,1,2,\dots}$ con $r = 1, 2, \dots$ una sucesión de procesos de Galton-Watson. Para cada r se define el proceso estocástico en tiempo continuo $(X_t^{(r)})_{t \geq 0}$ en la forma $X_t^{(r)} = \frac{N_{\lfloor rt \rfloor}^{(r)}}{r}$, donde $\lfloor rt \rfloor$ es el mayor entero menor o igual que rt . Así

2.6. PROCESOS DE RAMIFICACIÓN CON ESTADO CONTINUO 55

tomando $i = 0, 1, 2, \dots$ las ramificaciones ocurren en los instantes $\frac{i}{r}$ y cada partícula tiene masa $\frac{1}{r}$. Hacemos que las leyes de ramificación dependan de r de modo que el valor medio sea asintóticamente de la forma $m(r)$, esto es $m(r) \sim 1 + \frac{b}{r}$ con $-\infty < b < \infty$ constante, cuando $r \rightarrow \infty$, es decir, el valor medio de los procesos de Galton-Watson es positivo para r suficientemente grande. Si existe el límite de $X_0^{(r)} \rightarrow a$, siendo a una constante positiva, cuando $r \rightarrow \infty$ (quiere decir que el número de partículas iniciales tiende a infinito a medida de que r se hace muy grande), se obtienen como límites en distribución de $(X_0^{(r)})_{t \geq 0}$, cuando $r \rightarrow \infty$, procesos $(X_t)_{t \geq 0}$ que son difusiones en $[0, \infty)$, con ecuación de Kolmogorov (hacia atrás) de la forma.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = bx \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) + \frac{1}{2} cx \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x) \quad (2.25)$$

con $X_0 = a$ y constante $c > 0$ que dependen de los segundos momentos de las leyes de ramificación. Esto significa que $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov con trayectorias continuas, tal que

$$E(X_t - a \mid X_0 = a) \sim bat \quad (2.26)$$

y

$$E((X_t - a)^2 \mid X_0 = a) \sim bat \quad (2.27)$$

cuando $t \rightarrow 0$

La probabilidad de extinción del proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ con $(X_0 = a)$ es (Ver [17]):

$$q = \begin{cases} 1, & \text{si } b \leq 0 \text{ (casos críticos y subcríticos),} \\ \exp\{-\frac{2ba}{c}\}, & \text{si } b > 0 \text{ (caso supercrítico)} \end{cases} \quad (2.28)$$

La ecuación diferencial estocástica que corresponde a la difusión $(X_t)_{t \geq 0}$ con la ecuación de Kolmogorov (2.29) es (Ver [17])

$$dX_t = bX_t dt + (cX_t)^{\frac{1}{2}} dB_t, \quad t > 0, \quad X_0 = a \quad (2.29)$$

donde $(B_t)_{t \geq 0}$ es el movimiento browniano estándar (cuyas trayectorias no son diferenciables).

Sistemas espaciales ramificados

Suponga que se tiene un sistema de partículas que se mueven aleatoriamente en el espacio euclídeo \mathbb{R}^d . En el tiempo $t = 0$ hay un número inicial

de partículas N_0 . Cada partícula vive un tiempo aleatorio L , donde L tiene distribución $\exp(V)$ y al morir es reemplazado por un número aleatorio de individuos, de acuerdo a una distribución de descendencia con varianza finita. Los individuos se mueven de acuerdo al movimiento browniano estándar en dimensión d . Es decir, es un sistema de movimientos brownianos ramificados.

Sea (N_t) el proceso estocástico definido por $N_t(A)$ que representa el número de partículas presentes al tiempo t con posiciones en $A \subset \mathbb{R}^d$, siendo A un conjunto de Borel. Para cada t , N_t es una medida de conteo aleatoria en \mathbb{R}^d . Si A y B son conjuntos disjuntos tales que $0 < \lambda(A), \lambda(B) < \infty$, donde λ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d entonces $N_0(A)$ y $N_0(B)$ son variables aleatorias independientes, y la variable aleatoria $N_0(A)$ tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda(A)$ (Se supone que N_0 es una medida aleatoria de Poisson homogénea, cuya medida de intensidad $E(N_0)$), es decir,

$$P[N_0(A) = k] = \frac{1}{k!} (\lambda(A))^k \exp(-\lambda(A)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Recordemos que una medida de Poisson se define sobre un conjunto A , como la cantidad de puntos en A cuya distribución es de Poisson. El proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ tiene la propiedad de Markov debido a que la distribución de vida de las partículas es exponencial y a que el movimiento browniano es un proceso de Markov.

Cuando la densidad del sistema de partículas es muy alta, se toma la configuración inicial N_0 de Poisson con medida de intensidad $K\lambda$, haciendo que la constante K tienda a infinito. Denotemos a $(N_t^K)_{t \geq 0}$ al proceso con densidad K . En el caso $K = 1$ se denotará simplemente por $(N_t)_{t \geq 0}$. En particular, queremos encontrar el comportamiento asintótico del proceso de fluctuación, $(X_t^K)_{t \geq 0}$, definido por

$$X_t^K = \frac{N_t^K - E(N_t^K)}{K^{\frac{1}{2}}}$$

cuando $K \rightarrow \infty$.

Para empezar se necesita calcular el valor medio y la covarianza del proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ (con $K = 1$). Usamos la notación $\langle \mu, \varphi \rangle$ para la integral de la función φ con respecto a la media μ , $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mu(dx)$. En los cálculos interviene el semigrupo del movimiento browniano, $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$, definido por el

2.6. PROCESOS DE RAMIFICACIÓN CON ESTADO CONTINUO 57

operador

$$\mathcal{T}_t\varphi(x) = E(\varphi(W_t) | W_0 = x) \quad (2.31)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)P_s(x, dy) \quad (2.32)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)P_s(x - y)dy \quad (2.33)$$

donde φ es una función integrable y $P_t(x)$ es la función de densidad de transición del movimiento browniano en \mathbb{R}^d definido como,

$$P_t(x, A) = P[W_t \in A | W_0 = x] \quad (2.34)$$

$$= \int_A p_t(x - y)dy \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0 \quad (2.36)$$

A continuación vamos a ver a que es igual $\langle \lambda, \mathcal{T}_t\varphi \rangle$ donde λ es una medida y φ pertenece al espacio $S(\mathbb{R}^d)$ de las funciones infinitamente diferenciables y rápidamente decrecientes. Observe que al tomar la integral a ambos lados de la expresión (2.36) se tiene:

$$\langle \lambda, \mathcal{T}_t\varphi(x) \rangle = \int \mathcal{T}_t\varphi(x)dx = \int \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)P_s(x - y)dydx \quad (2.37)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)dy \int P_s(x - y)dx \quad (2.38)$$

$$= \int \varphi(y)dy = \langle \lambda, \varphi(x) \rangle \quad (2.39)$$

Haciendo uso de un argumento de esperanza condicional con respecto al momento en que ocurre la primera renovación se obtienen los siguientes resultados:

$$E(\langle N_t, \varphi \rangle) = e^{\alpha t} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx, \quad t \geq 0, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^d), \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} K(s, \varphi; t, \psi) &= Cov(\langle N_s, \varphi \rangle), \langle N_t, \psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha t} \mathcal{T}_s(\varphi e^{\alpha(t-s)} \mathcal{T}_{t-s}\psi)(x)dx \\ &\quad + m_2 V \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha u} \mathcal{T}_u(\varphi e^{\alpha(t-s+2u)} \mathcal{T}_{t-s+2u}\psi)(x)dx ds, \\ &0 \leq s \leq t, \quad \varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

donde α es el parámetro de Malthus, definido en la ecuación (B.20). Para el caso presente $\alpha = V(m - 1)$, donde m es el valor medio de la ley de ramificación, y m_2 es el segundo momento factorial. Nótese que

$$K(s, \varphi; t, \psi) = K(s, \varphi; s, U_{t-s}\psi) \quad (2.41)$$

donde $(U_t)_{t \geq 0}$ es el semigrupo $U_t = e^{\alpha t} \mathcal{T}_t$.

Obsérvese que la configuración inicial N_0^K es un proceso de Poisson en \mathbb{R}^d con intensidad K , y su fluctuación es $N_0^K - E(N_0^K) = N_0^K - K\lambda$, y en consecuencia resulta de interés saber que ocurre con la fluctuación cuando $K \rightarrow \infty$. Para hacerlo recurrimos a la normalización, así:

$$X_0^K = \frac{N_0^K - K\lambda}{K^{\frac{1}{2}}} \quad (2.42)$$

Debido al centramiento, X_0^K es una medida aleatoria con signo en \mathbb{R}^d . Sin embargo, el límite cuando $K \rightarrow \infty$, el cual se denotará por X_0 , no es en general una medida con signo sino que toma valores en el espacio de las distribuciones temperadas (Ver [14]) $S'(\mathbb{R}^d)$. Esto es $\langle X, \varphi \rangle$ es una variable aleatoria gaussiana con valor medio 0 y varianza $\langle \lambda, \varphi^2 \rangle$. Por otra parte, las realizaciones de X_0 no son funciones sobre \mathbb{R}^d , son funciones generalizadas. La variable aleatoria X_0 en $S'(\mathbb{R}^d)$ se llama ruido blanco en \mathbb{R}^d . El ruido blanco en dimensión 1 se puede imaginar de manera intuitiva como un proceso estocástico cuyos valores en tiempos distintos son independientes, idénticamente distribuidos, con valor medio 0 y varianza infinita. Con esto, no es extraño que el límite cuando $K \rightarrow \infty$ de las fluctuaciones definidas por $X_t^K = \frac{N_t^K - E(N_t^K)}{K^{\frac{1}{2}}}$ sea un proceso que toma valores en $S'(\mathbb{R}^d)$.

Capítulo 3

MODELOS DETERMINISTAS

Diferentes tipos de modelos han caracterizado las investigaciones sobre calidad del aire, problema ambiental que, desde comienzos de la década de los sesenta, ha suscitado gran interés dentro de la comunidad académica. Éste problema además de considerar como variables fundamentales las fuentes de emisión y el origen de los componentes contaminantes, considera las características del transporte, concentración y transformación de dichas sustancias en el aire y en el receptor donde se detecta su efecto nocivo. Los modelos que relacionan todas las variables presentes en el fenómeno son los llamados modelos de difusión atmosférica, que a su vez son simulados por medio de modelos de dispersión atmosférica.

Dentro de los modelos de dispersión atmosférica se distinguen dos clases: los primeros, de tipo físico, parten del punto de vista experimental, buscando reproducir las condiciones de emisión y dispersión de las partículas contaminantes en el aire. La segunda clase de modelos de dispersión son de tipo matemático, llamados así debido a que la descripción de los fenómenos que intervienen, se hace por medio de formulación matemática adecuada. De esta manera, ésta última clase de modelos proporciona un punto de vista analítico, basado en el conocimiento que se tiene del medio dispersivo y de los fenómenos físico-químicos.

Dependiendo de las condiciones observadas en el fenómeno, otro tipo de procedimientos son considerados, tal es el caso de los modelos meteorológicos, en los cuales son incluídas en las observaciones del fenómeno ambiental

las condiciones meteorológicas prevalentes en el modelo. En algunos modelos de control de la contaminación atmosférica se requiere el uso de modelos meteorológicos, en particular cuando se necesita una descripción del campo de vientos y de la turbulencia en la región estudiada [15].

La fundamentación teórica de los modelos meteorológicos no se proporcionará en el presente trabajo, debido a que en su objetivo general se fija en el interés por conocer la distribución de la ubicación y de la masa de las partículas que se ramifican en un tiempo dado, para ésto no se requiere proporcionar una descripción del campo de vientos y del régimen turbulento del área estudiada. En lugar de ésto, fundamentaremos teóricamente los modelos de dispersión atmosféricos de tipo matemático debido a la evidencia experimental que de ellos se tiene, referente a su gran contribución a los problemas de contaminación del aire. Para ésto, diferenciaremos dos categorías de los modelos matemáticos. Las primeras del tipo determinístico, las cuales simulan los fenómenos físicos entre el foco emisor y el receptor, mientras que las segundas de tipo estadístico¹ establecen una relación entre concentraciones y emisiones registradas en el pasado, lo cual conduce a condiciones semejantes en el futuro.

Para comprender las diferencias entre los tipos de modelos matemáticos de dispersión (MMD), González, R en [15] expone algunos ejemplos de modelos matemáticos de dispersión resumidos a continuación en el cuadro (3.1), donde se encontrarán en primer lugar dos MMD de tipo estadístico, los dos siguientes un par de MMD del tipo determinístico y el último un MMD del tipo mixto (estadístico y determinístico).

Para comprender los ejemplos del cuadro (3.1) es importante tener en cuenta la siguiente notación: E representa la emisión, MET las variables meteorológicas, MOD el tipo de modelo. Aquí el subíndice e indica modelo estadístico y d modelo determinístico, C_0 representa la concentración observada, C_p la concentración esperada, t representa la variabilidad temporal, t' el tiempo entre 1 un valor máximo en la duración de la emisión, es decir la observación se hace a partir del momento de la emisión, sin importar la concentración de contaminantes presentes en el instante inicial, t'' represen-

¹No se debe confundir los modelos de tipo estadístico con estocástico pues, la finalidad de los segundos será predecir la distribución de probabilidad de concentraciones espaciales de partículas de materia de diferentes tamaños, mientras que los primeros establecen una relación entre concentraciones y emisiones de partículas registradas en evidencias experimentales pasadas.

modelo gaussiano	$E_t + MET_t \overrightarrow{MOD}_d C_{p_{st}}$
modelo K	$E_t + MET_t + C_{p_{s(t-1)}} \overrightarrow{MOD}_d C_{p_{st}}$
modelo autoregresivo	$C_{0_{(t-t')}} \overrightarrow{MOD}_e C_{p_{t+t''}}$
modelo de regresión múltiple	$(E + MET + C_0)_{t-t'} \overrightarrow{MOD}_e C_{p_{t+t''}}$
modelo híbrido o mixto	$(E + MET + C_0 + C_{p_s})_{t-t'} \overrightarrow{MOD}_d + \overrightarrow{MOD}_e C_{p_{s(t+t'')}}$

Cuadro 3.1: Esquemas de modelos del tipo MMDD, MMDE y mixtos

ta el tiempo entre 0 y un valor máximo en la duración de la emisión, donde se tiene en cuenta la concentración inicial y s indica el espacio.

Del cuadro (3.1) se puede notar que conociendo la emisión de partículas y las variables meteorológicas en el tiempo t , vía modelo gaussiano, se pueden determinar la concentración esperada C_p en el tiempo t por unidad de área s . El modelo K presentado en el mismo cuadro, consiste en determinar la concentración esperada C_{st} en el tiempo t vía un modelo determinístico, dado la emisión, las variables meteorológicas y la concentración de partículas C_p por unidad de área s , en el tiempo inmediatamente anterior $t - 1$. De manera análoga, el modelo autoregresivo se interpreta como un modelo tipo estadístico, con el cual, una vez conocida la concentración inicial C_0 en el tiempo $t - t'$ se puede determinar la concentración esperada C_p en tiempo $t + t''$, con t' y t'' tiempos en los que se recogen las evidencias experimentales anteriores al tiempo t , es decir hacen parte de la historia del experimento. De igual forma, se interpretan los modelos de regresión múltiple e híbrido respectivamente. De esta manera, se puede determinar que los primeros dos modelos determinísticos no requieren del conocimiento previo de las concentraciones iniciales, a diferencia de los modelos estadísticos, además los modelos determinísticos también se caracterizan por que con éstos se obtiene las concentraciones esperadas por unidad de área, en cambio con los modelos estadísticos se obtienen concentraciones esperadas en un tiempo $t + t''$.

MODELOS DE CALIDAD DE AIRE				
MODELOS MATEMÁTICOS				MODELOS FÍSICOS
Modelos determinísticos				
Modelos Estadísticos	Modelos Fotoquímicos	Modelos Meteorológicos		
	Modelos Eulerianos	Modelos Lagrangianos	Modelos Gaussianos	

Figura 3.1: Jerarquía de los modelos de contaminación del aire

Dentro de los modelos matemáticos existen numerosas clasificaciones, entre otras:

1. De acuerdo a la manera en que se representan las interacciones de las componentes del modelo, es decir, por una parte se tienen los modelos basados en análisis estadístico de información de observaciones, y por otra parte, los basados en descripciones matemáticas determinísticas, donde intervienen términos físico-químicos presentes en la atmósfera.
2. De acuerdo a su extensión espacial y temporal. Esto es, los modelos se clasificarán según el tamaño de la región de estudio en un tiempo dado de observación. Las escalas en el espacio que se consideran son: microescala, cuyo dominio típico tiene $(200 \times 200)m^2$ y $100m$ en sus dimensiones horizontal y vertical respectivamente, con una escala de observación de $5m$.

Como segunda escala se tiene la mesoescala, con dimensiones del dominio típico $(100 \times 100)Km^2$ en horizontal y $5Km$ en vertical, con escala de observación de $1Km$, seguido de otras escalas de interés para los modelos de contaminación como las escalas regional, sinópticos y globales en este orden (Ver [30]).

En general los modelos de dispersión matemáticos se caracterizan por incorporar las descripciones de los procesos que tienen lugar en la atmósfera en términos de las partículas transportadas en la atmósfera, emisión de las mismas, tiempo de variabilidad de las concentraciones, etc. Esto es, de acuerdo a los parámetros presentes en el modelo, se resuelve la ecuación de continuidad o conservación de masa del tipo

$$\frac{\partial c}{\partial t} = M + Q - S \quad (3.1)$$

donde c es la concentración de masa, t el tiempo de variabilidad de c , M masa transportada en la atmósfera, Q emisión de masa contaminante de las fuentes y S indica cantidad de masa en los sumideros.

Los componentes característicos presentes en los modelos de dispersión matemáticos son [30]:

- **Emisiones:** Corresponde a los flujos de alimentación de contaminantes a la atmósfera ya sea por medio de procesos naturales, como la descomposición de materia orgánica y la respiración vegetal, o provenientes de actividades humanas como los procesos de combustión.
- **Transporte:** traslado de los contaminantes de un punto a otro dentro del sistema de referencia. El transporte de contaminantes en la atmósfera se debe a varios procesos:
 - **Advección:** Se refiere al movimiento de los contaminantes a consecuencia del viento. Es el proceso más eficiente en la atmósfera en la dirección horizontal. La información fundamental para la representación de la advección se refiere a la velocidad y dirección del viento en la región observada. Esta información puede ser calculada dentro del modelo, resolviendo las ecuaciones de movimiento de la atmósfera o puede ser suministrada de manera externa. La ecuación a resolver para el transporte por advección de los contaminantes es la que se presenta a continuación:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla(vc) = 0 \quad (3.2)$$

donde ∇ representa el laplaciano, c corresponde a la concentración debida a la advección y v el campo tridimensional de vientos, por tanto la ecuación indica que el cambio en la concentración de los contaminantes con respecto al tiempo es equivalente al cambio en las concentraciones de los contaminantes transportados por el viento con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

- **Convección:** Se refiere al transporte por movimiento de masas debido a diferencias térmicas.
- **Turbulencia:** Se refiere al transporte debido al movimiento aleatorio del aire, dependiendo del esfuerzo producido entre el aire y una superficie o por movimientos inducidos por la topografía o por el calentamiento de la superficie subyacente.

3.1. MODELOS MATEMÁTICOS DE DISPERSIÓN DEL TIPO ESTADÍSTICO (MMDE)

Los modelos de dispersión del tipo estadístico se basan en relaciones de naturaleza estadística obtenidas a partir de medidas u observaciones en el pasado. Este tipo de modelo se utiliza para predecir a corto plazo algunas características del fenómeno de contaminación, tal como, la escala (en kilómetros) en el transporte de los contaminantes en función de la distancia entre el receptor y el emisor, con lo que se puede apreciar tendencias en la concentración de contaminantes en el aire. Estos métodos de distribuciones estadísticas se basan principalmente en la distribución de densidad de probabilidad (pdf) de la concentración de contaminantes atmosféricos, la cual permite conocer la probabilidad de que se superen determinados niveles de calidad del aire establecidos en las normas que legislan el medio ambiente de la región de estudio, así como, de la correlación entre el tiempo transcurrido desde el momento de la emisión inicial y las concentraciones de contaminantes en el instante considerado.

En [15] se encuentra la siguiente clasificación de métodos de análisis estadístico aplicados a modelos de contaminación de aire.

La primera categoría llamada distribuciones estadísticas de la concentración, se caracteriza por la función de densidad de probabilidad de la concentración, determinando de esta manera la probabilidad de comportamientos extremos de las concentraciones de contaminantes en el área de estudio, una vez se conocen datos de comportamientos anteriores.

De la segunda categoría llamada análisis de series de tiempo, como su nombre lo indica, utiliza series de concentraciones registradas a lo largo de un periodo prolongado de tiempo para evaluar sus variaciones intrínsecas, sin explicarlas físicamente. Algunas de las herramientas más comunmente utilizadas para el estudio descrito anteriormente son:

- Técnica de Box-Jenkins: permite el análisis en series temporales tanto de medidas meteorológicas como de contaminantes.
- Análisis espectral: Permiten identificar los ciclos de la presencia de algunas observaciones meteorológicas y de transporte o dispersión de contaminantes.

- Análisis de la regresión: Hace parte del análisis múltiple de las series temporales. En este tipo de técnica se relacionan estadísticamente valores medidos de ciertas variables meteorológicas con las concentraciones de contaminantes observadas.
- Análisis de la tendencia: permite calcular las distribuciones de contaminantes y precipitaciones.
- Análisis de componentes principales: busca la proyección según la cual los datos queden mejor representados en términos de mínimos cuadrados. Se emplea sobre todo en análisis exploratorio de datos y para construir modelos predictivos.

En algunas situaciones es conveniente conocer la concentración de contaminantes en la atmósfera, para lo cual, se utilizan los llamados filtros de Kalman (Ver apéndice A), que en términos generales se basan en la recursividad de mínimos cuadrados donde se considera el problema de regresión lineal $y = xa$. Así si se dispone de k observaciones de las variables x y y , se puede tener una estimación sobre a , donde a refleja numéricamente el estado de un sistema dinámico, que en el contexto del presente trabajo representa las concentraciones de contaminantes en el área de interés. Es por esto que el tercer modelo lo componen los llamados modelos mixtos o híbridos, de tipo determinístico-estadístico, que utilizan métodos semiempíricos y filtros de Kalman en tiempo real para hacer predicciones de corto plazo, con las que se pueden apreciar tendencias en la concentración de contaminantes en el aire. Para una mayor comprensión sobre la construcción de los filtros de Kalman ver el apéndice A.

Para finalizar esta parte, se tiene que los llamados modelos receptor se basan en asignar la contribución de cada foco, o grupo de focos emisores, a las concentraciones de contaminantes registradas en un punto determinado, sin tener en cuenta su dispersión. Es decir, los modelos de receptores parten de las concentraciones observadas en el receptor y buscan posteriormente cuál es el aporte de cada una de las fuentes de cada uno de los contaminantes observados, esto es,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^p a_{ij} D_{jk} E_{jk} \quad (3.3)$$

donde la contribución de la fuente k de contaminante i representado por c_{ik} , será igual a la ponderación de la fracción de contaminante i producido

por las fuentes j con $j = 1, \dots, p$, representado por a_{ij} , con el término de dispersión atmosférica D_{jk} y al ritmo de emisión E_{jk} .

3.2. MODELOS MATEMÁTICOS DE DISPERSIÓN DEL TIPO DETERMINÍSTICO (MMDD)

Este tipo de modelos estiman la concentración de uno o varios contaminantes emitidos en la atmósfera, utilizando herramientas matemáticas que permiten determinar la evolución de la emisión de manera espacial y temporal. Según sea el tratamiento matemático este tipo de modelos se clasifican en diferentes categorías. Los modelos de difusión determinísticos que tienen mayor aplicabilidad son aquellos que suponen un perfil específico de concentración dentro de la gama de contaminantes, que sigue una distribución de Gauss, por eso reciben el nombre de modelos gaussianos. Otros modelos como, por ejemplo, los eulerianos o los lagrangianos usan técnicas de cómputo más complejas para estimar el transporte y la dispersión de las partículas contaminantes. Un tipo ampliamente aplicado de los modelos eulerianos son los modelos de caja, al cuál nos referiremos más adelante.

La diferencia que existe entre estos tres modelos de dispersión matemáticos de tipo determinístico radica en el sistema de referencia que utiliza cada uno, es decir, para el gaussiano el sistema de referencia es el cambio de concentración dentro de un fluido (por ejemplo el aire), el lagrangiano establece un sistema de referencia móvil que acompaña al fluido en su trayectoria y para el caso del modelo euleriano, todo el movimiento del fluido se referencia, es decir logra referenciar todas las características dinámicas de fluido. En los últimos dos modelos a causa de las características turbulentas presentes, no es fácil obtener una solución exacta de los mismos. Los modelos eulerianos se basan en soluciones analíticas o numéricas de la ecuación de continuidad o conservación de masa, mientras que los modelos lagrangianos se centran en la teoría estadística de la difusión turbulenta, la cual concluye, que la velocidad y la dirección del movimiento de una partícula dentro de un pequeño periodo de tiempo no va a sufrir grandes cambios, pero dentro de un periodo de tiempo mayor, su movimiento estará más y más dominado por procesos caóticos y la correlación de su velocidad con los valores anteriormente registrados de ésta disminuye.

3.2.1. Modelos Eulerianos

En este tipo de modelos se analiza el comportamiento de las concentraciones de los contaminantes en relación con un sistema fijo de coordenadas, analizando la evolución a lo largo del espacio, a través de las ecuaciones de conservación de masa y calor y de las transformaciones químicas que puedan sufrir. Es bastante más preciso y costoso que otros modelos por tanto, es recomendado para contaminantes reactivos y situaciones complejas.

La aproximación euleriana se basa en la ecuación de conservación de masa o de la concentración por unidad de volumen “ c ” de un contaminante “ i ” en un determinado instante y lugar, así:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = -v \nabla c_i + d \nabla^2 c_i + R_i + S_i \quad (3.4)$$

esto significa que un cambio en la concentración de volumen “ c_i ” del contaminante “ i ” con respecto al tiempo, es equivalente a la destrucción o creación por reacción química del contaminante “ i ”, más el generado o destruido por otras fuentes o sumideros “ S_i ”, más la difusión molecular de las partículas representada por $d \nabla^2 c_i$ (producido por el movimiento browniano de las partículas), disminuyendo de toda la suma anterior los contaminantes sacados del sistema por el viento, a lo cual se le llama término advectivo, representado por $v \nabla c_i$. La concentración del contaminante c_i a modelar por medio del método euleriano satisface la ecuación de continuidad (3.1), así como la velocidad y la temperatura del fluido en el que se distribuyen las partículas contaminantes (aire) satisfacen la ecuación de Navier-Stokes (conservación de la cantidad de movimiento) y la conservación de energía respectivamente. Un sistema que satisfaga, por lo menos las anteriores condiciones puede explicar los cambios experimentados por el vector velocidad, la temperatura del fluido y la concentración del contaminante, así como los efectos de tales variaciones sobre las demás variables del sistema.

En un fluido turbulento, la velocidad, las concentraciones de contaminantes, la temperatura, etc., pueden variar irregularmente con el tiempo y el espacio; es, en consecuencia una práctica común considerar estas variables como la suma del valor medio y la parte fluctuante, por tanto considerando al vector velocidad del fluido con cada una de sus tres componentes cartesianas dependientes del tiempo y el espacio ($v_1 = \frac{dx}{dt}$, $v_2 = \frac{dy}{dt}$, $v_3 = \frac{dz}{dt}$), es posible representar cada v_j como suma de un valor medio $\langle v_j \rangle$, que se puede inferir

de medidas experimentales o de modelos, y una fluctuación v'_j de naturaleza aleatoria que supone una incertidumbre intrínseca al movimiento turbulento atmosférico, es decir [15]

$$v_j = \langle v_j \rangle + v'_j \quad (\text{para } j = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

De la misma manera las concentraciones de contaminantes c_i se pueden expresar como suma de un valor medio de un conjunto de concentraciones con ciertas propiedades estadísticas $\langle c_i \rangle$ y una fluctuación c'_i de naturaleza aleatoria, así:

$$c_i = \langle c_i \rangle + c'_i \quad (3.6)$$

La razón de cambio del promedio de la concentración de cada contaminante i con respecto al tiempo, obtenida resolviendo la ecuación de continuidad (3.1), tendrá una componente aleatoria dependiendo del espacio y del tiempo, por tanto, se utilizan métodos de aproximación, con el fin de determinar las concentraciones resultantes de cada contaminante i , ya que éstas tendrán ahora una componente aleatoria, lo que hace complicado obtenerlas con exactitud por medio de la ecuación de continuidad (3.1).

Por lo anterior, por medio de métodos de aproximación se soluciona la ecuación (3.1) para obtener las concentraciones de contaminantes presentes en la región de estudio.

3.2.2. Modelos de caja

Este tipo de modelos se basan en la conservación de masa del contaminante dentro de una caja fija. Dentro de la caja, las emisiones son vertidas por diversas fuentes y se supone que su mezcla es instantánea y uniforme. El modelo de caja se puede representar con la figura (3.1), donde S representa la emisión constante por unidad de área, u la velocidad del viento que es constante e inyecta en la caja aire limpio y c es la concentración media de partículas contaminantes dentro de la caja, la cuál es variable en el tiempo.

La conservación de masa se expresa:

$$\frac{\partial(cH)}{\partial t} = S - cH \frac{u}{\Delta x} \quad (3.7)$$

3.2. MODELOS MATEMÁTICOS DE DISPERSIÓN DEL TIPO DETERMINÍSTICO (MMDD)69

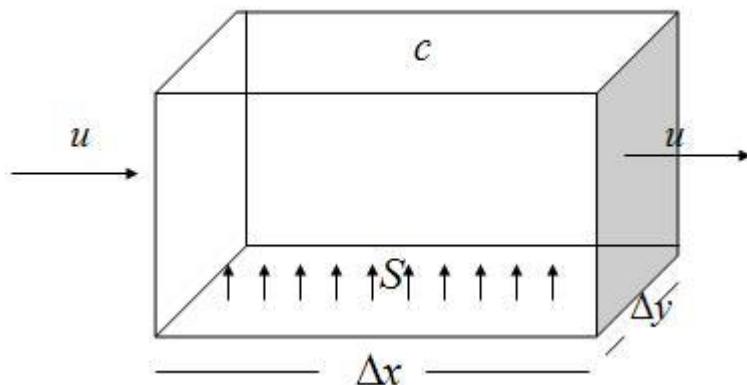


Figura 3.2: Modelo de caja

donde H representa el espesor de la capa de mezcla de los contaminantes al interior de la caja. Es decir, si se conoce la evolución temporal del espesor $H(t)$ de la capa de mezcla de contaminantes en la región observada, será inmediata la determinación de la evolución temporal de la concentración de contaminantes al interior de la caja dada por $S - cH \frac{u}{\Delta x}$.

Este modelo se ha aplicado tanto para contaminantes inertes como reactivos, sólo que para los últimos es adicionado un término a la ecuación de conservación de masa dentro de la caja, término que representará el componente químico propio de sustancias reactivas en la ecuación de conservación de masa dentro de la caja.

Por el año 1978, científicos mostraron que el modelo de caja única tiene una fuerte carga inercial, y por lo tanto, no puede registrar apropiadamente cambios en la velocidad u , ni en la emisión S . Por ello se propuso el modelo llamado slug, como una mejora al modelo de caja, especialmente durante episodios de estancamiento de los contaminantes en la caja. El modelo Slug permite que la concentración c varíe en dos dimensiones, lo cual transforma la ecuación de conservación de masa en el modelo de caja única (3.8), en la siguiente ecuación de dos dimensiones.

$$\frac{\partial(cH)}{\partial t} + u \frac{\partial(cH)}{\partial x} = S \quad (3.8)$$

Definiendo la concentración media como

$$\langle c(x) \rangle H = \int_0^{H(x)} c(x, z) dz \quad (3.9)$$

3.2.3. Modelos Lagrangianos

El modelo Lagrangiano consiste en el análisis del comportamiento de las partículas que representan elementos de un fluido o porciones de contaminantes gaseosos dentro de un flujo. Las coordenadas lagrangianas reúnen información de cada partícula individual en el sistema observado, por tanto, la mezcla de un flujo turbulento se simula por el movimiento de las partículas que constituyen el fluido. Taylor, en 1921, considera un sistema de coordenadas en el caso de una emisión puntual de partículas dentro de un medio de turbulencia estacionario, en el que la velocidad media es nula. Según este sistema de coordenadas la posición de cada partícula $\mathbf{R} = x_1i + x_2j + x_3k$, en el tiempo t , es función del vector posición r_0 en el instante inicial t_0 . Definiendo cada componente de la velocidad en un sistema coordenadas lagrangianas de una partícula fluida en el tiempo t (Ver [15])

$$v_j = \frac{dx_j}{dt} \quad (3.10)$$

para $j=1,2,3$

tenemos que:

$$\frac{dx_j^2}{dt} = 2x_j \frac{dx_j}{dt} = 2x_j v_j = 2 \left[\int_0^t v_j(t') dt' \right] v_j = 2 \int_0^t v_j(t') v_j(t) dt' \quad (3.11)$$

Si se supone que la velocidad de una partícula fluida en el tiempo t (régimen turbulento del flujo) es estacionaria, denotada por v_j^2 , la autocorrelación $R_{v_j v_j}$ de $v_j(t)$ y $v_j(t')$ definida por:

$$R_{v_j v_j}(\Delta t) = \frac{v_j(t) v_j(t + \Delta t)}{v_j^2} \quad (3.12)$$

donde $\Delta t = t - t'$. Esto es la autocorrelación de $v_j(t)$ y $v_j(t')$ es función de Δt . Reemplazando (3.12) en (3.11) se tiene que

$$\frac{dx_j^2}{dt} = 2v_j^2 \int_0^t R_{v_j v_j}(\Delta t) d(\Delta t) \quad (3.13)$$

Tomando la integral de la igualdad (3.13) se tiene

$$x_j^2(t) = 2v_j^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} R_{v_j v_j}(\Delta t) d(\Delta t) \quad (3.14)$$

Con esto último se obtiene la evolución temporal de la varianza de cada partícula fluida en modelos de contaminación atmosférica. Haciendo integración por partes, se puede expresar a $x_j^2(t)$ como:

$$\begin{aligned} x_j^2(t) &= 2v_j^2 t \left[\int_0^t R_{v_j v_j}(\Delta t) d(\Delta t) - \int_0^t \frac{\Delta t}{t} R_{v_j v_j}(\Delta t) d(\Delta t) \right] \\ &= 2v_j^2 t \int_0^t \left(1 - \frac{\Delta t}{t}\right) R_{v_j v_j}(\Delta t) d(\Delta t) \quad (3.15) \end{aligned}$$

Si “t” es pequeña comparada con la escala de autocorrelación de $R_{v_j v_j}(\Delta t)$, entonces por la ecuación (3.13) se tiene que $R_{v_j v_j}(\Delta t) \approx 1$ en todo el dominio de la integral, obteniéndose de (1.15) que

$$x_j^2(t) \approx v_j^2 t^2 \quad (3.16)$$

La raíz cuadrada de la ecuación (3.16) representa un desplazamiento aleatorio que aumenta linealmente con el tiempo y es proporcional a la intensidad de las fluctuaciones turbulentas respecto al valor medio de la siguiente manera:

$$x_j'' \approx v'' t \quad (3.17)$$

Ahora de manera análoga se analiza el caso de que si “t” es grande comparada con la escala de autocorrelación se cumple que $\frac{\Delta t}{t}$ es pequeña, dando lugar en la segunda igualdad de (3.15) a

$$x_j^2(t) \approx 2v_j^2 T_L t^2 \quad (3.18)$$

donde

$$T_L = \int_0^\infty R_{v_j v_j}(\Delta t) d(\Delta t)$$

T_L es la escala integral de tiempo determinada desde la autocorrelación lagrangiana R , también llamada "escala de tiempo lagrangiana". Extrayendo de (3.19) la raíz cuadrada se obtiene finalmente:

$$x_j'' = v'' \sqrt{2T_L} \sqrt{t} \quad (3.19)$$

Esta ecuación refleja que el comportamiento en grandes intervalos de tiempo se asemeja a una trayectoria aleatoria, en la que la distancia recorrida por la partícula fluida se puede determinar por una serie de pasos aleatorios (no correlacionados). Dicha distancia es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo. En su Tesis Doctoral [15], González, R (1993) interpreta este resultado como: "Esta similitud se debe al hecho de que para grandes tiempos "t" las partículas fluidas se han "olvidado" de su comportamiento inicial ($t = 0$); a diferencia de lo que ocurre en pequeños tiempos en donde existe una cierta autocorrelación.

3.2.4. Modelos Gaussianos

La particularidad de este modelo es que a la luz de un conjunto de contaminantes emitidos de una fuente situada en las coordenadas (x_0, y_0, z_0) , la distribución espacial de las concentraciones alrededor de su eje central (Ver figura 3.2) se ajusta a una gaussiana triple, es decir se ajusta un modelo gaussiano para simular el efecto de la difusión en cada una de las tres dimensiones. Esto es,

$$c = \frac{S}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp \left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - z_0)^2}{2\sigma_z^2} \right) \quad (3.20)$$

donde los σ 's representan las desviaciones típicas en las direcciones x, y, z, que están en función de la distancia a la fuente S (intensidad de la fuente

3.2. MODELOS MATEMÁTICOS DE DISPERSIÓN DEL TIPO DETERMINÍSTICO (MMDD)73

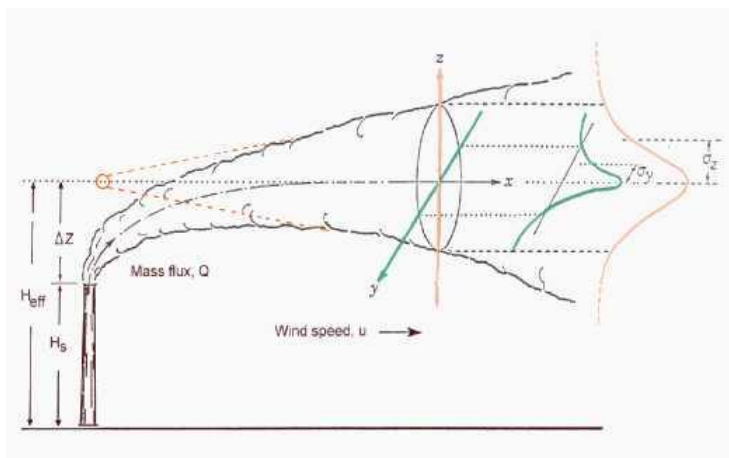


Figura 3.3: Esquema de modelo gaussiano

contaminante) y de c la concentración media en un punto (x, y, z) .

Los modelos gaussianos se vienen empleando en gran cantidad de países para fijar las normas mínimas de calidad de aire en cada una de sus legislaciones, debido a que al realizarse numerosas comparaciones con datos de observación, se permite establecer su fiabilidad bajo diferentes condiciones atmosféricas y con diversos tipos de fuentes (puntual, lineal y superficial). Sin embargo no sobra señalar que este tipo de modelo considera condiciones ideales tales como: terreno llano, viento constante, turbulencia homogénea y estacionaria, contaminantes inertes y no se tiene en cuenta las partículas que llegan al suelo, por tanto resulta ser una primera aproximación para las condiciones que presenta actualmente el transporte y difusión atmosférico de los contaminantes en el aire.

Siguiendo el análisis estadístico de la difusión de una partícula fluida respecto a un eje fijo de coordenadas, se puede entender un penacho (Ver figura 3.2) como un conjunto de partículas idénticas cuyo desplazamiento medio determina el comportamiento del mismo. Siguiendo con el modelo gaussiano González, R (1993) agrega que desde las metodologías lagrangianas y eulerianas expuestas antes, es posible obtener un perfil gaussiano de la concentración de contaminantes de un penacho bajo ciertas condiciones ideales, es decir la solución del modelo gaussiano se logra conseguir a partir de la solución del modelo euleriano o lagrangiano como se presenta a continuación.

Desde la metodología euleriana

En el caso de un contaminante inerte emitido en el interior de un fluido en reposo, la ecuación de la conservación es

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d\nabla^2 c \quad (3.21)$$

donde c representa la concentración media del contaminante, d_k con $k = x, y, z$ el coeficiente de difusión en la dirección k , que se supone constante en cada dirección, y ∇^2 el operador laplaciano.

Por lo tanto la ecuación de conservación desarrollada en tres dimensiones será

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + d_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + d_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (3.22)$$

Para una emisión instantánea desde el punto (x_0, y_0, z_0) en t_0 , la solución analítica será

$$c = -\frac{S}{(4\pi(t-t_0))^{\frac{3}{2}}(d_x d_y d_z)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4d_x(t-t_0)} - \frac{(y-y_0)^2}{4d_y(t-t_0)} - \frac{(z-z_0)^2}{4d_z(t-t_0)}\right) \quad (3.23)$$

donde t es el tiempo transcurrido y S la emisión de contaminantes, medidos en gramos sobre segundo (g/s).

La semejanza de esta solución con la expresión del penacho gaussiano (3.21) permite relacionar las varianzas de la concentración media a una distancia de la fuente $x - x_0 = U(t - t_0)$ (por ser la distancia igual a la velocidad U por el tiempo t) con los coeficientes de difusión σ_k con $k = x, y, z$ correspondientes al efecto de difusión en la dirección de cada una de las dimensiones del modelo gaussiano:

$$\sigma_x^2 = 2d_x(t - t_0) \quad \sigma_y^2 = 2d_y(t - t_0) \quad \sigma_z^2 = 2d_z(t - t_0)$$

siendo d_k definidos como en la ecuación (3.22)

Desde la metodología lagrangiana

Partiendo desde la ecuación fundamental de la dispersión lagrangiana comentada en la sección (3.2.3) se tiene la forma de la función del desplazamiento lagrangiano (ecuación 3.16), siendo ésta una función aleatoria. Por tanto, si aplicamos la hipótesis de función gaussiana para la velocidad instantánea v_j en la ecuación (3.12) se tiene que la función posición $x_j(t)$ también tiene forma gaussiana, puesto que la función desplazamiento se obtiene por integración de la función velocidad con respecto al tiempo. Si se supone turbulencia homogénea y estacionaria, por lo que la velocidad de viento es una función exclusivamente del tiempo, la probabilidad de transición p de una partícula depende exclusivamente de los desplazamientos en el tiempo y en el espacio y no dónde o cuándo la partícula fue introducida en el sistema o flujo, es decir $p(r, t/r', t') = p(r - r', t - t')$, convirtiéndose de esta forma la ecuación de concentración de contaminantes así:

$$c(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(r, t/r_0, t_0) c(r_0, t_0) dr_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(r, t/r', t') S(r', t) dr \tag{3.24}$$

donde r es un vector y S la emisión. Según las observaciones de Monin y Yaglon [28] esta probabilidad de transición p obedece a una distribución gaussiana multidimensional:

$$p(r - r', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |P|} \exp \left[-\epsilon^T P^{-1} \frac{\epsilon}{2} \right] \tag{3.25}$$

donde ϵ^T es la matriz traspuesta del vector que tiene los elementos de la forma $\epsilon_i = x_i - x'_i$ para $i = 1, 2, 3$ y donde P^{-1} y $|P|$ son la matriz inversa y el determinante de la matriz P formada por los elementos $P_{ij} = \epsilon_i \epsilon_j$. En la expresión (1.26) se supone que $P_{ij} = 0$ para $j \neq i$, en cuyo caso su expresión se transforma, con $\tau = t - t'$, en

$$p(r - r', \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (P_{11}(\tau)P_{22}(\tau)P_{33}(\tau))^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum \frac{\epsilon_i^2}{P_{ii}(\tau)} \right] \tag{3.26}$$

Los elemento diagonales $P_{ii}(\tau)$ se representan generalmente por $\sigma^2(\tau)$, dado que éstas son las varianzas de la distribución gaussiana. Por tanto, desde esta metodología lagrangiana también se obtiene la expresión clásica del penacho gaussiano emitido por una fuente puntual instantánea en régimen turbulento estacionario y homogéneo:

$$c = \frac{S}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - z_0)^2}{2\sigma_z^2} \right] \tag{3.27}$$

Capítulo 4

MODELO ESTOCÁSTICO DE CONTAMINACIÓN AMBIENTAL

A continuación se dará una descripción detallada de un modelo estocástico propuesto por Gorostiza, L. y Rodrigues, E. en [20] para el transporte de partículas de materia en el aire. Los autores en este trabajo estudian el comportamiento asintótico de alta densidad del sistema de partículas estocásticas contaminantes en el aire. La investigación desarrollada por los autores antes mencionados resulta ser de gran importancia en la determinación de políticas públicas para el control de fuentes de emisión de contaminación, concentración de partículas contaminantes en el espacio y el tiempo y observaciones de los cambios de las partículas contaminantes como, por ejemplo, en su tamaño.

El modelo se basa en un sistema de partículas, las cuales migran, se ramifican y cambian de tamaño. La principal propiedad de este modelo es que los tamaños de las partículas descendientes dependen tanto de la ramificación que las origina como del tamaño de la partícula inicial. Este modelo sólo contempla partículas de materia contaminante primaria, esto es, contempla partículas que no han sufrido transformaciones químicas, entre éstas encontramos partículas que pueden ser sólidas o líquidas originadas de diferentes fuentes, con diferentes estructuras, composición y tamaño. En este modelo se consideran fuentes antropogénicas como por ejemplo fábricas, vehículos y humo del cigarrillo y fuentes naturales como polvo de la erosión de la tierra y polen.

4.1. Transporte de partículas de materia y contaminación de aire

Los rangos de tiempo de permanencia o vida de las partículas de materia contaminante pueden comprender algunos minutos hasta horas y sus distancias de viaje pueden comprender desde uno a cientos de kilómetros. La cantidad de materia transformada en partícula y el tamaño de éstas depende de los detalles de la dilución o proceso de transformación. Es por esto importante determinar los diferentes tipos de transformación que pueden sufrir las partículas:

- Las partículas pueden sufrir cambio de tamaño durante su tiempo de vida y movimiento debido a la absorción de agua y tierra.
- Las partículas logran salir del sistema y morir depositándose en la superficie de la tierra. Luego de un tiempo la partícula podrá ser introducida de nuevo al sistema debido a factores como el viento, el movimiento de las personas y los vehículos, entre otros.
- Las partículas contaminantes son consideradas en proceso de desaparición del sistema cuanto son inhaladas por el ser humano e introducidas al interior de los pulmones. Se ha determinado que la mitad de la vida de las partículas depende de su tamaño: entre más grande sea la partícula más tiempo de vida tendrá.

Las partículas contaminantes pueden fragmentarse o ramificarse debido a oxidación o acción del viento y como consecuencia de esto, sufrir cambios en su tamaño.

El objetivo principal que nos ocupa, obtener información sobre la función de distribución de los tamaños y localizaciones de las partículas contaminantes en instantes de tiempo de interés. Un problema de modelación es, determinar las posibles trayectorias de contaminación. En este trabajo se considera que las partículas pequeñas son conducidas por difusión turbulenta del aire y las grandes por acción gravitacional. Más precisamente se asumirá que la propagación de las partículas pequeñas puede modelarse por un movimiento browniano.

En el modelo se considerarán básicamente las propiedades correspondientes a tamaño y ubicación de las partículas contaminantes. El número inicial de partículas contaminantes se asumirá aleatorio y se supondrá que se comporta de acuerdo a una medida puntual de Poisson. Una

vez una partícula con cierto tamaño es emitida en un cierto lugar, su posición y su tamaño evolucionan conjuntamente acorde a un proceso de difusión. Este proceso modela, en particular, la dirección espacial causado por el viento y la gravitación y la difusión debido a la turbulencia del aire. La tasa de muerte de las partículas dependerá de su evolución previa. La muerte es temporal o permanentemente, es decir las partículas pueden desaparecer o ser reemplazadas por un número aleatorio de partículas descendientes. Las partículas nacen en el mismo sitio donde la partícula padre muere y sus tamaños son distribuidos conjuntamente, de acuerdo a una ley de probabilidad, la cuál depende del sitio y el tamaño de la partícula padre al momento de morir.

En este trabajo se permitirá que las partículas sufran cambios de tamaño durante su tiempo de vida y se buscará que el modelo registre no sólo la posición de las partículas si no también su tamaño.

4.2. El modelo

En [20] se modela la evolución de las partículas por medio de un proceso de difusión $(\xi, \zeta) = (\xi(t), \zeta(t)), t \geq 0$ en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, donde $(\xi(t))$ y $(\zeta(t))$ representan la posición y el tamaño de las partículas en el tiempo t , respectivamente. El generador infinitesimal A de (ξ, ζ) es de la forma

$$\begin{aligned} A\phi(x, z) &= \sum_{i=1}^d b_i(x, z) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x, z) + b_0(x, z) \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x, z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x, z) + \frac{1}{2} a_{00}(x, z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(x, z) \\ &+ \sum_{i=1}^d a_{i0}(x, z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial z}(x, z), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad z \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (4.1)$$

con condiciones apropiadas sobre los coeficientes b y a . La razón de muerte de una partícula con posición x y tamaño z es $V(x, z)$, es decir, si τ denota el tiempo de vida de una partícula (nacida en $t = 0$), entonces

$$P[\tau \leq t \mid (\xi(s), \zeta(s)), s \geq 0] = \int_0^t V(\xi(s), \zeta(s)) \exp \left\{ - \int_0^s (\xi(r), \zeta(r)) dr \right\} ds \quad (4.2)$$

Esta partícula que muere, en la posición x y con tamaño z es reemplazada en el mismo sitio x por un número aleatorio k de partículas con tamaños aleatorios z_1, z_2, \dots, z_k acorde a una ley de probabilidad $p_k(x, z; dz_1, \dots, dz_k)$. Las partículas descendientes se propagan de manera semejante a la partícula inicial (padre). Asumimos que $V(x, z)$ y $p_k(x, z, dz_1, \dots, dz_k)$ son continuos en (x, z) con $V(x, z)$ es acotado, además se asumirá que la ley de ramificación de las partículas tiene segundo momento finito, esto es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k(x, z; \mathbb{R}_+, \dots, \mathbb{R}_+) < \infty \quad (4.3)$$

para poder aplicar el teorema de límite central. Se supone que las partículas son emitidas en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, representando espacio, tamaño y tiempo respectivamente, acorde a una medida puntual la cuál modela las fuentes de polución fijas o móviles. La medida aleatoria que se asumirá es la medida de Poisson con una medida de intensidad m .

Se denotarán por $M(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ al espacio de todas las medidas Radon no negativas sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ y por $M_p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ al subconjunto de medidas en $M(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ que son atómicas. La emisión instantánea de partículas será un elemento de $M_p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$.

El objetivo de estudio es el proceso de Markov $N = N(t), t \geq 0$ definido por las medidas empíricas sobre $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, como sigue

$$N(t) = \sum_i \delta_{(\xi_i(t), \zeta_i(t))}, \quad t \geq 0 \quad (4.4)$$

y donde $(\xi_i(t), \zeta_i(t))$, $i = 1, 2, \dots$ denotan las posiciones y los tamaños respectivamente de todas las partículas presentes en el tiempo t .

A continuación se presentarán algunos resultados relacionados con los funcionales de la media y covarianza del proceso N , las cuales serán necesarias para determinar los límites de fluctuación de interés.

Se empiezan las pruebas calculando los funcionales de la media y la covarianza del proceso N . La principal diferencia con trabajos previos (Ver [21]) son precisamente en los cálculos de estas funcionales, los cuales son más elaborados en el presente caso.

Se consideran funciones de prueba $g : M(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$g(\mu) = G(\langle \mu, \phi \rangle), \quad \langle \mu, \phi \rangle = \int \phi d\mu \quad (4.5)$$

donde $\mu \in M(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, $\phi \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ y $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave.

Para G tal que $G''' = 0$, el generador infinitesimal \mathcal{L} del proceso N tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}G(\langle \mu, \phi \rangle) &= G'(\langle \mu, \phi \rangle) \langle \mu, A\phi \rangle \\ &+ \frac{1}{2} G''(\langle \mu, \phi \rangle) \langle \mu, A\phi^2 - 2\phi A\phi \rangle \\ &+ \sum_i V(x_i, z_i) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+^k} p_k(x_i, z_i; dy_1, \dots, dy_k) \\ &\cdot \left[G(\langle \mu, \phi \rangle + \sum_{j=1}^k \phi(x_i, y_j)) - G(\langle \mu, \phi \rangle) \right], \end{aligned}$$

donde

$$\mu = \sum_i \delta_{(x_i, z_i)} \in M_p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$$

A continuación se consideran dos funciones $G_1(u) = u$ y $G_2(u) = u^2$. Denotando $g_1(\mu) = G_1(\langle \mu, \phi \rangle)$ y $g_2(\mu) = G_2(\langle \mu, \phi \rangle)$, se tiene que ,

$$\mathcal{L}g_1(\mu) = \langle \mu, A\phi \rangle + \langle \mu, V(\phi^{(1)} - \phi) \rangle$$

donde

$$\phi^{(1)}(x, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+^k} p_k(x, z; dy_1, \dots, dy_k) \sum_{j=1}^k \phi(x, y_j), \quad (4.6)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}g_2(\mu) &= 2\langle \mu, \phi \rangle \langle \mu, A\phi \rangle + \langle \mu, A\phi^2 - 2\phi A\phi \rangle \\ &+ 2\langle \mu, \phi \rangle \langle \mu, V(\phi^{(1)} - \phi) \rangle \\ &+ \langle \mu, V(\phi^2 + [\phi, \phi] - 2\phi\phi^{(1)}) \rangle, \end{aligned}$$

donde

$$[\phi, \phi](x, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+^k} p_k(x, z; dy_1, \dots, dy_k) \left(\sum_{j=1}^k \phi(x, y_j) \right)^2.$$

El proceso $\mathcal{M}_\phi(t), t \geq 0$ definido por

$$\mathcal{M}_\phi(t) = \langle N(t), \phi \rangle - \int_0^t \mathcal{L}(\langle N(s), \phi \rangle) ds$$

es un martingala cuyo proceso creciente está dado por

$$\langle \mathcal{M}_\phi \rangle(t) = \int_0^t (\mathcal{L}(\langle N(s), \phi \rangle^2) - 2\langle N(s), \phi \rangle \mathcal{L}(\langle N(s), \phi \rangle)) ds, \quad t \geq 0.$$

En nuestro caso,

$$\mathcal{M}_\phi(t) = \langle N(t), \phi \rangle - \int_0^t \langle N(s), A\phi + V(\phi^{(1)} - \phi) \rangle ds \quad (4.7)$$

y

$$\langle \mathcal{M}_\phi \rangle(t) = \int_0^t \langle N(s), A\phi^2 - 2\phi A\phi + V(\phi^2 + [\phi, \phi] - 2\phi\phi^{(1)}) \rangle ds \quad (4.8)$$

Para computar la media funcional de $N(t)$ se sigue de $E(\mathcal{M}_\phi(t)) = E\mathcal{M}_\phi(0)$ que:

$$\langle EN(t), \phi \rangle - \int_0^t \langle EN(s), A\phi + V(\phi^{(1)} - \phi) \rangle ds = \langle EN(0), \phi \rangle \quad (4.9)$$

Esta es una ecuación integral para $EN(t)$ y su solución está dada por (Ver [19])

$$E(\langle N(t), \phi \rangle) = (\langle EN(t), \phi \rangle) = (\langle EN(0), U_t\phi \rangle), \quad (4.10)$$

donde $U_t, t \geq 0$ es el semigrupo con operador infinitesimal

$$A^{(1)}\phi = A\phi + V(\phi^{(1)} - \phi) \quad (4.11)$$

$N(0)$ se puede interpretar como una medida puntual aleatoria independiente de los movimientos, tamaños y tiempos de vida de las partículas con media condicional

$$E[\langle N(t), \phi \rangle | N(0)] = \langle N(0), U_t\phi \rangle \quad (4.12)$$

Un cálculo simple muestra que

$$A\phi^2 - 2\phi A\phi + V(\phi^2 + [\phi, \phi] - 2\phi\phi^{(1)}) = A^{(1)}\phi^2 - 2\phi A^{(1)}\phi + V\{\phi, \phi\},$$

donde

$$\{\phi, \phi\} := [\phi, \phi] - (\phi^2)^{(1)}.$$

Observe que

$$\{\phi, \phi\}(x, z) = \sum_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^k} p_k(x, z, dy_1, \dots, dy_k) \sum_{j,l=1, j \neq l}^k \phi(x, y_j)\phi(x, y_l) \quad (4.13)$$

De (4.7) y (4.8) se sigue que

$$\mathcal{M}_\phi(t) = \langle N(t), \phi \rangle - \int_0^t \langle N(s), A^{(1)}\phi \rangle ds \quad (4.14)$$

y

$$\langle \mathcal{M}_\phi \rangle(t) = \int_0^t \langle N(s), A^{(1)}\phi^2 - 2\phi A^{(1)}\phi + V\{\phi, \phi\} \rangle ds \quad (4.15)$$

Para calcular la covarianza funcional de N , primero que todo se observa que para $s \leq t$ se tiene que

$$E(\langle N(s), \phi \rangle \langle N(t), \psi \rangle) = E(\langle N(s), \phi \rangle \langle N(t), U_{t-s}\psi \rangle) \quad (4.16)$$

Esto se obtiene condicionando sobre la σ -álgebra generada por $N(r)$, $r \leq s$ y usando la propiedad de Markov de N y (4.12). Por consiguiente es suficiente computar la funcional de la covarianza para un punto de tiempo. Para hacerlo se trabajará con el método de martingalas, iniciando con $t = 0$ para luego hacer el desarrollo general.

El proceso

$$\{(\langle \mathcal{M}_\phi \rangle(t))^2 - \langle \mathcal{M}_\phi \rangle(t), t \geq 0\} \quad (4.17)$$

es una martingala (Ver [19]). Entonces, de

$$E((\langle \mathcal{M}_\phi \rangle(t))^2 - \langle \mathcal{M}_\phi \rangle(t)) = E((\langle \mathcal{M}_\phi \rangle(0))^2) = E(\langle N(t), \phi \rangle^2) \quad (4.18)$$

y usando $\frac{d}{dt}U_t = U_t A^{(1)}$ se tiene

$$\begin{aligned}
E(\langle N(0), \phi \rangle^2) &= E(\langle N(0), \phi \rangle^2) - 2 \int_0^t E(\langle N(t), \phi \rangle \langle N(s), A^{(1)} \phi \rangle) ds \\
&+ 2 \int_0^t \int_s^t E(\langle N(s), A^{(1)} \phi \rangle \langle N(r), A^{(1)} \phi \rangle) dr ds \\
&- \int_0^t E(\langle N(s), A^{(1)} \phi^2 - 2\phi A^{(1)} \phi + V\{\phi, \phi\} \rangle) ds \\
&= E(\langle N(0), \phi \rangle^2) - 2 \int_0^t E(\langle N(s), A^{(1)} \phi \rangle \langle N(s), U_{t-s} \phi \rangle) ds \\
&+ 2 \int_0^t \int_s^t E(\langle N(s), A^{(1)} \phi \rangle \langle N(s), U_{r-s} A^{(1)} \phi \rangle) dr ds \\
&- \int_0^t E(\langle N(0), U_s(A^{(1)} \phi^2 - 2\phi A^{(1)} \phi + V\{\phi, \phi\}) \rangle) ds \\
&= E(\langle N(t), \phi \rangle^2) - 2 \int_0^t E(\langle N(s), A^{(1)} \phi \rangle \langle N(s), \phi \rangle) ds \\
&- E(\langle N(0), U_t \phi^2 \rangle) + E(\langle N(0), \phi^2 \rangle) \\
&+ 2 \int_0^t E(\langle N(0), U_s(\phi A^{(1)} \phi) \rangle) ds \\
&- \int_0^t E(\langle N(0), U_s(V\{\phi, \phi\}) \rangle) ds
\end{aligned}$$

De ahí que

$$\begin{aligned}
E(\langle N(t), \phi \rangle^2) &= E(\langle N(0), \phi^2 \rangle) - E(\langle N(0), \phi^2 \rangle) + E(\langle N(0), U_t \phi^2 \rangle) \\
&+ 2 \int_0^t E(\langle N(s), A^{(1)} \phi \rangle \langle N(s), \phi \rangle) ds \\
&- 2 \int_0^t E(\langle N(0), U_s(\phi A^{(1)} \phi) \rangle) ds \\
&+ \int_0^t E(\langle N(0), U_s(V\{\phi, \phi\}) \rangle) ds
\end{aligned}$$

La última ecuación es una ecuación integral para la familia de funciones de la forma

$$\begin{aligned}
E(\langle N(t), \phi \rangle \langle N(t), \psi \rangle) &= E(\langle N(0), U_t \phi \rangle \langle N(0), U_t \psi \rangle) \\
&\quad + E(\langle N(0), U_t(\phi\psi) - (U_t \phi)(U_t \psi) \rangle) \\
&\quad + \int_0^t E(\langle N(0), U_r(V\{U_{t-r}\phi, U_{t-r}\psi\}) \rangle) dr, \quad (4.19)
\end{aligned}$$

donde

$$\{\phi, \psi\}(x, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+^k} p_k(x, z; dy_1, \dots, dy_k) \sum_{j \neq l, l=1} \phi(x, y_j) \psi(x, y_l). \quad (4.20)$$

Se sigue de (4.8), (4.10) y (4.19) que la funcional de la covarianza de N está dada por

$$\begin{aligned}
Cov(\langle N(s), \phi \rangle \langle N(t), \psi \rangle) &= Cov(\langle N(0), U_s \phi \rangle \langle N(0), U_t \psi \rangle) \\
&\quad + E(\langle N(0), U_s(\phi U_{t-s}\psi) - (U_s \phi)(U_t \psi) \rangle) \\
&\quad + \int_0^s E(\langle N(0), U_r(V\{U_{s-r}\phi, U_{t-r}\psi\}) \rangle) ds \\
s \leq t, \quad \phi, \psi &\in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Si $N(0)$ es una medida de Poisson aleatoria con medida de intensidad $m(dx, dz)$ (una medida de Radon sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$), entonces las funcionales de la media y la covarianza de $N(t)$ están dadas por:

$$E(\langle N(t), \phi \rangle) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} U_t \phi(x, z) m(dx, dz), \quad t \geq 0, \quad \phi \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \quad (4.22)$$

y

$$\begin{aligned}
Cov(\langle N(s), \phi \rangle \langle N(t), \psi \rangle) \\
= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \left[U_s(\phi U_{t-s}\psi)(x, z) + \int_0^s U_r(V\{U_{s-r}\phi, U_{t-r}\psi\})(x, z) dr \right] m(dx, dz), \\
s \leq t, \quad \phi, \psi \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Obsérvese que implícitamente se asume que las funciones de prueba ϕ , ψ pertenecen al dominio del operador A definido en (4.1). Sin embargo, las

funciones de prueba pueden ser más generales siempre y cuando se garantice que las integrales consideradas están bien definidas. En particular, éste es el caso para funciones de la forma $\phi(x, z) = \chi_B(x)\chi_C(z)$, donde B y C son subconjuntos Borel de \mathbb{R}^d y \mathbb{R}_+ . Tales funciones serán utilizadas para aplicaciones a contaminación del aire.

Para modelar emisiones de alta densidad de partículas, se asume que $N(0)$ es una medida aleatoria de Poisson sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ con medida de intensidad Km , siendo m una medida Radon sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, con $K \rightarrow \infty$. Sea $N_K = \{N_K(t), t \geq 0\}$ el correspondiente proceso y además medida empírica del sistema, es decir, $N_K(t)$ es la variable aleatoria del número de partículas presentes en el tiempo t , con una tasa de reproducción acelerada igual a K . De (4.22) y (4.23) tenemos que

$$E(\langle N_K(t), \phi \rangle) = K \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} U_t \phi(x, z) m(dx, dz), \quad t \geq 0, \phi \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \quad (4.24)$$

y

$$\begin{aligned} & Cov(\langle N_K(s), \phi \rangle \langle N_K(t), \psi \rangle) \\ &= K \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \left[U_s(\phi U_{t-s}\psi)(x, z) + \int_0^s U_r(V\{U_{s-r}\phi, U_{t-r}\psi\})(x, z) dr \right] m(dx, dz), \\ & \hspace{15em} s \leq t \end{aligned} \quad (4.25)$$

Puesto que en el modelo interesa no sólo el tamaño y la localización de las partículas sino también el instante de observación entonces al modelo lo sustenta teóricamente un proceso de Poisson representado por una medida aleatoria de Poisson sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ con medida de intensidad m (una medida de Radon sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$). Los cálculos de la media y la varianza son esencialmente los mismos que arriba, sólo que ahora tiene una integración adicional con respecto a la variable tiempo t .

De (4.22) y (4.23) se sigue inmediatamente que

$$E \left| \frac{1}{K} \langle N_K(t), \phi \rangle - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} U_t \phi(x, z) m(dx, dz) \right|^2 \rightarrow 0 \quad \text{como } K \rightarrow \infty \quad (4.26)$$

esto es, $\frac{1}{K} \langle N_K(t), \phi \rangle$ converge en L^2 a $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} U_t \phi(x, z) m(dx, dz)$

La funcional característica de $N_K(t)$ está dada por

$$E(\exp\{i\langle N_K(t), \phi \rangle\}) = \exp \left\{ K \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} E(\exp\{i\langle N^{(x,z)}(t), \phi \rangle\} - 1) m(dx, dz) \right\} \quad (4.27)$$

donde $N^{(x,z)}$ denota la medida empírica del sistema al tiempo t (Ver [27]) iniciando desde una partícula inicial en x de tamaño z .

Definimos el proceso de fluctuación normalizado $X_K = \{X_K(t), t \geq 0\}$ por

$$\langle X_K(t), \phi \rangle = K^{-\frac{1}{2}} (\langle N_K(t), \phi \rangle - E(\langle N_K(t), \phi \rangle)) \quad (4.28)$$

Entonces la funcional característica de $X_K(t)$ está dada por

$$E(\exp\{i\langle X_K(t), \phi \rangle\}) = \exp \left\{ -iK^{\frac{1}{2}} E\langle N_K(t), \phi \rangle + K \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} E(\exp\{iK^{-\frac{1}{2}} \langle N^{(x,z)}(t), \phi \rangle\} - 1) m(dx, dz) \right\} \quad (4.29)$$

Expandiendo en series de Taylor la exponencial dentro de la integral y usando el hecho de que

$$E\langle N(t), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} E\langle N^{(x,z)}(t), \phi \rangle m(dx, dz) \quad (4.30)$$

se obtiene

$$E(\exp\{i\langle X_K(t), \phi \rangle\}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} E(\langle N^{(x,z)}(t), \phi \rangle^2) m(dx, dz) + \delta_K \right\} \quad (4.31)$$

donde δ_K es el término error de la expansión, el cual tiende a 0 cuando $K \rightarrow \infty$ (ésto requiere que el tercer momento sea finito). Ya que

$$Var(\langle N(t), \phi \rangle) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} E(\langle N^{(x,z)}(t), \phi \rangle^2) m(dx, dz) \quad (4.32)$$

y tomando el límite de la funcional característica de $X_K(t)$ cuando $K \rightarrow \infty$, utilizando (3.23) y el teorema de continuidad de Lévy, concluimos que $\langle X_K(t), \phi \rangle$ converge fuertemente cuando $K \rightarrow \infty$ a una variable aleatoria gaussiana centrada, con varianza (ver [19], [27], [14])

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \left[U_t(\phi^2)(x, z) + \int_0^t U_r(VU_{t-r}\phi, U_{t-r}\phi) dr \right] m(dx, dz). \quad (4.33)$$

Esto prueba el límite de fluctuación resultante para un tiempo determinado. El límite fluctuación para dos o más puntos de tiempo $t_1 < t_2 < \dots$ se halla de manera similar, con la ayuda de la propiedad de Markov de N .

Los límites resultantes son establecidos en el siguiente teorema, donde $B(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ denota el espacio de funciones medibles Borel-acotadas sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Recordemos que U_t es el semigrupo generado por $A^{(1)}$.

Teorema 28. ■ *Ley de los grandes números: Para cada $t \geq 0$ y $\phi \in B(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ se tiene que:*

$$\frac{1}{K} \langle N_K(t), \phi \rangle \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times [0, t]} U_{t-s}\phi(x, z) m(dx, dz, ds) \quad (4.34)$$

en L^2 cuando $K \rightarrow \infty$

- *Límites de fluctuación: La distribución finito-dimensional del proceso de fluctuación normalizado $X_K = X_{K(t), t \geq 0}$ definido por*

$$\langle X_K(t), \phi \rangle = K^{-\frac{1}{2}} (\langle N_K(t), \phi \rangle - E(\langle N_K(t), \phi \rangle)), \quad t \geq 0, \quad \phi \in B(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \quad (4.35)$$

converge fuertemente a las del proceso gaussiano centrado $X = X(t), t \geq 0$ con funcional de covarianza

$$\begin{aligned} & Cov(\langle X(s), \phi \rangle, \langle X(t), \psi \rangle) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times [0, t]} \left[U_{s-r}(\phi U_{t-s}\psi)(x, z) + \int_0^{s-r} U_u(VU_{s-r-u}\phi, U_{t-r-u}\psi)(x, z) du \right] \\ & \quad \cdot m(dx, dz, dr) \quad s \leq t \quad (4.36) \end{aligned}$$

Para poder computar el límite (4.34) y la covarianza (4.35), se necesita de la forma explícita del semigrupo U_t , la cual está dada por

$$U_t\phi = \sum_{n=0}^{\infty} U_t^{(n)}\phi \quad (4.37)$$

donde $U_t^{(0)}\phi = T_t$ que es el semigrupo generado por A en (4.1) y para cada $n \geq 0$, se tiene que

$$U_t^{(n+1)}\phi = \int_0^t T_{t-s}(V(U_s^{(n)}\phi)^{(1)} - U_s^{(n)}\phi)ds \quad (4.38)$$

donde $(U_s^{(1)}\phi)^{(1)}$ es computado con (4.6) (Ver [33])

4.3. Simulación

4.3.1. programa para la generación de la distribución de partículas

```
#include <iostream> // input-output #include <iomanip> // output
format manipulation #include <cmath> // mathematical libraries
#include <list> // for stl-lists #include "random.hh" // for random
numbers, author JD Munoz #include "histogram.hh" // for histograms
in one dimension using namespace std;

//-----
// Global constants and vars
//-----
// sigma^2 = 2D dt = 2K T dt/m gamma
//

#define GNUPLOT 1 // 0 no gnuplot animation output, 1 otherwise

const double DT = 0.1; // time step const double RHO = 90.0; //
Density const double D = 0.133; // A^2/ps , Difussion constant const
double SIGMA = sqrt(2*D*DT); // gaussian width, for random forces
const double PROB = 0.1; // prob of creating a new particle CRandom
ran2(10); // random generator

//-----
// clase particula
//-----
class CParticle { public:
    // data
    double Rx, Ry, Vx, Vy; // position and velocity
    double mass, rad;
```

90CAPÍTULO 4. MODELO ESTOCÁSTICO DE CONTAMINACIÓN AMBIENTAL

```

// functions
// constructor
explicit CParticle(double Rx0, double Ry0, double Vx0,
double Vy0, double rad0, double rho0);
};
// typedef for later use
typedef list<CParticle> listicp_t; // list of particles

// implementations
CParticle::CParticle(double Rx0, double Ry0, double Vx0, double Vy0,
double rad0, double rho0) {
    Rx = Rx0; Ry = Ry0;
    Vx = Vx0; Vy = Vy0;
    rad = rad0;
    mass = (4*M_PI/3)*rad*rad*rad;
}

//-----
// Declaracion de funciones
//-----
void TimeStep(listicp_t & particles, double dt); // one time step,
from t to t+dt void CreateNewParticles(listicp_t & particles, double
prob); // create children with probability prob void
ComputeSizeHisto(listicp_t & particles, CHistogram1D & histo); //
Compute the size histogram void PrintHeaderGnuplot(void); // print i
initial for gnuplot void PrintGnuplot(listicp_t & particles, double
time); // print gnuplot current animation

//-----
// Funcion main
//-----
int main (void) {
    double time, tf; // time, final time
    int printCounter; // for printing
    listicp_t dust; // list of particles
    CParticle mother(0, 0, 0, 0, 1.0, RHO); // initial
    dust.push_back(mother); // add the mother to the list, initial particle
    CHistogram1D histo; // histogram
    histo.Create(0, 1, 0.1); // set the histogram to:
    from [0, 1] and resolution 0.1

```

```

PrintHeaderGnuplot();

tf = 10.0; // FINAL TIME of simulation, total steps = tf/DT
// evolve from time = 0 to time = tf
for (printCounter = 1, time = 0; time < tf; time+=DT, printCounter++) {
    TimeStep(dust, DT); // make one time step (diffusion)
    CreateNewParticles(dust, PROB); // Create new particles
    for each particle with probability prob
    if(0 == printCounter%1) { // print only when printCounter is ...
        clog << "# Current time = " << time << endl;
        clog << "# Current system size = " << dust.size() << endl;
        clog << endl;
        PrintGnuplot(dust, time);
        printCounter=1;
    }
} // end of time evolution
ComputeSizeHisto(dust, histo); // COmpute the size histogram
histo.Normalize(); // Normalize the histogram : divide all bins by
total number of samples
char fileName[41]; // array for saving the histogram filename
sprintf(fileName, "tmpsizeDistro-tf-%05.2f.txt", tf); // set the file name
histo.Print(fileName); // print the histogram to the given filename

return 0;
}

//-----
// Implementacion de funciones
//-----
void ComputeSizeHisto(listicp_t & particles, CHistogram1D & histo) {
    listicp_t::iterator it;
    for(it = particles.begin(); it != particles.end(); it++) {
        histo.Add(it->rad);
    }
}

void TimeStep(listicp_t & particles, double dt) {
    double Rxnew, Rynew;
    listicp_t::iterator it;

```

92CAPÍTULO 4. MODELO ESTOCÁSTICO DE CONTAMINACIÓN AMBIENTAL

```
for(it = particles.begin(); it != particles.end(); it++) {
    Rxnew = it->Rx + ran2.gauss(0, SIGMA); Rynew = it->Ry +
    ran2.gauss(0, SIGMA);
    it->Vx = (Rxnew - it->Rx)/dt; it->Vy = (Rynew - it->Ry)/dt;
    it->Rx = Rxnew; it->Ry = Rynew;
}
}

void CreateNewParticles(listicp_t & particles, double prob) {
    double ran;
    listicp_t::iterator it;
    for(it = particles.begin(); it != particles.end(); it++) {
        ran = ran2.r();
        if(ran <= prob) { // create new particles, delete old
            CParticle son1(*it), son2(*it);
            son1.rad *= 0.8; son1.mass *= 0.5;
            son2.rad *= 0.8; son2.mass *= 0.5;
            particles.push_back(son1);
            particles.push_back(son2);
            particles.erase(it);
        }
    }
}

void PrintHeaderGnuplot(void) { #if GNUPLOT
    cout << "set out 'anim.gif'" << endl;
    cout << "set term gif animate optimize" << endl;
    cout << "unset key " << endl;
    cout << "set cbrange [0:1] " << endl;
    cout << "set xrange [-6:6] " << endl;
    cout << "set yrange [-6:6] " << endl;
    cout << "set xlabel 'x' " << endl;
    cout << "set ylabel 'y' " << endl;
    cout << "set cblabel 'Particle Size' " << endl;
    cout << "set size ratio -1 " << endl;
    cout << "set xzeroaxis lt 2 " << endl;
    cout << "set yzeroaxis lt 2 " << endl;
    cout << "set grid " << endl;
    cout << "set parametric " << endl;
    cout << "set view map" << endl;
}
```

```

    cout << "set pointsize 2.1" << endl;
    //cout << "set trange [0:1] " << endl;
    //cout << "set isosamples 12 " << endl;
    //cout << "set view 10, 271" << endl;
    //cout << "set grid " << endl;
#endif }

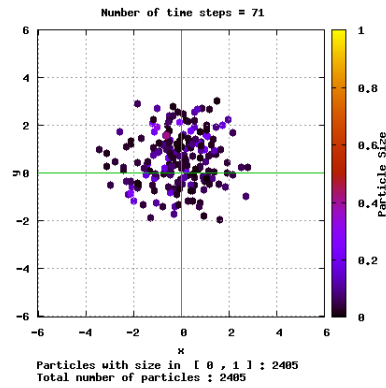
void PrintGnuplot(listicp_t & particles, double time) { #if GNUPLOT
    int count;
    cout << "set title '" << time << endl;
    cout << "splot 0, 0, 0 " ;
    listicp_t::iterator it;
    for(it = particles.begin(), count = 0; it != particles.end(); it++, count++)
    {
        cout << " , ";
        cout << it->Rx
            << " , "
            << it->Ry
            << " , "
            << it->rad
            << " w p pt 7 lt pal z";
        if (count > 60) break;
    }
    cout << endl;
#endif }

```

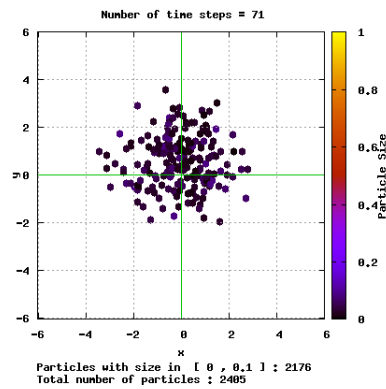
4.3.2. Resultados de la simulación

La siguiente simulación computacional da la idea cuantitativa del comportamiento del modelo. Se considera el caso particular de $p_2(z; az, az) = 0,1$, con $a = 0,8$, en el plano ($d = 2$) con las partículas moviéndose acorde a un movimiento Browniano, sin cambios de tamaño durante el tiempo de vida. Hay una partícula inicial, de tamaño 1 en el origen (el centro del cuadrado). Las siguientes gráficas muestran la distribución espacial de las partículas al tiempo $t = 71$.

Distribución de las partículas con respecto al tiempo

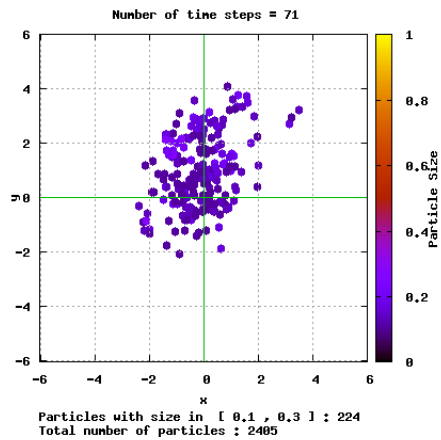


Distribución del total de partículas presentes al tiempo $t = 71$ Total=2405

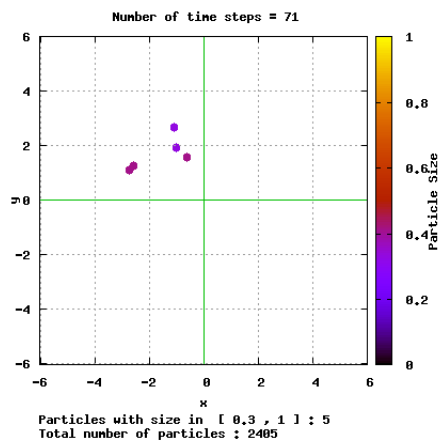


Distribución partículas pequeñas Al tiempo $t = 71$ la cantidad de partículas cuyo tamaño está entre 0 y 0,1 es de 2176 entre un total de 2405

Distribución de las partículas con respecto al tiempo

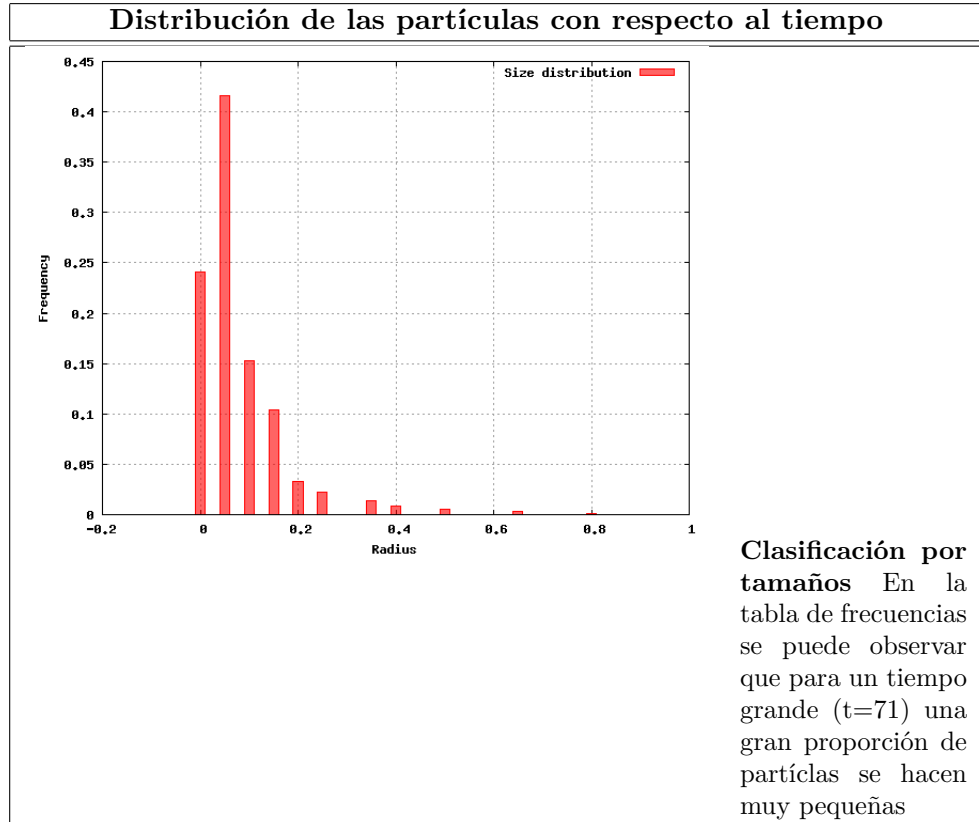


Distribución partículas medianas Al tiempo $t = 71$ la cantidad de partículas cuyo tamaño está entre 0,1 y 0,5 es de 224 entre un total de 2405



Distribución partículas grandes Al tiempo $t = 71$ la cantidad de partículas cuyo tamaño está entre 0,3 y 1, es de 5 entre un total de 2405

4.3.3. Resultados cuantitativos



Capítulo 5

CONCLUSIONES

1. En los modelos clásicos de contaminación del aire [15], tanto en los de tipo determinístico como en los de tipo estadístico, no se obtiene información acerca del comportamiento de las partículas contaminantes en relación con, por ejemplo, la extinción de un grupo determinado de partículas, su distribución espacial y sus cambios de masa. De hecho, los modelos estadísticos se basan en datos para hacer pronósticos de concentraciones futuras de contaminación, los modelos determinísticos recurren a metodologías de aproximación, ecuaciones de conservación de masa y energía y demás herramientas matemáticas para calcular concentraciones, ubicaciones y velocidades de partículas contaminantes dependientes del tiempo y del espacio. Los procesos de ramificación por su parte, ofrecen un modelo que permite conocer las distribuciones de posición, tamaño y otras características de partículas contaminantes en el aire.
2. En el modelo presentado en el capítulo 4, el proceso de ramificación subyacente es un proceso con un único tipo de individuos. Una generalización que se podría trabajar a futuro, es considerar un modelo en el que el proceso de ramificación sea un proceso multitypo.
3. Otro factor que podría considerarse en un modelo futuro es, el que las partículas iniciales pueden salir del sistema, regresar en tiempo futuro o sufrir ciertas transformaciones químicas o físicas. También es importante tener en cuenta que pueden haber partículas externas a las originales que ingresan al sistema.
4. Debido a la dinámica aleatoria de los fluidos turbulentos es, a nuestro juicio, más conveniente el uso de modelos estocásticos que el de mode-

los determinísticos, pues los primeros permiten analizar las variaciones de tamaño y ubicación de las partículas hijas con respecto al tamaño y ubicación del padre.

5. Aunque la principal desventaja de los modelos estocásticos aplicados a problemas de contaminación se encuentra en la necesidad de conocer determinados parámetros turbulentos de origen lagrangiano, de difícil medida, sus ventajas frente a los determinísticos residen en que: son versátiles y sencillos, en muchas ocasiones no requieren excesivos tiempos de ejecución en programas computacionales de simulación y los modelos estocásticos resultan ser más naturales al permitir la inclusión de las variables propias de la dinámica microscópica del modelo de contaminación.

Apéndice A

FILTROS DE KALMAN

A continuación se presenta una breve explicación de los filtros de Kalman desarrollada en el trabajo de González, R [15].

Los filtros de Kalman se basan en la recursividad del método de mínimos cuadrados, donde se considera el problema de regresión lineal

$$y = xa \tag{A.1}$$

en donde x es un conjunto de n variables linealmente independientes (x_1, x_2, \dots, x_n) y a es un vector de coeficientes desconocidos (a_1, a_2, \dots, a_n) , tanto x como a dependientes del tiempo. Si se dispone de k observaciones de las variables x e y , podemos tener una estimación de a , representado por a'_k por medio de mínimos cuadrados de la siguiente manera:

$$a'_k = \left[\sum_{i=1}^n x_i x_i \right]^{-1} \sum_{i=1}^n x_i y_i \tag{A.2}$$

Por tanto, si el número de observaciones k aumenta es necesario volver a aplicar esta ecuación. Para evitarlo se hace uso de un método recursivo tal que a'_k es la suma de su estimación en $k - 1$ observaciones a'_{k-1} más un término que se basa en la nueva observación de x_k y y_k . Este método recursivo llega a la misma evaluación que mediante la ecuación (A.2). Posteriormente Kalman (1960) resolvió el problema general de estimar un conjunto de parámetros a_k en los que:

1. a_k representa la situación de un sistema dinámico.
2. a_k varía de acuerdo a un esquema estocástico global. Esto es,

$$a_k = F(k, k - 1)a_{k-1} + G(k, k - 1)w_k \tag{A.3}$$

donde $F(k, k - 1)$ es una matriz de tamaño $n \times n$, $G(k, k - 1)$ es una matriz de entrada $n \times n$ y w_k es un vector de variables aleatorias independientes de media cero y matriz de covarianza Q , de dimensión m . Para el problema considerado en el presente trabajo a_k refleja numéricamente el estado del sistema dinámico, es decir las concentraciones de contaminantes en la atmósfera, donde la matriz F refleja la representación determinística del fenómeno.

3. Las medidas de $y_k = [y_1, y_2, \dots, y_p]_k$ pueden relacionarse linealmente con a_k , mediante la ecuación

$$y_k = H_k a_k + v_k \quad (\text{A.4})$$

donde H es una matriz de coeficientes de dimensiones $p \times n$ y v es un vector de dimensión p que corresponde a los errores de medida indicados por variables aleatorias de media cero y matriz de covarianza R .

Estas ecuaciones del filtro de Kalman permite la aplicación de un método recursivo que estima a'_{k+j} a partir de a_{k+j} considerando únicamente las últimas observaciones de $y_{k'}$ en vez de resolver en cada momento todo el problema por el método de mínimos cuadrados. Además, hace posible estimar la matriz de covarianza del error previsto $a_{k+j} - a'_{k+j}$ que refleja la exactitud de las estimaciones.

En resumen, el filtro de Kalman proporciona un método para predecir la evolución de $a_{k'}$ en el que se tiene en cuenta la componente determinística F (predictora) y las medidas y_k (correctoras). En otras palabras, el filtro de Kalman es un conjunto de ecuaciones matemáticas que proveen una solución recursiva eficiente del método de mínimos cuadrados. Esta solución permite calcular un estimador lineal, insesgado y óptimo del estado de un proceso en cada momento del tiempo con base en la información disponible en el momento $t - 1$, y actualiza dichas estimaciones con la información adicional disponible en el momento t . Este filtro es el principal algoritmo para estimar sistemas dinámicos especificados en la forma de estado-espacio (State-space).

Bibliografía

- [1] *Athreya, K. B., Ney, P. E., Branching Processes, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.*
- [2] *Blanco, L., ¿qué es un proceso de ramificación?, Boletín de Matemáticas III (1996), 43–50.*
- [3] *Blanco, L., Muñoz, M., Sistemas aleatorios ramificados (primera parte).*
- [4] ———, *Sistemas aleatorios ramificados (segunda parte), Revista Colombiana de Estadística 25 (2002), 97–126.*
- [5] ———, *Notas de clase, Análisis Estocástico, Facultad de Ciencias, UNAL-Colombia, 2003.*
- [6] *Bojdecki, T., Gorostiza, L., Stochastic Processes and Their Applications, (1995), 191–226.*
- [7] *Borja, V., Analisis estadístico de los estudios ecológicos, Revista Salud pública de México 42 (2000), no. 6, 536–538.*
- [8] *Broissia, M., Selected Mathematical models in Environmental impact assessment in Canada, Canadian Environmental Assessment Research Council, 1986.*
- [9] *Carvalho, J., Moreira, D., Evaluation of two semi-analytical techniques in air quality applications, Revista Brasileira Meteorológica 22 (2007), no. 1.*
- [10] *Céspedes, P., Teorema de límite central para procesos de renovación, Trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia, 2004.*
- [11] *Chung, K., Walsh, J, Markov Processes, Brownian Motion, And Time Symmetry, Ed. Springer, 2005.*

- [12] *Feller, W., An Introduction to Probability and its Applications*, vol. 1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1971.
- [13] *Fernández, B., La ley de los eventos raros, Legado de Simeón Denis Poisson, Facultad de Ciencias UNAM.*
- [14] ———, *Límites de Alta Densidad para Campos Aleatorios Ramificados, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 2, Sociedad Matemática Mexicana*, 1986.
- [15] *González, R., Modelo Lagrangiano de distribución de partículas por el método de Montecarlo, Univ. Complutense de Madrid*, 1993.
- [16] *Gorostiza, L., Asymptotic fluctuations and critical dimension for a two-level branching system, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados* **14-740** (1996), 109–132.
- [17] ———, *Ramificación y Superprocesos, CISVESTAV reporte interno*, 2008.
- [18] *Gorostiza, L., Kaplan, N., Invariance Principle for Branching Random Motions, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* **25** (1980).
- [19] *Gorostiza, L., Porter, M., Rodrigues, E., A simulation of a stochastic model for air pollution by particulate matter, CINVESTAV reporte interno, year = 2001, volume = 316,*
- [20] *Gorostiza, L., Rodrigues, E., A stochastic model for transport of particulate matter in air: an asymptotic analysis, Acta Applicandae Mathematicae* **59** (1999), 21–43.
- [21] *Gorostiza, L.G., Fernandez, B., Hydrodynamic and fluctuation limits of branching particle systems with changes of mass, Boletín Sociedad Matemática Mexicana* **35** (1990), 25–37.
- [22] *Harris, T. E.*
- [23] *Jagers, P., Branching Processes with Biological Applications*, vol. 1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.
- [24] *Kimmel, M., Axelrod, D., Branching Processes in Biology, Ed. Springer*, 2002.
- [25] *Kloeden, P., Platen, E., Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Ed. Springer*, 1995.

- [26] *Lacasaña, M., Aguilar, C., Romieu, I., Evolución de la contaminación del aire e impacto de los programas de control en tres megaciudades de America Latina, Revista Salud Pública de México* **41** (1999), 203–215.
- [27] *López-Mimbela, A., Fluctuation Limits of Multitype Branching Random Fields, Journal of Multivariate Analysis* **40** (1992), 56–82.
- [28] *Monin, A.S, Yaglom, A.M, Statistical fluid mechanics, Cambridge. M.I.T, 1971.*
- [29] *Neumann, J., Some observations on the simple exponential function as a Lagrangian velocity correlation function in turbulent diffusion, Atmos. Environ.* **12**, 1965–1968.
- [30] *Olivares, G., Dispersión regional de azúfre oxidado en Chile central, Univ.de Chile, Fac. de Ciencias Físicas y Matemáticas, Dep. de Ingeniería Química, 2001.*
- [31] *Ospina, R., Procesos de Galton-Watson, Trabajo de grado, universidad Nacional de Colombia, 2001.*
- [32] *Pasquill, F., Atmospheric Diffusion, Segunda edición, New York, John Wiley and Sons, 1974.*
- [33] *Pazy, A., Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Ed. Springer, 1992.*
- [34] *Protter, J., Probability Essentials, Springer-Verlag, 2004.*
- [35] *Stewart, N., Kurtz, T., Markov Processes Characterization and Convergence, John Wiley and Sons, 1986.*
- [36] *Tennekes, H., The exponential lagrangian correlation function and turbulent diffusion in the inertial subrange, Atmos.Environ* **13** (1979), 1565–1567.
- [37] *Todorovic, P., An introduction to Stochastic Processes and Their Applications, Springer-Verlag, 1992.*
- [38] *Wakolbinger, A., Poblaciones Aleatorias Ramificadas y sus Equilibrios, Sociedad Matemática Mexicana* **9** (1994).
- [39] ———, *Limits of Spatial Branching Populations, Johann Wolfgang Goethe-Universität* **60054** (1995), 171–189.

- [40] *Wentzell, A. D., A course in the Theory of Stochastic Processes, McGraw-Hill Inc., 1981.*