# EFICIENCIA DE UNA MODIFICACIÓN DE LA PRUEBA DE FRASER PARA LA ALTERNATIVA DE LOCALIZACIÓN EN EL PROBLEMA DE MUESTRA

**ARSENIO HIDALGO TROYA**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA**

**BOGOTÁ D.C., 2009**

**EFICIENCIA DE UNA MODIFICACIÓN DE LA PRUEBA DE FRASER PARA LA ALTERNATIVA DE LOCALIZACIÓN EN EL PROBLEMA DE MUESTRA**

**ARSENIO HIDALGO TROYA**

**CÓDIGO: 832022**

**Trabajo de grado presentado para optar al título de**

**Magister en Ciencias - Estadística**

**DIRIGIDO POR:**

**JIMMY ANTONIO CORZO SALAMANCA**

**Dr. Rer. Nat.**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA**

**BOGOTÁ D.C., 2009**

# Agradecimientos

Por hacer posible la realización de este proyecto agradezco muy especialmente a:

La Universidad Nacional y la Universidad de Nariño.

A Jimmy Corzo mi profesor y director de este trabajo, gracias por brindarme su amistad.

A los profesores de la maestría, Henry Mendoza, Fabio Nieto, Jorge Ortiz, Oscar Melo, Edilberto Ruiz, Maria N. Rodriguez y Jorge H. Mayorga.

A mi familia, Nelly, Angela, Diego y Adrian, gracias por su comprensión y apoyo.

Al trio Emilio por compartir mis proyectos y una amistad de muchos años.

# Índice

# Índice de tablas

# Índice de figuras

# Introducción

Las pruebas de rangos han jugado un papel importante en la historia relativamente corta de los métodos estadísticos no paramétricos que se inicia con los trabajos de Wilcoxon (1945) y MannWhitney (1947) en la década de los cuarenta y que se continúa con los trabajos de Hodges y Lehmann (1956, 1960, 1962, 1963), para la década de los cincuenta y sesenta, en los que obtuvieron resultados sorprendentes como el hecho que las pruebas de rangos pierden muy poca eficiencia cuando se comparan con la prueba $t$-student, bajo el modelo de distribución muestreada normal y se vuelven más eficientes que esta prueba, si el modelo de distribución tiene cola alargada. También para la década de los sesenta, Hajek desarrolló una teoría importante para obtener distribuciones asintóticas de las estadísticas de rango que permitió el desarrollo de estadísticas de pruebas más generales basadas en rangos como las de puntajes .

Las pruebas de rangos son introducidas al análisis de diseños de experimentos por Puri y Sen (1968) en trabajos complementarios a los de Hodges y Lehmann en los años sesenta. La prueba de rangos y los métodos de estimación para modelos de regresión simple son tratados por Adichie (1967a, 1967b) y para el modelo lineal general en Adichie (1978).

Aunque, como se aprecia, las pruebas de rangos son relativamente nuevas, si se comparan con las pruebas paramétricas, cobran mucha importancia en la investigación de los métodos no paramétricos, por lo cual se hace interesante estudiar las propiedades de estadísticas de rangos más generales y las pruebas tratadas en ellas, como las que se proponen en este trabajo para la alternativa de localización en una muestra, basadas en una estadística de puntajes que utiliza como función generatriz la función percentil de la Distribución Lambda Generalizada ($DLG$). El objetivo es calcular las eficiencias de las pruebas propuestas propuestas y comparadas con las de otras pruebas comúnmente utilizadas para el mismo propósito. Un trabajo reciente muy cercano a éste, fue realizado por Serrato (2006), en el cual estudió una prueba para la alternativa de localización en una muestra utilizando la función de puntajes que proporciona una estadística para una prueba de rangos localmente más potente y cuya función de puntajes es:

$$\phi_f(u) = -\frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{u+1}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{u+1}{2}\right)\right)};\text{ con } 0 < u < 1$$

La expresión anterior la desarrolla aproximando la función de densidad ($f$) y la función de distribución de la población ($F$) de donde se toma la muestra, de las cuales depende la función de puntajes, con distribuciones de la familia Lambda Generalizada.

El problema a abordar en el presente trabajo, se describe a continuación.

En situaciones donde la información disponible es una muestra aleatoria que se representa por la sucesión $X_1, ..., X_n$ de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución continua $F(x) = P(X \leq x)$ y mediana $\theta$, un problema de inferencia estadística es la prueba de la hipótesis

$$H_o : \theta = 0 \text{ versus } H_A : \theta > 0$$

Para la solución de este problema se utilizan comúnmente la prueba del signo, cuando $F \in \Omega_0$ [1] y la de rango signado cuando $F \in \Omega_s$ [2]. Estas pruebas usan estadísticas que se pueden obtener de la siguiente estadística general de puntajes (ver Hettmansperger, 1984)

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \phi\left(\frac{R_i^+}{n+1}\right) s\left(X_i\right)$$

donde $R_i^+$ es el rango del valor absoluto de $X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. La función $\phi$ se denomina función generatriz de puntajes y

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

[1] $\Omega_0$ ={F: $F$ es absolutamente continua y con mediana única 0}
[2] $\Omega_s$ ={F: $F \in \Omega_0$ y $F(x) = 1 - F(-x)$}

Fraser (1957) propone una estadística de puntajes normales, dentro de la familia de estadísticas anteriores, utilizando como función generatriz $\phi(\cdot)$ la función percentil de la distribución normal estándar $\Phi^{-1}(\cdot)$.Esta estadística esta dada por:

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi_{+}^{-1}\left(\frac{R_i^{+}}{n+1}\right) s(X_i)$$

donde $\Phi_{+}(x) = 2\Phi(x) - 1 = P(|x| \leq x)$ y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución normal estándar.

Este trabajo pretende establecer las propiedades que tiene, en términos de su eficiencia relativa, una prueba de localización para una muestra basada en una estadística análoga a la de Fraser utilizando como función generatriz de puntajes la función percentil de una $DLG$ expresada por

$$F^{-1}(y) = F^{-1}(y,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_1}}{\lambda_2}$$

con $\lambda_2 \neq 0$, $0 \leq y \leq 1$, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ son los parámetros de localización, escala, sesgo y curtósis, respectivamente.

En el primer capítulo se incluye el marco teórico en el que se estudia, en primer lugar, las estadísticas de puntajes generales incluyendo la de puntajes normales propuesta por Fraser; posteriormente se dan las definiciones de potencia de una prueba y de la función de potencia. Además se hace una presentación de la eficiencia relativa de una prueba con sus propiedades y de la teoría general asintótica y las propiedades de la eficacia de una prueba, en particular de una prueba basada en la estadística de puntajes generales. Se complementa con el estudio de las características generales de la $DLG$

El segundo capítulo se dedica a la construcción de la prueba propuesta en el trabajo a partir de funciones percentiles de la $DLG$. Se establecen las restricciones en los valores de los parámetros de la $DLG$ para que a la vez, su función de densidad sea válida y se cumplan las propiedades establecidas en la definición de la función de puntajes. Al final del capítulo se obtienen las expresiones del valor esperado y la varianza de la estadística de prueba y se dan las condiciones bajo las cuales su distribución converja a la normal estándar

En el tercer y último capítulo se presentan y analizan las eficiencias de algunas

pruebas de puntajes obtenidas a partir de las funciones percentiles de la $DLG$ como la Uniforme, Normal, $t$–student, Logística y Laplace y otras que se construyen fijando valores para $\lambda_4$ y con $\sigma = 1$; estas pruebas se analizan en muestras de varias poblaciones.

Se obtuvieron las expresiones para los dos primeros momentos y para la distribución asintótica de las estadísticas propuestas bajo la hipótesis nula $H_o$ y se determinó que las curtósis de las funciones de puntajes y de la población de donde provienen las muestras, permiten evaluar el comportamiento de las eficiencias de estas pruebas. Por medio de aproximación numérica se observó que para muestras provenientes de poblaciones $DLG$ leptocúrticas, son más eficientes las pruebas con funciones de puntajes $DLG$ de curtósis más bajas, superando en este caso a las pruebas del signo, Wilcoxon y $t$-student. En muestras de poblaciones $DLG$ platicúrticas, se observó una mayor eficiencia en las pruebas con funciones de puntajes $DLG$ que tienen curtósis más altas.

# Capítulo 1

# Marco Teórico

En este capítulo se presentan los elementos teóricos de las estadísticas de puntajes de rangos, incluyendo la de puntajes normales propuesta por Fraser. Se introduce además, la definición de potencia de una prueba y de función de potencia, igualmente el concepto de la eficiencia relativa de una prueba y sus propiedades. Se complementa este capítulo con el estudio de la teoría general asintótica y las propiedades de la eficacia de una prueba, de la estadística de puntajes generales, presentados como en Hajek(1960) y Hettmansperger(1984). Al final se presentan las características generales de la $DLG$, estudiadas ampliamente por Karian y Dudewicz(2000).

## 1.1. Estadísticas de puntajes generales

Como una generalización de la estadística de signos y rango signado de Wilcoxon es posible definir una familia de estadísticas basadas en funciones, llamadas puntajes, de los rangos de los valores absolutos de una muestra aleatoria.

Para presentar y definir las estadísticas de puntajes de rangos utilizamos el siguiente contexto estadístico y su notación. Sea $X_1, ....., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución continua $F(x - \theta)$, $F$ en $\Omega_S$ con densidad $f$. Se define el rango $R_j^+$ de $|X_j|$ como el puesto que ocupa $|X_j|$ en la sucesión ordenada de los valores absolutos $|X|_{(1)} \leq ... \leq |X|_{(n)}$; esto significa que $|X_j| = |X|_{(R_j)}$. El antirango Dj de $|X|_{(j)}$ se define como el subindice que tiene la observacion de donde proviene $|X|_{(j)}$, es decir, $|X_{D_j}| = |X|_{(j)}$. Se define el rango signado de $X_j$

como el producto $R_j s(X_j)$, donde

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

### 1.1.1. Estadística de puntajes de rango signado

**Definición 1.** Sea $0 = a(0) \leq a(1) \leq \ldots \leq a(n)$ una sucesión de constantes con al menos una desigualdad estricta y

$$V = \sum_{j=1}^{n} a\left(R_j^+\right) s\left(X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j s\left(X_{D_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j W_j$$

donde $R_j^+$ es el rango de $|X_j|$ entre $|X_1|, \ldots, |X_n|$ y

$$W_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |X|_{(j)} \text{ proviene de una observación positiva} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La segunda igualdad se obtiene utilizando el hecho de que $R_{D_j} = j$ (Hajek 1999). Entonces $V$ es llamada la estadística de puntajes de rango signado.

Note que si $a_j = 1$, $j = 1, \ldots, n$, entonces $V = S$, la estadística para la prueba del signo y si $a_j = j$, $j = 1, \ldots, n$, entonces $V = T$, la estadística del rango signado de Wilcoxon.

El siguiente teorema permite conocer algunas características de $V$ y establecer las condiciones bajo las cuales la distribución de la estadística se puede aproximar a la distribución normal, junto con las ventajas que esto conlleva.

**Teorema 1.** Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F(x)$, $F \in \Omega_s$ y $V$ está dado por la definición (1), entonces:

$$E(V) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_j,$$

$$Var(V) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} a_j^2$$

y

$$Cov(V_1, V_2) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} a_j \ b_j$$

donde

$$V_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j s(X_j) \qquad \text{y} \qquad V_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j s(X_j).$$

Si además los $a_j$, $j = 1, \ldots, n$, satisfacen la condición

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leq i\leq n} a_i}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2}} = 0$$

entonces la variable aleatoria

$$\frac{(V - E(V))}{\sqrt{Var(V)}}$$

converge asintóticamente a una distribución normal estándar (la demostración se puede ver en Hettmansperger (1984) apéndice 10, páginas 301 y 302).

### 1.1.2. Estadística generada por una función generatriz de puntajes

A menudo los puntajes están dados por una función generatriz de puntajes que formalmente se define de la siguiente manera.

**Definición 2.** Sea $\phi(u)$, $0 < u < 1$ una función no negativa y no decreciente, tal que $\int_0^1 \phi\,(u)du < \infty$ y $0 < \int_0^1 \phi^2\,(u)du < \infty$ y defina los puntajes como: $a\,(i) = \phi\left(\frac{i}{n+1}\right)$, con $a(i)$ como en la definición 1. Entonces

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \phi\left(\frac{R_j^+}{n+1}\right) s\,(X_j)$$

es llamada la estadística generada por la función generatriz de puntajes $\phi(\cdot)$

Note que $\phi(u) = 1, \quad 0 < u < 1$ produce $\bar{S} = \frac{1}{n}S$ y $\phi(u) = u$ produce $\bar{T} = \frac{1}{n(n+1)}T$.

El siguiente teorema permite obtener el valor esperado y la varianza de la estadística $\bar{V}$ y nos muestra que para una variada clase de posibles pruebas estadísticas, podemos utilizar aproximaciones normales en la construcción de sus valores críticos.

**Teorema 2.** Si $\phi(\cdot)$ genera $\bar{V}$ y $n \to \infty$, entonces

$$E(\bar{V}) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} \phi\left(\frac{j}{n+1}\right) \to \frac{1}{2} \int_0^1 \phi(u)du$$

$$nVar(\bar{V}) = \frac{1}{4n} \sum_{j=1}^{n} \phi^2\left(\frac{j}{n+1}\right) \to \frac{1}{4} \int_0^1 \phi^2(u)du$$

y además

$$\frac{\bar{V} - E(\bar{V})}{\sqrt{Var(\bar{V})}} = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{V} - \frac{1}{2}\int \phi\,(u)du\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\int \phi^2\,(u)\,du}};$$

tiende asintóticamente a una distribución normal estándar (ver demostración en Hettmansperger (1984), páginas 88 y 89).

### 1.1.3. Estadística de puntajes normales

Fraser (1957) propuso una estadística de puntajes normales para una muestra a partir de la siguiente definición:

**Definición 3.** Sea $\Phi_+(x) = 2\Phi(x) - 1 = P(|X| \leq x)$, con $\Phi(\cdot)$ la función de distribución normal estándar. Cuando en la estadística $\bar{V}$ de la definición 2 se reemplaza la función de puntajes $\phi(u) = \Phi_+^{-1}(u)$, entonces se obtiene

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi_+^{-1}\left(\frac{R_j^+}{n+1}\right) s\left(X_j\right)$$

que se llama la estadística de puntajes normales.

Note que $\Phi_{+}^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2(n+1)}\right)$ y por tanto $\phi(u) = \Phi_{+}^{-1}(u) = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{u}{2}\right)$ esta claramente definida para $0 < u < 1$.

Se puede mostrar que $\int_0^1 \Phi_{+}^{-1}(u)du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ y que $\int_0^1 \left[\Phi_{+}^{-1}(u)\right]^2 du = 1$ y por tanto $\phi(u) = \Phi_{+}^{-1}(u)$ satisface las condiciones de la definición 2 de la estadística generada por una función de puntajes.

## 1.2. Potencia de una prueba

Para definir la potencia de una prueba partimos de considerar el siguiente problema genérico de prueba de hipótesis:

$$H_0 : G \in \wp_0 \text{ versus } H_A : G \in \wp_1$$

donde $\wp_0$ y $\wp_1$ expresan el conjunto de distribuciones especificadas por la hipótesis nula y la alternativa respectivamente, $G$ indica la distribución muestreada.

Sea $\varphi$ una prueba de nivel $\alpha$ para $\mathrm{H}_0$ versus $\mathrm{H}_A$ tal que $\varphi = 1$ si $V \in R$ y $\varphi = 0$ si $V \in R^c$, $V$ es el valor calculado de la estadística de prueba, $R$, que depende de $G$, es la región de rechazo de la hipótesis nula y $\alpha = E_G(\varphi) = P(V \in R)$, $\forall G \in \wp_0$.

**Definición 4.** La potencia de la prueba $\varphi$, para todo G en la alternativa($\wp_1$), está definida por

$$\pi(G, \varphi) = E_G(\varphi) = P(V \in R), G \in \wp_1$$

La anterior definición equivale a afirmar que la potencia de una prueba es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa, para toda distribución $G$ en la alternativa. En otros términos, la potencia de una prueba es la capacidad o sensibilidad que tiene la prueba para detectar cuando la hipótesis nula es falsa. Además, considerando que la probabilidad del error tipo II es $P(V \in R^c)$, $\forall G \in \wp_1$, se puede afirmar que la potencia de una prueba es uno menos la probabilidad del error tipo II.

En forma resumida se utilizará la misma notación para la estadística de prueba y para la prueba misma. En el caso anterior, por ejemplo, se hará referencia a la prueba $V$ para indicar la prueba $\varphi$ que utiliza la estadística $V$.

## 1.3. Función de potencia

**Definición 5.** Sea $\wp = \wp_0 \cup \wp_1$. Para todo $G \in \wp$, se define la función de potencia de la prueba $\pi$ por:

$$\pi(G, \varphi) = E_G(\varphi) = P(V \in R),$$

De esta manera la función de potencia contiene tanto al error tipo I como la potencia de la prueba, así:

$$\alpha = E_G(\varphi) = P(V \in R), \quad \forall G \in \wp_0$$

y

$$\pi(G, \varphi) = E_G(\varphi) = P(V \in R), \quad \forall G \in \wp_1 .$$

Para obtener la potencia de una prueba se necesita conocer la distribución de la estadística de prueba bajo la hipótesis alternativa; si ésta se desconoce no es posible construir la función de potencia. Como alternativa se puede recurrir al concepto de eficiencia relativa asintótica de dos pruebas que establece la relación entre los tamaños de muestra requeridos para que éstas alcancen la misma potencia, como veremos a continuación.

## 1.4. Eficiencia relativa de una prueba

El siguiente desarrollo sobre eficiencia asintótica fue presentado por Pitman en notas no publicadas de un curso de verano en Columbia en 1949 y publicadas por Noether(1955). Se define inicialmente, en esta sección, la eficiencia para el caso de muestras de tamaño finito, posteriormente se aborda el concepto de eficiencia relativa asintótica, el de eficacia, medida que permite, en muchos casos, calcular la eficiencia relativa asintótica, de manera más sencilla.

### 1.4.1. Eficiencia relativa para muestras de tamaño finito

**Definición 6.** Sean $V_n^{(i)}$, $i = 1,\ 2$, dos pruebas de tamaño $\alpha$ de $H_0 : \theta = 0$ versus $H_A : \theta > 0$ en una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de una distribución continua

$F(x-\theta)$, $F$ en $\Omega_0$. Para $\theta$ y $\beta$, $\alpha < \beta < 1$, sean $n^{(i)}$, $i = 1,\ 2$, los tamaños de muestra requeridos para que

$$P_{\theta,F}\left(V_n^{(i)} \geq k^{(i)}\right) = \beta,$$

entonces la eficiencia de $V_n^{(1)}$ relativa a $V_n^{(2)}$ es

$$e(V_n^{(1)}, V_n^{(2)}) = n^{(2)}/n^{(1)}$$

Por lo tanto, si por ejemplo $e(V_n^{(1)}, V_n^{(2)}) = 2$, entonces para obtener la misma potencia, $V_n^{(1)}$ requiere la mitad de observaciones que $V_n^{(2)}$ y por tanto $V_n^{(1)}$ es más eficiente que $V_n^{(2)}$.

Note que se necesita conocer la distribución de $V_n^{(i)}$, $i = 1,\ 2$, bajo la hipótesis alternativa para poder computar la eficiencia relativa de las pruebas. Se puede obviar el problema de buscar la distribución exacta si se trabaja con muestras grandes, pasando al problema de comparar dos pruebas consistentes [1], ambas con potencias que se acercan a uno.

### 1.4.2. Eficiencia relativa asintótica

**Definición 7.** Sean $V_n^{(i)}$, $i = 1,\ 2$, dos pruebas de tamaño $\alpha$ para $H_0 : \theta = 0$ versus $H_A : \theta > 0$ en una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de una distribución continua $F(x-\theta)$, $F$ en $\Omega_0$. Suponga que las pruebas son asintóticamente de tamaño $\alpha$, esto es,

$$P_{H_0}(V_n^{(i)} \geq k_n^{(i)}) \to \alpha, \qquad n \to \infty, \qquad i = 1,\ 2.$$

Para $\beta$ fijo y $\alpha < \beta < 1$ suponga $\{\theta_j\}$ una secuencia de alternativas que convergen a cero con la correspondiente secuencia de tamaños de muestra $\left\{n_j^{(i)}\right\}$ tales que

$$P_{\theta_j}\left(V_{n_j^{(i)}}^{(i)} \geq k_{n_j^{(i)}}^{(i)}\right) \to \beta, \qquad i = 1, 2.$$

En $\theta_j$, $n_j^{(2)}/n_j^{(1)}$ es la eficiencia relativa de $V^{(1)}$ relativa a $V^{(2)}$ y cuando el límite

$$e(V^{(1)}, V^{(2)}) = \lim_{j\to\infty} \frac{n_j^{(2)}}{n_j^{(1)}}$$

[1]En pruebas de hipótesis la consistencia significa que para cada valor del parámetro $\theta$ en la hipótesis alternativa, la potencia de la prueba converge a uno cuando $n$ crece ilimitadamente.

existe y es independiente de $\{\theta_j\}$, $\alpha$ y $\beta$, es llamado eficiencia relativa asintótica de $V^{(1)}$ relativa a $V^{(2)}$ y su valor mide la razón de los tamaños de muestra necesarios para alcanzar el mismo nivel y potencia para la alternativa alrededor de la hipótesis nula de las pruebas estadísticas.

**Ejemplo 1.** (Tomado de Hettmansperger (1984), página 64) Obtengamos la eficiencia relativa asintótica de la prueba del signo $S$ relativa a la prueba del rango signado de Wilcoxon $T$. Se puede mostrar que para la prueba $T$ se tiene una potencia aproximada dada por

$$\beta = 1 - \Phi(Z_\alpha - \sqrt{12} f^*(0)\theta\sqrt{n}) = 1 - \Phi(Z_\beta)$$

si $\beta$ se fijo con $\alpha < \beta < 1$ y donde $f^*(0) = \int f^2(x)dx$, $f$ es la función de densidad de la población de donde se toma la muestra, con distribución $F$ en $\Omega_S$. Entonces:

$$Z_\beta \doteq Z_\alpha - \sqrt{12} f^*(0)\theta\sqrt{n}.$$

Solucionando para $n$, se tiene

$$n_T \doteq \frac{(Z_\alpha - Z_\beta)^2}{\theta^2 12 f^*(0)} \tag{1.1}$$

Si la sucesión de alternativas es $\theta_j$ entonces $n_j$ puede definirse por (1.1).

Igualmente para la prueba $S$ se tiene que

$$n_S \doteq \frac{(Z_\alpha - Z_\beta)^2}{\theta^2 4 f(0)} \tag{1.2}$$

Por lo tanto, para los mismos valores de $\alpha$, $\beta$ y $\theta_j$, la razón de tamaños de muestras obtenidas a través de (1.1) y (1.2),

$$e(S,T) = \frac{n_T}{n_S} \doteq \frac{1}{3}\left(\frac{f(0)}{f^*(0)}\right)^2 \tag{1.3}$$

representa la eficiencia asintótica de la prueba del signo relativa a la prueba del rango signado de Wilcoxon. Si $f$ es la densidad de una distribución $\mathrm{N}(0,\sigma_f^2)$, se tiene que

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_f}$$

$$f^*(0) = \int f^2(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_f}$$

sustituyendo en (1.3), obtenemos $e(S,T) = \frac{2}{3}$. Es decir, cuando tomamos una muestra de una distribución normal con alternativas cercanas a la hipótesis nula, la prueba del rango signado de Wilcoxon requiere cerca de las $\frac{2}{3}$ partes de las observaciones requeridas en la prueba del signo para obtener la misma significancia y potencia. En consecuencia la prueba del rango signado es más eficiente que la del signo.

### 1.4.3. Eficacia de una prueba

Pitman (1948) proporciona las siguientes 5 condiciones de regularidad que permiten obtener la eficiencia más fácilmente.

Supongamos que $V_n$ es una estadística para probar $H_0 : \theta = 0$ versus $H_A : \theta > 0$ con región crítica $V_n \geq K_n$

1. La prueba con la estadística $V_n$ es consistente.
2. Existen sucesiones $\{\mu_n(\theta)\}$ y $\{\sigma_n(\theta)\}$ tales que
$$\frac{V_n - \mu_n(\theta)}{\sigma_n(\theta)} \xrightarrow{d} N(0,1)$$
uniformemente alrededor de $\theta = 0$.
3. $\frac{d}{d\theta}\mu_n(\theta)\Big|_{\theta=0} = \mu'(0)$ existe.
4. Si $\{\theta_n\}$ es una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(\theta_n)}{\sigma_n(0)} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n'(\theta_n)}{\mu_n'(0)} = 1.$$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu_n'(0)}{\sqrt{n}\sigma_n(0)} = c > 0$.

**Definición 8.** La cantidad $c$ de la quinta condición de Pitman es llamada la eficacia de la prueba basada en la estadística $V_n$.

Para $n$ grande, esta eficacia mide la tasa de cambio en unidades estándar de la media "asintótica" de $V_n$ sobre la hipótesis nula. Una prueba con eficacia $c$

relativamente grande responde rápidamente a las alternativas próximas a cero que implicaría esperar buenas propiedades de potencia local.

Las condiciones 3 y 4 de Pitman son las condiciones de ajuste sobre los parámetros de $V_n$ como funciones de $\theta$. A menudo, la estadística esta construida tal manera que $V_n \xrightarrow{P} \mu_\theta$ o $E_\theta(V_n) \to \mu(\theta)$ y $nVar(V_n) \to \sigma^2(\theta)$. Así que podemos tomar $\mu_n(\theta) = \mu(\theta)$ para todo $n$ y $\sigma_n(\theta) = \sigma(\theta)/\sqrt{n}$. Entonces en la condición 2 se tendría que

$$\frac{\sqrt{n}(V_n - \mu(\theta))}{\sigma(\theta)}$$

converge asintóticamente hacia $N(0,1)$ de forma uniforme en $\theta$ cercano a 0, y la eficacia es fácilmente computable mediante los parámetros asintóticos $\mu(\theta)$ y $\sigma(\theta)$ como

$$c = \frac{\mu'(0)}{\sigma(0)} \tag{1.4}$$

Las condiciones de la distribución asintótica están dadas por 1 y 2. la convergencia uniforme a la normalidad, condición 2, en una vecindad de la hipótesis nula requiere del teorema del límite central.

El siguiente teorema permite tener la eficacia relativa asintótica entre dos pruebas a partir de sus eficacias.

**Teorema 3.** Sean $Vn^{(i)}$, $i = 1, 2$, dos pruebas para $H_0 : \theta = 0$ versus $H_A : \theta > 0$. Suponga que ambas satisfacen las condiciones de regularidad de Pitman y además satisfacen las condiciones de la definición 7, entonces la eficiencia relativa asintótica de $V_n^{(1)}$ relativa a $V_n^{(2)}$ es

$$e(V_n^{(1)}, V_n^{(2)}) = \lim_{j\to\infty} \frac{n_j^{(2)}}{n_j^{(1)}} = \frac{c_1^2}{c_2^2} \tag{1.5}$$

donde $c_i$ es la eficacia de $V_n^{(i)}$, $i = 1,\ 2$ (ver demostración en Hettmansperger (1984) página 68).

**Ejemplo 2.** Sea $X_1, ....., X_n$ una muestra aleatoria de $F(x - \theta)$, $F$ en $\Omega_S$ y $f$ su densidad.

Las eficacias de las estadísticas de signos, de rangos signados y $t$ de student están dadas respectivamente por las siguientes expresiones [2]

$$c_S = 2f(0) \tag{1.6}$$

$$c_T = \sqrt{12} f^*(0) \tag{1.7}$$

$$c_t = \frac{1}{\sigma_f} \tag{1.8}$$

luego con base en el teorema 3, se tienen las siguientes eficiencias relativas asintóticas

$$e(S,T) = \frac{1}{3}\left(\frac{f(0)}{f^*(0)}\right)^2 \tag{1.9}$$

$$e(S,t) = 4\sigma_f^2 f^2(0) \tag{1.10}$$

$$e(T,t) = 12\sigma_f^2 (f^*(0))^2 \tag{1.11}$$

donde $\sigma_f^2$, es la varianza de la distribución muestreada $F$. Se puede mostrar que las anteriores eficiencias son de escala invariante, es decir independientes de $\sigma_f^2$.

Si la distribución muestreada es $N(0,\ \sigma_f^2)$ se tiene que

$$f(0) = \frac{1}{\sigma_f\sqrt{2\pi}} \quad \text{y} \quad f^*(0) = \int f^2(x)dx = \frac{1}{2\sigma_f\sqrt{\pi}}$$

reemplazando y simplificando en las expresiones (1.9), (1.10) y (1.12), se tiene

$$e(S,T) = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

$$e(S,t) = \frac{2}{\pi} = 0{,}637$$

$$e(T,t) = \frac{3}{\pi} = 0{,}955.$$

### 1.4.4. Eficiencia de estadísticas generales de puntajes

Como se ha visto, a partir del resultado del teorema 3, es posible calcular la eficiencia relativa asintótica de dos pruebas a través de las eficacias de las mismas.

[2]Ver Hettmansperger (1984) página 70.

El siguiente teorema permite obtener una expresión para calcular la eficacia de una prueba basada en una estadística general de puntajes.

**Teorema 4.** Sea $\bar{V}$ una estadística de puntajes generada por una función $\phi(\cdot)$ que cumple las propiedades de la definición 2. Entonces la eficacia de esta prueba está dada por

$$c = \frac{\mu'(0)}{\sigma(0)} = \frac{2\int_0^\infty \phi'(2F(x)-1)f^2(x)dx}{\sqrt{\frac{1}{4}\int_0^1 \phi^2(u)du}} \tag{1.12}$$

alternativamente:

$$c = \frac{\int_0^1 \phi(u)\phi_f(u)du}{\sqrt{\int_0^1 \phi^2(u)du}} \tag{1.13}$$

donde

$$\phi_f(u) = -\frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{u+1}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{u+1}{2}\right)\right)}$$

con $F$ en $\Omega_S$ distribución muestreada y $f$ su densidad.
(La demostración se puede observar en Hettmansperger (1984) pags. 104 a 106).

Las expresiones (1.12) y (1.13) se utilizan más adelante para calcular las eficacias de las estadísticas propuestas en el trabajo y en consecuencia las eficiencias relativas asintóticas correspondientes.

**Ejemplo 3.** Utilizando la expresión (1.13) obtengamos las eficacias de las estadísticas $\bar{S}$ y $\bar{T}$, formuladas a partir de la definición 2, cuando $\phi(u) = 1$ y $\phi(u) = u$, con $0 < u < 1$, respectivamente.

Para la estadística $\bar{S}$, haciendo $\phi(u) = 1$ en (1.13) se tiene

$$\begin{aligned} c_{\bar{S}} &= \frac{\int_0^1 \phi_f(u)du}{\sqrt{\int_0^1 du}} \\ &= \frac{-\int_0^1 \frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}du}{1} \\ &= -\int_0^1 \frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}du \end{aligned} \tag{1.14}$$

haciendo

$$t = f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right); \quad dt = \frac{1}{2}\frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}\,du$$

se tiene en (1.14)

$$c_{\bar{S}} = -2\int_a^b dt = -2t\big|_a^b = -2(b-a)$$

con

$$a = f\left(F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(0) \quad \text{y} \quad b = f(F^{-1}(1)) = 0$$

y así

$$c_{\bar{S}} = 2f(0).$$

Esta última expresión es equivalente a la eficacia de la estadística por la prueba de signos $S$ en (1.6).

Para la estadística $\bar{T}$, haciendo $\phi(u) = u$ en (1.13) se tiene

$$\begin{aligned}
c_{\bar{T}} &= \frac{\int_0^1 u\phi_f(u)du}{\sqrt{\int_0^1 u^2 du}} \\
&= \frac{-\int_0^1 u\frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}du}{\sqrt{\frac{u^3}{3}\Big|_0^1}} \\
&= -\sqrt{3}\int_0^1 u\frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}du \\
&= -\sqrt{3}I
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Integrando por partes: $I = \int_0^1 u\frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}du$,
haciendo

$$t = u \quad ; \quad dv = \frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}du$$

y

$$dt = du \quad ; \quad v = 2f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)$$

se obtiene

$$
\begin{aligned}
I &= u\left(2f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)\right)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)du \\
&= (2f(F^{-1}(1)) - 0) - 2\int_0^1 f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)du \\
&= 0 - 2\int_0^1 f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)du \\
&= -2\int_0^1 f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)du
\end{aligned}
$$

si

$$x = F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)$$

o de manera equivalente, si

$$u = 2F(x) - 1$$

entonces

$$du = 2f(x)dx$$

reemplazando para $I$, se tiene

$$
\begin{aligned}
I &= -2\int_0^{\infty} f(x)(2f(x)dx) \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx
\end{aligned}
$$

sustituyendo en (1.15)

$$
\begin{aligned}
c_{\bar{T}} &= \sqrt{12}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx \\
&= \sqrt{12}f^*(0).
\end{aligned}
$$

La última expresión es equivalente a la eficacia de la estadística para la prueba de rangos signados $T$ en (1.7).

## 1.5. Distribución Lambda Generalizada ($DLG$)

La Distribución Lambda Generalizada que se denota con $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ es una familia de distribuciones donde la inversa de una función de distribución $F$ o función percentil está dada por

$$\begin{aligned} Q(y) &= F^{-1}(y) \\ &= F^{-1}(y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \\ &= \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \end{aligned} \tag{1.16}$$

con $\lambda_2 \neq 0$, $0 \leq y \leq 1$; $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ son parámetros de localización, escala, sesgo y curtósis respectivamente.

Aunque la función de distribución $F$ no se puede obtener de forma explícita, la función de densidad de probabilidad $f$, se deduce de la siguiente manera:

Si suponemos que $y = F(x)$ entonces $x = F^{-1}(y)$ y derivando con respecto a $x$ resulta que

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

o bien

$$dx = d(F^{-1}(y)).$$

Obteniendo la derivada de la función inversa de $F$ resulta

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{dy}{d(F^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{\frac{d(F^{-1}(y))}{dy}} \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_3(y^{\lambda_3 - 1}) + \lambda_4(1-y)^{\lambda_4 - 1}} \end{aligned}$$

en $x = F^{-1}(y)$, además $dy = f(x)dx$, con lo cual

$$dy = f(F^{-1}(y))d(F^{-1}(y)).$$

### 1.5.1. El espacio de parámetros de la $DLG$

La expresión (1.16) no siempre especifica una distribución válida. Para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad se debe cumplir que:

1. $f(x) \geq 0$, es decir

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}} \geq 0$$

   con $x = F^{-1}(y)$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, es decir $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(F^{-1}(y))d(F^{-1}(y)) = 1$.

| REGIÓN | $(\lambda_3, \lambda_4)$ |
|---|---|
| $R_1$ | $\lambda_3 \leq -1,\ \lambda_4 \geq 1$ |
| $R_2$ | $\lambda_3 \geq 1,\ \lambda_4 \leq -1$ |
| $R_3$ | $\lambda_3 \geq 0,\ \lambda_4 \geq 0$ |
| $R_4$ | $\lambda_3 \leq 0,\ \lambda_4 \leq 0$ |
| $R_5$ | $\frac{(1-\lambda_3)^{(1-\lambda_3)}}{(\lambda_4-\lambda_3)^{(\lambda_4-\lambda_3)}}(\lambda_4 - 1)^{(\lambda_4 - 1)} \leq -\frac{\lambda_3}{\lambda_4}$ |
| $R_6$ | $\frac{(1-\lambda_4)^{(1-\lambda_4)}}{(\lambda_3-\lambda_4)^{(\lambda_3-\lambda_4)}}(\lambda_3 - 1)^{(\lambda_3 - 1)} \leq -\frac{\lambda_4}{\lambda_3}$ |

Tabla 1.1: Regiones $(\lambda_3,\ \lambda_4)$ donde la $DLG$ es válida.

Por lo tanto es conveniente establecer cuál es el espacio de parámetros de la distribución $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ que satisface las dos propiedades anteriores.

Para que se cumpla la primera propiedad, por ejemplo, es necesario que $\lambda_2$ y $g(y, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}$ tengan el mismo signo.

Karian y Dudewickz (2000) dedujeron el conjunto de regiones en el plano $(\lambda_3, \lambda_4)$ en el que la distribución $DLG$ es válida y el cual se resume en la Tabla 1.1 y se muestra en la Figura 1.1.

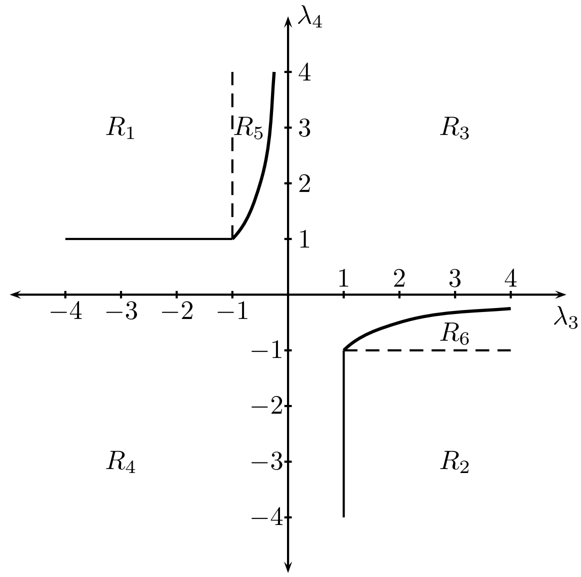


Figura 1.1: Regiones $(\lambda_3,\ \lambda_4)$ donde $DLG$ es válida.

### 1.5.2. Momentos de la $DLG$

Los cuatro primeros momentos (media, varianza, simetría y curtósis, respectivamente) de una variable aleatoria $X$ con $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ están dados por las siguientes expresiones [3]

$$\alpha_1 = \mu = E(X) = \lambda_1 + \frac{A}{\lambda_2}$$

$$\alpha_2 = \sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \frac{B-A}{\lambda_2^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{C - 3AB + 2A^3}{\lambda_2^3 \sigma^3}$$

[3]Ver Karian y Dudewicz (2000), páginas 45 y 46.

$$\alpha_4 = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = \frac{D - 4AC + 6A^2B - 3A^4}{\lambda_2^4\sigma^4}$$

donde

$$A = \frac{1}{1+\lambda_3} - \frac{1}{1+\lambda_4}$$

$$B = \frac{1}{1+2\lambda_3} + \frac{1}{1+2\lambda_4} - 2\beta(1+\lambda_3, 1+\lambda_4)$$

$$C = \frac{1}{1+3\lambda_3} - \frac{1}{1+3\lambda_4} - 3\beta(1+2\lambda_3, 1+\lambda_4) + 3\beta(1+\lambda_3, 1+2\lambda_4)$$

$$D = \frac{1}{1+4\lambda_3} + \frac{1}{1+4\lambda_4} - 4\beta(1+3\lambda_3, 1+\lambda_4) + 6\beta(1+2\lambda_3, 1+2\lambda_4) \\ - 4\beta(1+\lambda_3, 1+3\lambda_4)$$

$\beta$ hace referencia a la función Beta, la cual está dada por

$$\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, \qquad a,b > 0.$$

Como se observa en las expresiones anteriores la evaluación de los momentos está condicionada a los valores de los lambda que, para el caso, se tendría $\lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_3,\ \lambda_4 > -1$.

Se puede probar además que el momento $k$–ésimo de $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ existe, si y sólo si, $\lambda_3 > -\frac{1}{k}$ y $\lambda_4 > -\frac{1}{k}$ [4]. Así por ejemplo, para que exista la varianza $\lambda_3 > -\frac{1}{2}$ y $\lambda_4 > -\frac{1}{2}$, igualmente para que exista la curtósis $\lambda_3 > -\frac{1}{4}$ y $\lambda_4 > -\frac{1}{4}$.

En el caso particular de que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_3 = \lambda_4$, se tiene que:

$$A = 0$$

$$B = \frac{2}{1+2\lambda_4} - 2\beta(1+\lambda_4, 1+\lambda_4)$$

$$C = 0$$

[4] Ibid.

$$D = \frac{2}{1+4\lambda_4} - 8\beta(1+3\lambda_4, 1+\lambda_4) + 6\beta(1+2\lambda_4, 1+2\lambda_4)$$

y así:

$$\alpha_1 = \mu = 0 \tag{1.17}$$

$$\alpha_2 = \sigma^2 = \frac{B}{\lambda_2^2} = \frac{2}{\lambda_2^2}\left(\frac{1}{1+2\lambda_4} - \beta(1+\lambda_4, 1+\lambda_4)\right) \tag{1.18}$$

$$\alpha_3 = 0 \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4 = \frac{D}{\lambda_2^4\sigma^4} = \frac{1}{\lambda_2^4\sigma^4}\Bigg(\frac{2}{1+4\lambda_4} &- 8\beta(1+3\lambda_4, 1+\lambda_4) \\ &6\beta(1+2\lambda_4, 1+2\lambda_4)\Bigg)\end{aligned} \tag{1.20}$$

En las expresiones anteriores, $\alpha_2 = \sigma^2$ existe, si $\lambda_4 > -\frac{1}{2}$, e igualmente, $\alpha_4$ existe, si $\lambda_4 > -\frac{1}{4}$.

Además de (1.18), se obtiene

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sigma}\,\text{signo}(\lambda_4)\sqrt{B} = \frac{1}{\sigma}g(\lambda_4) \tag{1.21}$$

En consecuencia la curtósis de una $DLG$ con parámetros $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, se obtiene con

$$\alpha_4 = \frac{D}{B^2}, \tag{1.22}$$

donde

$$D = \frac{2}{1+4\lambda_4} - 8\beta(1+3\lambda_4, 1+\lambda_4) + 6\beta(1+2\lambda_4, 1+2\lambda_4)$$

y

$$B = \frac{2}{1+2\lambda_4} - 2\beta(1+\lambda_4, 1+\lambda_4),$$

valores que dependen solamente de $\lambda_4$.

Las expresiones (1.21) y (1.22) se utilizan en el capítulo 3 para la generación de algunas pruebas de puntajes.

## 1.6. Un lema sobre la simetría de una distribución

Comúnmente para que una distribución $F$ sea simétrica alrededor de $\theta = 0$ se requiere que $f(x) = f(-x)$ o equivalentemente cuando $F(-x) = 1 - F(x)$. Sin embargo a partir de la función percentil $F^{-1}$, el hecho que $F^{-1}(y) = -F^{-1}(1-y)$ para todo $0 < y < 1$, permite determinar si una distribución es simétrica, como se enuncia en el siguiente lema, tomado de Corzo y Aranda (2002), pág. 557.

**Lema 1.** Si $F$ es una distribución biyectiva y $F^{-1}(y) = -F^{-1}(1-y)$ para todo $0 < y < 1$, entonces $F \in \Omega_s$.

Si consideramos el caso especial de parámetros $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_3 = \lambda_4$ en una $DLG$, se tiene que

$$F^{-1}(y) = \frac{y^{\lambda_4} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2} = -\frac{(1-y)^{\lambda_4} - y^{\lambda_4}}{\lambda_2} = -F^{-1}(1-y)$$

entonces por el lema 1, $F$ es simétrica.

# Capítulo 2

# Estadística de Puntajes con Función Percentil $DLG$ como Función Generatriz

En el primer capítulo se han tratado los elementos teóricos necesarios para construir la estadística de puntajes de la prueba que se propone en este trabajo. En este capítulo, se introduce la anterior estadística propuesta, estableciendo los requisitos que ésta debe cumplir para que esté bien definida. Igualmente se determinan su valor esperado y la varianza asintóticas bajo la hipótesis nula $H_0$, con las cuales se establece la normalidad asintótica de la misma.

## 2.1. Función de puntajes a partir de la función percentil de la $DLG$

Como se mencionó al principio del trabajo, se pretende construir una prueba de localización para una muestra, basada en una estadística equivalente a la propuesta por Fraser (1957), como en la definición (3), tomando la función percentil de una $DLG$ como función generatriz de la estadística de puntajes $\phi(\cdot)$.

Fraser propone como función generatriz $\phi(u) = \Phi_+^{-1}(u)$, $0 < u < 1$, donde $u = \Phi_+(x) = P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.

De manera análoga se propone una función de puntajes basada en la función percentil $DLG$, así:

$$\phi(u) = F_+^{-1}(u) \tag{2.1}$$

donde

$$F_+(x) = P(|X| \leq x) = F(x) - F(-x) = 2F(x) - 1 \tag{2.2}$$

siendo $F^{-1}$ la función percentil de una $DLG$ simétrica, lo que garantiza que se cumpla (2.2).

Como se observó al final del capítulo anterior $F$ es simétrica cuando $\lambda_3 = \lambda_4$, además sin pérdida de generalidad se tomará $\lambda_3 = 0$.

Bajo las condiciones anteriores se construye la estadística propuesta con

$$F^{-1}(y) = \frac{y^{\lambda_4} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

De (2.2) se tiene $x = F_+^{-1}(2F(x) - 1)$ y haciendo $u = 2F(x) - 1$, se obtiene $x = F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)$, lo que implica que $F_+^{-1}(u) = F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)$

En consecuencia la función de puntajes propuesta en (2.1) tiene la forma

$$\phi(u) = F_+^{-1}(u) = F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right) = \frac{(1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}}{\lambda_2 2^{\lambda_4}}, \quad 0 < u < 1 \tag{2.3}$$

con $\lambda_2 \neq 0$, $0 < u < 1$.

La función (2.3) debe cumplir las propiedades de una función de puntajes enunciadas en la definición (2), además de las condiciones establecidas en la sección (1.5.1) para los cuatro parámetros de la $DLG$. Por tanto es conveniente estudiar cada una de ellas como se procede a continuación.

## 2.2. Condiciones para la función de puntajes propuesta

En esta sección se determinan las condiciones de los parámetros $\lambda_2$ y $\lambda_4$ para que la $DLG$ sea válida como distribución y simultáneamente la función $\phi(u)$ cumpla con las propiedades establecidas para una función generatriz de puntajes dadas en la definición (2).

### 2.2.1. Condiciones para que la $DLG$ sea una distribución válida

Como se señaló en la sección (1.5.1), una condición para que la $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ especifique una distribución válida es que $g(y, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}$ tenga el mismo signo que $\lambda_2$ para todo $y \in [0,1]$. Como la función de puntajes se propone bajo la condición de que $\lambda_3 = \lambda_4$, se tiene

$$\begin{aligned} g(y, \lambda_3, \lambda_4) &= \lambda_4 y^{\lambda_4 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1} \\ &= \lambda_4 \left( y^{\lambda_4 - 1} + (1-y)^{\lambda_4 - 1} \right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

En la expresión (2.4) el segundo factor del miembro de la derecha $\left( y^{\lambda_4 - 1} + (1-y)^{\lambda_4 - 1} \right)$ es siempre positivo para todo $y \in [0,1]$, entonces $\lambda_4$ debe tener el mismo signo que $g(y, \lambda_3, \lambda_4)$ y en consecuencia el mismo signo que $\lambda_2$.

De otra parte en la tabla 1.1 se presentan las regiones en el plano $(\lambda_3, \lambda_4)$ en los que la distribución $DLG$ es válida. Bajo las condiciones de simetría establecidas para la construcción de la función de puntajes (v. g. $\lambda_3 = \lambda_4$) se observa que las regiones que cumplen con esta condición serían únicamente $R_3$ y $R_4$.

### 2.2.2. Crecimiento y no negatividad de $\phi(u)$

En la definición (2) de la sección (1.1.2), se establece que $\phi(u)$ debe ser no negativa y no decreciente, por lo cual es necesario obtener las condiciones para las cuales la función de puntajes propuesta cumpla con estas propiedades.

Establecemos primero las condiciones para que $\phi(u)$ sea no negativa. De (2.3) se tiene

$$\phi(u) = \frac{(1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}}{2^{\lambda_4} \lambda_2} = \left( \frac{1}{2^{\lambda_4}} \right) \left( \frac{(1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \right) \tag{2.5}$$

expresión que es no negativa cuando $(1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}$ y $\lambda_2$ tienen el mismo signo. Para establecer lo anterior, observe que como $0 < u < 1$, entonces $1 + u > 1 - u$ y por lo tanto:

$$\frac{1+u}{1-u} > 1.$$

Se consideran dos situaciones:

1. Cuando $\lambda_4 \geq 0$. Entonces

$$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\lambda_4} \geq 1$$

y por tanto

$$(1+u)^{\lambda_4} \geq (1-u)^{\lambda_4}$$

luego

$$(1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4} \geq 0$$

razón por la que $\lambda_2$ tiene que ser mayor que cero.

2. Cuando $\lambda_4 < 0$, se cumple

$$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\lambda_4} < 1$$

luego

$$(1+u)^{\lambda_4} < (1-u)^{\lambda_4}$$

y

$$(1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4} < 0$$

por tanto, $\lambda_2$ debe ser menor que cero también.

Es decir, para que $\phi(u)$ sea no negativa, $\lambda_2$ y $\lambda_4$ deben tener el mismo signo, situación que es consistente con lo obtenido en la sección (2.2.1) anterior.

De otra parte una función es no decreciente si su primera derivada es no negativa. Entonces encontramos $\phi'(u)$ de la función de puntajes propuesta y establecemos las condiciones de $\lambda_2$ y $\lambda_4$ para que $\phi(u)$ sea no decreciente.

Así derivando la expresión de la función de puntajes dada en (2.5) se tiene

$$\begin{aligned}\phi'(u) &= \frac{1}{2^{\lambda_4}}\left(\frac{\lambda_4(1+u)^{\lambda_4-1}+\lambda_4(1-u)^{\lambda_4-1}}{\lambda_2}\right)\\ &= \frac{\lambda_4}{\lambda_2}\left(\frac{(1+u)^{\lambda_4-1}+(1-u)^{\lambda_4-1}}{2^{\lambda_4}}\right)\end{aligned} \tag{2.6}$$

Como el segundo factor del miembro de la derecha en la expresión (2.6) siempre es positiva puesto que $0 < u < 1$, entonces dicha expresión es no negativa siempre y cuando $\lambda_2$ y $\lambda_4$ tengan el mismo signo, lo cual es igualmente compatible con las condiciones anteriormente establecidas.

### 2.2.3. Integrales de $\phi(u)$ y $\phi^2(u)$

Otras propiedades establecidas en la definición (2) para la función de puntajes $\phi(u)$ son

$$\int_0^1 \phi(u)du < \infty \qquad \text{y} \qquad 0 < \int_0^1 \phi^2(u)du < \infty$$

las cuales se analizan a continuación.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi(u)du &= \int_0^1 \frac{1}{2^{\lambda_4}\lambda_2}\left((1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}\right) du \\
&= \frac{1}{2^{\lambda_4}\lambda_2}\left(\int_0^1 (1+u)^{\lambda_4} du - \int_0^1 (1-u)^{\lambda_4} du\right) \\
&= \frac{1}{2^{\lambda_4}\lambda_2}\left(\left.\frac{(1+u)^{\lambda_4+1}}{\lambda_4+1}\right|_0^1 + \left.\frac{(1-u)^{\lambda_4+1}}{\lambda_4+1}\right|_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2^{\lambda_4}\lambda_2}\left(\frac{2^{\lambda_4+1}-1}{\lambda_4+1} + \frac{0-1}{\lambda_4+1}\right) = \frac{1}{2^{\lambda_4}\lambda_2}\left(\frac{2^{\lambda_4+1}-2}{\lambda_4+1}\right) \\
&= \frac{2^{\lambda_4}-1}{2^{\lambda_4-1}\lambda_2(\lambda_4+1)} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

y para que la expresión (2.7) exista se requiere que $\lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_4 \neq -1$.

De otra parte

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \phi^2(u)\,du &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2^{\lambda_4}\lambda_2}\left((1+u)^{\lambda_4}-(1-u)^{\lambda_4}\right)\right)^2\,du \\
&= \frac{1}{2^{2\lambda_4}\lambda_2^2}\int_0^1 \left((1+u)^{2\lambda_4}-2(1+u)^{\lambda_4}(1-u)^{\lambda_4}+(1-u)^{2\lambda_4}\right)du \\
&= \frac{1}{2^{2\lambda_4}\lambda_2^2}\left(\int_0^1 (1+u)^{2\lambda_4}\,du+\int_0^1 (1-u)^{2\lambda_4}\,du\right. \\
&\qquad\qquad\left. -2\int_0^1 (1+u)^{\lambda_4}(1-u)^{\lambda_4}du\right) \\
&= \frac{1}{2^{2\lambda_4}\lambda_2^2}\left(I_1+I_2-2I_3\right) \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (1+u)^{2\lambda_4}du \\
&= \left.\frac{1}{2\lambda_4+1}(1+u)^{2\lambda_4+1}\right|_0^1 \\
&= \frac{1}{2\lambda_4+1}(2^{2\lambda_4+1}-1) \\
&= \frac{2^{2\lambda_4+1}-1}{2\lambda_4+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 (1-u)^{2\lambda_4}du \\
&= \left.-\frac{1}{2\lambda_4+1}(1-u)^{2\lambda_4+1}\right|_0^1 \\
&= -\frac{1}{2\lambda_4+1}(0-1) \\
&= \frac{1}{2\lambda_4+1}
\end{aligned}
$$

$$
I_3 = \int_0^1 (1+u)^{\lambda_4}(1-u)^{\lambda_4}du = \int_0^1 (1-u^2)^{\lambda_4}
$$

Para obtener $I_3$ nos basamos en el resultado obtenido en RainVille (1960, pág. 31) para evaluar la siguiente integral

$$\int_{-1}^{1}(1+u)^{p-1}(1-u)^{q-1}du = 2^{p+q-1}\beta(p,q)$$

donde

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

haciendo $p-1=q-1=\lambda_4$ o de forma equivalente $p=q=1+\lambda_4$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1+u)^{p-1}(1-u)^{q-1}du &= \int_{-1}^{1}(1+u)^{\lambda_4}(1-u)^{\lambda_4}du \\ &= \int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\lambda_4}du \\ &= 2\int_{0}^{1}(1-u^2)^{\lambda_4}du \\ &= 2^{2\lambda_4+1}\beta(1+\lambda_4,1+\lambda_4)\end{aligned}$$

de lo anterior se concluye que

$$I_3 = 2^{2\lambda_4}\beta(1+\lambda_4,1+\lambda_4)$$

Reemplazando los valores de $I_1$, $I_2$ y $I_3$ en (2.8) se consigue:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\phi^2(u)du &= \frac{1}{2^{2\lambda_4}\lambda_2^2}\left(\frac{2^{2\lambda_4+1}-1}{2\lambda_4+1}+\frac{1}{2\lambda_4+1}-2\left(2^{2\lambda_4}\beta(1+\lambda_4,1+\lambda_4)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^{2\lambda_4}\lambda_2^2}\left(\frac{2^{2\lambda_4+1}}{2\lambda_4+1}-2^{2\lambda_4+1}\beta(1+\lambda_4,1+\lambda_4)\right) \\ &= \frac{2^{2\lambda_4+1}}{2^{2\lambda_4}\lambda_2^2}\left(\frac{1}{2\lambda_4+1}-\beta(1+\lambda_4,1+\lambda_4)\right) \\ &= \frac{2}{\lambda_2^2}\left(\frac{1}{2\lambda_4+1}-\beta(1+\lambda_4,1+\lambda_4)\right)\end{aligned}$$

y luego, de la expresión (1.18) se tiene

$$\int_{0}^{1}\phi^2(u)du = \frac{2}{\lambda_2^2}\left(\frac{1}{2\lambda_4+1}-\beta(1+\lambda_4,1+\lambda_4)\right) = \sigma^2 \tag{2.9}$$

donde $\sigma^2$ es la varianza de la $DLG$.

La expresión (2.9) existe siempre y cuando $\lambda_2 \neq 0$ y además, para que exista $\sigma^2$, $\lambda_4 > -\frac{1}{2}$, pues como se estableció en la sección (1.5.2). el $k$-ésimo momento de una $DLG(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4)$ existe, si y sólo si, $\lambda_3 > -1/k$ y $\lambda_4 > -1/k$. También para que la misma expresión sea estrictamente positiva, es necesario que $\lambda_4 \neq 0$.

En resumen, las condiciones para los parámetros $\lambda_2$ y $\lambda_4$, bajo las cuales la $DLG$ es válida como distribución y la función de puntajes propuesta $\phi(u)$ cumple las propiedades de la definición (2), son las siguientes:

$$\begin{gathered}\lambda_2,\ \lambda_4 \text{ tienen el mismo signo}\\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_4 \neq -1,\ \lambda_4 > -\tfrac{1}{2},\ \lambda_4 \neq 0\end{gathered}$$

Luego valores $\lambda_2, \lambda_4 \neq 0$, con $\lambda_4 > -\frac{1}{2}$ y la condición de que estos parámetros tengan el mismo signo, nos proporcionan funciones $\phi(u)$ de puntajes, obtenidas a partir de la función percentil de una $DLG$.

## 2.3. Propiedades de la Estadística de Puntajes Lambda Generalizada

Con base en los resultados anteriores la estadística de puntajes lambda generalizada propuesta quedaría definida de la siguiente manera:

**Definición 9.** Sea $F$ una función de distribución lambda generalizada $DLG(0, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_4)$ y sea $F_+(x) = 2F(x) - 1 = P(|X| \leq x)$. Si en la estadística $\bar{V}$ de la definición 2, tomamos como función de puntajes a $\phi(u) = F_+^{-1}(u) = F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right) = \frac{(1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}}{2^{\lambda_4}\lambda_2}$, donde $0 < u < 1$ y con $\lambda_2, \lambda_4 \neq 0$, $\lambda_4 > -\frac{1}{2}$ y del mismo signo, entonces se define

$$\bar{V}_\lambda = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_+^{-1}\left(\frac{R_j^+}{n+1}\right) s\left(X_j\right) \tag{2.10}$$

como la estadística de puntajes lambda generalizada.

Aplicando el teorema 2 del capítulo anterior a $\bar{V}_\lambda$, como se definió en (2.10), bajo la hipótesis nula se obtiene que:

$$E(\bar{V}_\lambda) \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(u)du = \frac{2^{\lambda_4}-1}{2^{\lambda_4}\lambda_2(\lambda_4+1)}$$

$$n \text{ Var}(\bar{V}_\lambda) \rightarrow \frac{1}{4}\int_0^1 \phi^2(u)du = \frac{1}{4}\ \sigma^2$$

y que

$$\frac{\bar{V}_\lambda - E(\bar{V}_\lambda)}{\sqrt{Var(\bar{V}_\lambda)}},$$

converge a la distribución normal estándar.

# Capítulo 3

# Resultados

En este capítulo se presentan algunas propiedades de la eficacia y la eficiencia de varias pruebas basadas en la estadística de puntajes lambda generalizada definida en (2.10). También se presentan los resultados numéricos del cálculo de las Eficiencias Relativas Asintóticas (ERAs) de algunas de estas pruebas, comparadas entre ellas y comparadas con las pruebas del signo, del rango signado de Wilcoxon y $t$–student.

## 3.1. Eficacias y eficiencias relativas asintóticas

Como se mencionó la ERA es una medida de calidad de las pruebas de hipótesis estadísticas, que compara dos pruebas mediante la relación de los tamaños de muestra requeridos en dichas pruebas para alcanzar la misma potencia. Cuando el valor de la ERA, e($V^{(1)}$, $V^{(2)}$) es mayor que la unidad se concluye que cuando las dos pruebas alcanzan la misma potencia, la prueba $V^{(1)}$ requiere un tamaño de muestra menor que la prueba $V^{(2)}$ y por lo tanto, resulta más eficiente. Cuando e($V^{(1)}$, $V^{(2)}$) es igual a uno, se tendrían eficiencias equivalentes y si e($V^{(1)}$, $V^{(2)}$) es menor a uno, la prueba $V^{(1)}$ es menos eficiente que la prueba $V^{(2)}$. El cálculo de la ERA de $V^{(1)}$ relativa a $V^{(2)}$ se hace a partir de la expresión (1.5) obtenida en el teorema 3 del primer capítulo:

$$e(V^{(1)}, V^{(2)}) = \lim_{j\to\infty} \frac{n_j^{(2)}}{n_j^{(1)}} = \frac{c_1^2}{c_2^2}$$

donde $c_i$ es la eficacia de $V^{(i)}$, $i = 1,\ 2$. Como se mencionó en el comentario a la definición (8), la eficacia mide la tasa de cambio en unidades estándar de la media "asintótica" de $V$ sobre la hipótesis nula. Una prueba con eficacia $c$ relativamente grande responde rápidamente a las alternativas próximas a cero, lo que implicaría esperar buenas propiedades de potencia local.

A continuación se obtienen expresiones para la eficacia de las pruebas de puntajes lambda generalizados $\bar{V}_\lambda$, así como para las pruebas del signo y del rango signado, expresando la densidad poblacional $f$ a partir de una $DLG$. Igualmente se desarrollan algunas propiedades de esta medida y de las $ERAs$ correspondientes, a través de los siguientes teoremas y corolarios, con sus correspondientes pruebas.

**Teorema 5.** Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con función de distribución continua $F(x-\theta)$, $F \in \omega_s$, si utilizamos una aproximación $DLG$ de $F$ entonces $\bar{V}_\lambda$ tiene eficacia

$$c = \frac{2^{\lambda_4'-\lambda_4}\lambda_4 g(\lambda_4')}{\sigma_f \lambda_4' g(\lambda_4)} \int_0^1 \frac{(1+u)^{\lambda_4-1}+(1-u)^{\lambda_4-1}}{(1+u)^{\lambda_4'-1}+(1-u)^{\lambda_4'-1}} du$$

donde:

$$g(\lambda_4) = \text{signo}(\lambda_4)\sqrt{\frac{2}{1+2\lambda_4} - 2\beta(1+\lambda_4, 1+\lambda_4)},$$

y $\lambda_4$, $\lambda_4'$ son parámetros de la $DLG$ de la función de puntajes y de la distribución muestreada $F$ respectivamente; $\sigma_f$ desviación estándar de $F$; además $g(\lambda_4')$ se obtiene de manera similar a $g(\lambda_4)$, como en la última la expresión.

Alternativamente:

$$c = \frac{(\lambda_4'-1)2^{\lambda_4'-\lambda_4} g(\lambda_4')}{\sigma_f g(\lambda_4)\lambda_4'} \int_0^1 \frac{\left((1+u)^{\lambda_4}-(1-u)^{\lambda_4}\right)\left((1+u)^{\lambda_4'-2}-(1-u)^{\lambda_4'-2}\right)}{\left((1+u)^{\lambda_4'-1}+(1-u)^{\lambda_4'-1}\right)^2} du$$

**Demostración.** La eficacia de una estadística de puntajes generales con función generatriz $\phi(.)$, según el teorema 4, se puede obtener a partir de la expresión (1.12):

$$c = \frac{2\int_0^\infty \phi'(2F(x)-1)f^2(x)dx}{\sqrt{\frac{1}{4}\int_0^1 \phi^2(u)du}}$$

donde $f$, $F$ son la función de la densidad y la distribución muestreada.

Haciendo $u = 2F(x) - 1$, en la expresión anterior, se obtiene $du = 2f(x)dx$ y $x = F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)$ y según (2.9) se cumple $\int_0^1 \phi^2(u)du = \sigma^2$, obteniéndose

$$c = \frac{2}{\sigma}\int_0^1 \phi'(u) f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right) du \tag{3.1}$$

Si la función de puntajes $\bar{V}_\lambda$ esta dada por

$$\phi(u) = \frac{1}{2^{\lambda_4}\lambda_2}\left((1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}\right),$$

entonces

$$\phi'(u) = \frac{\lambda_4}{\lambda_2 2^{\lambda_4}}\left((1+u)^{\lambda_4 - 1} + (1-u)^{\lambda_4 - 1}\right)$$

Expresando, por una parte, la función de densidad de la distribución muestreada en términos de los parámetros $DLG$, $\lambda_2'$ y $\lambda_4'$:

$$\begin{aligned} f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right) &= \frac{\lambda_2'}{\lambda_4'\left(\frac{1+u}{2}\right)^{\lambda_4'-1} + \lambda_4'\left(\frac{1-u}{2}\right)^{\lambda_4'-1}} \\ &= \frac{2^{\lambda_4'-1}\lambda_2'}{\lambda_4'}\left(\frac{1}{(1+u)^{\lambda_4'-1} + (1-u)^{\lambda_4'-1}}\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

y por otra parte, los valores de $\lambda_2$ y $\lambda_2'$ de la función de puntajes $\phi(\cdot)$ y de la distribución muestreada $F$, usando (1.21), se pueden expresar por:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sigma} g(\lambda_4),$$

$$\lambda_2' = \frac{1}{\sigma_f} g(\lambda_4'),$$

donde $g(\lambda_4)$ y $g(\lambda_4')$ se obtienen mediante la expresión

$$g(\lambda_4) = \text{signo}(\lambda_4)\sqrt{\frac{2}{1+2\lambda_4} - 2\beta(1+\lambda_4, 1+\lambda_4)}$$

Al reemplazar en (3.1) los resultados anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned}
c &= \left(\frac{2}{\sigma}\right)\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_2 2^{\lambda_4}}\right)\left(\frac{2^{\lambda_4'-1}\lambda_2'}{\lambda_4'}\right)\int_0^1 \frac{(1+u)^{\lambda_4-1}+(1-u)^{\lambda_4-1}}{(1+u)^{\lambda_4'-1}+(1-u)^{\lambda_4'-1}}du \\
&= \frac{2^{\lambda_4'-\lambda_4}\lambda_4\lambda_2'}{\sigma\lambda_2\lambda_4'}\int_0^1 \frac{(1+u)^{\lambda_4-1}+(1-u)^{\lambda_4-1}}{(1+u)^{\lambda_4'-1}+(1-u)^{\lambda_4'-1}}du
\end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$c = \frac{2^{\lambda_4'-\lambda_4}\lambda_4 g(\lambda_4')}{\sigma_f\lambda_4' g(\lambda_4)}\int_0^1 \frac{(1+u)^{\lambda_4-1}+(1-u)^{\lambda_4-1}}{(1+u)^{\lambda_4'-1}+(1-u)^{\lambda_4'-1}}du \tag{3.3}$$

Igualmente del teorema 4, la eficacia está dada también por la expresión (1.13):

$$c = \frac{\int_0^1 \phi(u)\phi_f(u)du}{\sqrt{\int_0^1 \phi^2(u)du}}$$

donde

$$\phi_f(u) = -\frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)}$$

Expresando la función de densidad $f$ a partir de una $DLG$ como en (3.2), se tiene que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda_2'}{\lambda_4'\left(\frac{1+u}{2}\right)^{\lambda_4'-1}+\lambda_4'\left(\frac{1-u}{2}\right)^{\lambda_4'-1}}\right) \quad \text{con} \quad x = F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right) \\
&= -\frac{2\lambda_2'\lambda_4'\left(\lambda_4'-1\right)\left(\left(\frac{1+u}{2}\right)^{\lambda_4'-2}-\left(\frac{1-u}{2}\right)^{\lambda_4'-2}\right)\frac{d\left(\frac{1+u}{2}\right)}{dx}}{\left(\lambda_4'\left(\frac{1+u}{2}\right)^{\lambda_4'-1}+\lambda_4'\left(\frac{1-u}{2}\right)^{\lambda_4'-1}\right)^2} \quad \text{con} \quad x = F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right) \\
&= -\frac{2\lambda_2'\lambda_4'\left(\lambda_4'-1\right)2^{2\lambda_4'-2}\left((1+u)^{\lambda_4'-2}-(1-u)^{\lambda_4'-2}\right)f(x)}{\lambda_4' 2^{\lambda_4'-2}\left((1+u)^{\lambda_4'-1}+(1-u)^{\lambda_4'-1}\right)^2} \quad \text{con} \quad x = F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)
\end{aligned}$$

puesto que, si $x = F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)$, entonces $F(x) = \left(\frac{1+u}{2}\right)$ y como $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ entonces $f(x)dx = d\left(\frac{1+u}{2}\right)$ y en consecuencia $\frac{d\left(\frac{1+u}{2}\right)}{dx} = f(x)$.

Entonces:

$$f'(x) = -\frac{\lambda_2' \left(\lambda_4' - 1\right) 2^{2\lambda_4'} \left((1+u)^{\lambda_4'-2} - (1-u)^{\lambda_4'-2}\right) f(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right))}{\lambda_4' \left((1+u)^{\lambda_4'-1} + (1-u)^{\lambda_4'-1}\right)^2} \tag{3.4}$$

Reemplazando (3.2) y (3.4) en la expresión para $\phi_f(u)$, se obtiene:

$$\phi_f(u) = -\frac{\lambda_2' \left(\lambda_4' - 1\right) 2^{\lambda_4'} \left((1+u)^{\lambda_4'-2} - (1-u)^{\lambda_4'-2}\right)}{\lambda_4' \left((1+u)^{\lambda_4'-1} + (1-u)^{\lambda_4'-1}\right)^2}$$

Sustituyendo, en la expresión (1.13) de la eficacia, el resultado anterior junto con los valores equivalentes a los parámetros $\lambda_2$ y $\lambda_2'$ y considerado que $\int_0^1 \phi^2(u)du = \sigma^2$, se obtiene la siguiente expresión alternativa para la eficacia c:

$$c = \frac{(\lambda_4' - 1)2^{\lambda_4'-\lambda_4} g(\lambda_4')}{\sigma_f g(\lambda_4)\lambda_4'} \int_0^1 \frac{\left((1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}\right)\left((1+u)^{\lambda_4'-2} - (1-u)^{\lambda_4'-2}\right)}{\left((1+u)^{\lambda_4'-1} + (1-u)^{\lambda_4'-1}\right)^2} du \tag{3.5}$$

□

*NOTA* 1: Se observa que las expresiones (3.3) y (3.5), que permiten obtener alternativamente la eficacia de una prueba de puntajes lambda generalizados $\bar{V}_\lambda$ y que las dos expresiones dependen únicamente de los parámetros $\lambda_4$, de la función de puntajes y de $\lambda_4'$ y $\sigma_f$, de la distribución muestreada.

**Corolario 2.** Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución continua $F(x-\theta)$, $F \in \Omega_s$ y varianza $\sigma_f^2$ y sea $\bar{V}_\lambda$ una prueba de puntajes lambda generalizados. Si la función generatriz de puntajes de $\bar{V}_\lambda$ es $\phi(u) = F_+^{-1}(u)$, entonces $c = 1/\sigma_f$, valor equivalente al de la eficacia de la prueba $t$-student y en consecuencia la e($\bar{V}_\lambda$, t)=1.

**Demostración.** Si la distribución muestreada y la función generatriz de puntajes de $\bar{V}_\lambda$ son similares, entonces $\lambda_4 = \lambda_4'$. Sustituyendo esta equivalencia en (3.3) se obtiene que $c = 1/\sigma_f$, resultado que vale también para la prueba $t$-student. Por (1.5) se concluye también que la e($\bar{V}_\lambda$, t) es igual a uno, es decir que $\bar{V}_\lambda$ y $t$-student, tienen la misma eficiencia.□

**Teorema 6.** Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución continua $F(x-\theta)$, $F \in \Omega_s$. Si se obtiene una aproximación de $f$ en la distribución muestreada a partir de una $DLG$ con parámetros $\lambda_2'$ y $\lambda_4'$, las eficacias correspondientes a las estadísticas de las pruebas del signo S y del rango signado T están dadas por:

$$c_S = \frac{g(\lambda_4')2^{\lambda_4'-1}}{\sigma_f \lambda_4'}$$

$$c_T = \frac{\sqrt{12}g(\lambda_4')}{\sigma_f \lambda_4'} \int_0^1 \frac{dy}{y^{\lambda_4'-1} + (1-y)^{\lambda_4'-1}}$$

**Demostración.** Las eficacias de las pruebas del signo S y del rango signado T se obtienen de

$$c_S = 2f(0)$$
$$c_T = \sqrt{12}f^*(0)$$

donde $f$ es la densidad de la distribución muestreada y $f^*(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx$.

Aproximando $f(0)$ y $f^*(0)$ mediante una $DLG$ con parámetros $\lambda_2'$ y $\lambda_4'$ se tiene

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\lambda_2'}{\lambda_4'\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_4'-1} + \lambda_4'\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_4'-1}} \\ &= \frac{\lambda_2'}{2\lambda_4'\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_4'-1}} \\ &= \frac{g(\lambda_4')2^{\lambda_4'-2}}{\sigma_f \lambda_4'} \end{aligned}$$

pues $f(0)$ se obtiene cuando $y = \frac{1}{2}$ y además, $\sigma_f = \frac{1}{\lambda_2'}g(\lambda_4')$.

Entonces,

$$c_S = \frac{g(\lambda_4')2^{\lambda_4'-1}}{\sigma_f \lambda_4'} \tag{3.6}$$

Igualmente

$$\begin{aligned}
f^*(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx \\
&= \int_0^1 f(F^{-1}(y))dy \\
&= \frac{\lambda_2'}{\lambda_4'} \int_0^1 \frac{dy}{y^{\lambda_4'-1} + (1-y)^{\lambda_4'-1}} \\
&= \frac{g(\lambda_4')}{\sigma_f \lambda_4'} \int_0^1 \frac{dy}{y^{\lambda_4'-1} + (1-y)^{\lambda_4'-1}}
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$c_T = \frac{\sqrt{12} g(\lambda_4')}{\sigma_f \lambda_4'} \int_0^1 \frac{dy}{y^{\lambda_4'-1} + (1-y)^{\lambda_4'-1}} \tag{3.7}$$

□

*NOTA* 2: Observe en las expresiones (3.6) y (3.7) que $c_S$ y $c_T$ dependen únicamente de los parámetros $\lambda_4'$ y $\sigma_f$, de la distribución muestreada.

**Teorema 7.** Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con función de distribución continua $F(x-\theta)$, $F \in \Omega_s$, la ERA de 2 pruebas de puntajes lambda generalizados es de escala invariante es decir independiente de $\sigma_f^2$.

**Demostración.** Como se anotó, según las expresiones (3.3) y (3.5), la eficacia de una prueba de puntajes lambda generalizados esta en función de $\lambda_4$, $\lambda_4'$ y $\sigma_f$ (el recíproco de este último parámetro aparece como factor). Como la ERA de dos pruebas, $V^{(1)}$ y $V^{(2)}$ se puede calcular mediante el cociente de los cuadrados de las eficacias correspondientes, es decir $e(V^{(1)}, V^{(2)}) = c_1^2/c_2^2$, al comparar 2 pruebas de puntajes lambda generalizados, los valores de $\sigma_f^2$ del numerador y denominador se cancelan y $e(V^{(1)}, V^{(2)})$ es independiente de dicho parámetro.□

**Corolario 3.** Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con función de distribución continua $F(x-\theta)$, $F \in \Omega_s$. La ERA de 2 pruebas que incluya las estadísticas de puntajes lambda generalizados $\bar{V}_\lambda$, la del signo S, la del rango signado T y la t-student, es de escala invariante.

**Demostración.** En las expresiones (3.3), (3.6) y (3.7) de las eficacias de las pruebas de puntajes, del signo y del rango signado de Wilcoxon, aparece como factor el inverso de $\sigma_f$. Además, si se tiene en cuenta que la eficacia de la t-student esta dada por $c = 1/\sigma_f$, entonces al obtener las ERAs que involucren a cualquier pareja de las cuatro pruebas anteriores, mediante el cociente de los cuadrados de las eficacias correspondientes, se anulará el valor de $\sigma_f^2$, correspondiente a la varianza de la población de donde se selecciona la muestra y por lo tanto las ERAs correspondientes serán de escala invariante.$\square$

$NOTA$ 3: Una consecuencia importante de los teoremas 5 y 7 y del corolario 3, es que la ERA de 2 pruebas de puntajes lambda generalizados depende únicamente de los parámetros $\lambda_4$ de las funciones de puntajes de las pruebas evaluadas y $\lambda_4'$ de la distribución muestreada $F$, lo que implica que las ERAs de dichas pruebas se pueden evaluar usando las curtósis de las distribuciones de las pruebas comparadas, $DLG$ usada con puntajes y $DLG$ muestreada [1]. Igualmente cuando el cálculo de la ERA incluya la prueba del signo S, la del rango signado T o la t-student, ésta se puede evaluar teniendo en cuenta la curtósis de la población muestreada.

**Teorema 8.** Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con función de distribución continua $F(x-\theta)$, $F \in \Omega_s$. La eficacia de una prueba de puntajes lambda generalizados $\bar{V}_\lambda$ con función generatriz uniforme en el intervalo (a,b), es independiente de a, b y es igual a la eficacia de la prueba del rango signado $T$, lo que implica que la e($\bar{V}_\lambda$, $t$) = 1.

**Demostración.** Recuerde que la función de puntajes de $\bar{V}_\lambda$ esta dada por

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \frac{1}{2^{\lambda_4}\lambda_2}\left((1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}\right)\\ &= \frac{\sigma}{2^{\lambda_4}g(\lambda_4)}\left((1+u)^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}\right)\end{aligned}$$

pues

$$\lambda_2 = \frac{g(\lambda_4)}{\sigma}$$

y

$$g(\lambda_4) = \text{signo}(\lambda_4)\sqrt{\frac{2}{1+2\lambda_4} - 2\beta(1+\lambda_4, 1+\lambda_4)}$$

[1]La curtósis de una $DLG$ con parámetros $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, como se observó en la expresión (1.22), del capitulo 1, se obtiene con $\alpha_4 = \frac{D}{B^2}$, donde $B$ y $D$ dependen solamente de $\lambda_4$.

Los parámetros $DLG$ con los que se puede aproximar la distribución uniforme en el intervalo (a,b) están dados por $\lambda_1 = (a+b)/2$, $\lambda_2 = 2/(b+a)$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ (ver Karian–Dudewicz, 2000 pág. 69). Sustituyendo este último parámetro en la función de puntajes se tiene:

$$\phi(u) = \frac{\sigma}{2^1 g(1)}\left((1+u)^1 - (1-u)^1\right) = \sqrt{3}\sigma u$$

ya que

$$g(1) = \text{signo}(1)\sqrt{\frac{2}{1+2} - 2\beta(2,2)} = \sqrt{\frac{2}{1+2} - 2\frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Además, recordando que la eficacia de una estadística de puntajes generales con función generatriz $\phi(.)$ esta dada por

$$c = \frac{2\int_0^\infty \phi'(2F(x)-1)f^2(x)dx}{\sqrt{\frac{1}{4}\int_0^1 \phi^2(u)du}}$$

donde $f$, $F$ corresponden a funciones de la densidad y la distribución de la población de donde es seleccionada la muestra.

Haciendo $u = 2F(x) - 1$, en la expresión anterior de la eficacia, derivando la función de puntajes $\phi'(u) = \sqrt{3}\sigma$ y teniendo en cuenta, según (2.8), que $\int_0^1 \phi^2(u)du = \sigma^2$, se tiene

$$\begin{aligned} c &= \frac{4}{\sigma}\int_0^\infty \phi'(u)f^2(x)dx, \quad \text{con} \quad u = 2F(x)-1 \\ &= \frac{2\sqrt{3}\sigma}{\sigma}\left(2\int_0^\infty f^2(x)dx\right) = 2\sqrt{3}\int_{-\infty}^\infty f^2(x)dx = \sqrt{12}f^*(0) \end{aligned}$$

que es la eficacia la prueba de puntajes $\bar{V}_\lambda$ con función generatriz uniforme en cualquier intervalo (a,b), resultado similar a la eficacia de la prueba del rango signado T, lo que implica que la e($\bar{V}_\lambda$, $t$) = 1.$\square$

## 3.2. Resultados numéricos de eficiencias de las pruebas propuestas

Las expresiones (3.3) y (3.5), formuladas para obtener la eficacia de una prueba de puntajes $\bar{V}_\lambda$, incluyen integrales que no se pudieron resolver analíticamente, por lo que fue necesario realizar aproximaciones numéricas[2] para poder calcular las eficiencias relativas asintóticas (ERAs) de las pruebas propuestas . En el análisis se comparan, entre sí, 20 pruebas de puntajes con puntajes $DLG$ y éstas mismas se comparan con las pruebas del signo S, el rango signado de Wilcoxon y la $t$–student

Entre las pruebas propuestas, siete se construyeron con funciones percentiles $DLG$ correspondientes a aproximaciones $DLG$ de distribuciones conocidas como la Uniforme($b = -a = \sqrt{3}$), Normal estándar, $t$–student (con 30, 10 y 5 grados de libertad), Logística y Laplace, todas simétricas, de mediana cero y $\sigma = 1$ [3]. Las 13 pruebas restantes, se construyeron con funciones $DLG(\lambda_4)$, que se generan fijando los valores de $\lambda_4$ y haciendo igualmente $\sigma = 1$.

La tabla 3.1 presenta los parámetros $\lambda_2$ y $\lambda_4$ de las funciones de puntajes de estas pruebas, junto con sus curtósis. Los valores de $\lambda_2$, de las pruebas con funciones $DLG(\lambda_4)$, se obtienen a partir de la expresión (1.21), $\lambda_2 = \frac{1}{\sigma}g(\lambda_4)$ y las curtósis se calculan mediante la expresión (1.22), con $\alpha_4 = \frac{D}{B^2}$, utilizando en ambos casos código $R$.

En la mencionada tabla se observa que la curtósis decrece con $\lambda_4$ hasta cuando $\lambda_4$=1.45, valor a partir del cual comienza a incrementarse nuevamente pero ahora cuando $\lambda_4$ va disminuyendo. Para efectos de análisis solo se presentan valores de $\lambda_4 > -1/4$ ya que cuando $-\frac{1}{2} \leq \lambda_4 \leq -\frac{1}{4}$, como se anotó en la sección 1.5.2 del capítulo 1, no existe la curtósis de la función de puntajes. También se observa que los parámetros correspondientes a las pruebas de puntajes uniformes y $DLG(2)$ solamente se diferencian en el valor de $\lambda_4$.

Para el cálculo de las ERAs se utilizaron como distribuciones muestreadas aproximaciones $DLG$ de varias distribuciones conocidas, como la normal

[2] Todos los cálculos se realizan en código $R$ usando un método de cuadratura adaptativa para funciones de de una variable sobre intervalos finitos.

[3] Los parámetros $DLG$ de estas funciones se obtienen de Karian–Dudewicz, 2000 en la tabla 2.4–15.

| **Función** | $\lambda_2$ | $\lambda_4$ | **curtósis** ($\alpha_4$) |
|---|---|---|---|
| $DLG$(50) | 0,1407195 | 50,000 | 25,3756 |
| $DLG$(25) | 0,1980295 | 25,000 | 12,8762 |
| $DLG$(10) | 0,3086059 | 10,000 | 5,3781 |
| $DLG$(5) | 0,4255546 | 5,000 | 2,9033 |
| $DLG$(2,5) | 0,5501397 | 2,500 | 1,9065 |
| $DLG$(2,0) | 0,5773503 | 2,000 | 1,8000 |
| $DLG$(1,5) | 0,5939174 | 1,500 | 1,7531 |
| $DLG$(1,45) | 0,5943288 | 1,450 | 1,7526 |
| $DLG$(1,4) | 0,5944028 | 1,400 | 1,7531 |
| $DLG$(1)-UNIFORME | 0,5773503 | 1,000 | 1,8000 |
| $DLG$(0,5) | 0,4632514 | 0,500 | 2,0817 |
| $DLG$(0,1349)-NORMAL | 0,1974368 | 0,1349 | 3,000 |
| $DLG$(0,09701)-$t$30 | 0,1502824 | 0,09701 | 3,231 |
| $DLG$(0,01476)-$t$10 | 0,02610317 | 0,01476 | 4,000 |
| $DLG$(-0,000363)-LOGISTICA | -0,000658823 | -0,000363 | 4,205 |
| $DLG$(-0,0802)-LAPLACE | -0,1685725 | -0,0802 | 6,000 |
| $DLG$(-0,1359)-$t$5 | -0,3203494 | -0,1359 | 9,003 |
| $DLG$(-0,20) | -0,547179 | -0,200 | 22,2127 |
| $DLG$(-0,24) | -0,729591 | -0,240 | 126,9026 |
| $DLG$(-0,249) | -0,7764068 | -0,249 | 1330,8630 |

Tabla 3.1: Parámetros de las $DLG$ utilizadas para generar funciones de puntajes.

estándar, logística, laplace, t–student con 10 y 5 grados de libertad, simétricas y con $\sigma_f = 1$, lo cual no implica pérdida de generalidad pues se demostró que la ERA es de escala invariante. Además se consideraron distribuciones en la familia $DLG$ con valores de $\lambda'_4$ iguales a 0.7, 0.5, 0.3, -0.20, -0.24; los anteriores valores de $\lambda'_4$ se escogieron teniendo en cuenta los rangos donde las integrales para el cálculo de la eficacia de las pruebas son convergentes y diferentes de cero. En la tabla 3.2 se muestran los parámetros $DLG$ con los que se aproximan las distribuciones conocidas y los de las $DLG$ utilizadas como distribuciones muestreadas junto a sus curtósis correspondientes y ordenadas de forma ascendente según estos momentos.

La tabla 3.3 contiene las eficacias de las pruebas propuestas. En el comienzo de las filas se indican las $DLG$ y LAS distribuciones conocidas utilizadas como

| Función | $\lambda'_2$ | $\lambda'_4$ | **curtósis** ($\alpha'_4$) |
|---|---|---|---|
| $DLG$(0,7) | 0,5286277 | 0,700 | 1,9179 |
| $DLG$(0,5) | 0,4632514 | 0,500 | 2,0817 |
| $DLG$(0,3) | 0,3509922 | 0,300 | 2,4075 |
| NORMAL | 0,1974368 | 0,1349 | 3,000 |
| $t10$ | 0,02610317 | 0,01476 | 4,000 |
| LOGISTICA | -0,000658823 | -0,000363 | 4,205 |
| LAPLACE | -0,1685725 | -0,0802 | 6,000 |
| $t5$ | -0,3203494 | -0,1359 | 9,003 |
| $DLG$(-0,20) | -0,547179 | -0,200 | 22,2127 |
| $DLG$(-0,24) | -0,729591 | -0,240 | 126,9026 |

Tabla 3.2: Parámetros $DLG$ de las poblaciones de donde provienen las muestras.

funciones de puntajes, mientras que al principio de las columnas se indican las $DLG$ y las distribuciones conocidas utilizadas como distribuciones muestreadas.

En las primeras columnas de dicha tabla se observa que la eficacia tiende a tomar valores mínimos alrededor de la prueba $DLG$(1,45) (cuya función de puntajes es la de menor curtósis como se observó en la tabla 3.1); esto ocurre para muestras de poblaciones más aplanadas que la normal, como $DLG$(0,7), $DLG$(0,5) y $DLG$(0,3). Mientras que en poblaciones mas puntiagudas (columnas finales de la tabla), el valor tiende a maximizarse alrededor de la misma prueba $DLG$(1,45). De lo anterior, podemos afirmar que en poblaciones muestreadas aplanadas las eficacias de las pruebas de puntajes $\bar{V}_\lambda$ tienden a valores más altos cuando la función de puntajes presenta curtósis más alta, en poblaciones muestreadas puntiagudas la tendencia se invierte, las eficacias son mas altas en pruebas con funciones de puntajes con curtósis mas bajas. Cuando la población muestreada es normal la prueba de puntajes normales obtiene la eficacia máxima (igual a 1 como la $t$-student).

También se verifica en la tabla 3.3, que cuando la función generadora de puntajes es una $DLG$ igual a la de la distribución muestreada, la eficacia es igual a $1/\sigma_f$, como se demostró en el Corolario 2. Observe que la eficacia es igual a 1, en todos aquellos casos en que se cumple la propiedad anterior, puesto que $\sigma_f = 1$ por construcción. La propiedad anterior también se cumple para la eficacia de la prueba $t$-student, en todas las distribuciones muestreadas, pues análogamente es igual a $1/\sigma_f$.

| **PUNTAJES** | **POBLACIÓN** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 2,27733 | 1,41610 | 0,88815 | 0,62447 | 0,49848 | 0,48573 | 0,42853 | 0,39799 | 0,37244 | 0,36212 |
| $DLG$(25) | 1,88348 | 1,33806 | 0,96534 | 0,76252 | 0,66222 | 0,65213 | 0,60823 | 0,58719 | 0,57440 | 0,57407 |
| $DLG$(10) | 1,44639 | 1,20111 | 1,02298 | 0,92884 | 0,89278 | 0,89047 | 0,88814 | 0,89848 | 0,92726 | 0,95814 |
| $DLG$(5) | 1,17303 | 1,06992 | 1,00557 | 0,99079 | 1,01011 | 1,01493 | 1,05210 | 1,09320 | 1,16310 | 1,22468 |
| $DLG$(2,5) | 0,98119 | 0,95167 | 0,95108 | 0,98387 | 1,03759 | 1,04689 | 1,10886 | 1,16922 | 1,26462 | 1,34503 |
| $DLG$(2,0) | 0,94898 | 0,93041 | 0,93923 | 0,97891 | 1,03752 | 1,04744 | 1,11284 | 1,17581 | 1,27462 | 1,35751 |
| $DLG$(1,5) | 0,93130 | 0,91891 | 0,93280 | 0,97604 | 1,03709 | 1,04733 | 1,11439 | 1,17581 | 1,27906 | 1,36312 |
| $DLG$(1,45) | 0,93094 | 0,91870 | 0,93270 | 0,97600 | 1,03708 | 1,04732 | 1,11441 | 1,17866 | 1,27911 | 1,36318 |
| $DLG$(1,4) | 0,93093 | 0,91873 | 0,93273 | 0,97602 | 1,03709 | 1,04733 | 1,11440 | 1,17864 | 1,27908 | 1,36314 |
| UNIFORME | 0,94898 | 0,93041 | 0,93923 | 0,97891 | 1,03752 | 1,04744 | 1,11284 | 1,17581 | 1,27462 | 1,35751 |
| $DLG$(0,5) | 1,07225 | 1,00000 | 0,97309 | 0,99106 | 1,03604 | 1,04430 | 1,10084 | 1,15730 | 1,24783 | 1,32480 |
| NORMAL | 1,44252 | 1,15603 | 1,03028 | 1,00000 | 1,01802 | 1,02311 | 1,06310 | 1,10760 | 1,18304 | 1,24921 |
| $T30$ | 1,52578 | 1,18385 | 1,03832 | 0,99973 | 1,01345 | 1,01805 | 1,05548 | 1,09814 | 1,17128 | 1,23578 |
| $T10$ | 1,78088 | 1,25773 | 1,05701 | 0,99699 | 1,00000 | 1,00338 | 1,03454 | 1,07272 | 1,14018 | 1,20059 |
| LOGISTICA | 1,84391 | 1,27379 | 1,06060 | 0,99605 | 0,99687 | 1,00000 | 1,02989 | 1,06717 | 1,13347 | 1,19305 |
| LAPLACE | 2,32717 | 1,37574 | 1,07983 | 0,98775 | 0,97572 | 0,97742 | 0,99996 | 1,03197 | 1,09159 | 1,14628 |
| $T5$ | 2,95255 | 1,46982 | 1,09272 | 0,97720 | 0,95485 | 0,95541 | 0,97215 | 1,00000 | 1,05426 | 1,10503 |
| $DLG$(-0,20) | 4,55236 | 1,61397 | 1,10492 | 0,95724 | 0,92165 | 0,92077 | 0,93014 | 0,95266 | 1,00000 | 1,04560 |
| $DLG$(-0,24) | 7,29954 | 1,73300 | 1,10927 | 0,93843 | 0,89393 | 0,89209 | 0,89653 | 0,91545 | 0,95801 | 1,00000 |
| $DLG$(-0,249) | 8,51359 | 1,76399 | 1,10968 | 0,93329 | 0,88673 | 0,88467 | 0,88799 | 0,90606 | 0,94750 | 0,98863 |
| Signos | 0,61340 | 0,65514 | 0,72020 | 0,80352 | 0,89335 | 0,90724 | 0,99400 | 1,07267 | 1,19087 | 1,28704 |
| Wilcoxon | 0,94898 | 0,93041 | 0,93923 | 0,97891 | 1,03752 | 1,04744 | 1,11284 | 1,17581 | 1,27462 | 1,35751 |
| $t$–student | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |

Tabla 3.3: Eficacia de las pruebas propuestas.

Se observa además que la prueba con puntajes uniformes y la prueba del rango signado de Wilcoxon tienen las mismas eficacias para todas las distribuciones muestreadas como se demostró en el Teorema 8. La prueba con puntajes $DLG(2)$ también presenta la misma eficacia que las anteriores, por lo anterior, entre estas tres pruebas siempre es 1.

Con base en los resultados de las eficacias obtenidas en la tabla 3.3 se pueden calcular las ERAs para cada prueba propuesta con respecto a las restantes pruebas de puntajes y a las pruebas del signo, del rango signado de Wilcoxon y $t$–student, en cada una de las distribuciones consideradas.

En el análisis de dichas tablas se tiene en cuenta los resultados formulados en la Nota 3, en el sentido de que las ERAs, cuando se comparan las pruebas de puntajes Lambda Generalizados entre sí, dependen de los parámetros $\lambda_4$, de la funciones de puntajes que se comparan y $\lambda_4'$ de la distribución muestreada, valores que determinan las curtósis de las funciones correspondientes. Este último parámetro incide también cuando se evalúan ERAs que incluyen las pruebas del signo, del rango signado de Wilcoxon y la $t$-student. En consecuencia, el análisis de las ERAs se puede hacer teniendo en cuenta las curtósis de las pruebas de puntajes y las que corresponden a la distribución de la población de la cual se selecciona la muestra.

De lo anterior se deduce, que en términos de la ERA, cuando se comparan entre ellas, las pruebas con funciones de puntajes de curtósis más bajas, como la $DLG(1.45)$, tienen mejor comportamiento en muestras elegidas de poblaciones leptocúrticas, en las cuales supera a todas las pruebas, como se observa en las columnas finales de la tabla anexa 4.8 . Si las poblaciones son muy aplanadas, estas pruebas resultan menos eficientes que las pruebas con funciones de puntajes de curtósis más altas (columnas iniciales de la misma tabla). El mismo comportamiento anterior se tiene cuando se comparan con las pruebas del rango signado de Wilcoxon y la $t$-student. Sin embargo, bajo cualquier población, resultan más eficientes que la prueba del signo, como se presenta en la misma tabla.

En poblaciones platicúrticas, se comportan mejor las pruebas con funciones de puntajes de curtósis más altas, como es el caso de las pruebas con funciones de puntajes $DLG(50)$ y $DLG(-0.249)$ de las tablas anexas 4.1 y 4.20, que como se observa, las primeras columnas presentan eficiencias superiores a 1 o al menos superiores a los valores de las columnas finales, las cuales en su mayoría se sitúan por debajo de 1. El comportamiento anterior es similar cuando se comparan con las pruebas del signo, rango signado y $t$-student.

Lo anterior se obtiene, en general, haciendo un recorrido a las tablas 4.1 a 4.20. En la medida que las curtósis de las funciones de puntajes se acercan al mínimo (en las pruebas propuestas alrededor de $\alpha_4$=1.7526), para poblaciones aplanadas se tiene que las ERAs de las pruebas generadas por dichas funciones tienden a disminuir, hasta alcanzar valores mínimos, alrededor de las ERAs que corresponden a la función $DLG(1.45)$. Las mismas tienden a aumentar, en poblaciones puntiagudas, hasta alcanzar los valores máximos, alrededor de las ERAs de la misma función. Observe que la tabla 4.8 contiene los valores mínimos en las primeras columnas y los valores máximos en las últimas columnas al comparar dichos elementos en las tablas mencionadas.

Para poblaciones normales se tiene que las pruebas propuestas tienden a ser más eficientes cuando la curtósis de la función de puntajes se acerca al valor de la función normal estándar ($\alpha_4 = 3$). Además, en la tabla 4.8, se observa que en la columna que corresponde a la distribución normal, todos los valores son mayores que 1, lo que implica que la prueba con función de puntajes normales es la más eficiente, junto a la $t$-student, cuando la muestra se selecciona de una población normal.

De otra parte de la tabla 4.21 se deduce que, en general, en poblaciones platicúrticas, la prueba del signo resulta menos eficiente que las pruebas de puntajes propuestas; mientras que, en poblaciones leptocúrticas, la situación anterior solamente se da con algunas de estas pruebas, en particular las pruebas con funciones de puntajes $DLG$ de curtósis mas bajas. Como se observa en la tabla, la prueba del signo es menos eficiente, en cualquier población, al compararla con pruebas cuyas funciones de puntajes tienen curtósis $\alpha_4 \leq 1.8$ (de la distribución uniforme).

Como se comprobó teóricamente, las pruebas con funciones de puntajes $DLG(2)$ y uniformes son equivalentes en eficiencia a la prueba de Wilcoxon; los resultados de estas 3 pruebas se presentan, de manera correspondiente, en la tablas anexas 4.6, 4.10 y 4.22. Como se observa, resultan más eficientes que las demás pruebas en poblaciones más apuntadas y menos eficientes en poblaciones muy aplanadas, excepto cuando se comparan con pruebas cuyas funciones de puntajes tienen curtósis inferiores al valor que corresponde a la función uniforme, para la cual ocurre lo contrario: son más eficientes en poblaciones aplanadas y menos eficientes en poblaciones apuntadas. Para cualquier población estas pruebas son mas eficientes que la prueba del signo y en una población logística superan al resto de pruebas en comparación.

Como se puede observar en la tabla 4.23 y como se mencionó anteriormente, la prueba $t$-student resulta mas eficiente que las pruebas propuestas en una población normal. En el resto de poblaciones no se aprecia una clara tendencia, puesto que para algunos casos resulta ser mas eficiente en poblaciones más apuntadas, por ejemplo, comparada con las pruebas $DLG(50)$, $DLG(25)$ y $DLG(10)$, o en una población logística , cuando se compara con las pruebas $DLG(\text{-}0{,}20)$, $DLG(\text{-}0{,}24)$ y $DLG(\text{-}0{,}249)$, etc. Sin embargo, al compararla con las pruebas del signo y del rango signado de Wilcoxon se observa que la prueba $t$-student es más eficiente que estas pruebas en poblaciones más aplanadas y menos eficiente en poblaciones más apuntadas.

# Capítulo 4

# Conclusiones y Propuestas de investigación

### Conclusiones

Mediante aproximación numérica, se observó que, cuando la curtósis de la función de puntajes tiende a ser más baja, la eficacia tiende a ser más alta, si la muestra es elegida en poblaciones leptocúrticas. Mientras que en poblaciones platicúrticas, a menor curtósis menor eficacia. Cuando la distribución muestreada es normal, la prueba de puntajes normales es la más eficaz.

La situación anterior se ve reflejada en los resultados numéricos de las ERAs cuando las pruebas de puntajes $DLG$ se comparan entre ellas. Se observó que las pruebas cuyas funciones de puntajes tienen curtósis más bajas, presentan mayor eficiencia relativa que aquellas pruebas cuyas funciones de puntajes tienen curtósis mas altas, si las muestras son elegidas en poblaciones mas puntiagudas. Cuando las muestras se eligen en poblaciones mas aplanadas las primeras presentan menor eficiencia relativa que las segundas.

Al comparar las pruebas se encontró que las eficiencias relativas de las pruebas con funciones de puntajes de curtósis más bajas aumentaban frente a las pruebas del rango signado de Wilcoxon y la t-student en poblaciones muestreadas más puntiagudas. Con respecto a la prueba de signo se observó que aunque la eficiencia relativa tiende a disminuir en poblaciones más apuntadas, siempre es superior a 1.

De la misma manera para pruebas de puntajes con curtósis más altas (ej. DLG(50) y DLG(-0.249)) entre más platicúrtica sea la distribución muestreada más eficientes son las pruebas,cuando las funciones de puntajes tienen las curtósis más altas. Esta misma tendencia se observó cuando se comparan las anteriores pruebas frente a las pruebas del signo, del rango signado de Wilcoxon y t-student.

Cuando se compara la prueba con función de puntajes uniformes (cuya eficiencia, como se desmostró, es igual a la de la prueba de puntajes DLG(2) y la del rango signado de Wilcoxon), con otra prueba cuya función de puntajes tiene un valor de curtósis inferior 1.8, que corresponde a la distribución uniforme, resulta más eficiente en poblaciones más apuntadas.

En una población logística las ERAs de las 3 pruebas mencionadas son siempre superiores a 1, es decir superan en eficiencia al resto de pruebas con las que se comparan. Frente a la t-student, se observó que la ERA de estas pruebas nunca es inferior a 0.864 y comparándola con la prueba del signo se determinó que las eficiencias relativas tienden a disminuir en poblaciones muestreadas más puntiagudas.

Cuando la población de donde se elige la muestra es normal, la prueba de puntajes normales (de Fraser) resultó ser la más eficiente, junto con la prueba t-student. Estas pruebas presentan mejores eficiencias cuando la muestra se selecciona de poblaciones con curtósis cercanas al valor de la normal. Además se observó que su eficiencia jamás es inferior a uno cuando se la confronta con la prueba t-student.

Cuando se compara con las pruebas del signo y de Wilcoxon, se determinó que las eficiencias relativas de la prueba de puntajes normales son más altas en distribuciones muestreadas más aplanadas.

**Propuestas de investigación**

Considerar como caso particular de la familia de pruebas propuesta, funciones generatrices de puntajes con valores $\lambda_2 = \lambda_4$, es decir utilizando funciones percentiles de distribuciones Lambda Generalizadas de Tukey. Igualmente, es recomendable explorar el comportamiento de la eficiencia de la prueba propuesta, cuando la muestra se elige de otras poblaciones simétricas no consideradas en el estudio.

También cabe la posibilidad de estudiar las propiedades de la estadística de puntajes DLG para problemas de localización en 2 muestras como generalización de la estadísticas de puntajes normales de Van der Waerden y para k muestras, como generalización de ANOVA no paramétrico.

# Anexo 1: Tablas de Eficiencias Relativas Asintóticas

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T$10 | LOGISTICA | LAPLACE | $T$5 | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(25) | 1,46195 | 1,12004 | 0,84647 | 0,67069 | 0,56663 | 0,55478 | 0,49640 | 0,45940 | 0,42043 | 0,39788 |
| $DLG$(10) | 2,47902 | 1,39001 | 0,75376 | 0,45200 | 0,31175 | 0,29755 | 0,23281 | 0,19621 | 0,16133 | 0,14284 |
| $DLG$(5) | 3,76907 | 1,75180 | 0,78009 | 0,39724 | 0,24354 | 0,22904 | 0,16590 | 0,13254 | 0,10254 | 0,08743 |
| $DLG$(2,5) | 5,38699 | 2,21420 | 0,87204 | 0,40285 | 0,23081 | 0,21527 | 0,14935 | 0,11587 | 0,08674 | 0,07248 |
| $DLG$(2,0) | 5,75890 | 2,31654 | 0,89418 | 0,40694 | 0,23084 | 0,21504 | 0,14829 | 0,11457 | 0,08538 | 0,07116 |
| $DLG$(1,5) | 5,97960 | 2,37488 | 0,90656 | 0,40934 | 0,23103 | 0,21509 | 0,14787 | 0,11402 | 0,08479 | 0,07057 |
| $DLG$(1,45) | 5,98426 | 2,37596 | 0,90676 | 0,40937 | 0,23103 | 0,21509 | 0,14787 | 0,11402 | 0,08478 | 0,07056 |
| $DLG$(1,4) | 5,98434 | 2,37582 | 0,90670 | 0,40936 | 0,23103 | 0,21509 | 0,14787 | 0,11402 | 0,08479 | 0,07057 |
| UNIFORME | 5,75890 | 2,31654 | 0,89418 | 0,40694 | 0,23084 | 0,21504 | 0,14829 | 0,11457 | 0,08538 | 0,07116 |
| $DLG$(0,5) | 4,51083 | 2,00533 | 0,83304 | 0,39703 | 0,23150 | 0,21634 | 0,15154 | 0,11827 | 0,08909 | 0,07471 |
| NORMAL | 2,49235 | 1,50053 | 0,74313 | 0,38996 | 0,23976 | 0,22539 | 0,16249 | 0,12912 | 0,09911 | 0,08403 |
| $T$30 | 2,22775 | 1,43083 | 0,73166 | 0,39017 | 0,24193 | 0,22764 | 0,16484 | 0,13135 | 0,10111 | 0,08586 |
| $T$10 | 1,63525 | 1,26768 | 0,70601 | 0,39232 | 0,24849 | 0,23435 | 0,17158 | 0,13765 | 0,10670 | 0,09097 |
| LOGISTICA | 1,52536 | 1,23592 | 0,70124 | 0,39306 | 0,25005 | 0,23593 | 0,17313 | 0,13909 | 0,10797 | 0,09213 |
| LAPLACE | 0,95763 | 1,05953 | 0,67649 | 0,39969 | 0,26101 | 0,24696 | 0,18366 | 0,14873 | 0,11641 | 0,09980 |
| $T$5 | 0,59492 | 0,92824 | 0,66062 | 0,40837 | 0,27254 | 0,25847 | 0,19431 | 0,15840 | 0,12480 | 0,10739 |
| $DLG$(-0,20) | 0,25025 | 0,76983 | 0,64612 | 0,42558 | 0,29253 | 0,27828 | 0,21226 | 0,17453 | 0,13871 | 0,11994 |
| $DLG$(-0,24) | 0,09733 | 0,66771 | 0,64105 | 0,44281 | 0,31095 | 0,29646 | 0,22847 | 0,18901 | 0,15114 | 0,13113 |
| $DLG$(-0,249) | 0,07155 | 0,64446 | 0,64058 | 0,44770 | 0,31602 | 0,30145 | 0,23289 | 0,19294 | 0,15451 | 0,13416 |
| Signos | 13,78372 | 4,67221 | 1,52076 | 0,60399 | 0,31136 | 0,28664 | 0,18586 | 0,13766 | 0,09781 | 0,07916 |
| Wilcoxon | 5,75890 | 2,31654 | 0,89418 | 0,40694 | 0,23084 | 0,21504 | 0,14829 | 0,11457 | 0,08538 | 0,07116 |
| $t$–student | 5,18624 | 2,00533 | 0,78881 | 0,38996 | 0,24849 | 0,23593 | 0,18364 | 0,15840 | 0,13871 | 0,13113 |

Tabla 4.1: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(50)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,68402 | 0,89283 | 1,18138 | 1,49101 | 1,76481 | 1,80253 | 2,01449 | 2,17674 | 2,37850 | 2,51329 |
| $DLG$(10) | 1,69570 | 1,24104 | 0,89048 | 0,67394 | 0,55018 | 0,53634 | 0,46900 | 0,42711 | 0,38372 | 0,35899 |
| $DLG$(5) | 2,57812 | 1,56405 | 0,92158 | 0,59229 | 0,42980 | 0,41285 | 0,33421 | 0,28851 | 0,24389 | 0,21973 |
| $DLG$(2,5) | 3,68481 | 1,97690 | 1,03021 | 0,60066 | 0,40733 | 0,38803 | 0,30087 | 0,25221 | 0,20630 | 0,18217 |
| $DLG$(2,0) | 3,93920 | 2,06827 | 1,05637 | 0,60675 | 0,40739 | 0,38762 | 0,29872 | 0,24939 | 0,20308 | 0,1788 |
| $DLG$(1,5) | 4,09016 | 2,12036 | 1,07099 | 0,61033 | 0,40772 | 0,38771 | 0,29789 | 0,24820 | 0,20167 | 0,17737 |
| $DLG$(1,45) | 4,09335 | 2,12132 | 1,07123 | 0,61038 | 0,40773 | 0,38771 | 0,29788 | 0,24818 | 0,20165 | 0,17735 |
| $DLG$(1,4) | 4,09341 | 2,12119 | 1,07116 | 0,61036 | 0,40773 | 0,38771 | 0,29788 | 0,24819 | 0,20166 | 0,17736 |
| UNIFORME | 3,93920 | 2,06827 | 1,05637 | 0,60675 | 0,40739 | 0,38762 | 0,29872 | 0,24939 | 0,20308 | 0,17883 |
| $DLG$(0,5) | 3,08550 | 1,79041 | 0,98414 | 0,59197 | 0,40855 | 0,38996 | 0,30527 | 0,25743 | 0,21189 | 0,18778 |
| NORMAL | 1,70482 | 1,33971 | 0,87792 | 0,58143 | 0,42314 | 0,40628 | 0,32733 | 0,28106 | 0,23573 | 0,21119 |
| $T30$ | 1,52383 | 1,27749 | 0,86437 | 0,58175 | 0,42697 | 0,41033 | 0,33207 | 0,28591 | 0,24049 | 0,21580 |
| $T10$ | 1,11854 | 1,13182 | 0,83406 | 0,58495 | 0,43853 | 0,42242 | 0,34565 | 0,29963 | 0,25379 | 0,22864 |
| LOGISTICA | 1,04338 | 1,10346 | 0,82843 | 0,58605 | 0,44129 | 0,42528 | 0,34878 | 0,30275 | 0,25680 | 0,23154 |
| LAPLACE | 0,65503 | 0,94598 | 0,79919 | 0,59595 | 0,46063 | 0,44516 | 0,36997 | 0,32376 | 0,27689 | 0,25081 |
| $T5$ | 0,40694 | 0,82876 | 0,78045 | 0,60889 | 0,48098 | 0,46589 | 0,39144 | 0,34479 | 0,29684 | 0,26989 |
| $DLG$(-0,20) | 0,17118 | 0,68733 | 0,76331 | 0,63454 | 0,51626 | 0,50161 | 0,42760 | 0,37990 | 0,32993 | 0,30144 |
| $DLG$(-0,24) | 0,06658 | 0,59615 | 0,75733 | 0,66023 | 0,54878 | 0,53439 | 0,46025 | 0,41142 | 0,35949 | 0,32956 |
| $DLG$(-0,249) | 0,04894 | 0,57539 | 0,75677 | 0,66752 | 0,55772 | 0,54338 | 0,46916 | 0,41999 | 0,36751 | 0,33719 |
| Signos | 9,42834 | 4,17148 | 1,79659 | 0,90056 | 0,54949 | 0,51668 | 0,37442 | 0,29966 | 0,23265 | 0,19895 |
| Wilcoxon | 3,93920 | 2,06827 | 1,05637 | 0,60675 | 0,40739 | 0,38762 | 0,29872 | 0,24939 | 0,20308 | 0,17883 |
| $t$–student | 3,54749 | 1,79041 | 0,93188 | 0,58143 | 0,43853 | 0,42528 | 0,36994 | 0,34479 | 0,32993 | 0,32956 |

Tabla 4.2: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(25)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,40338 | 0,71942 | 1,32668 | 2,21238 | 3,20767 | 3,36082 | 4,29530 | 5,09649 | 6,19851 | 7,00102 |
| $DLG$(25) | 0,58973 | 0,80578 | 1,12299 | 1,48381 | 1,81757 | 1,86450 | 2,13220 | 2,34134 | 2,60606 | 2,78560 |
| $DLG$(5) | 1,52039 | 1,26027 | 1,03493 | 0,87885 | 0,78118 | 0,76977 | 0,71260 | 0,67549 | 0,63559 | 0,61208 |
| $DLG$(2,5) | 2,17303 | 1,59294 | 1,15691 | 0,89127 | 0,74035 | 0,72349 | 0,64152 | 0,59051 | 0,53763 | 0,50745 |
| $DLG$(2,0) | 2,32305 | 1,66656 | 1,18629 | 0,90031 | 0,74046 | 0,72272 | 0,63694 | 0,58390 | 0,52923 | 0,49816 |
| $DLG$(1,5) | 2,41208 | 1,70853 | 1,20271 | 0,90561 | 0,74107 | 0,72289 | 0,63516 | 0,58112 | 0,52556 | 0,49407 |
| $DLG$(1,45) | 2,41396 | 1,70931 | 1,20297 | 0,90569 | 0,74108 | 0,72289 | 0,63514 | 0,58108 | 0,52552 | 0,49402 |
| $DLG$(1,4) | 2,41399 | 1,70920 | 1,20289 | 0,90565 | 0,74107 | 0,72289 | 0,63515 | 0,58110 | 0,52555 | 0,49406 |
| UNIFORME | 2,32305 | 1,66656 | 1,18629 | 0,90031 | 0,74046 | 0,72272 | 0,63694 | 0,58390 | 0,52923 | 0,49816 |
| $DLG$(0,5) | 1,81960 | 1,44267 | 1,10518 | 0,87838 | 0,74257 | 0,72708 | 0,65090 | 0,60274 | 0,55220 | 0,52307 |
| NORMAL | 1,00538 | 1,07951 | 0,98589 | 0,86274 | 0,76909 | 0,75751 | 0,69793 | 0,65804 | 0,61434 | 0,58828 |
| $T30$ | 0,89864 | 1,02937 | 0,97068 | 0,86320 | 0,77604 | 0,76507 | 0,70805 | 0,66942 | 0,62674 | 0,60113 |
| $T10$ | 0,65963 | 0,91199 | 0,93664 | 0,86796 | 0,79706 | 0,78760 | 0,73700 | 0,70153 | 0,66139 | 0,63690 |
| LOGISTICA | 0,61531 | 0,88914 | 0,93032 | 0,86959 | 0,80207 | 0,79293 | 0,74367 | 0,70885 | 0,66924 | 0,64497 |
| LAPLACE | 0,38629 | 0,76224 | 0,89748 | 0,88427 | 0,83722 | 0,82999 | 0,78886 | 0,75802 | 0,72159 | 0,69867 |
| $T5$ | 0,23998 | 0,66779 | 0,87643 | 0,90348 | 0,87421 | 0,86866 | 0,83463 | 0,80727 | 0,77358 | 0,75181 |
| $DLG$(-0,20) | 0,10095 | 0,55383 | 0,85719 | 0,94154 | 0,93834 | 0,93526 | 0,91172 | 0,88948 | 0,85982 | 0,83969 |
| $DLG$(-0,24) | 0,03926 | 0,48037 | 0,85047 | 0,97966 | 0,99744 | 0,99636 | 0,98136 | 0,96327 | 0,93684 | 0,91803 |
| $DLG$(-0,249) | 0,02886 | 0,46364 | 0,84985 | 0,99048 | 1,01369 | 1,01313 | 1,00034 | 0,98334 | 0,95774 | 0,93927 |
| Signos | 5,56014 | 3,36127 | 2,01755 | 1,33626 | 0,99874 | 0,96336 | 0,79834 | 0,70160 | 0,60629 | 0,55421 |
| Wilcoxon | 2,32305 | 1,66656 | 1,18629 | 0,90031 | 0,74046 | 0,72272 | 0,63694 | 0,58390 | 0,52923 | 0,49816 |
| $t$–student | 2,09205 | 1,44267 | 1,04649 | 0,86274 | 0,79706 | 0,79293 | 0,78879 | 0,80727 | 0,85982 | 0,91803 |

Tabla 4.3: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(10)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,26532 | 0,57084 | 1,28190 | 2,51735 | 4,10617 | 4,36602 | 6,02761 | 7,54489 | 9,75242 | 11,43799 |
| $DLG$(25) | 0,38788 | 0,63937 | 1,08509 | 1,68835 | 2,32669 | 2,42217 | 2,99213 | 3,46613 | 4,10024 | 4,55100 |
| $DLG$(10) | 0,65773 | 0,79348 | 0,96625 | 1,13785 | 1,28011 | 1,29909 | 1,40330 | 1,48041 | 1,57335 | 1,63376 |
| $DLG$(2,5) | 1,42926 | 1,26396 | 1,11787 | 1,01413 | 0,94773 | 0,93988 | 0,90024 | 0,87420 | 0,84588 | 0,82904 |
| $DLG$(2,0) | 1,52794 | 1,32238 | 1,14625 | 1,02441 | 0,94786 | 0,93889 | 0,89381 | 0,86442 | 0,83266 | 0,81388 |
| $DLG$(1,5) | 1,58649 | 1,35568 | 1,16212 | 1,03044 | 0,94865 | 0,93910 | 0,89132 | 0,86029 | 0,82689 | 0,80719 |
| $DLG$(1,45) | 1,58773 | 1,35630 | 1,16237 | 1,03053 | 0,94866 | 0,93910 | 0,89129 | 0,86024 | 0,82682 | 0,80711 |
| $DLG$(1,4) | 1,58775 | 1,35622 | 1,16230 | 1,03049 | 0,94865 | 0,93910 | 0,89131 | 0,86027 | 0,82687 | 0,80717 |
| UNIFORME | 1,52794 | 1,32238 | 1,14625 | 1,02441 | 0,94786 | 0,93889 | 0,89381 | 0,86442 | 0,83266 | 0,81388 |
| $DLG$(0,5) | 1,19680 | 1,14473 | 1,06788 | 0,99946 | 0,95056 | 0,94454 | 0,91340 | 0,89230 | 0,86880 | 0,85457 |
| NORMAL | 0,66126 | 0,85657 | 0,95262 | 0,98167 | 0,98451 | 0,98407 | 0,97941 | 0,97417 | 0,96656 | 0,96111 |
| $T30$ | 0,59106 | 0,81678 | 0,93792 | 0,98219 | 0,99342 | 0,99389 | 0,99361 | 0,99102 | 0,98608 | 0,98211 |
| $T10$ | 0,43386 | 0,72364 | 0,90503 | 0,98760 | 1,02032 | 1,02316 | 1,03423 | 1,03855 | 1,04060 | 1,04053 |
| LOGISTICA | 0,40470 | 0,70552 | 0,89892 | 0,98946 | 1,02674 | 1,03009 | 1,04359 | 1,04939 | 1,05295 | 1,05373 |
| LAPLACE | 0,25407 | 0,60482 | 0,86719 | 1,00616 | 1,07173 | 1,07824 | 1,10700 | 1,12218 | 1,13531 | 1,14146 |
| $T5$ | 0,15784 | 0,52988 | 0,84686 | 1,02802 | 1,11909 | 1,12847 | 1,17124 | 1,19509 | 1,21712 | 1,22828 |
| $DLG$(-0,20) | 0,06640 | 0,43945 | 0,82826 | 1,07132 | 1,20117 | 1,21499 | 1,27942 | 1,31680 | 1,35279 | 1,37186 |
| $DLG$(-0,24) | 0,02582 | 0,38116 | 0,82177 | 1,11470 | 1,27683 | 1,29437 | 1,37714 | 1,42603 | 1,47398 | 1,49984 |
| $DLG$(-0,249) | 0,01898 | 0,36788 | 0,82116 | 1,12701 | 1,29763 | 1,31616 | 1,40378 | 1,45574 | 1,50687 | 1,53454 |
| Signos | 3,65706 | 2,66710 | 1,94946 | 1,52045 | 1,27849 | 1,25149 | 1,12031 | 1,03865 | 0,95390 | 0,90544 |
| Wilcoxon | 1,52794 | 1,32238 | 1,14625 | 1,02441 | 0,94786 | 0,93889 | 0,89381 | 0,86442 | 0,83266 | 0,81388 |
| $t$–student | 1,37600 | 1,14473 | 1,01117 | 0,98167 | 1,02032 | 1,03009 | 1,10691 | 1,19509 | 1,35279 | 1,49984 |

Tabla 4.4: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(5)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,18563 | 0,45163 | 1,14674 | 2,48228 | 4,33264 | 4,64531 | 6,69552 | 8,63064 | 11,52926 | 13,79659 |
| $DLG$(25) | 0,27138 | 0,50584 | 0,97068 | 1,66483 | 2,45501 | 2,57711 | 3,32368 | 3,96493 | 4,84728 | 5,48946 |
| $DLG$(10) | 0,46019 | 0,62777 | 0,86437 | 1,12200 | 1,35071 | 1,38219 | 1,55880 | 1,69345 | 1,86001 | 1,97065 |
| $DLG$(5) | 0,69966 | 0,79116 | 0,89456 | 0,98607 | 1,05515 | 1,06397 | 1,11081 | 1,14391 | 1,18219 | 1,20621 |
| $DLG$(2,0) | 1,06904 | 1,04622 | 1,02539 | 1,01014 | 1,00014 | 0,99895 | 0,99286 | 0,98881 | 0,98437 | 0,98170 |
| $DLG$(1,5) | 1,11001 | 1,07257 | 1,03959 | 1,01609 | 1,00097 | 0,99917 | 0,99009 | 0,98409 | 0,97755 | 0,97364 |
| $DLG$(1,45) | 1,11087 | 1,07305 | 1,03982 | 1,01618 | 1,00098 | 0,99918 | 0,99005 | 0,98403 | 0,97747 | 0,97355 |
| $DLG$(1,4) | 1,11089 | 1,07299 | 1,03975 | 1,01614 | 1,00097 | 0,99917 | 0,99007 | 0,98407 | 0,97752 | 0,97362 |
| UNIFORME | 1,06904 | 1,04622 | 1,02539 | 1,01014 | 1,00014 | 0,99895 | 0,99286 | 0,98881 | 0,98437 | 0,98170 |
| $DLG$(0,5) | 0,83736 | 0,90567 | 0,95529 | 0,98554 | 1,00299 | 1,00496 | 1,01462 | 1,02071 | 1,02709 | 1,03078 |
| NORMAL | 0,46266 | 0,67768 | 0,85218 | 0,96799 | 1,03881 | 1,04702 | 1,08794 | 1,11436 | 1,14267 | 1,15930 |
| $T30$ | 0,41354 | 0,64621 | 0,83903 | 0,96851 | 1,04821 | 1,05747 | 1,10371 | 1,13363 | 1,16574 | 1,18463 |
| $T10$ | 0,30356 | 0,57252 | 0,80961 | 0,97384 | 1,07660 | 1,08861 | 1,14884 | 1,18800 | 1,23020 | 1,25510 |
| LOGISTICA | 0,28316 | 0,55818 | 0,80414 | 0,97568 | 1,08337 | 1,09598 | 1,15923 | 1,20040 | 1,24479 | 1,27101 |
| LAPLACE | 0,17777 | 0,47852 | 0,77576 | 0,99215 | 1,13084 | 1,14721 | 1,22967 | 1,28367 | 1,34216 | 1,37683 |
| $T5$ | 0,11044 | 0,41922 | 0,75757 | 1,01370 | 1,18081 | 1,20066 | 1,30102 | 1,36707 | 1,43887 | 1,48156 |
| $DLG$(-0,20) | 0,04646 | 0,34768 | 0,74093 | 1,05640 | 1,26742 | 1,29271 | 1,42120 | 1,50630 | 1,59926 | 1,65474 |
| $DLG$(-0,24) | 0,01807 | 0,30156 | 0,73512 | 1,09918 | 1,34725 | 1,37717 | 1,52974 | 1,63125 | 1,74253 | 1,80911 |
| $DLG$(-0,249) | 0,01328 | 0,29106 | 0,73458 | 1,11132 | 1,36920 | 1,40035 | 1,55933 | 1,66523 | 1,78141 | 1,85098 |
| Signos | 2,55871 | 2,11011 | 1,74392 | 1,49927 | 1,34900 | 1,33155 | 1,24445 | 1,18812 | 1,12770 | 1,09215 |
| Wilcoxon | 1,06904 | 1,04622 | 1,02539 | 1,01014 | 1,00014 | 0,99895 | 0,99286 | 0,98881 | 0,98437 | 0,98170 |
| $t$–student | 0,96273 | 0,90567 | 0,90456 | 0,96799 | 1,07660 | 1,09598 | 1,22956 | 1,36707 | 1,59926 | 1,80911 |

Tabla 4.5: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(2{,}5)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,17364 | 0,43168 | 1,11834 | 2,45736 | 4,33202 | 4,65021 | 6,74369 | 8,72830 | 11,71234 | 14,05372 |
| $DLG$(25) | 0,25386 | 0,48350 | 0,94664 | 1,64812 | 2,45466 | 2,57983 | 3,34759 | 4,00980 | 4,92425 | 5,59176 |
| $DLG$(10) | 0,43047 | 0,60004 | 0,84297 | 1,11073 | 1,35052 | 1,38365 | 1,57002 | 1,71261 | 1,88954 | 2,00738 |
| $DLG$(5) | 0,65448 | 0,75621 | 0,87241 | 0,97617 | 1,05500 | 1,06509 | 1,11880 | 1,15685 | 1,20097 | 1,22869 |
| $DLG$(2,5) | 0,93542 | 0,95582 | 0,97524 | 0,98996 | 0,99986 | 1,00106 | 1,00719 | 1,01132 | 1,01588 | 1,01864 |
| $DLG$(1,5) | 1,03832 | 1,02519 | 1,01384 | 1,00589 | 1,00082 | 1,00023 | 0,99721 | 0,99523 | 0,99307 | 0,99179 |
| $DLG$(1,45) | 1,03913 | 1,02565 | 1,01407 | 1,00598 | 1,00084 | 1,00023 | 0,99718 | 0,99517 | 0,99299 | 0,99169 |
| $DLG$(1,4) | 1,03915 | 1,02559 | 1,01400 | 1,00594 | 1,00083 | 1,00023 | 0,99719 | 0,99520 | 0,99304 | 0,99176 |
| UNIFORME | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |
| $DLG$(0,5) | 0,78328 | 0,86566 | 0,93163 | 0,97564 | 1,00285 | 1,00602 | 1,02192 | 1,03226 | 1,04340 | 1,04999 |
| NORMAL | 0,43278 | 0,64775 | 0,83107 | 0,95827 | 1,03867 | 1,04813 | 1,09577 | 1,12697 | 1,16081 | 1,18090 |
| $T30$ | 0,38684 | 0,61766 | 0,81825 | 0,95879 | 1,04806 | 1,05859 | 1,11165 | 1,14646 | 1,18425 | 1,20670 |
| $T10$ | 0,28395 | 0,54723 | 0,78956 | 0,96406 | 1,07644 | 1,08976 | 1,15710 | 1,20144 | 1,24973 | 1,27849 |
| LOGISTICA | 0,26487 | 0,53352 | 0,78422 | 0,96588 | 1,08322 | 1,09714 | 1,16757 | 1,21398 | 1,26456 | 1,29470 |
| LAPLACE | 0,16629 | 0,45738 | 0,75654 | 0,98219 | 1,13068 | 1,14842 | 1,23852 | 1,29820 | 1,36347 | 1,40249 |
| $T5$ | 0,10330 | 0,40070 | 0,73880 | 1,00352 | 1,18064 | 1,20193 | 1,31038 | 1,38254 | 1,46172 | 1,50917 |
| $DLG$(-0,20) | 0,04345 | 0,33232 | 0,72258 | 1,04579 | 1,26724 | 1,29407 | 1,43142 | 1,52334 | 1,62466 | 1,68558 |
| $DLG$(-0,24) | 0,01690 | 0,28824 | 0,71692 | 1,08814 | 1,34706 | 1,37862 | 1,54074 | 1,64971 | 1,77020 | 1,84283 |
| $DLG$(-0,249) | 0,01242 | 0,27820 | 0,71639 | 1,10016 | 1,36901 | 1,40183 | 1,57055 | 1,68407 | 1,80970 | 1,88547 |
| Signos | 2,39346 | 2,01690 | 1,70073 | 1,48422 | 1,34881 | 1,33296 | 1,25341 | 1,20157 | 1,14561 | 1,11251 |
| Wilcoxon | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |
| $t$–student | 0,90056 | 0,86566 | 0,88216 | 0,95827 | 1,07644 | 1,09714 | 1,23841 | 1,38254 | 1,62466 | 1,84283 |

Tabla 4.6: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG$(2,0).

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,16724 | 0,42107 | 1,10307 | 2,44297 | 4,32845 | 4,64916 | 6,76257 | 8,77017 | 11,79407 | 14,17010 |
| $DLG$(25) | 0,24449 | 0,47162 | 0,93372 | 1,63847 | 2,45264 | 2,57924 | 3,35696 | 4,02903 | 4,95862 | 5,63807 |
| $DLG$(10) | 0,41458 | 0,58530 | 0,83146 | 1,10423 | 1,34941 | 1,38334 | 1,57441 | 1,72083 | 1,90273 | 2,02401 |
| $DLG$(5) | 0,63032 | 0,73763 | 0,86050 | 0,97045 | 1,05413 | 1,06485 | 1,12193 | 1,16240 | 1,20935 | 1,23886 |
| $DLG$(2,5) | 0,90089 | 0,93234 | 0,96192 | 0,98416 | 0,99903 | 1,00083 | 1,01001 | 1,01617 | 1,02297 | 1,02707 |
| $DLG$(2,0) | 0,96309 | 0,97543 | 0,98635 | 0,99415 | 0,99918 | 0,99977 | 1,00280 | 1,00480 | 1,00698 | 1,00828 |
| $DLG$(1,45) | 1,00078 | 1,00045 | 1,00022 | 1,00009 | 1,00001 | 1,00001 | 0,99997 | 0,99994 | 0,99992 | 0,99990 |
| $DLG$(1,4) | 1,00079 | 1,00039 | 1,00016 | 1,00005 | 1,00000 | 1,00000 | 0,99999 | 0,99998 | 0,99997 | 0,99997 |
| UNIFORME | 0,96309 | 0,97543 | 0,98635 | 0,99415 | 0,99918 | 0,99977 | 1,00280 | 1,00480 | 1,00698 | 1,00828 |
| $DLG$(0,5) | 0,75437 | 0,84439 | 0,91891 | 0,96993 | 1,00202 | 1,00579 | 1,02478 | 1,03721 | 1,05069 | 1,05869 |
| NORMAL | 0,41681 | 0,63183 | 0,81973 | 0,95266 | 1,03781 | 1,04789 | 1,09884 | 1,13238 | 1,16891 | 1,19068 |
| $T30$ | 0,37256 | 0,60249 | 0,80708 | 0,95317 | 1,04720 | 1,05835 | 1,11476 | 1,15196 | 1,19251 | 1,21670 |
| $T10$ | 0,27347 | 0,53379 | 0,77878 | 0,95842 | 1,07556 | 1,08952 | 1,16034 | 1,20721 | 1,25845 | 1,28908 |
| LOGISTICA | 0,25509 | 0,52041 | 0,77352 | 0,96023 | 1,08232 | 1,09689 | 1,17083 | 1,21981 | 1,27339 | 1,30542 |
| LAPLACE | 0,16015 | 0,44614 | 0,74622 | 0,97644 | 1,12975 | 1,14816 | 1,24198 | 1,30442 | 1,37299 | 1,41411 |
| $T5$ | 0,09949 | 0,39086 | 0,72872 | 0,99764 | 1,17967 | 1,20165 | 1,31405 | 1,38917 | 1,47192 | 1,52167 |
| $DLG$(-0,20) | 0,04185 | 0,32416 | 0,71272 | 1,03967 | 1,26620 | 1,29378 | 1,43543 | 1,53065 | 1,63600 | 1,69954 |
| $DLG$(-0,24) | 0,01628 | 0,28116 | 0,70713 | 1,08177 | 1,34595 | 1,37831 | 1,54506 | 1,65762 | 1,78255 | 1,85809 |
| $DLG$(-0,249) | 0,01197 | 0,27136 | 0,70661 | 1,09372 | 1,36788 | 1,40151 | 1,57495 | 1,69215 | 1,82233 | 1,90109 |
| Signos | 2,30512 | 1,96734 | 1,67751 | 1,47553 | 1,34770 | 1,33265 | 1,25692 | 1,20733 | 1,15360 | 1,12172 |
| Wilcoxon | 0,96309 | 0,97543 | 0,98635 | 0,99415 | 0,99918 | 0,99977 | 1,00280 | 1,00480 | 1,00698 | 1,00828 |
| $t$–student | 0,86732 | 0,84439 | 0,87011 | 0,95266 | 1,07556 | 1,09689 | 1,24188 | 1,38917 | 1,63600 | 1,85809 |

Tabla 4.7: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG$(1,5).

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG(0{,}7)$ | $DLG(0{,}5)$ | $DLG(0{,}3)$ | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG(-0{,}20)$ | $DLG(-0{,}24)$ |
| $DLG(50)$ | 0,16710 | 0,42088 | 1,10283 | 2,44276 | 4,32840 | 4,64914 | 6,76280 | 8,77068 | 11,79503 | 14,17145 |
| $DLG(25)$ | 0,24430 | 0,47140 | 0,93351 | 1,63833 | 2,45261 | 2,57923 | 3,35707 | 4,02926 | 4,95902 | 5,63861 |
| $DLG(10)$ | 0,41426 | 0,58503 | 0,83127 | 1,10413 | 1,34939 | 1,38333 | 1,57446 | 1,72093 | 1,90288 | 2,02420 |
| $DLG(5)$ | 0,62983 | 0,73730 | 0,86031 | 0,97037 | 1,05412 | 1,06484 | 1,12197 | 1,16247 | 1,20945 | 1,23898 |
| $DLG(2{,}5)$ | 0,90019 | 0,93192 | 0,96171 | 0,98408 | 0,99902 | 1,00082 | 1,01005 | 1,01623 | 1,02305 | 1,02717 |
| $DLG(2{,}0)$ | 0,96234 | 0,97499 | 0,98613 | 0,99406 | 0,99916 | 0,99977 | 1,00283 | 1,00485 | 1,00706 | 1,00838 |
| $DLG(1{,}5)$ | 0,99922 | 0,99955 | 0,99978 | 0,99991 | 0,99999 | 0,99999 | 1,00003 | 1,00006 | 1,00008 | 1,00010 |
| $DLG(1{,}4)$ | 1,00001 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99996 | 0,99999 | 1,00000 | 1,00002 | 1,00004 | 1,00006 | 1,00007 |
| UNIFORME | 0,96234 | 0,97499 | 0,98613 | 0,99406 | 0,99916 | 0,99977 | 1,00283 | 1,00485 | 1,00706 | 1,00838 |
| $DLG(0{,}5)$ | 0,75378 | 0,84401 | 0,91871 | 0,96985 | 1,00201 | 1,00579 | 1,02481 | 1,03727 | 1,05077 | 1,05879 |
| NORMAL | 0,41648 | 0,63155 | 0,81955 | 0,95258 | 1,03780 | 1,04789 | 1,09887 | 1,13245 | 1,16901 | 1,19080 |
| $T30$ | 0,37227 | 0,60221 | 0,80690 | 0,95309 | 1,04718 | 1,05834 | 1,11480 | 1,15202 | 1,19261 | 1,21681 |
| $T10$ | 0,27326 | 0,53354 | 0,77861 | 0,95834 | 1,07554 | 1,08951 | 1,16038 | 1,20728 | 1,25855 | 1,28920 |
| LOGISTICA | 0,25490 | 0,52018 | 0,77335 | 0,96014 | 1,08231 | 1,09688 | 1,17087 | 1,21988 | 1,27349 | 1,30555 |
| LAPLACE | 0,16002 | 0,44594 | 0,74605 | 0,97635 | 1,12974 | 1,14816 | 1,24203 | 1,30450 | 1,37310 | 1,41424 |
| $T5$ | 0,09941 | 0,39068 | 0,72856 | 0,99756 | 1,17965 | 1,20165 | 1,31409 | 1,38925 | 1,47204 | 1,52181 |
| $DLG(-0{,}20)$ | 0,04182 | 0,32401 | 0,71256 | 1,03958 | 1,26618 | 1,29377 | 1,43548 | 1,53074 | 1,63613 | 1,69970 |
| $DLG(-0{,}24)$ | 0,01626 | 0,28103 | 0,70697 | 1,08168 | 1,34593 | 1,37830 | 1,54511 | 1,65772 | 1,78270 | 1,85827 |
| $DLG(-0{,}249)$ | 0,01196 | 0,27124 | 0,70646 | 1,09362 | 1,36786 | 1,40150 | 1,57500 | 1,69225 | 1,82248 | 1,90127 |
| Signos | 2,30333 | 1,96645 | 1,67714 | 1,47540 | 1,34768 | 1,33265 | 1,25696 | 1,20740 | 1,15369 | 1,12183 |
| Rangos | 0,96234 | 0,97499 | 0,98613 | 0,99406 | 0,99916 | 0,99977 | 1,00283 | 1,00485 | 1,00706 | 1,00838 |
| $t$–student | 0,86665 | 0,84401 | 0,86992 | 0,95258 | 1,07554 | 1,09688 | 1,24192 | 1,38925 | 1,63613 | 1,85827 |

Tabla 4.8: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(1{,}45)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG(0{,}7)$ | $DLG(0{,}5)$ | $DLG(0{,}3)$ | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG(-0{,}20)$ | $DLG(-0{,}24)$ |
| $DLG(50)$ | 0,16710 | 0,42091 | 1,10290 | 2,44286 | 4,32843 | 4,64916 | 6,76267 | 8,77036 | 11,79437 | 14,17047 |
| $DLG(25)$ | 0,24430 | 0,47143 | 0,93357 | 1,63839 | 2,45263 | 2,57924 | 3,35701 | 4,02912 | 4,95874 | 5,63822 |
| $DLG(10)$ | 0,41425 | 0,58507 | 0,83133 | 1,10418 | 1,34940 | 1,38334 | 1,57443 | 1,72086 | 1,90278 | 2,02406 |
| $DLG(5)$ | 0,62982 | 0,73735 | 0,86036 | 0,97041 | 1,05413 | 1,06485 | 1,12195 | 1,16242 | 1,20938 | 1,23890 |
| $DLG(2{,}5)$ | 0,90018 | 0,93197 | 0,96177 | 0,98412 | 0,99903 | 1,00083 | 1,01003 | 1,01619 | 1,02299 | 1,02710 |
| $DLG(2{,}0)$ | 0,96233 | 0,97505 | 0,98619 | 0,99410 | 0,99917 | 0,99977 | 1,00281 | 1,00482 | 1,00700 | 1,00831 |
| $DLG(1{,}5)$ | 0,99921 | 0,99961 | 0,99984 | 0,99995 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00001 | 1,00002 | 1,00003 | 1,00003 |
| $DLG(1{,}45)$ | 0,99999 | 1,00006 | 1,00006 | 1,00004 | 1,00001 | 1,00000 | 0,99998 | 0,99996 | 0,99994 | 0,99993 |
| UNIFORME | 0,96233 | 0,97505 | 0,98619 | 0,99410 | 0,99917 | 0,99977 | 1,00281 | 1,00482 | 1,00700 | 1,00831 |
| $DLG(0{,}5)$ | 0,75377 | 0,84406 | 0,91877 | 0,96988 | 1,00202 | 1,00579 | 1,02479 | 1,03723 | 1,05071 | 1,05872 |
| NORMAL | 0,41648 | 0,63158 | 0,81960 | 0,95262 | 1,03781 | 1,04789 | 1,09885 | 1,13240 | 1,16894 | 1,19071 |
| $T30$ | 0,37226 | 0,60225 | 0,80695 | 0,95313 | 1,04719 | 1,05835 | 1,11478 | 1,15198 | 1,19254 | 1,21673 |
| $T10$ | 0,27325 | 0,53358 | 0,77866 | 0,95837 | 1,07555 | 1,08952 | 1,16036 | 1,20723 | 1,25848 | 1,28911 |
| LOGISTICA | 0,25489 | 0,52021 | 0,77340 | 0,96018 | 1,08232 | 1,09689 | 1,17085 | 1,21983 | 1,27342 | 1,30546 |
| LAPLACE | 0,16002 | 0,44596 | 0,74610 | 0,97639 | 1,12975 | 1,14816 | 1,24200 | 1,30445 | 1,37302 | 1,41414 |
| $T5$ | 0,09941 | 0,39070 | 0,72860 | 0,99759 | 1,17966 | 1,20165 | 1,31407 | 1,38920 | 1,47195 | 1,52170 |
| $DLG(-0{,}20)$ | 0,04182 | 0,32403 | 0,71261 | 1,03962 | 1,26619 | 1,29378 | 1,43545 | 1,53068 | 1,63604 | 1,69959 |
| $DLG(-0{,}24)$ | 0,01626 | 0,28105 | 0,70702 | 1,08172 | 1,34595 | 1,37831 | 1,54508 | 1,65766 | 1,78260 | 1,85814 |
| $DLG(-0{,}249)$ | 0,01196 | 0,27126 | 0,70650 | 1,09366 | 1,36787 | 1,40151 | 1,57497 | 1,69219 | 1,82237 | 1,90114 |
| Signos | 2,30330 | 1,96657 | 1,67725 | 1,47546 | 1,34769 | 1,33265 | 1,25693 | 1,20736 | 1,15363 | 1,12175 |
| Wilcoxon | 0,96233 | 0,97505 | 0,98619 | 0,99410 | 0,99917 | 0,99977 | 1,00281 | 1,00482 | 1,00700 | 1,00831 |
| $t$–student | 0,86663 | 0,84406 | 0,86998 | 0,95262 | 1,07555 | 1,09689 | 1,24189 | 1,38920 | 1,63604 | 1,85814 |

Tabla 4.9: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(1{,}4)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T$10 | LOGISTICA | LAPLACE | $T$5 | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,17364 | 0,43168 | 1,11834 | 2,45736 | 4,33202 | 4,65021 | 6,74369 | 8,72830 | 11,71234 | 14,05372 |
| $DLG$(25) | 0,25386 | 0,48350 | 0,94664 | 1,64812 | 2,45466 | 2,57983 | 3,34759 | 4,00980 | 4,92425 | 5,59176 |
| $DLG$(10) | 0,43047 | 0,60004 | 0,84297 | 1,11073 | 1,35052 | 1,38365 | 1,57002 | 1,71261 | 1,88954 | 2,00738 |
| $DLG$(5) | 0,65448 | 0,75621 | 0,87241 | 0,97617 | 1,05500 | 1,06509 | 1,11880 | 1,15685 | 1,20097 | 1,22869 |
| $DLG$(2,5) | 0,93542 | 0,95582 | 0,97524 | 0,98996 | 0,99986 | 1,00106 | 1,00719 | 1,01132 | 1,01588 | 1,01864 |
| $DLG$(2,0) | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |
| $DLG$(1,5) | 1,03832 | 1,02519 | 1,01384 | 1,00589 | 1,00082 | 1,00023 | 0,99721 | 0,99523 | 0,99307 | 0,99179 |
| $DLG$(1,45) | 1,03913 | 1,02565 | 1,01407 | 1,00598 | 1,00084 | 1,00023 | 0,99718 | 0,99517 | 0,99299 | 0,99169 |
| $DLG$(1,4) | 1,03915 | 1,02559 | 1,01400 | 1,00594 | 1,00083 | 1,00023 | 0,99719 | 0,99520 | 0,99304 | 0,99176 |
| $DLG$(0,5) | 0,78328 | 0,86566 | 0,93163 | 0,97564 | 1,00285 | 1,00602 | 1,02192 | 1,03226 | 1,04340 | 1,04999 |
| NORMAL | 0,43278 | 0,64775 | 0,83107 | 0,95827 | 1,03867 | 1,04813 | 1,09577 | 1,12697 | 1,16081 | 1,18090 |
| $T$30 | 0,38684 | 0,61766 | 0,81825 | 0,95879 | 1,04806 | 1,05859 | 1,11165 | 1,14646 | 1,18425 | 1,20670 |
| $T$10 | 0,28395 | 0,54723 | 0,78956 | 0,96406 | 1,07644 | 1,08976 | 1,15710 | 1,20144 | 1,24973 | 1,27849 |
| LOGISTICA | 0,26487 | 0,53352 | 0,78422 | 0,96588 | 1,08322 | 1,09714 | 1,16757 | 1,21398 | 1,26456 | 1,29470 |
| LAPLACE | 0,16629 | 0,45738 | 0,75654 | 0,98219 | 1,13068 | 1,14842 | 1,23852 | 1,29820 | 1,36347 | 1,40249 |
| $T$5 | 0,10330 | 0,40070 | 0,73880 | 1,00352 | 1,18064 | 1,20193 | 1,31038 | 1,38254 | 1,46172 | 1,50917 |
| $DLG$(-0,20) | 0,04345 | 0,33232 | 0,72258 | 1,04579 | 1,26724 | 1,29407 | 1,43142 | 1,52334 | 1,62466 | 1,68558 |
| $DLG$(-0,24) | 0,01690 | 0,28824 | 0,71692 | 1,08814 | 1,34706 | 1,37862 | 1,54074 | 1,64971 | 1,77020 | 1,84283 |
| $DLG$(-0,249) | 0,01242 | 0,27820 | 0,71639 | 1,10016 | 1,36901 | 1,40183 | 1,57055 | 1,68407 | 1,80970 | 1,88547 |
| Signos | 2,39346 | 2,01690 | 1,70073 | 1,48422 | 1,34881 | 1,33296 | 1,25341 | 1,20157 | 1,14561 | 1,11251 |
| Wilcoxon | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |
| $t$–student | 0,90056 | 0,86566 | 0,88216 | 0,95827 | 1,07644 | 1,09714 | 1,23841 | 1,38254 | 1,62466 | 1,84283 |

Tabla 4.10: Eficiencia de la prueba con función de puntajes UNIFORME.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T$10 | LOGISTICA | LAPLACE | $T$5 | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,22169 | 0,49867 | 1,20042 | 2,51871 | 4,31972 | 4,62238 | 6,59906 | 8,45556 | 11,22512 | 13,38456 |
| $DLG$(25) | 0,32410 | 0,55853 | 1,01611 | 1,68926 | 2,44769 | 2,56439 | 3,27579 | 3,88450 | 4,71941 | 5,32551 |
| $DLG$(10) | 0,54957 | 0,69316 | 0,90483 | 1,13846 | 1,34668 | 1,37537 | 1,53634 | 1,65910 | 1,81094 | 1,91180 |
| $DLG$(5) | 0,83556 | 0,87357 | 0,93643 | 1,00054 | 1,05201 | 1,05872 | 1,09481 | 1,12070 | 1,15101 | 1,17018 |
| $DLG$(2,5) | 1,19423 | 1,10416 | 1,04681 | 1,01467 | 0,99702 | 0,99506 | 0,98559 | 0,97971 | 0,97362 | 0,97013 |
| $DLG$(2,0) | 1,27668 | 1,15519 | 1,07339 | 1,02497 | 0,99716 | 0,99401 | 0,97855 | 0,96875 | 0,95840 | 0,95239 |
| $DLG$(1,5) | 1,32561 | 1,18429 | 1,08825 | 1,03100 | 0,99798 | 0,99424 | 0,97582 | 0,96413 | 0,95176 | 0,94456 |
| $DLG$(1,45) | 1,32664 | 1,18482 | 1,08849 | 1,03109 | 0,99800 | 0,99424 | 0,97579 | 0,96407 | 0,95168 | 0,94447 |
| $DLG$(1,4) | 1,32666 | 1,18475 | 1,08841 | 1,03105 | 0,99799 | 0,99424 | 0,97581 | 0,96411 | 0,95173 | 0,94454 |
| UNIFORME | 1,27668 | 1,15519 | 1,07339 | 1,02497 | 0,99716 | 0,99401 | 0,97855 | 0,96875 | 0,95840 | 0,95239 |
| NORMAL | 0,55253 | 0,74827 | 0,89206 | 0,98219 | 1,03572 | 1,04185 | 1,07227 | 1,09176 | 1,11252 | 1,12467 |
| $T$30 | 0,49387 | 0,71352 | 0,87830 | 0,98272 | 1,04509 | 1,05225 | 1,08781 | 1,11063 | 1,13498 | 1,14925 |
| $T$10 | 0,36252 | 0,63215 | 0,84750 | 0,98813 | 1,07339 | 1,08324 | 1,13228 | 1,16390 | 1,19774 | 1,21762 |
| LOGISTICA | 0,33816 | 0,61632 | 0,84178 | 0,99000 | 1,08014 | 1,09057 | 1,14253 | 1,17605 | 1,21196 | 1,23305 |
| LAPLACE | 0,21229 | 0,52836 | 0,81207 | 1,00671 | 1,12747 | 1,14155 | 1,21195 | 1,25763 | 1,30675 | 1,33571 |
| $T$5 | 0,13189 | 0,46289 | 0,79302 | 1,02857 | 1,17729 | 1,19473 | 1,28228 | 1,33934 | 1,40091 | 1,43731 |
| $DLG$(-0,20) | 0,05548 | 0,38389 | 0,77561 | 1,07190 | 1,26364 | 1,28632 | 1,40072 | 1,47574 | 1,55707 | 1,60533 |
| $DLG$(-0,24) | 0,02158 | 0,33297 | 0,76953 | 1,11531 | 1,34324 | 1,37037 | 1,50770 | 1,59816 | 1,69656 | 1,75509 |
| $DLG$(-0,249) | 0,01586 | 0,32137 | 0,76897 | 1,12762 | 1,36512 | 1,39344 | 1,53687 | 1,63145 | 1,73442 | 1,79570 |
| Signos | 3,05569 | 2,32990 | 1,82554 | 1,52127 | 1,34498 | 1,32498 | 1,22653 | 1,16402 | 1,09795 | 1,05954 |
| Wilcoxon | 1,27668 | 1,15519 | 1,07339 | 1,02497 | 0,99716 | 0,99401 | 0,97855 | 0,96875 | 0,95840 | 0,95239 |
| $t$–student | 1,14973 | 1,00000 | 0,94690 | 0,98219 | 1,07339 | 1,09057 | 1,21185 | 1,33934 | 1,55707 | 1,75509 |

Tabla 4.11: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(0{,}5)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,40123 | 0,66643 | 1,34566 | 2,56437 | 4,17075 | 4,43668 | 6,15430 | 7,74490 | 10,08978 | 11,90082 |
| $DLG$(25) | 0,58657 | 0,74643 | 1,13906 | 1,71988 | 2,36329 | 2,46137 | 3,05502 | 3,55802 | 4,24208 | 4,73516 |
| $DLG$(10) | 0,99465 | 0,92635 | 1,01431 | 1,15910 | 1,30024 | 1,32012 | 1,43280 | 1,51965 | 1,62777 | 1,69987 |
| $DLG$(5) | 1,51225 | 1,16745 | 1,04974 | 1,01868 | 1,01573 | 1,01618 | 1,02102 | 1,02651 | 1,03459 | 1,04046 |
| $DLG$(2,5) | 2,16141 | 1,47561 | 1,17347 | 1,03307 | 0,96264 | 0,95509 | 0,91917 | 0,89737 | 0,87515 | 0,86259 |
| $DLG$(2,0) | 2,31063 | 1,54381 | 1,20326 | 1,04355 | 0,96277 | 0,95408 | 0,91260 | 0,88733 | 0,86147 | 0,84681 |
| $DLG$(1,5) | 2,39918 | 1,58270 | 1,21992 | 1,04969 | 0,96357 | 0,95430 | 0,91005 | 0,88310 | 0,85550 | 0,83985 |
| $DLG$(1,45) | 2,40105 | 1,58341 | 1,22019 | 1,04978 | 0,96358 | 0,95430 | 0,91002 | 0,88304 | 0,85543 | 0,83977 |
| $DLG$(1,4) | 2,40108 | 1,58332 | 1,22011 | 1,04974 | 0,96357 | 0,95430 | 0,91004 | 0,88308 | 0,85547 | 0,83983 |
| UNIFORME | 2,31063 | 1,54381 | 1,20326 | 1,04355 | 0,96277 | 0,95408 | 0,91260 | 0,88733 | 0,86147 | 0,84681 |
| $DLG$(0,5) | 1,80987 | 1,33642 | 1,12100 | 1,01813 | 0,96551 | 0,95983 | 0,93260 | 0,91595 | 0,89886 | 0,88915 |
| $T30$ | 0,89384 | 0,95355 | 0,98457 | 1,00054 | 1,00905 | 1,00998 | 1,01449 | 1,01729 | 1,02019 | 1,02185 |
| $T10$ | 0,65611 | 0,84482 | 0,95005 | 1,00605 | 1,03637 | 1,03972 | 1,05597 | 1,06608 | 1,07660 | 1,08264 |
| LOGISTICA | 0,61202 | 0,82366 | 0,94363 | 1,00794 | 1,04289 | 1,04676 | 1,06552 | 1,07721 | 1,08938 | 1,09637 |
| LAPLACE | 0,38423 | 0,70610 | 0,91032 | 1,02496 | 1,08859 | 1,09569 | 1,13027 | 1,15193 | 1,17458 | 1,18764 |
| $T5$ | 0,23870 | 0,61861 | 0,88898 | 1,04722 | 1,13669 | 1,14674 | 1,19586 | 1,22677 | 1,25922 | 1,27798 |
| $DLG$(-0,20) | 0,10041 | 0,51304 | 0,86946 | 1,09133 | 1,22006 | 1,23465 | 1,30632 | 1,35171 | 1,39959 | 1,42737 |
| $DLG$(-0,24) | 0,03905 | 0,44499 | 0,86264 | 1,13552 | 1,29691 | 1,31532 | 1,40609 | 1,46384 | 1,52496 | 1,56053 |
| $DLG$(-0,249) | 0,02871 | 0,42949 | 0,86201 | 1,14806 | 1,31804 | 1,33746 | 1,43329 | 1,49433 | 1,55899 | 1,59664 |
| Signos | 5,53040 | 3,11371 | 2,04643 | 1,54885 | 1,29860 | 1,27175 | 1,14386 | 1,06619 | 0,98690 | 0,94208 |
| Wilcoxon | 2,31063 | 1,54381 | 1,20326 | 1,04355 | 0,96277 | 0,95408 | 0,91260 | 0,88733 | 0,86147 | 0,84681 |
| $t$–student | 2,08086 | 1,33642 | 1,06147 | 1,00000 | 1,03637 | 1,04676 | 1,13017 | 1,22677 | 1,39959 | 1,56053 |

Tabla 4.12: Eficiencia de la prueba con función de puntajes NORMAL.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,44888 | 0,69889 | 1,36675 | 2,56299 | 4,13337 | 4,39284 | 6,06638 | 7,61327 | 9,89011 | 11,64637 |
| $DLG$(25) | 0,65624 | 0,78279 | 1,15691 | 1,71896 | 2,34210 | 2,43705 | 3,01137 | 3,49755 | 4,15813 | 4,63391 |
| $DLG$(10) | 1,11279 | 0,97147 | 1,03021 | 1,15847 | 1,28859 | 1,30707 | 1,41233 | 1,49383 | 1,59556 | 1,66353 |
| $DLG$(5) | 1,69187 | 1,22432 | 1,06619 | 1,01813 | 1,00662 | 1,00614 | 1,00643 | 1,00906 | 1,01412 | 1,01822 |
| $DLG$(2,5) | 2,41812 | 1,54749 | 1,19186 | 1,03251 | 0,95401 | 0,94565 | 0,90603 | 0,88212 | 0,85783 | 0,84415 |
| $DLG$(2,0) | 2,58507 | 1,61901 | 1,22212 | 1,04298 | 0,95414 | 0,94465 | 0,89956 | 0,87225 | 0,84442 | 0,82870 |
| $DLG$(1,5) | 2,68414 | 1,65979 | 1,23904 | 1,04913 | 0,95493 | 0,94487 | 0,89705 | 0,86809 | 0,83857 | 0,82190 |
| $DLG$(1,45) | 2,68623 | 1,66054 | 1,23931 | 1,04922 | 0,95494 | 0,94487 | 0,89702 | 0,86804 | 0,83850 | 0,82182 |
| $DLG$(1,4) | 2,68627 | 1,66044 | 1,23923 | 1,04918 | 0,95493 | 0,94487 | 0,89704 | 0,86807 | 0,83855 | 0,82188 |
| UNIFORME | 2,58507 | 1,61901 | 1,22212 | 1,04298 | 0,95414 | 0,94465 | 0,89956 | 0,87225 | 0,84442 | 0,82870 |
| $DLG$(0,5) | 2,02483 | 1,40151 | 1,13856 | 1,01758 | 0,95686 | 0,95034 | 0,91928 | 0,90039 | 0,88107 | 0,87014 |
| NORMAL | 1,11877 | 1,04871 | 1,01567 | 0,99946 | 0,99104 | 0,99012 | 0,98571 | 0,98300 | 0,98021 | 0,97862 |
| $T10$ | 0,73403 | 0,88597 | 0,96493 | 1,00550 | 1,02708 | 1,02945 | 1,04089 | 1,04796 | 1,05530 | 1,05949 |
| LOGISTICA | 0,68471 | 0,86378 | 0,95842 | 1,00740 | 1,03354 | 1,03642 | 1,05030 | 1,05890 | 1,06782 | 1,07292 |
| LAPLACE | 0,42986 | 0,74050 | 0,92459 | 1,02441 | 1,07883 | 1,08486 | 1,11412 | 1,13235 | 1,15134 | 1,16225 |
| $T5$ | 0,26705 | 0,64874 | 0,90291 | 1,04665 | 1,12650 | 1,13540 | 1,17877 | 1,20592 | 1,23430 | 1,25065 |
| $DLG$(-0,20) | 0,11233 | 0,53803 | 0,88308 | 1,09075 | 1,20913 | 1,22245 | 1,28765 | 1,32874 | 1,37189 | 1,39685 |
| $DLG$(-0,24) | 0,04369 | 0,46666 | 0,87616 | 1,13491 | 1,28529 | 1,30232 | 1,38600 | 1,43896 | 1,49479 | 1,52716 |
| $DLG$(-0,249) | 0,03212 | 0,45041 | 0,87552 | 1,14745 | 1,30623 | 1,32424 | 1,41281 | 1,46893 | 1,52814 | 1,56250 |
| Signos | 6,18727 | 3,26538 | 2,07850 | 1,54802 | 1,28696 | 1,25918 | 1,12752 | 1,04807 | 0,96737 | 0,92194 |
| Wilcoxon | 2,58507 | 1,61901 | 1,22212 | 1,04298 | 0,95414 | 0,94465 | 0,89956 | 0,87225 | 0,84442 | 0,82870 |
| $t$–student | 2,32801 | 1,40151 | 1,07810 | 0,99946 | 1,02708 | 1,03642 | 1,11403 | 1,20592 | 1,37189 | 1,52716 |

Tabla 4.13: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $T30$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,61153 | 0,78884 | 1,41642 | 2,54896 | 4,02438 | 4,26717 | 5,82809 | 7,26484 | 9,37189 | 10,99241 |
| $DLG$(25) | 0,89402 | 0,88354 | 1,19895 | 1,70955 | 2,28035 | 2,36733 | 2,89308 | 3,33748 | 3,94025 | 4,37372 |
| $DLG$(10) | 1,51599 | 1,09650 | 1,06764 | 1,15213 | 1,25461 | 1,26968 | 1,35685 | 1,42546 | 1,51196 | 1,57012 |
| $DLG$(5) | 2,30489 | 1,38189 | 1,10493 | 1,01256 | 0,98008 | 0,97736 | 0,96690 | 0,96288 | 0,96098 | 0,96104 |
| $DLG$(2,5) | 3,29430 | 1,74666 | 1,23517 | 1,02686 | 0,92885 | 0,91860 | 0,87045 | 0,84175 | 0,81288 | 0,79675 |
| $DLG$(2,0) | 3,52173 | 1,82739 | 1,26653 | 1,03728 | 0,92898 | 0,91763 | 0,86423 | 0,83233 | 0,80017 | 0,78217 |
| $DLG$(1,5) | 3,65670 | 1,87341 | 1,28406 | 1,04338 | 0,92975 | 0,91784 | 0,86182 | 0,82836 | 0,79463 | 0,77575 |
| $DLG$(1,45) | 3,65955 | 1,87426 | 1,28435 | 1,04347 | 0,92976 | 0,91784 | 0,86179 | 0,82831 | 0,79456 | 0,77567 |
| $DLG$(1,4) | 3,65959 | 1,87415 | 1,28426 | 1,04343 | 0,92975 | 0,91784 | 0,86180 | 0,82834 | 0,79461 | 0,77573 |
| UNIFORME | 3,52173 | 1,82739 | 1,26653 | 1,03728 | 0,92898 | 0,91763 | 0,86423 | 0,83233 | 0,80017 | 0,78217 |
| $DLG$(0,5) | 2,75850 | 1,58189 | 1,17994 | 1,01201 | 0,93163 | 0,92316 | 0,88317 | 0,85918 | 0,83490 | 0,82128 |
| NORMAL | 1,52415 | 1,18368 | 1,05258 | 0,99399 | 0,96491 | 0,96179 | 0,94699 | 0,93802 | 0,92885 | 0,92367 |
| $T30$ | 1,36233 | 1,12871 | 1,03634 | 0,99453 | 0,97363 | 0,97139 | 0,96072 | 0,95423 | 0,94760 | 0,94385 |
| LOGISTICA | 0,93280 | 0,97495 | 0,99325 | 1,00189 | 1,00629 | 1,00677 | 1,00904 | 1,01044 | 1,01187 | 1,01268 |
| LAPLACE | 0,58562 | 0,83580 | 0,95819 | 1,01880 | 1,05039 | 1,05383 | 1,07036 | 1,08053 | 1,09101 | 1,09699 |
| $T5$ | 0,36381 | 0,73223 | 0,93572 | 1,04092 | 1,09680 | 1,10292 | 1,13247 | 1,15073 | 1,16963 | 1,18043 |
| $DLG$(-0,20) | 0,15304 | 0,60728 | 0,91517 | 1,08478 | 1,17725 | 1,18748 | 1,23708 | 1,26792 | 1,30001 | 1,31841 |
| $DLG$(-0,24) | 0,05952 | 0,52672 | 0,90800 | 1,12870 | 1,25140 | 1,26507 | 1,33156 | 1,37310 | 1,41646 | 1,44141 |
| $DLG$(-0,249) | 0,04376 | 0,50838 | 0,90733 | 1,14116 | 1,27179 | 1,28636 | 1,35732 | 1,40171 | 1,44807 | 1,47476 |
| Signos | 8,42914 | 3,68565 | 2,15403 | 1,53954 | 1,25303 | 1,22316 | 1,08323 | 1,00010 | 0,91668 | 0,87017 |
| Wilcoxon | 3,52173 | 1,82739 | 1,26653 | 1,03728 | 0,92898 | 0,91763 | 0,86423 | 0,83233 | 0,80017 | 0,78217 |
| $t$–student | 3,17153 | 1,58189 | 1,11728 | 0,99399 | 1,00000 | 1,00677 | 1,07027 | 1,15073 | 1,30001 | 1,44141 |

Tabla 4.14: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $T10$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,65558 | 0,80911 | 1,42605 | 2,54416 | 3,99922 | 4,23849 | 5,77585 | 7,18980 | 9,26198 | 10,85479 |
| $DLG$(25) | 0,95843 | 0,90624 | 1,20710 | 1,70633 | 2,26609 | 2,35141 | 2,86715 | 3,30301 | 3,89404 | 4,31896 |
| $DLG$(10) | 1,62520 | 1,12468 | 1,07490 | 1,14996 | 1,24677 | 1,26115 | 1,34469 | 1,41074 | 1,49423 | 1,55046 |
| $DLG$(5) | 2,47094 | 1,41740 | 1,11245 | 1,01065 | 0,97395 | 0,97079 | 0,95823 | 0,95294 | 0,94971 | 0,94901 |
| $DLG$(2,5) | 3,53161 | 1,79154 | 1,24357 | 1,02493 | 0,92305 | 0,91242 | 0,86264 | 0,83305 | 0,80335 | 0,78677 |
| $DLG$(2,0) | 3,77543 | 1,87434 | 1,27515 | 1,03532 | 0,92318 | 0,91146 | 0,85648 | 0,82373 | 0,79079 | 0,77238 |
| $DLG$(1,5) | 3,92012 | 1,92155 | 1,29280 | 1,04142 | 0,92394 | 0,91167 | 0,85409 | 0,81980 | 0,78531 | 0,76603 |
| $DLG$(1,45) | 3,92318 | 1,92242 | 1,29308 | 1,04151 | 0,92395 | 0,91167 | 0,85406 | 0,81975 | 0,78524 | 0,76596 |
| $DLG$(1,4) | 3,92323 | 1,92230 | 1,29300 | 1,04147 | 0,92394 | 0,91167 | 0,85408 | 0,81978 | 0,78529 | 0,76602 |
| UNIFORME | 3,77543 | 1,87434 | 1,27515 | 1,03532 | 0,92318 | 0,91146 | 0,85648 | 0,82373 | 0,79079 | 0,77238 |
| $DLG$(0,5) | 2,95722 | 1,62254 | 1,18796 | 1,01011 | 0,92581 | 0,91695 | 0,87525 | 0,85030 | 0,82511 | 0,81099 |
| NORMAL | 1,63394 | 1,21410 | 1,05974 | 0,99212 | 0,95887 | 0,95533 | 0,93851 | 0,92833 | 0,91796 | 0,91210 |
| $T30$ | 1,46048 | 1,15771 | 1,04339 | 0,99265 | 0,96755 | 0,96486 | 0,95211 | 0,94438 | 0,93649 | 0,93203 |
| $T10$ | 1,07204 | 1,02569 | 1,00680 | 0,99812 | 0,99375 | 0,99328 | 0,99104 | 0,98967 | 0,98827 | 0,98748 |
| LAPLACE | 0,62780 | 0,85728 | 0,96470 | 1,01688 | 1,04382 | 1,04675 | 1,06077 | 1,06937 | 1,07822 | 1,08326 |
| $T5$ | 0,39002 | 0,75105 | 0,94208 | 1,03896 | 1,08994 | 1,09551 | 1,12232 | 1,13884 | 1,15591 | 1,16565 |
| $DLG$(-0,20) | 0,16406 | 0,62288 | 0,92140 | 1,08273 | 1,16989 | 1,17950 | 1,22599 | 1,25483 | 1,28476 | 1,30191 |
| $DLG$(-0,24) | 0,06381 | 0,54026 | 0,91418 | 1,12658 | 1,24358 | 1,25656 | 1,31962 | 1,35892 | 1,39985 | 1,42336 |
| $DLG$(-0,249) | 0,04691 | 0,52144 | 0,91350 | 1,13902 | 1,26383 | 1,27771 | 1,34515 | 1,38723 | 1,43109 | 1,45630 |
| Signos | 9,03637 | 3,78035 | 2,16868 | 1,53665 | 1,24519 | 1,21494 | 1,07352 | 0,98977 | 0,90593 | 0,85928 |
| Wilcoxon | 3,77543 | 1,87434 | 1,27515 | 1,03532 | 0,92318 | 0,91146 | 0,85648 | 0,82373 | 0,79079 | 0,77238 |
| $t$–student | 3,40001 | 1,62254 | 1,12488 | 0,99212 | 0,99375 | 1,00000 | 1,06068 | 1,13884 | 1,28476 | 1,42336 |

Tabla 4.15: Eficiencia de la prueba con función de puntajes LOGÍSTICA.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 1,04425 | 0,94382 | 1,47822 | 2,50193 | 3,83133 | 4,04921 | 5,44498 | 6,72341 | 8,59008 | 10,02053 |
| $DLG$(25) | 1,52664 | 1,05711 | 1,25127 | 1,67801 | 2,17095 | 2,24641 | 2,70290 | 3,08874 | 3,61155 | 3,98702 |
| $DLG$(10) | 2,58872 | 1,31192 | 1,11423 | 1,13088 | 1,19443 | 1,20483 | 1,26766 | 1,31922 | 1,38583 | 1,43130 |
| $DLG$(5) | 3,93585 | 1,65337 | 1,15315 | 0,99387 | 0,93307 | 0,92744 | 0,90334 | 0,89112 | 0,88082 | 0,87607 |
| $DLG$(2,5) | 5,62536 | 2,08980 | 1,28907 | 1,00791 | 0,88429 | 0,87168 | 0,81323 | 0,77902 | 0,74507 | 0,72630 |
| $DLG$(2,0) | 6,01373 | 2,18638 | 1,32180 | 1,01814 | 0,88442 | 0,87076 | 0,80742 | 0,77030 | 0,73342 | 0,71302 |
| $DLG$(1,5) | 6,24419 | 2,24145 | 1,34009 | 1,02413 | 0,88515 | 0,87095 | 0,80516 | 0,76662 | 0,72834 | 0,70716 |
| $DLG$(1,45) | 6,24906 | 2,24247 | 1,34039 | 1,02422 | 0,88516 | 0,87096 | 0,80514 | 0,76658 | 0,72828 | 0,70709 |
| $DLG$(1,4) | 6,24914 | 2,24233 | 1,34030 | 1,02418 | 0,88515 | 0,87096 | 0,80515 | 0,76661 | 0,72832 | 0,70714 |
| UNIFORME | 6,01373 | 2,18638 | 1,32180 | 1,01814 | 0,88442 | 0,87076 | 0,80742 | 0,77030 | 0,73342 | 0,71302 |
| $DLG$(0,5) | 4,71043 | 1,89266 | 1,23143 | 0,99334 | 0,88694 | 0,87600 | 0,82511 | 0,79515 | 0,76526 | 0,74866 |
| NORMAL | 2,60264 | 1,41622 | 1,09851 | 0,97565 | 0,91862 | 0,91267 | 0,88474 | 0,86811 | 0,85136 | 0,84200 |
| $T30$ | 2,32633 | 1,35044 | 1,08156 | 0,97618 | 0,92693 | 0,92177 | 0,89757 | 0,88312 | 0,86855 | 0,86040 |
| $T10$ | 1,70761 | 1,19645 | 1,04364 | 0,98155 | 0,95203 | 0,94892 | 0,93426 | 0,92547 | 0,91658 | 0,91159 |
| LOGISTICA | 1,59286 | 1,16648 | 1,03659 | 0,98340 | 0,95802 | 0,95534 | 0,94271 | 0,93513 | 0,92746 | 0,92314 |
| $T5$ | 0,62125 | 0,87609 | 0,97655 | 1,02172 | 1,04418 | 1,04659 | 1,05803 | 1,06497 | 1,07205 | 1,07606 |
| $DLG$(-0,20) | 0,26133 | 0,72658 | 0,95511 | 1,06476 | 1,12077 | 1,12682 | 1,15575 | 1,17343 | 1,19156 | 1,20185 |
| $DLG$(-0,24) | 0,10164 | 0,63020 | 0,94762 | 1,10788 | 1,19137 | 1,20045 | 1,24402 | 1,27077 | 1,29830 | 1,31397 |
| $DLG$(-0,249) | 0,07472 | 0,60825 | 0,94693 | 1,12011 | 1,21078 | 1,22065 | 1,26809 | 1,29724 | 1,32727 | 1,34437 |
| Signos | 14,39364 | 4,40971 | 2,24802 | 1,51114 | 1,19292 | 1,16068 | 1,01202 | 0,92557 | 0,84021 | 0,79324 |
| Wilcoxon | 6,01373 | 2,18638 | 1,32180 | 1,01814 | 0,88442 | 0,87076 | 0,80742 | 0,77030 | 0,73342 | 0,71302 |
| $t$-student | 5,41572 | 1,89266 | 1,16603 | 0,97565 | 0,95203 | 0,95534 | 0,99991 | 1,06497 | 1,19156 | 1,31397 |

Tabla 4.16: Eficiencia de la prueba con función de puntajes LAPLACE.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 1,68090 | 1,07731 | 1,51372 | 2,44875 | 3,66921 | 3,86897 | 5,14635 | 6,31325 | 8,01273 | 9,31223 |
| $DLG$(25) | 2,45738 | 1,20663 | 1,28131 | 1,64234 | 2,07909 | 2,14641 | 2,55467 | 2,90032 | 3,36882 | 3,70520 |
| $DLG$(10) | 4,16698 | 1,49748 | 1,14099 | 1,10684 | 1,14389 | 1,15120 | 1,19814 | 1,23874 | 1,29269 | 1,33013 |
| $DLG$(5) | 6,33542 | 1,88723 | 1,18084 | 0,97275 | 0,89359 | 0,88615 | 0,85380 | 0,83676 | 0,82161 | 0,81415 |
| $DLG$(2,5) | 9,05497 | 2,38538 | 1,32002 | 0,98649 | 0,84688 | 0,83288 | 0,76863 | 0,73149 | 0,69499 | 0,67497 |
| $DLG$(2,0) | 9,68012 | 2,49563 | 1,35354 | 0,99650 | 0,84700 | 0,83200 | 0,76314 | 0,72331 | 0,68413 | 0,66262 |
| $DLG$(1,5) | 10,05109 | 2,55849 | 1,37227 | 1,00236 | 0,84770 | 0,83219 | 0,76101 | 0,71985 | 0,67939 | 0,65717 |
| $DLG$(1,45) | 10,05892 | 2,55964 | 1,37258 | 1,00245 | 0,84771 | 0,83219 | 0,76098 | 0,71981 | 0,67933 | 0,65711 |
| $DLG$(1,4) | 10,05906 | 2,55949 | 1,37249 | 1,00241 | 0,84770 | 0,83219 | 0,76099 | 0,71984 | 0,67937 | 0,65716 |
| UNIFORME | 9,68012 | 2,49563 | 1,35354 | 0,99650 | 0,84700 | 0,83200 | 0,76314 | 0,72331 | 0,68413 | 0,66262 |
| $DLG$(0,5) | 7,58224 | 2,16036 | 1,26100 | 0,97222 | 0,84941 | 0,83701 | 0,77986 | 0,74664 | 0,71382 | 0,69574 |
| NORMAL | 4,18939 | 1,61653 | 1,12489 | 0,95491 | 0,87975 | 0,87204 | 0,83622 | 0,81515 | 0,79414 | 0,78249 |
| $T30$ | 3,74462 | 1,54145 | 1,10753 | 0,95543 | 0,88770 | 0,88074 | 0,84834 | 0,82924 | 0,81018 | 0,79958 |
| $T10$ | 2,74868 | 1,36568 | 1,06870 | 0,96069 | 0,91175 | 0,90668 | 0,88303 | 0,86901 | 0,85497 | 0,84715 |
| LOGISTICA | 2,56397 | 1,33147 | 1,06148 | 0,96250 | 0,91748 | 0,91282 | 0,89101 | 0,87808 | 0,86512 | 0,85789 |
| LAPLACE | 1,60967 | 1,14144 | 1,02401 | 0,97874 | 0,95769 | 0,95549 | 0,94516 | 0,93900 | 0,93279 | 0,92932 |
| $DLG$(-0,20) | 0,42065 | 0,82935 | 0,97804 | 1,04213 | 1,07335 | 1,07666 | 1,09237 | 1,10184 | 1,11147 | 1,11690 |
| $DLG$(-0,24) | 0,16361 | 0,71934 | 0,97038 | 1,08433 | 1,14096 | 1,14701 | 1,17580 | 1,19325 | 1,21104 | 1,22109 |
| $DLG$(-0,249) | 0,12027 | 0,69428 | 0,96966 | 1,09630 | 1,15954 | 1,16632 | 1,19854 | 1,21810 | 1,23806 | 1,24935 |
| Signos | 23,16901 | 5,03342 | 2,30200 | 1,47902 | 1,14244 | 1,10902 | 0,95652 | 0,86910 | 0,78374 | 0,73717 |
| Wilcoxon | 9,68012 | 2,49563 | 1,35354 | 0,99650 | 0,84700 | 0,83200 | 0,76314 | 0,72331 | 0,68413 | 0,66262 |
| $t$–student | 8,71753 | 2,16036 | 1,19403 | 0,95491 | 0,91175 | 0,91282 | 0,94507 | 1,00000 | 1,11147 | 1,22109 |

Tabla 4.17: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $T5$.

| **PUNTAJES** | **POBLACIÓN** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 3,99596 | 1,29899 | 1,54770 | 2,34976 | 3,41847 | 3,59348 | 4,71119 | 5,72971 | 7,20911 | 8,33760 |
| $DLG$(25) | 5,84187 | 1,45491 | 1,31008 | 1,57595 | 1,93702 | 1,99358 | 2,33865 | 2,63224 | 3,03095 | 3,31740 |
| $DLG$(10) | 9,90607 | 1,80561 | 1,16660 | 1,06209 | 1,06572 | 1,06923 | 1,09682 | 1,12425 | 1,16304 | 1,19091 |
| $DLG$(5) | 15,06105 | 2,27556 | 1,20735 | 0,93342 | 0,83252 | 0,82306 | 0,78160 | 0,75942 | 0,73921 | 0,72894 |
| $DLG$(2,5) | 21,52617 | 2,87621 | 1,34965 | 0,94661 | 0,78900 | 0,77357 | 0,70363 | 0,66388 | 0,62529 | 0,60432 |
| $DLG$(2,0) | 23,01232 | 3,00915 | 1,38393 | 0,95621 | 0,78912 | 0,77276 | 0,69861 | 0,65645 | 0,61551 | 0,59327 |
| $DLG$(1,5) | 23,89423 | 3,08494 | 1,40308 | 0,96184 | 0,78977 | 0,77293 | 0,69666 | 0,65332 | 0,61125 | 0,58839 |
| $DLG$(1,45) | 23,91285 | 3,08633 | 1,40339 | 0,96193 | 0,78978 | 0,77293 | 0,69663 | 0,65328 | 0,61120 | 0,58834 |
| $DLG$(1,4) | 23,91317 | 3,08615 | 1,40330 | 0,96189 | 0,78977 | 0,77293 | 0,69665 | 0,65330 | 0,61123 | 0,58838 |
| UNIFORME | 23,01232 | 3,00915 | 1,38393 | 0,95621 | 0,78912 | 0,77276 | 0,69861 | 0,65645 | 0,61551 | 0,59327 |
| $DLG$(0,5) | 18,02509 | 2,60490 | 1,28931 | 0,93292 | 0,79136 | 0,77741 | 0,71392 | 0,67763 | 0,64223 | 0,62293 |
| NORMAL | 9,95934 | 1,94916 | 1,15014 | 0,91631 | 0,81963 | 0,80995 | 0,76551 | 0,73980 | 0,71450 | 0,70059 |
| $T30$ | 8,90201 | 1,85863 | 1,13240 | 0,91680 | 0,82704 | 0,81803 | 0,77661 | 0,75260 | 0,72892 | 0,71590 |
| $T10$ | 6,53438 | 1,64669 | 1,09269 | 0,92185 | 0,84944 | 0,84212 | 0,80836 | 0,78869 | 0,76923 | 0,75849 |
| LOGISTICA | 6,09528 | 1,60544 | 1,08531 | 0,92359 | 0,85478 | 0,84782 | 0,81567 | 0,79692 | 0,77835 | 0,76810 |
| LAPLACE | 3,82663 | 1,37631 | 1,04700 | 0,93918 | 0,89224 | 0,88745 | 0,86524 | 0,85220 | 0,83924 | 0,83205 |
| $T5$ | 2,37728 | 1,20577 | 1,02245 | 0,95958 | 0,93166 | 0,92880 | 0,91544 | 0,90757 | 0,89971 | 0,89534 |
| $DLG$(-0,24) | 0,38894 | 0,86735 | 0,99216 | 1,04049 | 1,06299 | 1,06534 | 1,07637 | 1,08295 | 1,08958 | 1,09329 |
| $DLG$(-0,249) | 0,28592 | 0,83714 | 0,99143 | 1,05198 | 1,08031 | 1,08327 | 1,09720 | 1,10551 | 1,11389 | 1,11859 |
| Signos | 55,07916 | 6,06914 | 2,35368 | 1,41923 | 1,06437 | 1,03005 | 0,87564 | 0,78877 | 0,70514 | 0,66001 |
| Wilcoxon | 23,01232 | 3,00915 | 1,38393 | 0,95621 | 0,78912 | 0,77276 | 0,69861 | 0,65645 | 0,61551 | 0,59327 |
| $t$–student | 20,72398 | 2,60490 | 1,22084 | 0,91631 | 0,84944 | 0,84782 | 0,86516 | 0,90757 | 1,00000 | 1,09329 |

Tabla 4.18: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(-0{,}20)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T$10 | LOGISTICA | LAPLACE | $T$5 | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 10,27399 | 1,49765 | 1,55993 | 2,25831 | 3,21590 | 3,37308 | 4,37691 | 5,29082 | 6,61640 | 7,62616 |
| $DLG$(25) | 15,02001 | 1,67742 | 1,32043 | 1,51462 | 1,82224 | 1,87131 | 2,17271 | 2,43061 | 2,78175 | 3,03433 |
| $DLG$(10) | 25,46946 | 2,08175 | 1,17582 | 1,02076 | 1,00257 | 1,00365 | 1,01900 | 1,03813 | 1,06742 | 1,08929 |
| $DLG$(5) | 38,72340 | 2,62357 | 1,21689 | 0,89710 | 0,78319 | 0,77258 | 0,72614 | 0,70125 | 0,67844 | 0,66674 |
| $DLG$(2,5) | 55,34583 | 3,31609 | 1,36032 | 0,90977 | 0,74225 | 0,72613 | 0,65371 | 0,61303 | 0,57388 | 0,55276 |
| $DLG$(2,0) | 59,16686 | 3,46935 | 1,39486 | 0,91900 | 0,74236 | 0,72536 | 0,64904 | 0,60617 | 0,56491 | 0,54264 |
| $DLG$(1,5) | 61,43433 | 3,55674 | 1,41417 | 0,92441 | 0,74297 | 0,72553 | 0,64723 | 0,60327 | 0,56099 | 0,53819 |
| $DLG$(1,45) | 61,48221 | 3,55834 | 1,41448 | 0,92449 | 0,74298 | 0,72553 | 0,64720 | 0,60324 | 0,56095 | 0,53814 |
| $DLG$(1,4) | 61,48303 | 3,55813 | 1,41439 | 0,92445 | 0,74297 | 0,72553 | 0,64722 | 0,60326 | 0,56098 | 0,53817 |
| UNIFORME | 59,16686 | 3,46935 | 1,39486 | 0,91900 | 0,74236 | 0,72536 | 0,64904 | 0,60617 | 0,56491 | 0,54264 |
| $DLG$(0,5) | 46,34423 | 3,00328 | 1,29949 | 0,89661 | 0,74447 | 0,72973 | 0,66326 | 0,62572 | 0,58943 | 0,56977 |
| NORMAL | 25,60641 | 2,24726 | 1,15923 | 0,88065 | 0,77106 | 0,76027 | 0,71119 | 0,68314 | 0,65575 | 0,64081 |
| $T$30 | 22,88791 | 2,14288 | 1,14134 | 0,88112 | 0,77803 | 0,76786 | 0,72150 | 0,69495 | 0,66899 | 0,65481 |
| $T$10 | 16,80051 | 1,89853 | 1,10132 | 0,88597 | 0,79911 | 0,79047 | 0,75100 | 0,72828 | 0,70598 | 0,69377 |
| LOGISTICA | 15,67154 | 1,85097 | 1,09388 | 0,88764 | 0,80413 | 0,79582 | 0,75779 | 0,73588 | 0,71436 | 0,70256 |
| LAPLACE | 9,83863 | 1,58680 | 1,05527 | 0,90263 | 0,83937 | 0,83302 | 0,80384 | 0,78692 | 0,77024 | 0,76105 |
| $T$5 | 6,11221 | 1,39017 | 1,03053 | 0,92223 | 0,87646 | 0,87183 | 0,85049 | 0,83805 | 0,82574 | 0,81894 |
| $DLG$(-0,20) | 2,57110 | 1,15294 | 1,00790 | 0,96108 | 0,94074 | 0,93867 | 0,92904 | 0,92340 | 0,91778 | 0,91467 |
| $DLG$(-0,249) | 0,73513 | 0,96517 | 0,99926 | 1,01104 | 1,01629 | 1,01683 | 1,01935 | 1,02083 | 1,02231 | 1,02314 |
| Signos | 141,61376 | 6,99732 | 2,37227 | 1,36400 | 1,00130 | 0,96687 | 0,81351 | 0,72835 | 0,64716 | 0,60370 |
| Wilcoxon | 59,16686 | 3,46935 | 1,39486 | 0,91900 | 0,74236 | 0,72536 | 0,64904 | 0,60617 | 0,56491 | 0,54264 |
| $t$–student | 53,28332 | 3,00328 | 1,23048 | 0,88065 | 0,79911 | 0,79582 | 0,80377 | 0,83805 | 0,91778 | 1,00000 |

Tabla 4.19: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(-0{,}24)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T$10 | LOGISTICA | LAPLACE | $T$5 | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 13,97570 | 1,55169 | 1,56108 | 2,23365 | 3,16436 | 3,31725 | 4,29384 | 5,18285 | 6,47199 | 7,45369 |
| $DLG$(25) | 20,43172 | 1,73795 | 1,32140 | 1,49807 | 1,79303 | 1,84033 | 2,13147 | 2,38101 | 2,72104 | 2,96571 |
| $DLG$(10) | 34,64609 | 2,15687 | 1,17668 | 1,00961 | 0,98650 | 0,98704 | 0,99966 | 1,01695 | 1,04412 | 1,06466 |
| $DLG$(5) | 52,67543 | 2,71824 | 1,21778 | 0,88730 | 0,77064 | 0,75979 | 0,71236 | 0,68694 | 0,66363 | 0,65166 |
| $DLG$(2,5) | 75,28691 | 3,43575 | 1,36132 | 0,89983 | 0,73035 | 0,71411 | 0,64130 | 0,60052 | 0,56135 | 0,54026 |
| $DLG$(2,0) | 80,48466 | 3,59454 | 1,39588 | 0,90896 | 0,73046 | 0,71336 | 0,63672 | 0,59380 | 0,55258 | 0,53037 |
| $DLG$(1,5) | 83,56910 | 3,68508 | 1,41521 | 0,91431 | 0,73106 | 0,71352 | 0,63494 | 0,59096 | 0,54875 | 0,52601 |
| $DLG$(1,45) | 83,63423 | 3,68674 | 1,41552 | 0,91439 | 0,73107 | 0,71352 | 0,63492 | 0,59093 | 0,54870 | 0,52596 |
| $DLG$(1,4) | 83,63534 | 3,68653 | 1,41543 | 0,91436 | 0,73106 | 0,71352 | 0,63493 | 0,59095 | 0,54874 | 0,52600 |
| UNIFORME | 80,48466 | 3,59454 | 1,39588 | 0,90896 | 0,73046 | 0,71336 | 0,63672 | 0,59380 | 0,55258 | 0,53037 |
| $DLG$(0,5) | 63,04204 | 3,11165 | 1,30045 | 0,88682 | 0,73254 | 0,71765 | 0,65067 | 0,61295 | 0,57656 | 0,55689 |
| NORMAL | 34,83239 | 2,32835 | 1,16008 | 0,87103 | 0,75870 | 0,74769 | 0,69770 | 0,66920 | 0,64144 | 0,62632 |
| $T$30 | 31,13441 | 2,22021 | 1,14218 | 0,87150 | 0,76556 | 0,75515 | 0,70781 | 0,68077 | 0,65439 | 0,64000 |
| $T$10 | 22,85372 | 1,96704 | 1,10213 | 0,87630 | 0,78630 | 0,77739 | 0,73675 | 0,71342 | 0,69057 | 0,67808 |
| LOGISTICA | 21,31799 | 1,91776 | 1,09469 | 0,87795 | 0,79124 | 0,78265 | 0,74341 | 0,72086 | 0,69877 | 0,68667 |
| LAPLACE | 13,38349 | 1,64406 | 1,05605 | 0,89277 | 0,82592 | 0,81923 | 0,78859 | 0,77087 | 0,75343 | 0,74384 |
| $T$5 | 8,31443 | 1,44033 | 1,03129 | 0,91216 | 0,86241 | 0,85740 | 0,83435 | 0,82095 | 0,80771 | 0,80042 |
| $DLG$(-0,20) | 3,49746 | 1,19454 | 1,00864 | 0,95059 | 0,92566 | 0,92313 | 0,91141 | 0,90456 | 0,89775 | 0,89398 |
| $DLG$(-0,24) | 1,36030 | 1,03608 | 1,00074 | 0,98908 | 0,98397 | 0,98345 | 0,98102 | 0,97959 | 0,97817 | 0,97738 |
| Signos | 192,63713 | 7,24981 | 2,37402 | 1,34910 | 0,98525 | 0,95087 | 0,79807 | 0,71349 | 0,63304 | 0,59004 |
| Wilcoxon | 80,48466 | 3,59454 | 1,39588 | 0,90896 | 0,73046 | 0,71336 | 0,63672 | 0,59380 | 0,55258 | 0,53037 |
| $t$–student | 72,48128 | 3,11165 | 1,23139 | 0,87103 | 0,78630 | 0,78265 | 0,78852 | 0,82095 | 0,89775 | 0,97738 |

Tabla 4.20: Eficiencia de la prueba con función de puntajes $DLG(-0{,}249)$.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,07255 | 0,21403 | 0,65757 | 1,65566 | 3,21173 | 3,48865 | 5,38029 | 7,26410 | 10,22370 | 12,63246 |
| $DLG$(25) | 0,10606 | 0,23972 | 0,55661 | 1,11043 | 1,81987 | 1,93542 | 2,67079 | 3,33714 | 4,29838 | 5,02626 |
| $DLG$(10) | 0,17985 | 0,29751 | 0,49565 | 0,74836 | 1,00127 | 1,03803 | 1,25260 | 1,42531 | 1,64938 | 1,80437 |
| $DLG$(5) | 0,27344 | 0,37494 | 0,51296 | 0,65770 | 0,78217 | 0,79904 | 0,89261 | 0,96278 | 1,04832 | 1,10443 |
| $DLG$(2,5) | 0,39082 | 0,47391 | 0,57342 | 0,66699 | 0,74129 | 0,75100 | 0,80356 | 0,84166 | 0,88676 | 0,91562 |
| $DLG$(2,0) | 0,41780 | 0,49581 | 0,58798 | 0,67375 | 0,74139 | 0,75021 | 0,79783 | 0,83225 | 0,87290 | 0,89887 |
| $DLG$(1,5) | 0,43382 | 0,50830 | 0,59612 | 0,67772 | 0,74200 | 0,75038 | 0,79560 | 0,82827 | 0,86685 | 0,89149 |
| $DLG$(1,45) | 0,43415 | 0,50853 | 0,59625 | 0,67778 | 0,74201 | 0,75039 | 0,79557 | 0,82823 | 0,86678 | 0,89140 |
| $DLG$(1,4) | 0,43416 | 0,50850 | 0,59621 | 0,67775 | 0,74201 | 0,75038 | 0,79559 | 0,82826 | 0,86683 | 0,89146 |
| UNIFORME | 0,41780 | 0,49581 | 0,58798 | 0,67375 | 0,74139 | 0,75021 | 0,79783 | 0,83225 | 0,87290 | 0,89887 |
| $DLG$(0,5) | 0,32726 | 0,42920 | 0,54778 | 0,65734 | 0,74350 | 0,75473 | 0,81531 | 0,85909 | 0,91079 | 0,94381 |
| NORMAL | 0,18082 | 0,32116 | 0,48866 | 0,64564 | 0,77006 | 0,78632 | 0,87423 | 0,93792 | 1,01327 | 1,06148 |
| $T30$ | 0,16162 | 0,30624 | 0,48112 | 0,64599 | 0,77703 | 0,79417 | 0,88690 | 0,95414 | 1,03373 | 1,08467 |
| $T10$ | 0,11864 | 0,27132 | 0,46425 | 0,64954 | 0,79807 | 0,81755 | 0,92316 | 0,99990 | 1,09089 | 1,14920 |
| LOGISTICA | 0,11066 | 0,26453 | 0,46111 | 0,65077 | 0,80309 | 0,82309 | 0,93151 | 1,01033 | 1,10384 | 1,16377 |
| LAPLACE | 0,06948 | 0,22677 | 0,44484 | 0,66175 | 0,83828 | 0,86156 | 0,98812 | 1,08042 | 1,19018 | 1,26066 |
| $T5$ | 0,04316 | 0,19867 | 0,43440 | 0,67612 | 0,87532 | 0,90170 | 1,04546 | 1,15061 | 1,27593 | 1,35654 |
| $DLG$(-0,20) | 0,01816 | 0,16477 | 0,42487 | 0,70461 | 0,93952 | 0,97083 | 1,14202 | 1,26779 | 1,41816 | 1,51512 |
| $DLG$(-0,24) | 0,00706 | 0,14291 | 0,42154 | 0,73314 | 0,99870 | 1,03426 | 1,22924 | 1,37296 | 1,54521 | 1,65646 |
| $DLG$(-0,249) | 0,00519 | 0,13793 | 0,42123 | 0,74124 | 1,01497 | 1,05167 | 1,25303 | 1,40156 | 1,57969 | 1,69479 |
| Wilcoxon | 0,41780 | 0,49581 | 0,58798 | 0,67375 | 0,74139 | 0,75021 | 0,79783 | 0,83225 | 0,87290 | 0,89887 |
| $t$–student | 0,37626 | 0,42920 | 0,51869 | 0,64564 | 0,79807 | 0,82309 | 0,98803 | 1,15061 | 1,41816 | 1,65646 |

Tabla 4.21: Eficiencia de la prueba de SIGNOS.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,17364 | 0,43168 | 1,11834 | 2,45736 | 4,33202 | 4,65021 | 6,74369 | 8,72830 | 11,71233 | 14,05372 |
| $DLG$(25) | 0,25386 | 0,48350 | 0,94664 | 1,64812 | 2,45466 | 2,57983 | 3,34759 | 4,00980 | 4,92425 | 5,59176 |
| $DLG$(10) | 0,43047 | 0,60004 | 0,84297 | 1,11073 | 1,35052 | 1,38365 | 1,57002 | 1,71261 | 1,88954 | 2,00738 |
| $DLG$(5) | 0,65448 | 0,75621 | 0,87241 | 0,97617 | 1,05500 | 1,06509 | 1,11880 | 1,15685 | 1,20097 | 1,22869 |
| $DLG$(2,5) | 0,93542 | 0,95582 | 0,97524 | 0,98996 | 0,99986 | 1,00106 | 1,00719 | 1,01132 | 1,01588 | 1,01864 |
| $DLG$(2,0) | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |
| $DLG$(1,5) | 1,03832 | 1,02519 | 1,01384 | 1,00589 | 1,00082 | 1,00023 | 0,99721 | 0,99523 | 0,99307 | 0,99179 |
| $DLG$(1,45) | 1,03913 | 1,02565 | 1,01407 | 1,00598 | 1,00084 | 1,00023 | 0,99718 | 0,99517 | 0,99299 | 0,99169 |
| $DLG$(1,4) | 1,03915 | 1,02559 | 1,01400 | 1,00594 | 1,00083 | 1,00023 | 0,99719 | 0,99520 | 0,99304 | 0,99176 |
| UNIFORME | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |
| $DLG$(0,5) | 0,78328 | 0,86566 | 0,93163 | 0,97564 | 1,00285 | 1,00602 | 1,02192 | 1,03226 | 1,04340 | 1,04999 |
| NORMAL | 0,43278 | 0,64775 | 0,83107 | 0,95827 | 1,03867 | 1,04813 | 1,09577 | 1,12697 | 1,16081 | 1,18090 |
| $T30$ | 0,38684 | 0,61766 | 0,81825 | 0,95879 | 1,04806 | 1,05859 | 1,11165 | 1,14646 | 1,18425 | 1,20670 |
| $T10$ | 0,28395 | 0,54723 | 0,78956 | 0,96406 | 1,07644 | 1,08976 | 1,15710 | 1,20144 | 1,24973 | 1,27849 |
| LOGISTICA | 0,26487 | 0,53352 | 0,78422 | 0,96588 | 1,08322 | 1,09714 | 1,16757 | 1,21398 | 1,26456 | 1,29470 |
| LAPLACE | 0,16629 | 0,45738 | 0,75654 | 0,98219 | 1,13068 | 1,14842 | 1,23852 | 1,29820 | 1,36347 | 1,40249 |
| $T5$ | 0,10330 | 0,40070 | 0,73880 | 1,00352 | 1,18064 | 1,20193 | 1,31038 | 1,38254 | 1,46172 | 1,50917 |
| $DLG$(-0,20) | 0,04345 | 0,33232 | 0,72258 | 1,04579 | 1,26724 | 1,29407 | 1,43142 | 1,52334 | 1,62466 | 1,68558 |
| $DLG$(-0,24) | 0,01690 | 0,28824 | 0,71692 | 1,08814 | 1,34706 | 1,37862 | 1,54074 | 1,64971 | 1,77020 | 1,84283 |
| $DLG$(-0,249) | 0,01242 | 0,27820 | 0,71639 | 1,10016 | 1,36901 | 1,40183 | 1,57055 | 1,68407 | 1,80970 | 1,88547 |
| Signos | 2,39346 | 2,01690 | 1,70073 | 1,48422 | 1,34881 | 1,33296 | 1,25341 | 1,20157 | 1,14561 | 1,11251 |
| $t$–student | 0,90056 | 0,86566 | 0,88216 | 0,95827 | 1,07644 | 1,09714 | 1,23841 | 1,38254 | 1,62466 | 1,84283 |

Tabla 4.22: Eficiencia de la prueba de WILCOXON.

| PUNTAJES | POBLACIÓN | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $DLG$(0,7) | $DLG$(0,5) | $DLG$(0,3) | NORMAL | $T10$ | LOGISTICA | LAPLACE | $T5$ | $DLG$(-0,20) | $DLG$(-0,24) |
| $DLG$(50) | 0,19282 | 0,49867 | 1,26774 | 2,56437 | 4,02438 | 4,23849 | 5,44545 | 6,31325 | 7,20911 | 7,62616 |
| $DLG$(25) | 0,28189 | 0,55853 | 1,07310 | 1,71988 | 2,28035 | 2,35141 | 2,70314 | 2,90032 | 3,03095 | 3,03433 |
| $DLG$(10) | 0,47800 | 0,69316 | 0,95557 | 1,15910 | 1,25461 | 1,26115 | 1,26777 | 1,23874 | 1,16304 | 1,08929 |
| $DLG$(5) | 0,72675 | 0,87357 | 0,98895 | 1,01868 | 0,98008 | 0,97079 | 0,90342 | 0,83676 | 0,73921 | 0,66674 |
| $DLG$(2,5) | 1,03871 | 1,10416 | 1,10551 | 1,03307 | 0,92885 | 0,91242 | 0,81330 | 0,73149 | 0,62529 | 0,55276 |
| $DLG$(2,0) | 1,11042 | 1,15519 | 1,13359 | 1,04355 | 0,92898 | 0,91146 | 0,80749 | 0,72331 | 0,61551 | 0,54264 |
| $DLG$(1,5) | 1,15297 | 1,18429 | 1,14928 | 1,04969 | 0,92975 | 0,91167 | 0,80523 | 0,71985 | 0,61125 | 0,53819 |
| $DLG$(1,45) | 1,15387 | 1,18482 | 1,14953 | 1,04978 | 0,92976 | 0,91167 | 0,80521 | 0,71981 | 0,61120 | 0,53814 |
| $DLG$(1,4) | 1,15389 | 1,18475 | 1,14946 | 1,04974 | 0,92975 | 0,91167 | 0,80522 | 0,71984 | 0,61123 | 0,53817 |
| UNIFORME | 1,11042 | 1,15519 | 1,13359 | 1,04355 | 0,92898 | 0,91146 | 0,80749 | 0,72331 | 0,61551 | 0,54264 |
| $DLG$(0,5) | 0,86977 | 1,00000 | 1,05608 | 1,01813 | 0,93163 | 0,91695 | 0,82518 | 0,74664 | 0,64223 | 0,56977 |
| NORMAL | 0,48057 | 0,74827 | 0,94209 | 1,00000 | 0,96491 | 0,95533 | 0,88482 | 0,81515 | 0,71450 | 0,64081 |
| $T30$ | 0,42955 | 0,71352 | 0,92756 | 1,00054 | 0,97363 | 0,96486 | 0,89764 | 0,82924 | 0,72892 | 0,65481 |
| $T10$ | 0,31531 | 0,63215 | 0,89503 | 1,00605 | 1,00000 | 0,99328 | 0,93434 | 0,86901 | 0,76923 | 0,69377 |
| LOGISTICA | 0,29412 | 0,61632 | 0,88899 | 1,00794 | 1,00629 | 1,00000 | 0,94280 | 0,87808 | 0,77835 | 0,70256 |
| LAPLACE | 0,18465 | 0,52836 | 0,85761 | 1,02496 | 1,05039 | 1,04675 | 1,00009 | 0,93900 | 0,83924 | 0,76105 |
| $T5$ | 0,11471 | 0,46289 | 0,83750 | 1,04722 | 1,09680 | 1,09551 | 1,05812 | 1,00000 | 0,89971 | 0,81894 |
| $DLG$(-0,20) | 0,04825 | 0,38389 | 0,81911 | 1,09133 | 1,17725 | 1,17950 | 1,15585 | 1,10184 | 1,00000 | 0,91467 |
| $DLG$(-0,24) | 0,01877 | 0,33297 | 0,81269 | 1,13552 | 1,25140 | 1,25656 | 1,24413 | 1,19325 | 1,08958 | 1,00000 |
| $DLG$(-0,249) | 0,01380 | 0,32137 | 0,81209 | 1,14806 | 1,27179 | 1,27771 | 1,26820 | 1,21810 | 1,11389 | 1,02314 |
| Signos | 2,65775 | 2,32990 | 1,92792 | 1,54885 | 1,25303 | 1,21494 | 1,01211 | 0,86910 | 0,70514 | 0,60370 |
| Wilcoxon | 1,11042 | 1,15519 | 1,13359 | 1,04355 | 0,92898 | 0,91146 | 0,80749 | 0,72331 | 0,61551 | 0,54264 |

Tabla 4.23: Eficiencia de la prueba de $t$–student.

# Anexo 2: Algoritmo cálculo de Eficacias

```
#CALCULO DE EFICACIAS DE ESTADÍSTICAS DE PUNTAJES

#lm[1]=sigma muestras; lm[2]=lambda2 muestras ; lp[1]=lambda4
puntajes
#calculo de eficacias
muestra<-c(1,0.7,1,0.5,1,0.3,1,0.1349,1,0.01476,1,
-0.000363,1,-0.080102,1,-0.1359,1,-0.2,1,-0.24)
puntaje<-c(50,25,10,5,2.5,2,1.5,1.45,1.4,1,0.5,0.1349,0.09701,
0.01476,-0.000363,-0.0802,-0.1359,-0.2,-0.24,-0.249)

#numero de poblaciones
m<-10
#numero de funciones de puntajes
n<-20
Muestras<-matrix(muestra,nrow=m,ncol=2,byrow=TRUE)
puntajes<-matrix(puntaje,nrow=n,ncol=1,byrow=TRUE)
eficacia<-array(0,dim=c(n,m))
for(i in 1:n){for(j in 1:m){
#parámetros de la función de puntajes
lp<-puntajes[i,]

#parámetros de la muestra
lm<-Muestras[j,]
gml4<-sign(lm[2])*sqrt(2/(1+2*lm[2])-2*beta(1+lm[2],1+lm[2]))
gpl4<-sign(lp[1])*sqrt(2/(1+2*lp[1])-2*beta(1+lp[1],1+lp[1]))
phi_phi_uf<-function(u)
```

```
(2^(lm[2]-lp[1])*lp[1]*gml4/(gpl4*lm[2]*lm[1])*((1+u)^(lp[1]-1)+
(1-u)^(lp[1]-1))/((1+u)^(lm[2]-1)+(1-u)^(lm[2]-1)))
integrate(phi_phi_uf,0,1)
aux1<-as.character(integrate(phi_phi_uf,0,1,abs.tol=1e-5))
numerador<-as.numeric(aux1[1])
eficacia[i,j]<-numerador
} }
eficacia

#CALCULO DE EFICACIAS DE OTRAS PRUEBAS

#prueba de signos

muestra<-c(1,0.7,1,0.5,1,0.3,1,0.1349,1,0.01476,1,
-0.000363,1,-0.080102,1,-0.1359,1,-0.2,1,-0.24)
m<-10
Muestras<-matrix(muestra,nrow=m,ncol=2,byrow=TRUE)
eficacia<-array(0,dim=c(1,m)) for(i in 1:1){for(j in 1:m){
#parámetros de la muestra lm<-Muestras[j,]
gml4<-sign(lm[2])*sqrt(2/(1+2*lm[2])-2*beta(1+lm[2],1+lm[2]))
funcion_0<-gml4*2^(lm[2]-2)/(lm[1]*lm[2]) eficacia[i,j]<-2*funcion_0
} } eficacia

#prueba de Wilcoxon

muestra<-c(1,0.7,1,0.5,1,0.3,1,0.1349,1,0.01476,1,
-0.000363,1,-0.080102,1,-0.1359,1,-0.2,1,-0.24)
Muestras<-matrix(muestra,nrow=m,ncol=2,byrow=TRUE)
eficacia<-array(0,dim=c(1,m)) for(i in 1:1){for(j in 1:m){
#parámetros de la muestra lm<-Muestras[j,]
gml4<-sign(lm[2])*sqrt(2/(1+2*lm[2])-2*beta(1+lm[2],1+lm[2]))
convol<-function(u)(gml4/(lm[1]*lm[2])*(1/(u^(lm[2]-1)+(1-u)^(lm[2]-1))))
integrate(convol,0,1)
aux1<-as.character(integrate(convol,0,1,abs.tol=1e-5))
función<-as.numeric(aux1[1]) eficacia[i,j]<-sqrt(12)*función } }
eficacia

#prueba t
```

```
muestra<-c(1,0.7,1,0.5,1,0.3,1,0.1349,1,0.01476,1,
-0.000363,1,-0.080102,1,-0.1359,1,-0.2,1,-0.24)
m<-10
Muestras<-matrix(muestra,nrow=m,ncol=2,byrow=TRUE)
eficacia<-array(0,dim=c(1,m)) for(i in 1:1){for(j in 1:m){
#parámetros de la muestra lm<-Muestras[j,] eficacia[i,j]<-1/lm[1] }}
eficacia
```

# Anexo 3: Algoritmo cálculo de Lambda2 y Curtósis

```
#CALCULO DE LAMBDA2 Y CURTOSIS

lambda4<-c(50,25,10,5,2.5,2,1.5,1.45,1.4,1,0.5,0.1349,0.09701,
0.01476,-0.000363,-0.0802,-0.1359,-0.2,-0.24,-0.249)

#número de poblaciones
p<-20
lambdas4<-matrix(lambda4,nrow=p,ncol=1,byrow=TRUE)
lambdas2<-array(0,dim=c(1,p))
curtósis<-array(0,dim=c(1,p))
for(i in
1:1){for(j in 1:p){
l<-lambdas4[j,]

#cálculo de lambda2
lambdas2[i,j]<-sqrt(2/(1+2*l[1])-2*beta(1+l[1],1+l[1]))

#cálculo de curtósis
curtósis[i,j]<-(2/(1+4*l[1])-8*beta(1+3*l[1],1+l[1])+
6*beta(1+2*l[1],1+2*l[1]))/(2/(1+2*l[1])-2*beta(1+l[1],1+l[1]))^2 }}
lambdas4 lambdas2 curtósis
```

# Bibliografía


[1] Adichie, J. N. (1967a). *Asymptotic efficiency of a clase of parametric test for regresión parameters*. Ann. Math. Stat. 38: 884-893.

[2] Adichie, J. N. (1967b). *Estimates of regression parameters based on rank tests*. Ann. Math. Stat. 38: 884-904.

[3] Adichie, J. N. (1967). *Rank test of sub-hypotheses in the general linear regression*. Ann. Math. Stat. 38: 884-893.

[4] Aiyar, C. and Albers, W. (1979). *Asymptotic Relative efficiency of Ranks Tests for Trend Alternatives*. Journal of American Statistician Association. 74: 226-231.

[5] Burden, R. L. and Faires, J. D. (1985). *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamerica.

[6] Corzo, J. y Aranda, M. (2002). *Aproximación de la potencia asintótica de la prueba del rango signado de wilcoxon*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, XXVI(101):555-563.

[7] Dalgaard, P. (2002). *Introductory Statistics with R*. Springer.

[8] Fraser, D. A. S. (1957). *Nonparametric methods in statistics*. Wiley, New York.

[9] Gibbons, J. D. and Charkraborti, S. (1992). *Nonparametric Statistical Inference*. Marcel Dekker, Inc, third edition.

[10] Hettmansperger, T. (1984). *Statistical Inference Based on Ranks*. Jhon Wiley & Sons.

[11] Hajek, J., Sidak, Z., and Sen, P. K. (1999). *Theory of Rank Test*. Academic Press, second edition.

[12] Hodges, J.L (1967). *Efficiency in normal sample and tolerance of extreme values for some estimates of location*. Proc. 5th Berkeley Symp Math. Stat. Prob 1: 163-186. University of California Press, Barkeley.

[13] Hodges, J.L y Lehmann, E.L. (1956). *The efficiency of some nonparametric competitors of the t–test*. Ann. Math. Stat 27: 324-335.

[14] Hodges, J.L y Lehmann, E.L. (1960). *Comparison of the normal scores and Wilcoxon test*. Proc. 4th Berkeley Synp. 1: 307-317.

[15] Hodges, J.L y Lehmann, E.L. (1962). *Rank methods for combinations of independent experiments in analysis of variance*. Ann. Math. Stat 33: 482-497.

[16] Hodges, J.L y Lehmann, E.L. (1963). *Estimates of location based on rank test*. Ann. Math. Stat 34: 598-611.

[17] Karian, Z. A. and Dudewicz, E. J. (2000). *Fitting Statistical Distributions: Thegeneralized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap methods*. Chapman & Hall/CRC.

[18] Lehmann, E. L. (1998). *Nonparametrics Statistical Methods Based on Ranks*. Prentice Hall, Inc.

[19] Mann, H. B. and D. R. Whitney (1947). *On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other*. Ann. Math. Stat. 18: 50-60.

[20] Manoukian, E. B. (1986). *Mathematical Nonparametric Statistics*. Gordon an Breach Science publishers. London.

[21] Maritz, J. S. (1995). *Distribution-free Statistical Methods*. Chapman & Hall, second edition.

[22] Mathews, J. H. and Fink, K. D. (2000). *Métodos Numéricos con MATLAB*. Prentice Hall.

[23] Mood, Graybill, and Boes (1984). *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill, third edition.

[24] Noether, G. E. (1955). *On a theorem of Pitman*. Ann. Math. Stat 26: 64-68.

[25] R Development Core Team (2006). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.

[26] Puri, M.L. and P.K. Sen (1968). *On Chernoff-Savage tests for ordered alternatives randomized blocks*. Ann. Math. Stat. 39: 967-972.

[27] Pitman, E. J. G. (1948). *Notes on nonparametric statistical inference*. Unpublished notes.

[28] Rainville, E. D. (1960). *Special functions*. The Macmillan Company.

[29] Randles, R. H. andWolfe, D. A. (1979). *Introduction to The Theory of Nonparametric Statistics*. JohnWiley & Sons.

[30] Serrato, J. C. (2006). *Una prueba de rangos para la alternativa de localización con una muestra de la distribución Lambda Generalizada*. Tesis de grado, Universidad Nacional de Colombia.

[31] Wilcoxon, F. (1979). *Individual comparisons by ranking methods*. Biometrics 1: 80-83.