LA COMPACTACIÓN DE STONE-ČECH EN LA CATEGORÍA DE LOS CAMPOS FIBRADOS DE UN GRUPO FINITO.

CARLOS AUGUSTO DÍAZ ROJAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2010

LA COMPACTACIÓN DE STONE-ČECH EN LA CATEGORÍA DE LOS CAMPOS FIBRADOS DE UN GRUPO FINITO.

CARLOS AUGUSTO DÍAZ ROJAS

Trabajo final presentado como
requisito para optar al título de
Magister Scientiae-Matemáticas

VoBo: Dr. Clara Marina Neira Uribe
Director

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2010

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La topología fibrada, conocida también como topología de las funciones continuas, surge alrededor de los años 50, al considerar la idea sencilla de que las funciones continuas son objetos más generales que los espacios topológicos. De hecho, es evidente que un espacio topológico se puede identificar de manera trivial con la función continua definida del espacio en un espacio con un sólo punto. Resulta entonces natural estudiar propiedades de las funciones en lugar de las propiedades tradicionales de los espacios, con el fin de encontrar resultados más generales.

En topología fibrada se trata con estructuras fibradas (E, p, T), donde E y T son espacios topológicos y $p : E \longrightarrow T$ es una aplicación continua. Los haces de conjuntos, los haces de estructuras algebraicas, los espacios de recubrimiento, los campos fibrados, más conocidos como fibre bundles, y los campos de espacios uniformes, que generalizan la teoría de haces y la teoría de espacios de funciones, son los ejemplos más conocidos de estructuras fibradas.

Los primeros pasos en el desarrollo de este punto de vista fibrado fueron dados por Whyburn [5] y Dickman [17] y en 1975, Ul'janov [20] introdujo la noción de función de Hausdorff, con el propósito de estudiar compactificaciones de Hausdorff.

Más adelante, Pasynkov [1] generalizó a las funciones continuas conceptos tales como axiomas de separación T_0, T_1, T_2, $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, regularidad, normalidad, compacidad y compacidad local. El trabajo de I. M. James [9] en 1989, motivado por los trabajos de Pasynkov, presenta los conceptos desarrollados hasta entonces y estudia de manera sistemática versiones fibradas de conexidad, estructuras uniformes, topología equivariante y homotopía.

La noción de compactificación, introducida inicialmente por Whyburn en 1953 [5, 6] ha sido también materia de estudio. Künzi y Pasynkov [8] describieron completamente el conjunto de todas las compactificaciones de Tychonoff de una función de Tychonoff $f : X \longrightarrow Y$ por medio de prehaces de los anillos $\mathrm{C}^*(f^{-1}(U))$, donde U es un subconjunto abierto de Y.

En [2], Feldman y Wilce hacen notar que cuando se aplica el funtor de compactificación de Stone-Čech a una función continua y sobreyectiva $p : E \longrightarrow B$ entre espacios completamente regulares y de Hausdorff, se obtiene una función continua y sobreyectiva $\beta p : \beta E \longrightarrow \beta B$. Esta última función resulta en efecto ser una compactificación, en el sentido fibrado, de la primera. En este trabajo los autores estudian el caso de una aplicación de cubrimiento especial $p : E \longrightarrow B$ llamada un G-campo, donde E es un G-espacio, G es un grupo finito de orden n, B es homeomorfo al espacio de las órbitas E/G por medio de una función f con $f \circ p = \pi$ y en donde π es la aplicación canónica de E en el espacio de órbitas. Se prueba que cuando E y B son espacios de Tychonoff, las fibras de $\beta\pi : \beta E \longrightarrow \beta B$ tienen un cardinal que no excede a n y en el caso que se puedan degenerar lo hacen a fibras cuyo cardinal divide a n. Además encuentra un resultado aún más general en el caso particular de un G-campo universal $\pi : EG \longrightarrow BG$ para un p-grupo finito G.

En este trabajo mostramos parte del estudio realizado en [2] por Feldman y Wilce y obtenemos algunas generalizaciones de sus resultados al considerar condiciones mínimas para que se cumplan.

En el capítulo 1 mostramos la compactación de Stone-Čech por medio de la noción de z-ultrafiltro. Para ello, estudiamos gran parte de las propiedades que tienen los z-filtros y z-ultrafiltros (propiedades que en su mayoría se obtuvieron de [16]) y mostramos, tanto similitudes como diferencias que se tienen con los conceptos de filtro y ultrafiltro. Dicho estudio no sólo nos permitirá obtener la compactación de Stone-Čech, sino que también nos ofrece herramientas de trabajo para los capítulos posteriores.

En el capítulo 2 generalizamos el resultado de [2] referente a la degeneración de las fibras de $\beta p : \beta E \longrightarrow \beta B$ considerando, en lugar de G-campos $p : E \longrightarrow B$, G-campos parciales T_0 en donde E es un G-espacio T_0 y existe una función inyectiva $f : E/G \longrightarrow B$ con $f \circ \pi = p$. En este caso las fibras de p tienen un cardinal que no excede a n y probamos que las fibras no vacías de p, de llegar a degenerasen, lo hacen a fibras cuyo cardinal divide a n. Mostramos el resultado de [2] como un caso particular, al probar que $\beta p : \beta E \longrightarrow \beta B$ es un G-campo parcial T_0. Por último estudiamos algunas condiciones que permitan establecer degeneración de fibras en $p : E \longrightarrow B$ y $\beta p : \beta E \longrightarrow \beta B$. Con lo cual se cumple con el primer objetivo trazado. Que consistía en estudiar la estructura de los G-campos.

En el capitulo 3 mostramos el funtor de compactación de Stone-Čech, cumpliendo con la primera parte de nuestros segundo objetivo, el cual era observar si el funtor de compactación de Stone-Čech da lugar a una construcción universal en la categoría de los G-espacios fibrados de Tychonoff análoga a la compactación de Stone-Čech de los espacios topológicos de Tychonoff. La respuesta a esta inquietud es negativa como mostramos con un ejemplo. Vale la pena mencionar que en [2] muestran este funtor, pero sólo lo consideran de la categoría de los espacios de Tychonoff en la categoría de los espacios de Hausdorff compactos. En este capítulo también se cumple la otra parte del segundo objetivo del trabajo, el cual consistía en estudiar la categoría de los campos. Agregamos a este estudio la categoría de los campos de Tychonoff y mostramos el comportamiento de algunos de sus monomorfismos. Finalizamos con un comentario sobre los conceptos de producto y coproducto.

CAPÍTULO 1

La compactación de Stone-Čech por medio de z-filtros

En el presente capítulo estudiamos una generalización de los filtros en espacios topológicos conocida como z-filtros; por tal motivo siempre que hablemos de un espacio X se sobre entiende que X es un espacio topológico.
Por medio de los z-filtros mostraremos en este capítulo una manera alterna de obtener la compactación de Stone-Čech. Este resultado no es reciente, pero vale la pena mostrarlo ya que no es muy conocido y además la mayor parte de la teoría que involucra es necesaria para los capítulos posteriores. También subrayamos que dicha teoría en gran parte se obtuvo de [19].

1.1. z-filtros

Iniciamos esta sección con algunas definiciones básicas.

Definición 1.1. Para un espacio X definimos:

1. El conjunto $C(X)$ como el conjunto formado por todas las funciones continuas de X en los números reales.

2. Para cada $f \in C(X)$ sea $Z(f)$ el conjunto cerrado $f^{-1}(0)$ llamado cero-conjunto de f o simplemente cero-conjunto. Denotamos $Z[X] := \{Z(f) : f \in C(X)\}$. Por último, sea $C_z(f)$ el conjunto $Z(f)^c$ llamado co-cero de f o simplemente co-cero.

Es claro que $\emptyset$ y X son cero-conjuntos puesto que se obtienen, $\emptyset$ por medio de cualquier función no nula y X por medio de la función nula. También se tiene que todo cero-conjunto proviene de una función continua de X en $[0, 1]$, dado que si $f \in C(X)$ entonces $Z(f) = Z(min\{|f(x)|, 1\})$, por tal motivo siempre que consideremos un cero-conjunto $Z(f)$ supondremos que f se encuentra acotada por $[0, 1]$ a menos que se diga lo contrario. Por último vemos que si $f \in C(X)$, para cada a en X la función f_a definida como $f_a = f - f(a)$

es continua y $a \in Z(f_a)$.

Por otra parte se tiene que las uniones e intersecciones finitas de cero-conjuntos son cero-conjuntos. Ésto se obtiene de las igualdades

$$Z(f) \cup Z(g) = Z(fg) \quad \text{y} \quad Z(f) \cap Z(g) = Z(f+g).$$

En realidad, en el caso de las intersecciones el resultado se puede extender a una colección enumerable. Si tomamos una sucesión de cero-conjuntos en X, $\{Z(f_n)\}$ y definimos la función g de X en los reales como:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{2^k}$$

se tiene que $g \in C(X)$ dado que la sucesión de funciones continuas $\{g_n\}$ donde

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{2^k}$$

converge uniformemente a g y además $Z(g) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z(g_n)$.

Note también que si consideramos $f \in C(X)$ (no necesariamente acotada) se cumple que $\{x : f(x) \geq 0\} = Z(min\{f, 0\})$ y $\{x : f(x) \leq 0\} = Z(max\{f, 0\})$.

Teniendo en cuenta lo anterior damos la siguiente definición.

Definición 1.2. Por un z-filtro sobre X entendemos un subconjunto no vacío $\mathfrak{F}$ de $Z[X]$ que cumple las siguiente condiciones:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,
2. si $A, B \in \mathfrak{F}$ entonces $A \cap B \in \mathfrak{F}$,
3. si $A \in \mathfrak{F}$ y $B \in Z[X]$ es tal que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathfrak{F}$.

Es claro que bajo las condiciones establecidas no necesariamente se debe tener que un filtro sea un z-filtro y viceversa, ésto se debe esencialmente al hecho que los z-filtros dependen no sólo de un conjunto sino de una topología definida sobre éste; por ejemplo si consideramos un espacio X indiscreto, las únicas funciones continuas de X en los reales son las constantes. Así, si $\mathfrak{F}$ es un filtro sobre X y $A \in \mathfrak{F}$ es un subconjunto propio de X, A no puede ser un cero-conjunto; por consiguiente $\mathfrak{F}$ no es un z-filtro. Por otra parte, si consideramos nuevamente un conjunto X, tomamos de él un subconjunto propio B cuyo complemento posea más de un elemento y asociamos a X la topología $\tau = \{\emptyset, B, B^c, X\}$. Se sigue que $Z[X] = \tau$ dado que τ es finito y sus elementos son cerrados; por consiguiente $\mathfrak{F} = \{B, X\}$ es un z-filtro que no es filtro. En efecto, debido a que B^c posee más de un elemento, para cada $x \in B^c$, $B \cup \{x\} \neq X$, es decir, $B \cup \{x\} \notin \mathfrak{F}$.

A pesar de lo anterior, dado un filtro $\mathfrak{F}$ sobre un conjunto X siempre es posible encontrar una topología sobre X en donde $\mathfrak{F}$ sea un z-filtro. Una de estas topologías es la discreta en donde toda función de X en los reales es continua. De hecho, solo en el caso cuando es un espacio discreto se tiene que los conceptos de z-filtro y filtro coinciden (bajo esta hipótesis si a es un punto en X y tomamos el filtro $\mathfrak{F} = \{\{a\}^c, X\}$, se sigue por ser $\mathfrak{F}$ un z-filtro que $\{a\}$ es un conjunto abierto).

Al igual que sucede con los filtros decimos que un z-filtro $\mathfrak{F}$ es más fino que un z-filtro $\mathfrak{B}$ o que $\mathfrak{B}$ es menos fino que $\mathfrak{F}$ si $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$. Los z-filtros maximales los llamamos z-ultrafiltros.

Otros conceptos que se definen en los z-filtros, de forma análoga que en filtros, son los conceptos de z-filtro generado, base y sub-base. Si β es base para algún z-filtro, notamos $\langle\beta\rangle_z$ al z-filtro generado por β. Si $\mathfrak{F}$ es un filtro sobre el espacio X, definimos $\mathfrak{F}_z =: \{F \in Z[X] : F \in \mathfrak{F}\}$ como el z-filtro generado por $\mathfrak{F}$ (note que $\mathfrak{F}_z = Z[X] \cap \mathfrak{F}$). En consecuencia, obtenemos los siguientes resultados que son inmediatos:

1) Todo z-filtro $\mathfrak{F}$ sobre X es base para algún filtro $\mathfrak{B}$ sobre X, tal que $\mathfrak{B}_z = \mathfrak{F}$.

2) Si $\mathfrak{F}$ es un filtro sobre X, el filtro generado por el z-filtro $\mathfrak{F}_z$ es menos fino que $\mathfrak{F}$.

3) Si $\mathfrak{F}$ es un z-ultrafiltro sobre X, no necesariamente se tiene que el filtro generado por $\mathfrak{F}$ sea un ultrafiltro.

Ejemplos de la contenencia estricta en 2) y en 3) se obtienen si consideramos espacios indiscretos.

Otro resultado que obtenemos es el siguiente.

Proposición 1.1.1. Sobre un espacio X se tiene:

1. Todo z-filtro se encuentra contenido en un z-ultrafiltro.
2. Para cada elemento x en X el z-filtro principal $\langle x\rangle_z = \{F \in Z[X] : x \in F\}$ es un z-ultrafiltro.

Demostración.

1. La prueba es análoga a la realizada en los filtros.
2. Sean $x \in X$ y $\mathfrak{F}$ un z-filtro mas fino que $\langle x\rangle_z$. Veamos que los z-filtros coinciden. Si $A \in \mathfrak{F}$, sabemos que existe $f \in C(X)$ tal que $A = Z(f)$, en este caso consideramos la función $f_x \in C(X)$ la cual recordemos que esta definida como $f_x = f - f(x)$ en donde $x \in Z(f_x)$, es decir, $Z(f_x) \in \langle x\rangle_z \subseteq \mathfrak{F}$ y en consecuencia $Z(f) \cap Z(f_x) \neq \emptyset$; por tal motivo si tomamos un elemento y en esta intersección, se sigue:

$$0 = f_x(y) = f(y) - f(x) = 0 - f(x)$$

lo cual implica que $x \in Z(f) = A$ o equivalentemente, $A \in \langle x\rangle_z$.

■

La proposición anterior nos muestra que todo ultrafiltro principal induce un z-ultrafiltro principal; por consiguiente es natural preguntarnos si todo ultrafiltro no principal induce un z-ultrafiltro. La respuesta es negativa y mostramos un ejemplo de este hecho que se obtiene de las siguientes proposiciones.

Proposición 1.1.2. Un z-filtro $\mathfrak{F}$ sobre X es un z-ultrafiltro, si y sólo si, para cada cero-conjunto A tal que $A \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathfrak{F}$, se tiene que $A \in \mathfrak{F}$.

Demostración.
$\Rightarrow$) Si $\mathfrak{F}$ es un z-ultrafiltro sobre X y A es un cero-conjunto que tiene intersección no vacía con cada elemento de $\mathfrak{F}$, entonces la colección $\beta = \{A \cap B : B \in \mathfrak{F}\}$ es base para un z-filtro $\mathfrak{B}$ sobre X en donde $A \in \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$ de lo cual concluimos, por la maximalidad de $\mathfrak{F}$, que $A \in \mathfrak{F}$.

$\Leftarrow$) Consideremos un z-filtro $\mathfrak{B}$ sobre X tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$. Si $F \in \mathfrak{B}$, se sigue por la contenencia que $F \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathfrak{F}$, luego por la hipótesis $F \in \mathfrak{F}$, con lo cual concluimos que $\mathfrak{F}$ es un z-ultrafiltro. ■

Proposición 1.1.3. Dada una colección finita $\{\mathfrak{U}_n\}$ de z-ultrafiltros, existe una colección $\{A_n\}$ de cero-conjuntos disyuntos dos a dos tales que $A_k \in \mathfrak{U}_k$ para todo k.

Demostración.
Por inducción. El caso para $n = 2$ es una consecuencia inmediata de la proposición anterior. Ahora si suponemos que se cumple para una colección finita $\{\mathfrak{U}_n\}$ de z-ultrafiltros por medio de una colección $\{A_n\}$ de cero-conjuntos y $\mathfrak{U}$ es un z-ultrafiltro distinto de cada uno de los n z-ultrafiltros mencionados, entonces del caso $n = 2$, para cada $k = 1, 2, ..., n$ existen cero-conjuntos disyuntos A'_k y B_k en $\mathfrak{U}_k$ y $\mathfrak{U}$ respectivamente. Si tomamos los cero-conjuntos $C_k = A_k \cap A'_k$ y $B = \bigcap B_k$, obtenemos el resultado mediante la colección $\{C_k\} \cup \{B\}$. ■

Definición 1.3. Si $\mathfrak{F}$ es un z-filtro sobre X, decimos que $\mathfrak{F}$ es primo si para todo par de cero-conjuntos A y B con $A \cup B \in \mathfrak{F}$ se tiene que $A \in \mathfrak{F}$ o $B \in \mathfrak{F}$.

La definición anterior también se tiene en los filtros, sin embargo en ese contexto carece de significado ya que es una caracterización de los ultrafiltros, cosa que no ocurre con los z-ultrafiltros, en donde sólo se tiene una implicación como vemos a continuación.

Proposición 1.1.4. Todo z-ultrafiltro es primo.

Demostración.
Sea $\mathfrak{F}$ un z-ultrafiltro sobre X y sean A y B cero-conjuntos con $A \cup B \in F$. Si se tuviese que A y B no se encuentran en $\mathfrak{F}$, la colección

$$\mathfrak{B} = \{F \in Z[X] : F \cup B \in \mathfrak{F}\}$$

sería un z-filtro sobre X estrictamente más fino que $\mathfrak{F}$ contradiciendo la maximalidad de $\mathfrak{F}$; por consiguiente concluimos que $A \in \mathfrak{F}$ o $B \in \mathfrak{F}$. ■

A continuación mostramos dos ejemplos de que la implicación contraria no siempre se tiene, es decir, no todo z-filtro primo es un z-ultrafiltro. Los cuales también muestran como se había mencionado anteriormente, que no todo ultrafiltro induce un z-ultrafiltro.

Ejemplo 1.1.

1. Si consideramos el conjunto $J = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y tomamos para cada $m \in \mathbb{N}$ el conjunto $J_m = \{1/n : m \leq n, \text{ y}, n \in \mathbb{N}\}$. La colección de los J_m forma una base para un filtro sobre J el cual se encuentra contenido en un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ sobre J. Ahora consideremos sobre $\mathbb{R}$ el z-filtro $\mathfrak{F} = \{A \in Z[\mathbb{R}] : A \cap J \in \mathfrak{U}\}$, se sigue que $\mathfrak{F}$ es primo y por otra parte no es un z-ultrafiltro. En efecto, observamos que para cada cero-conjunto A en $\mathfrak{F}$ se tiene que $0 \in A$ ya que toda vecindad de cero intersecta a cada conjunto J_m, esto quiere decir que cero pertenece a la adherencia de A, pero como A es cerrado por ser cero-conjunto, se tiene que $0 \in A$. Hemos probado que el conjunto unipuntual $\{0\}$ (el cual es cero-conjunto), intersecta a todo elemento de $\mathfrak{F}$. Sin embargo $\{0\} \notin \mathfrak{F}$; aplicando la caracterización de los z-ultrafiltros, concluimos que $\mathfrak{F}$ no es un z-ultrafiltro. Además, es fácil ver que $\mathfrak{F}$ coincide con el z-filtro generado por el ultrafiltro $\mathfrak{U}$, por lo tanto no todo ultrafiltro no principal genera un z-ultrafiltro.

2. Otro ejemplo mas general y sencillo se obtiene si consideramos en el espacio $[0, 1]$ con la topología usual, un ultrafiltro no principal $\mathfrak{U}$. El z-filtro $\mathfrak{U}_z$ inducido por $\mathfrak{U}$, es primo por provenir de un ultrafiltro. Ahora, dado que $[0, 1]$ es un espacio de Hausdorff y compacto, $\mathfrak{U}$ posee un único punto adherente, llamémoslo x. En consecuencia, para todo $F \in \mathfrak{U}_z$, se tiene que $x \in F$ por ser F cerrado, lo cual implica que $\mathfrak{U}_z$ es menos fino que el z-filtro principal $\langle x \rangle_z$ y como en $[0, 1]$ el conjunto unipuntual $\{x\}$ es un cero-conjunto, se sigue que $\{x\} \in \langle x \rangle_z$ pero $\{x\} \notin \mathfrak{U}_z$, es decir, $\langle x \rangle_z$ es estrictamente mas fino que $\mathfrak{U}_z$.

El siguiente resultado es de gran importancia ya que establece que siempre es posible separar cero-conjuntos disyuntos por cocero-conjuntos.

Lema 1.1.1. Si A y B son cero-conjuntos disyuntos entonces, existen cero-conjuntos C y D con $C^c \cap D^c = \emptyset$ tales que $A \subseteq D^c$ y $B \subseteq C^c$.

Demostración.
Si A y B son cero-conjuntos con $A \cap B = \emptyset$ en donde $A = Z(f)$ y $B = Z(g)$ definimos los conjuntos $C = \{x : g(x) \geq f(x)\}$ y $D = \{x : f(x) \geq g(x)\}$. Por ser f y g funciones continuas que llegan a $[0, 1]$, se tiene que C y D son conjuntos cerrados (en donde además $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ y $C \cup D = X$, es decir, $C^c \cap D^c = \emptyset$); por consiguiente las siguientes funciones son continuas,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{si} \quad x \in D, \\ 0 & \text{si} \quad x \in C. \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) - f(x) & \text{si} \quad x \in C, \\ 0 & \text{si} \quad x \in D. \end{cases}$$

con $Z(f_1) = C$, $Z(f_2) = D$ y como $A \cap B = \emptyset$, se cumple que $A \cap D = B \cap C = \emptyset$ (recordemos que estamos considerando a f y g acotadas en [0,1]), con lo cual termina la prueba. ■

Lema 1.1.2. Dados dos z-ultrafiltros distintos $\mathfrak{U}_1$ y $\mathfrak{U}_2$ en X, existen cero-conjuntos C y D que cumplen:

1. $C \cup D = X$
2. $C \in \mathfrak{U}_1$ y $C \notin \mathfrak{U}_2$
3. $D \in \mathfrak{U}_2$ y $D \notin \mathfrak{U}_1$

Demostración.
Si $\mathfrak{U}_1$ y $\mathfrak{U}_2$ son z-ultrafiltros distintos en X, se sigue de la Proposición (1.1.3) que existen cero-conjuntos A y B disyuntos con $A \in \mathfrak{U}_1$ y $B \in \mathfrak{U}_2$ y por el Lema (1.1.3) tenemos cero-conjuntos C y D con $C \cup D = X$ tales que $A \subseteq D^c$ y $B \subseteq C^c$, en consecuencia $C \cup D$ pertenece a $\mathfrak{U}_1$ y $\mathfrak{U}_2$, y por la primalidad de $\mathfrak{U}_1$ y $\mathfrak{U}_2$ y el hecho que $A \subseteq D^c$ y $B \subseteq C^c$, se sigue que $C \in \mathfrak{U}_1$ y $C \notin \mathfrak{U}_2$ al igual que $D \in \mathfrak{U}_2$ y $D \notin \mathfrak{U}_1$. ■

Proposición 1.1.5. Todo z-filtro primo esta contenido en un único z-ultrafiltro.

Demostración.
Si suponemos que este hecho no es cierto y $\mathfrak{F}$ es un z-filtro primo el cual se encuentra contenido en z-ultrafiltros distintos $\mathfrak{U}_1$ y $\mathfrak{U}_2$, del Lema (1.1.2) existen cero-conjuntos C y D con $C \cup D = X$ tales que $C \in \mathfrak{U}_1 \backslash \mathfrak{U}_2$ y $D \in \mathfrak{U}_2 \backslash \mathfrak{U}_1$, de lo cual se sigue que $C \cup D \in \mathfrak{F}$, es decir, $C \in \mathfrak{F}$ o $D \in \mathfrak{F}$ contradiciendo la contenencia de $\mathfrak{F}$ en $\mathfrak{U}_1$ y $\mathfrak{U}_2$. ■

El resultado anterior también nos muestra que no todo z-filtro es la intersección de los z-ultrafiltros que lo contiene.

1.2. Convergencia y puntos adherentes en z-filtros

Los conceptos de convergencia y puntos adherentes en los z-filtros se definen de forma natural y cumplen propiedades interesantes que son necesarias para describir la compactación de Stone-Čech en términos de z-filtros.

Definición 1.4. Decimos que un z-filtro $\mathfrak{F}$ sobre X converge a un punto x del espacio, o que x es un punto límite de $\mathfrak{F}$, si toda vecindad de x contiene un cero-conjunto de $\mathfrak{F}$. De igual forma decimos que un punto y del espacio X es adherente a $\mathfrak{F}$ si y es adherente a cada elemento de $\mathfrak{F}$.

Como consecuencias inmediatas de la definición anterior se tienen para un z-filtro $\mathfrak{F}$ en X :

1. Si un elemento x es un punto límite de $\mathfrak{F}$, toda vecindad de x que sea cero-conjunto pertenece a $\mathfrak{F}$.
2. Si w es un punto adherente de $\mathfrak{F}$, entonces se tiene (dado que los cero-conjuntos son cerrados) que w se encuentra en todo elemento de $\mathfrak{F}$. Por tal motivo obtenemos las siguientes equivalencias:

a) w es un punto adherente a $\mathfrak{F}$, si y sólo si, $\mathfrak{F}$ es menos fino que el z-filtro principal generado por w.

b) $\mathfrak{F}$ posee puntos adherentes, si y sólo si, la intersección de todos los elementos de $\mathfrak{F}$ es no vacía. (En este caso los puntos que se encuentran en la intersección son precisamente los puntos adherentes a $\mathfrak{F}$.)

Adicionalmente, de la primera equivalencia y debido a que los z-ultrafiltros principales pueden llegar a coincidir, es decir, puntos distintos de X pueden generar el mismo z-ultrafiltro (para ello basta considerar al espacio con la topología indiscreta), se tiene que $\mathfrak{F}$ posee por lo menos tantos puntos adherentes como z-ultrafiltros principales lo contienen. En consecuencia, los únicos z-ultrafiltros que poseen puntos adherentes son los principales.

En general, las propiedades de filtros que se establecen para convergencia o punto adherente no tienen propiedades análogas en los z-filtros debido a que éstos se restringen a una clase particular de conjuntos cerrados (ceros-conjuntos). Sin embargo, el siguiente resultado nos brinda herramientas suficientes para establecer algunas propiedades.

Proposición 1.2.1. Si X es un espacio completamente regular, cada punto del espacio posee una base de vecindades formada por sus vecindades que son cero-conjuntos.

Demostración.
Tomemos un punto x en X y sea β_x la colección de los cero-conjuntos que son vecindades de x. Ahora, si V es una vecindad de x, (la cual podemos suponer abierta) se sigue que $X\backslash V$ es cerrado y no contiene a x, en consecuencia, por ser X completamente regular, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X\backslash V) = \{1\}$, de lo cual tenemos:

1. $f^{-1}[0,1/2]$ es vecindad de x.

   $f^{-1}[0,1/2)$ es abierto por ser f continua y además $x \in f^{-1}[0,1/2) \subseteq f^{-1}[0,1/2]$.

2. $f^{-1}[0,1/2]$ es un cero-conjunto. En efecto, si definimos $g : [0,1] \to [0,1]$ como

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2. \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   el lema del pegamiento garantiza la continuidad de g y además $Z(g \circ f) = f^{-1}[0,1/2]$.

3. $f^{-1}[0,1/2] \subseteq V$.

   Se sigue del hecho que $(X\backslash V) \cap f^{-1}[0,1/2] = \emptyset$, ya que $X\backslash V \subseteq f^{-1}(1)$.

De 1, 2 y 3 obtenemos el resultado. ■

Proposición 1.2.2. Si X es un espacio completamente regular entonces:

a) Todo punto límite de un z-filtro es adherente al z-filtro.

b) Los únicos z-ultrafiltros convergentes son los z-ultrafiltros principales.

c) En todo z-ultrafiltro se tiene que sus puntos adherentes son exactamente los puntos a los cuales converge.

d) X es de Hausdorff, si y sólo si, todo z-filtro converge a lo más a un punto.

Demostración.

a) Sea $\mathfrak{F}$ un z-filtro el cual converge a un punto x. Si x no fuese adherente a $\mathfrak{F}$, es decir, si existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $x \notin F$; se tiene que x se encuentra en el conjunto abierto $X \backslash F$ y por la Proposición (1.2.1) existe un cero-conjunto F' vecindad de x con $F' \subseteq X \backslash F$ o equivalentemente, $F \cap F' = \emptyset$ lo cual es absurdo ya que F' se encuentra en $\mathfrak{F}$ por ser una vecindad del punto al cual converge $\mathfrak{F}$. Así x es un punto adherente a $\mathfrak{F}$.

b) Por la proposición anterior, siempre se tiene en este caso, que los z-ultrafiltros principales convergen al punto que los genera. Ahora, si $\mathfrak{F}$ es un z-ultrafiltro que converge a un punto x, del numeral anterior se tiene que x es un punto adherente a $\mathfrak{F}$, es decir, $\mathfrak{F}$ es menos fino que el z-filtro $\langle x \rangle_z$, pero por ser $\mathfrak{F}$ maximal se sigue que $\mathfrak{F} = \langle x \rangle_z$.

c) Sea $\mathfrak{F}$ un z-ultrafiltro. Si x es un punto adherente a $\mathfrak{F}$, se sigue por la maximalidad de $\mathfrak{F}$, que $\mathfrak{F} = \langle x \rangle_z$ y por la proposición anterior vimos que $\mathfrak{F}$ converge a x. Ahora, si $\mathfrak{F}$ converge a un punto x, por el numeral anterior $\mathfrak{F} = \langle x \rangle_z$, lo cual implica que x es un punto adherente de $\mathfrak{F}$.

d) $\Rightarrow$) Sea $\mathfrak{F}$ un z-filtro que converge a dos puntos x, y. Si $x \neq y$ por ser X de Hausdorff, existen conjunto abiertos disyuntos A y B tales que $x \in A$ y $y \in B$ y por ser X completamente regular, de la Proposición (1.2.1) existen cero-conjuntos F_1 y F_2 en donde F_1 es vecindad de x con $F_1 \subseteq A$ y F_2 es vecindad de y con $F_2 \subseteq B$ y por la condición de convergencia se encuentran en $\mathfrak{F}$, lo cual es absurdo ya que tiene intersección vacía por encontrarse cada uno dentro de un abierto que es disyuntos con el otro, de esta forma concluimos que $x = y$.
$\Leftarrow$) Dado que X es completamente regular, basta probar que X es T_1, es decir, que todo conjunto unipuntual es cerrado. Si x y y son dos puntos de X tales que $y \in \overline{\{x\}}$, se tiene que todo conjunto cerrado que contiene a x, contiene a y. En especial todo cero-conjunto; por consiguiente, x y y son puntos adherentes al z-ultrafiltro $\langle y \rangle_z$, luego del numeral anterior se tiene que $\langle y \rangle_z$ converge a estos dos puntos, lo cual contradice la hipótesis y por tal motivo concluimos que $x = y$. De esta forma el espacio X es T_1.

■

Como una observación tenemos que en el caso que el espacio no sea completamente regular, no todo z-ultrafiltro principal converge al punto que lo genera, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Si consideramos el conjunto $\{0,1\}$ con la topología $\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ de Sierpinski, tenemos que el único cero-conjunto no vacío es $\{0,1\}$ y por lo tanto el z-filtro principal generado por el cero, no converge al punto.

Proposición 1.2.3. Un espacio topológico X es completamente regular, si y sólo si, la colección de los cero-conjuntos forman una base para los conjuntos cerrados. (Es decir, todo conjunto cerrado en X es una intersección de cero-conjuntos).

Demostración.
$\Rightarrow$) Sólo debemos probar que si A es un conjunto cerrado entonces,

$$\bigcap_{\substack{B \in Z[X] \\ A \subseteq B}} B \subseteq A.$$

De no tenerse esta contenencia, existiría x que pertenece a la intersección tal que $x \notin A$, en consecuencia por ser X completamente regular, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $A \subseteq Z(f)$ y $x \notin Z(f)$. Esto contradice la existencia del x y de esta forma obtenemos el resultado

$\Leftarrow$) Sea w un punto en X y sea A un conjunto cerrado tal que $w \notin A$. Por la hipótesis se tiene que existe un cero-conjunto $Z(f)$ que contiene a A en donde $w \notin Z(f)$. En consecuencia, siempre podemos construir a partir de f una función continua g de X en $[0,1]$ que separe a w de A. ■

Proposición 1.2.4. Si X es completamente regular los siguientes enunciados son equivalentes.

a) X es compacto.

b) Todo z-filtro posee puntos adherentes.

c) Todo z-ultrafiltro converge.

Demostración.
$a) \Rightarrow b)$ Esta implicación siempre se tiene dado que si x es compacto toda colección de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, tiene intersección no vacía, en especial todo z-filtro en donde los puntos de la intersección son los puntos adherentes.

$b) \Rightarrow c)$ Si $\mathfrak{F}$ es un z-ultrafiltro, por hipótesis tiene puntos adherentes y por la Proposición (1.2.2-c) estos puntos adherentes son precisamente los puntos a los cuales $\mathfrak{F}$ converge.

$c) \Rightarrow a)$ Sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita. Veamos que la intersección de todos los elementos de esta colección tiene intersección no vacía con lo cual concluimos que X es compacto.

Tomemos la colección

$$\xi = \{F \in Z[X] : F \supseteq A \quad \text{para algún} \quad A \in \mathcal{C}\},$$

en donde por la proposición anterior, todo elemento de la colección $\mathcal{C}$ por ser cerrado puede ser visto como la intersección de los cero-conjuntos que lo contienen y por ser el espacio completamente regular, obtenemos la siguiente igualdad

$$\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A = \bigcap_{F\in\xi} F,$$

en donde la expresión de la derecha es no vacía. En efecto, debido a la propiedad de la intersección finita de $\mathcal{C}$, la colección ξ es subbase para un z-filtro sobre X el cual se encuentra contenido en un z-ultrafiltro $\mathfrak{U}$. Por hipótesis $\mathfrak{U}$ es convergente, digamos a un punto w y por ser X completamente regular de la Proposición (1.2.2) numerales b y c, tenemos que $\mathfrak{U} = \langle w\rangle_z$ y en consecuencia todo elemento de $\mathfrak{U}$ contiene a w, en especial los de la subbase ξ; así, $w \in \bigcap\limits_{F\in\beta} F$. ■

Proposición 1.2.5. Si X es un espacio de Hausdorff compacto, todo z-ultrafiltro es principal.

Demostración.
La prueba se sigue de inmediato de las proposiciones (1.2.4-c) y (1.2.2-b) en ese orden. ■

1.3. Compactación de Stone-Čech

En esta sección describimos la compactación de Stone-Čech en términos de los z-ultrafiltros. Para ello iniciamos considerando la colección βX formada por todos los $z-$ultrafiltros sobre X y para cada cero-conjunto F de X, tomamos $\hat{F} = \{\mathfrak{U} \in \beta X \mid F \in \mathfrak{U}\}$. Entonces se tienen los siguientes resultados.

Proposición 1.3.1. Si F_1 y F_2 son cero-conjuntos en X, entonces:

a) $\widehat{F_1 \cap F_2} = \hat{F_1} \cap \hat{F_2}$.

b) $\widehat{F_1 \cup F_2} = \hat{F_1} \cup \hat{F_2}$.

c) $F_1 \subseteq F_2$, si y sólo si, $\hat{F_1} \subseteq \hat{F_2}$.

d) $\hat{F_1} = \emptyset$, si y sólo si, $F_1 = \emptyset$.

e) $\hat{F_1} = \beta X$, si y sólo si, $F_1 = X$.

Demostración.

a) $\mathfrak{U} \in \widehat{F_1 \cap F_2} \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{U} \Leftrightarrow F_1 \in \mathfrak{U}$ y $F_2 \in \mathfrak{U} \Leftrightarrow \mathfrak{U} \in \hat{F_1}$ y $\mathfrak{U} \in \hat{F_2} \Leftrightarrow \mathfrak{U} \in \hat{F_1} \cap \hat{F_2}$

b) Para la unión la prueba es análoga a la intersección utilizando el hecho de que los ultrafiltros son primos.

c) $\Rightarrow$) Si $\mathfrak{U} \in \hat{F_1}$ entonces $F_1 \in \mathfrak{U}$ luego si $F_1 \subseteq F_2$ se sigue que $F_2 \in \mathfrak{U}$ y en consecuencia $\hat{F_1} \subseteq \hat{F_2}$.

$\Leftarrow$) Si $x \in F_1$ entonces $\langle x \rangle_z \in \hat{F_1} \subseteq \hat{F_2}$ es decir, $F_2 \in \langle x \rangle_z$, luego $x \in F_2$; por consiguiente $F_1 \subseteq F_2$.

d) Dado que vacío es un cero-conjunto que no se encuentra en ningún z-filtro, tenemos que $\widehat{\emptyset} = \emptyset$. Si aplicamos el numeral (C) obtenemos la equivalencia.

e) Dado que todo z-filtro contiene a X se tiene que $\hat{X} = \beta X$. Si aplicamos el numeral (C) obtenemos la equivalencia.

■

Nota 1.3.1. Los dos primeros numerales de la proposición anterior se pueden generalizar para un número finito de cero-conjuntos sobre X.

Proposición 1.3.2. La colección $\{\hat{F} \mid F \in Z[X]\}$ es una base de cerrados para una topología sobre βX. En donde además éste espacio resulta ser de Hausdorff y compacto.

Demostración.

1. Veamos que la colección $\{\hat{F}^c \mid F \in Z[X]\}$ es base para una topología sobre βX.

   a) Sabemos que $\emptyset$ y βX pertenecen a la familia ya que

   $$\emptyset = [\,\beta X\,]^c = [\,\widehat{X}\,]^c \quad \text{y} \quad X = \emptyset^c = [\,\widehat{\emptyset}\,]^c.$$

   b) Supongamos que $F_1, F_2 \in Z[X]$. Por las leyes de DeMorgan y la proposición anterior se sigue que $\hat{F_1}^c \cap \hat{F_2}^c$ se encuentra en la colección ya que

   $$\hat{F_1}^c \cap \hat{F_2}^c = (\hat{F_1} \cup \hat{F_2})^c = (\widehat{F_1 \cup F_2})^c.$$

2. Veamos que con esta topología βX es compacto.
   Consideremos una colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en βX con la propiedad de la intersección finita y veamos que la intersección de todos los elementos de esta colección tiene intersección no vacía.
   Tomemos la colección

   $$\xi = \{F \in Z[X] : \hat{F} \supseteq A \quad \text{para algún} \quad A \in \mathcal{C}\}.$$

   Dado que todo conjunto de $\mathcal{C}$ se puede ver como la intersección de los elementos de la colección $\{\hat{F} : F \in Z[X]\}$ que lo contienen por ser esta base para los conjuntos cerrados en βX, obtenemos la siguiente igualdad

   $$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcap_{F \in \xi} \hat{F}.$$

   En donde la expresión de la derecha es no vacía (con lo cual concluimos que βX es compacto). En efecto, como la colección ξ es no vacía y además, debido a la propiedad de la intersección finita de $\mathcal{C}$ y a la Proposición (1.3.1) numerales a y c, se tiene que ξ es subbase para un z-filtro sobre X el cual se encuentra contenido en un z-ultrafiltro $\mathfrak{U}$ sobre X. En consecuencia todo elemento de ξ pertenece al z-ultrafiltro $\mathfrak{U}$, es decir $\mathfrak{U} \in \bigcap_{F\in\xi} \hat{F}$.

3. Veamos que βX es de Hausdorff.

   Si $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{U}$ se encuentra en βX con $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{U}$ por el Lema (1.1.2), existen cero-conjuntos C y D con $C \cup D = X$ tales $C \in \mathfrak{F}$ y $D \in \mathfrak{U}$ pero $C \notin \mathfrak{U}$ y $D \notin \mathfrak{F}$, de lo cual se sigue que, $\mathfrak{U} \in \hat{C}^c$ y $\mathfrak{F} \in \hat{D}^c$ y por la Proposición (1.3.1) y las leyes de DeMorgan se tiene que
$$C \cup D = X \Leftrightarrow \widehat{C \cup D} = \hat{C} \cup \hat{D} = \beta X \Leftrightarrow [\hat{C} \cup \hat{D}]^c = \hat{C}^c \cap \hat{D}^c = \emptyset$$
   con lo cual concluimos que βX es de Hausdorff.

■

Proposición 1.3.3. Sea $i : X \to \beta X$ la función definida para cada $x \in X$ por $i(x) = \langle x \rangle_z$. Entonces se cumple:

a) i es continua.

b) El conjunto de los z-ultrafiltros principales $i(X)$ es denso en βX.

c) Si X es completamente regular entonces. X es de Hausdorff, si y sólo si, la función i es uno a uno.

d) Si X es completamente regular y de Hausdorff, entonces, la función i es cerrada en su imagen.

Demostración.

a) Basta con probar que la imagen inversa de una cerrado básico, es un cerrado.
   Si $F \in Z[X]$, se tiene que
$$i^{-1}(\widehat{F}) = \{x \in X \mid i(x) \in \widehat{F}\} = \{x \in X \mid F \in i(x)\} = \{x \in X \mid x \in F\} = F,$$
   el cual es cerrado.

b) Consideremos $\mathfrak{U}$ en βX y veamos que $\mathfrak{U}$ es adherente a $i(X)$ utilizando abiertos básicos. Si tomamos $F \in Z[X]$ tal que $\mathfrak{U} \in \widehat{F}^c$, se tiene que $F \notin \mathfrak{U}$ y por lo tanto $F \neq X$. De esta forma, si tomamos $z \in X \backslash F$ se sigue que $F \notin i(z)$, es decir, $i(z) \in \widehat{F}^c$ con lo cual tenemos que $\widehat{F}^c \cap i(X) \neq \emptyset$.

c) El hecho de que i sea inyectiva cuando X es de Hausdorff, es inmediato de la Proposición (1.2.2-d). Ahora, si suponemos que i es inyectiva y tomamos puntos distintos x y y en X, tenemos que $i(x) \neq i(y)$, luego del Lema (1.1.2) obtenemos que x y y se pueden separar por conjuntos abiertos y disyuntos.

d) Para ver que i es cerrada en su imagen basta con mostrar que la imagen de un cero-conjunto es un cerrada en $i(X)$, ya que por ser X completamente regular (de la Proposición 1.2.3), los cero-conjuntos forman una base para los cerrados en X y si le agregamos el hecho de ser de Hausdorff, del numeral anterior, la función i es uno a uno, en consecuencia, preserva intersecciones.

   Si F es un cero-conjunto en X siempre se tiene la igualdad $i(F) = \widehat{F} \cap i(X)$, con lo cual termina la prueba.

$\blacksquare$

Ahora, si consideramos dos espacios topológicos X y Y y una función continua $p : X \longrightarrow Y$ y tomamos para cada z-ultrafiltro $\mathfrak{U}$ en X la colección $\mathfrak{U}_p = \{F \in Z[Y] : p^{-1}(F) \in \mathfrak{U}\}$ se tiene $\mathfrak{U}_p$, define un z-filtro primo en Y el cual se encuentra contenido en un único z-ultrafiltro, llamémoslo $p(\mathfrak{U})$. Ahora si definimos la función $\beta p : \beta X \longrightarrow \beta Y$ tal que $\beta p(\mathfrak{U}) = p(\mathfrak{U})$, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.3.4. Si $p : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces:

1. La función $\beta p : \beta X \longrightarrow \beta Y$ es también continua y además es la única que hace que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "p"'] & \beta X \arrow[d, "\beta p"] \\ Y \arrow[r, "i_Y"] & \beta Y \end{tikzcd}$$

Diagrama 1

2. Si p es sobreyectiva, βp es sobreyectiva.

3. Si p es cerrada para cero-conjuntos, se tiene que para todo z-ultrafiltro $\mathfrak{U}$ en X, $\mathfrak{U}_p$ es un z-ultrafiltro en Y (en este caso $\beta p(\mathfrak{U}) = p(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}_p$).

Demostración.

1. Probemos la continuidad a partir de cerrados básicos. Para ello supongamos que el resultado es falso y sea $F \in Z[Y]$ en donde $\overline{(\beta p)^{-1}(\hat{F})} \neq (\beta p)^{-1}(\hat{F})$, es decir, existe $\mathfrak{U} \in \overline{(\beta p)^{-1}(\hat{F})}$ tal que $\mathfrak{U} \notin (\beta p)^{-1}(\hat{F})$, o equivalentemente, tal que $F \notin p(\mathfrak{U})$ lo cual implica (Proposición 1.1.2) que existe $F' \in p(\mathfrak{U})$ con $F \cap F' = \emptyset$ y por el Lema (1.1.2) se tiene la existencia de cero-conjuntos A y B con $A \cup B = Y$ tales que $F \subseteq A^c$ y $F' \subseteq B^c$.
   Dado que
$$X = p^{-1}(Y) = p{-}1(A \cup B) = p^{-1}(A) \cup p^{-1}(B) \in \mathfrak{U}$$
   y por ser $\mathfrak{U}$ primo, $p^{-1}(A) \in \mathfrak{U}$ o $p^{-1}(B) \in \mathfrak{U}$. Pero $p^{-1}(B) \in \mathfrak{U}$ ya que de lo contrario $B \in U_p \subseteq p(U)$, en donde se tiene que $B \cap F' = \emptyset$.

De esta forma tenemos que $\mathfrak{U} \in \widehat{p^{-1}(B)}^c$ y como $\mathfrak{U} \in \overline{(\beta p)^{-1}(\hat{F})}$ entonces $[(\beta p)^{-1}(\hat{F})] \cap \widehat{p^{-1}(B)}^c \neq \emptyset$. Ahora, si $\mathfrak{F} \in [(\beta p)^{-1}(\hat{F})] \cap \widehat{p^{-1}(B)}^c$ se sigue que $F \in p(\mathfrak{F})$ como también que $p^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$ (debido a que $X = p^{-1}(A) \cup p^{-1}(B)$); por consiguiente $A \in p(\mathfrak{F})$ y en consecuencia $A \cap F \in p(\mathfrak{F})$ lo cual es absurdo ya que $A \cap F = \emptyset$. De esta forma obtenemos el resultado a mostrar.

Ahora veamos que el diagrama conmuta, es decir, $\langle p(a) \rangle_z = p(\langle a \rangle_z)$ para todo $a \in X$. Si $a \in X$ y F es un cero-conjunto tal que $p(a) \in F$, es decir, tal que $a \in p^{-1}(F)$ se sigue que $p^{-1}(F) \in \langle a \rangle_z$ y por consiguiente $F \in \langle a \rangle_z \subseteq p(\langle a \rangle_z)$. Con lo cual concluimos que $\langle p(a) \rangle_z = p(\langle a \rangle_z)$.

Lo anterior prueba que βp envía z-ultrafiltros principales a z-ultrafiltros principales. Por último, veamos que βp es la única función continua que hace conmutar el diagrama. Si $p' : \beta E \longrightarrow \beta B$ es una función continua tal que $p' \circ i_E = i_B \circ p$, entonces tenemos que $p'(i_E(E)) = \beta p(i_E(E))$, o equivalentemente, p' y βp son iguales al restringir sus dominios al conjunto $i_E(E)$ en consecuencia, por ser βE un espacio de Hausdorff, tenemos que p' y βp también coinciden en la adherencia de $i_E(E)$, el cual sabemos que es denso. Así, $p' = \beta p$.

2. Dado que βX siempre es compacto y por ser βp continua $(\beta p)(\beta X)$ es un compacto contenido en el espacio de Hausdorff βY, luego $(\beta p)(\beta X)$ es cerrado. Además, del diagrama conmutativo

$$i_Y(p(X)) = (\beta p)(i_X(X)) \subseteq (\beta p)(\beta X)$$

y por ser p sobre obtenemos que $i_Y(Y) \subseteq (\beta p)(\beta X)$, en consecuencia

$$\beta Y = \overline{i_Y(Y)} \subseteq \overline{(\beta p)(\beta X)} = (\beta p)(\beta X).$$

3. Supongamos que el resultado es falso y sean $\mathfrak{U}$ un z-ultrafiltro en X y $\mathfrak{F}$ un z-filtro en Y tales que $\mathfrak{F}$ es estrictamente mas fino que $\mathfrak{U}_p$, luego existe un cero-conjunto F en $\mathfrak{F}$ que no se encuentra en $\mathfrak{U}_p$, es decir, $p^{-1}(F) \notin \mathfrak{U}$ y en consecuencia (Lema 1.1.2) existe $F' \in \mathfrak{U}$ tal que $p^{-1}(F) \cap F' = \emptyset$, lo cual implica que $F \cap p(F') = \emptyset$, pero por hipótesis $p(F')$ es un cero-conjunto y éste se encuentra en $\mathfrak{U}_p \subseteq \mathfrak{F}$ y por consiguiente $F \cap p(F')$ se encuentra en $\mathfrak{F}$, lo cual es absurdo.

$\blacksquare$

Las propiedades anteriores nos brindan las herramientas necesarias para describir la compactación de Stone-Čech, la cual enunciamos a continuación.

Proposición 1.3.5. Si X es un espacio de Tychonoff, entonces βX es una compactación universal de X, es decir, es una compactación de X con la propiedad que cualquier función continua $X \longrightarrow Y$, donde Y es un espacio compacto de Hausdorff, se extiende de forma única a una función $\beta X \longrightarrow Y$.

Demostración.
Dado que X es de Tychonoff, entonces es completamente regular y de Hausdorff, luego de

Las Proposiciones (1.3.2) y (1.3.3) se deduce que βX es una compactación de X.

Veamos que esta compactación es universal.
Sea Y un espacio compacto de Hausdorff y sea $p : X \longrightarrow Y$ una función continua. Sabemos de la Proposición (1.3.4) que la función $\beta p : \beta X \longrightarrow \beta Y$ es continua y que $i_Y \circ p = \beta p \circ i_X$. Por otra parte, por ser Y un espacio compacto de Hausdorff de la Proposición (1.2.5) todo z-ultrafiltro es principal y además Y es homeomorfo a βY. En donde la función i_Y según la Proposición (1.3.3) es un homeomorfismo. En consecuencia $i_Y^{-1} \circ \beta p$ es la extensión de p. ■

CAPÍTULO 2

Estructura de los campos fibrados

En este capítulo estudiamos la estructura de los campos. En especial estamos interesados en el comportamiento de los campos cuando en el espacio de las fibras tenemos la acción topológica de un grupo finito de cardinal n. En este caso, para un campo (E, p, B) con la condición anterior, tenemos un campo $(E, \pi, E/G)$ en donde E/G es el espacio de las órbitas dotado con la topología cociente, inducida por la aplicación canónica natural π. Como veremos en el transcurso del capitulo, cuando el espacio E es T_0 y existe una función inyectiva $f : E/G \longrightarrow B$ tal que $p = f \circ \pi$, el cardinal de cada fibra no vacía del campo (E, p, B) es un divisor de n. Este resultado es una generalización del resultado obtenido en [2] para el caso especial del campo $(\beta E, \beta p, \beta B)$.

2.1. Grupos topológicos finitos y G-campos parciales T_0.

En esta sección mostramos el resultado establecido en la introducción del capítulo y observamos que el resultado obtenido en [2] es un caso particular de éste. Para ello, iniciamos con las definiciones de campos y morfismos de campos, tomadas al igual que todas las definiciones correspondientes a campos, de [7].

Definición 2.1.1. Un campo o campo fibrado es una tripleta (E, p, B) en donde $p : E \longrightarrow B$ es una función continua. El espacio B es llamado el espacio base, el espacio E es llamado el espacio total o espacio de las fibras y la aplicación p es llamada la proyección del campo. Para cada $b \in B$ el espacio $p^{-1}(b)$ es llamada la fibra sobre b. Si F es un espacio topológico y las fibras de (E, p, B) son homeomorfas a F, decimos que (E, p, B) es un campo con fibra F. Los campos se suele denotar con letras griegas como $\xi, \eta, \zeta, \lambda$, etc.

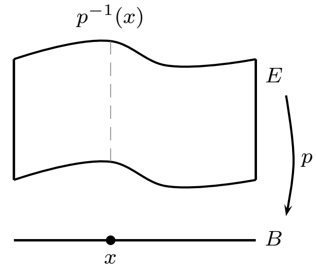

Figura 1

Ejemplo 2.1.1. Los ejemplos mas triviales de campos son:

1. Todo espacio E se puede considerar un campo tomando a la función identidad 1_E como proyección.

2. El producto de dos espacios topológicos E y F determina dos campos al considerar las proyecciones. En este caso obtenemos los campos producto $(E \times F, \pi_1, E)$ y $(E \times F, \pi_2, F)$, el primero de ellos con fibra F y el segundo con fibra E.

3. Si (E, p, B) es un campo y E' es un subespacio de E, entonces, para todo subespacio B' de B con $p(E') \subseteq B'$ se tiene que (E', p', B') es un campo, en donde p' es la restricción de p a E'. En este caso decimos que (E', p', B') es un subcampo de (E, p, B).

Definición 2.1.2. Si $\xi = (E, p, B)$ y $\eta = (E', p', B')$ son dos campos, un morfismo de campos $(u, f) : \xi \longrightarrow \eta$ es una pareja de funciones continuas $f : E \longrightarrow E'$ y $u : B \longrightarrow B'$ que hacen que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d, dashed, "p"'] & E' \arrow[d, dashed, "p'"] \\
B \arrow[r, dashed, "f"] & B'
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2

La condición de morfismo de campo $p' \circ u = f \circ p$ puede expresarse por medio de la relación $u(p^{-1}(b)) \subseteq (p')^{-1}(f(b))$ para cada $b \in B$.

En el caso en que $E = E'$ y u sea la identidad. Tenemos que para cada $x \in E$ se cumple que $p^{-1}(p(x)) \subseteq (p')^{-1}(p(x))$. La igualdad se obtiene en el caso que f sea inyectiva y en consecuencia, podemos decir que las fibras no vacías de los campos coinciden.

Estamos interesados en trabajar en campos en donde se tiene la acción topológica, de un grupo topológico G finito, actuando sobre el espacio de las fibras. Así que en adelante cuando mencionamos a G, entenderemos por él, a un grupo topológico y en el caso de ser G finito, entenderemos por n el orden de G. El módulo de G lo denotamos como e.

A continuación mencionamos algunos hechos que necesitamos acerca de los grupos topológicos.

Recordemos:

Un grupo topológico G es un conjunto sobre el cual están definidas una estructura de grupo y una estructura topológica, tales que las funciones $g \mapsto g^{-1}$ de G en sí mismo (llamada aplicación inversa) y $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ del espacio producto $G \times G$ en G (llamada aplicación de grupo) son continuas. En este caso se tiene que la aplicación inversa es en realidad un homeomorfismo y con respecto a la aplicación de grupo sabemos que es abierta. En el caso particular en que G es finito, la aplicación de grupo es cerrada. También sabemos que si $g_0 \in G$, las aplicaciones $g \longmapsto g_0 g$ y $g \longmapsto g g_0$ de G en sí mismo, son homeomorfismos.

Un resultado que se tiene cuando trabajamos con espacios topológicos finitos, es que todo punto del espacio cuenta con una vecindad mínima, la cual se forma con la intersección de todas sus vecindades. En este caso, el espacio posee una base de vecindades formada por las vecindades mínimas de sus puntos. Lo interesante, es que en el caso en que G es finito, por ser un grupo topológico, tenemos que la base de vecindades mínimas forma una partición de G. Para ver este resultado, primero denotamos para cada $g \in G$, su vecindad minima como O_g y probamos lo siguiente.

Proposición 2.1.1. Si G es un grupo topológico finito y $g_1, g_2 \in G$, entonces para las vecindades mínimas de g_1 y g_2 se tienen las siguientes propiedades:

1) $g_1 \in O_{g_2}$, si y sólo si, $O_{g_1} \subseteq O_{g_2}$.

2) $O_{g_1} = g_1 O_e = O_e g_1$.

3) $O_{g_1} O_{g_2} = O_{g_1 g_2}$.

4) $(O_{g_1})^{-1} = O_{g_1^{-1}}$.

Demostración.

1) Si $g_1 \in O_{g_2}$ es porque O_{g_2} es una vecindad de g_1 y como O_{g_1} es la mínima vecindad de g_1, entonces $O_{g_1} \subseteq O_{g_2}$. La otra implicación es inmediata dado que $g_1 \in O_{g_1}$.

2) Dado que $g_1 O_e$ es una vecindad de g_1, se sigue que $O_{g_1} \subseteq g_1 O_e$. Ahora veamos que $g_1 O_e \subseteq O_e g_1$, para ello, utilizamos la continuidad de la aplicación de grupo, en donde para g_1 tenemos que $(g_1, e) \longmapsto g_1$, en consecuencia, para la vecindad $O_e g_1$ de g_1 debe existir una vecindad de (g_1, e), cuya imagen este contenida en $O_e g_1$. Dicha vecindad siempre la podemos considerar como $O_{g_1} \times O_e$ por ser la mínima vecindad de (g_1, e) en el producto (ésto es fácil de probar), en este caso tendremos que $O_{g_1} O_e \subseteq O_e g_1$ y como $g_1 O_e \subseteq O_{g_1} O_e$, entonces $g_1 O_e \subseteq O_e g_1$. Por último, veamos que $O_e g_1 \subseteq O_{g_1}$. Para ello utilizamos nuevamente la continuidad de la aplicación de grupo, en donde para g_1 consideramos que $(e, g_1) \longmapsto g_1$, luego para la vecindad mínima O_{g_1} de g_1, obtenemos de la continuidad que $O_e O_{g_1} \subseteq O_{g_1}$ y como $O_e g_1 \subseteq O_e O_{g_1}$, entonces $O_e g_1 \subseteq O_{g_1}$.

3) Veamos primero que $O_e = O_e O_e$, en la cual una contenencia es inmediata debido a que $e \in O_e O_e$, por lo tanto $O_e \subseteq O_e O_e$. Para la otra contenencia basta con utilizar la continuidad de la aplicación de grupo y procedemos como anteriormente se hizo, en este

caso, para $(e,e) \longmapsto e$. Ahora, si utilizamos la igualdad $O_eO_e = O_e$ y el numeral anterior, tenemos:

$$O_{g_1}O_{g_2} = (g_1O_e)(g_2O_e) = g_1(O_eg_2)O_e = g_1(g_2O_e)O_e = g_1g_2O_eO_e = g_1g_2O_e.$$

4) El resultado se sigue del hecho que la aplicación inversa es un homeomorfismo. En este caso, envía vecindades mínimas a vecindades mínimas.

■

De la proposición anterior vale la pena hacer algunos comentarios. El numeral 2) indica que toda vecindad mínima se puede obtener por medio de traslaciones ya sea por derecha o por izquierda de la vecindad minima del módulo. En este caso, también tenemos que las vecindades mínimas, tienen todas el mismo cardinal, dado que las traslaciones de la vecindad mínima del módulo son hechas por homeomorfismos. El numeral 3) indica que al operar dos vecindades mínimas obtenemos otra vecindad mínima. Por otra parte, como veremos a continuación, en el numeral 1) podemos escribir en vez de una contenencia, una igualdad.

Proposición 2.1.2. Si G es finito, se tiene que las vecindades mínimas de sus puntos forman una partición de G. Además, la vecindad minima de e es un subgrupo normal de G.

Demostración.

La prueba de que las vecindades mínimas de G forman una partición, se sigue al considerar dos elementos g_1 y g_2 de G, y mostrar que $g_1 \in O_{g_2}$, si y sólo si, $g_2 \in O_{g_1}$. Para ello utilizamos las propiedades descritas en la proposición anterior, en donde obtenemos las siguientes equivalencias:

$$g_1 \in O_{g_2} \Leftrightarrow e \in g_1^{-1}O_{g_2} = O_{g_1^{-1}g_2} = (O_{g_2^{-1}g_1})^{-1}$$

y

$$e \in (O_{g_2^{-1}g_1})^{-1} \Leftrightarrow e = e^{-1} \in O_{g_2^{-1}g_1} \Leftrightarrow g_2 \in g_2O_{g_2^{-1}g_1} \Leftrightarrow g_2 \in O_{g_1}.$$

Ahora veamos que O_e es un subgrupo normal de G.
Si utilizamos la igualdad $O_e = O_eO_e$ descrita en el numeral 3) de la proposición anterior, tenemos que la operación de grupo es cerrada en O_e. Ahora, si $g \in O_e$, del numeral 4) de la proposición anterior, $g^{-1} \in (O_e)^{-1} = O_e$. Hemos probado que O_e es un subgrupo de G. La normalidad de O_e es una consecuencia inmediata del numeral 2) de la proposición anterior. ■

Nota 2.1.1. Algo interesante que surge de las dos proposiciones anteriores es el hecho que el número de vecindades mínimas en G es un divisor del cardinal de G, dado que todas las vecindades mínimas tienen el mismo cardinal y forman una partición de G.

Ahora, aprovechando el hecho que las vecindades mínimas forman una partición de G, obtenemos una relación de equivalencia $\sim$ sobre G, en donde el conjunto cociente $G/\sim$ tiene como elementos las vecindades mínimas de G. Si $q : G \longrightarrow G/\sim$ es la aplicación canónica natural y dotamos al conjunto $G/\sim$ con la topología cociente inducida por q, obtenemos un espacio topológico discreto. Por otra parte, debido a las cuatro propiedades que cumplen las vecindades mínimas en la Proposición (2.1.1) podemos dotar a $G/\sim$ de una estructura de grupo. En este caso tenemos que $G/\sim$ es un grupo topológico; por otra parte, dado que las vecindades mínimas se obtienen por traslaciones de la vecindad minima del módulo, obtenemos que $G/\sim = G/O_e$.

La idea es que ahora, G actúe sobre el espacio de las fibras; por tal motivo recordamos algunos conceptos de acciones topológicas, en donde recalcamos que sólo consideraremos acciones por derecha.

Recordemos.

Si E es un espacio topológico decimos que G actúa topológicamente sobre E o que existe una acción de G sobre E, si existe una función continua

$$\begin{array}{ccc} E \times G & \longrightarrow & E \\ (x, g) & \longmapsto & xg \end{array}$$

que además cumple:

1. $x = xe$ para todo $x \in E$.
2. $x(g_1 g_2) = (x g_1) g_2$ para todo $x \in E$ y g_1, g_2 en G.

Si $x = xg$, para todo x en X implica que $g = e$, se dice que la acción es efectiva.

Podemos pensar en la acción topológica G sobre E como una transformación continua de E por medio de un homeomorfismo, dado que para cada $g \in G$ la función $f_g : E \to E$ definida por $f_g(x) = xg$ es un homeomorfismo de E sobre sí mismo. En este caso decimos que el homeomorfismo f_g es la operación del elemento g de G.

Además, debido a las propiedades de acción tenemos:

1. $f_{g_1} \circ f_{g_2} = f_{g_2 g_1}$ para cada g_1 y g_2 en G.
2. $f_e = 1_E$.
3. $f_g^{-1} = f_{g^{-1}}$ para cada g en G.

De lo anterior concluimos que G induce un subgrupo $H_G = \{f_g\}_{g \in G}$ del grupo de permutaciones homeomorfas de E en sí mismo. En donde la aplicación $\nu : G \to H_G$ definida por $\nu(g) = f_g$ es un epimorfismo (en el sentido de grupos).

Si adicionalmente G es una acción efectiva sobre E, la aplicación anterior resulta ser un isomorfismo y en este caso podemos identificar cada elemento de G con la operación en E que éste induce.

Ahora, si consideramos E/G como el espacio de las órbitas y π como la proyección canónica natural, obtenemos el campo $\alpha(E) = (E, \pi, E/G)$, en donde se cumple que la aplicación π

es abierta y en el caso de ser G finito, la aplicación π es cerrada.

De lo anterior tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.3. Decimos que E es un G-espacio si G si actúa topológicamente sobre E y que un campo (E, p, B) es un G-campo si E es un G-espacio y existe un homeomorfismo $f : E/G \longrightarrow B$ tal que la pareja $(1_E, f) : \alpha(E) \longrightarrow (E, p, B)$ es un isomorfismo (ver capituló 3).

De la definición anterior tenemos que para un G-campo (E, p, B), la aplicación p es sobreyectiva y para todo $x \in E$ se tiene que $p^{-1}(p(x)) = xG$. En pocas palabras, (E, p, B) se puede ver como el G-campo $(E, \pi, E/G)$. A continuación vemos algunos ejemplos de G-campos.

Ejemplo 2.1. Consideremos los siguientes espacios: $\mathbb{R}^*$ como el conjunto de los números reales sin el cero dotado con la topología usual de subespacio de $\mathbb{R}$, el conjunto $\mathbb{Z}_3$ representado por $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ con la topología discreta y $E = \mathbb{R}^* \times \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ dotado con la topología producto, también consideremos el grupo topológico $G = (\mathbb{Z}_3, +)$. Las siguientes dos aplicaciones definen acciones de G sobre E que determinan dos G-campos.

1. Sea $E \times G \longrightarrow E$ la aplicación dada por

$$((x, \bar{m}), \bar{n}) \longrightarrow \begin{cases} (x, \overline{m+n}) & \text{si} \quad x < 0. \\ (x, \overline{m-n}) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

2. Sea $E \times G \longrightarrow E$ la aplicación dada por

$$((x, \bar{m}), \bar{n}) \longrightarrow \begin{cases} (x, \overline{m+n}) & \text{si} \quad x < 0. \\ (x, \bar{0}) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

En ambos casos obtenemos que el espacio cociente se puede considerar como el espacio $\mathbb{R}^*$ y por consiguiente podemos ver las órbitas como el conjunto que se forma al tomar un punto de $\mathbb{R}^*$ y trasladarlo por medio de la acción, por las copias de $\mathbb{R}^*$ que componen el espacio E. Ésto se puede ver de forma mas clara en las siguientes gráficas que representan el comportamiento de dos puntos x y y de $\mathbb{R}^*$ al ser trasladados por la acción del punto $\bar{1}$ de $\mathbb{Z}_3$.

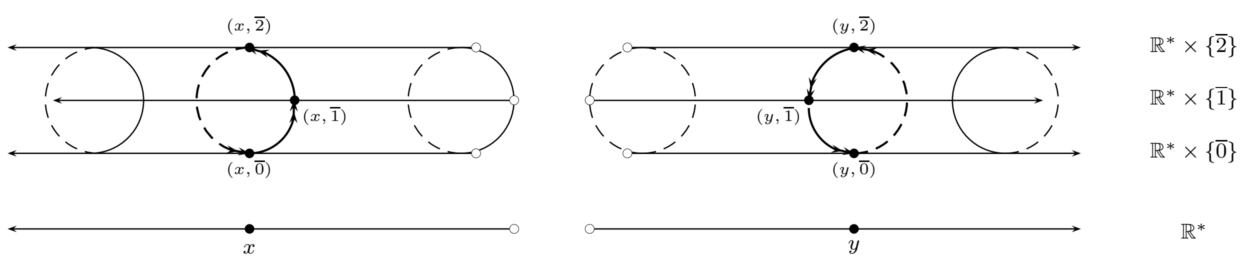

Figura 2

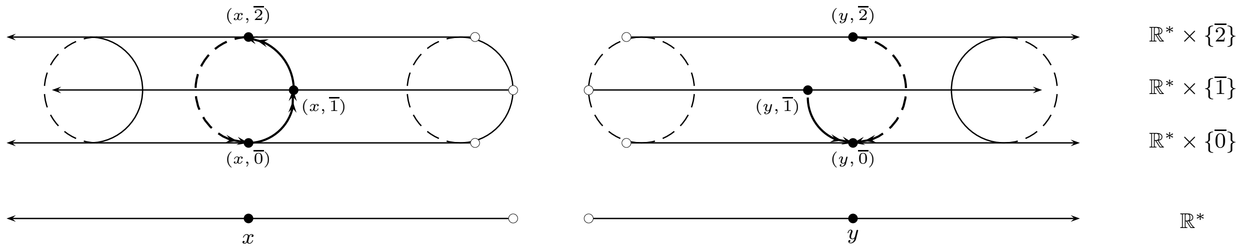

Figura 3

El resultado a mostrar en esta sección, se cumple en campos mas generales que los G-campos y por tal motivo introducimos la siguiente definición.

Definición 2.1.4. Decimos que un campo (E, p, B) es un G-campo parcial, si E es un G-espacio y existe una función inyectiva $f : E/G \longrightarrow B$ tal que $p = f \circ \pi$. En el caso que E sea T_0, decimos (E, p, B) es un G-campo parcial T_0.

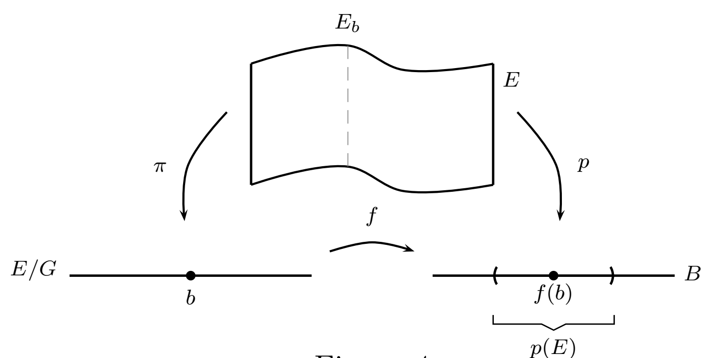

Figura 4

Advertimos que en la definición anterior la expresión, ser T_0, difiere a la que se conoce en topología fibrada, donde se tiene que un campo es T_0 si sus fibras son T_0. Además, resaltamos que el hecho de ser f inyectiva, implica que las fibras no vacías del campo (E, p, B) coinciden con las del campo $(E, \pi, E/G)$.

De la definición anterior obtenemos, por ser f inyectiva, que las fibras no vacías del campo (E, p, B) coinciden con las del campo $(\beta E, \beta p, \beta B)$. Así mismo, f resulta continua dado que E/G tiene la topología final inducida por π y $p = f \circ \pi$. Además, esta igualdad junto con el hecho que π es sobreyectiva, muestra que f se encuentra completamente definida y de forma única por p. Por consiguiente, obtenemos las siguientes equivalencias.

Proposición 2.1.3. Si (E, p, B) es un campo y E es un G-espacio, los siguientes enunciados son equivalentes:

1) (E, p, B) es un G-campo parcial.

2) Existe una función continua e inyectiva $f : E/G \longrightarrow B$ tal que

$$(1_E, f) : (E, \pi, E/G) \longrightarrow (E, p, B)$$

es un morfismo de campos.

3) La relación $h : E/G \longrightarrow B$ dada por $h(xG) = p(x)$, define una función inyectiva.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2) Por la definición de G-campo parcial, tenemos la existencia de f así como la relación $p \circ 1_E = f \circ \pi$. Sólo falta ver que f es continua, lo cual es inmediato del hecho que E/G tiene la topología final inducida por π y $p = f \circ \pi$.

2) $\Rightarrow$ 3) Basta con probar que $f = h$. Si tomamos un $x \in E$ tenemos que

$$f(xG) = f(\pi(x)) = p(x) = h(xG).$$

3) $\Rightarrow$ 1) Dado que h es una función inyectiva. sólo debemos probar que $h \circ \pi = p$, lo cual es inmediato de la definición de h. ■

A continuación mostraremos que cuando G es finito y (E, p, B) es un G-campo T_0, se tiene que el cardinal de cada fibra, es un divisor del orden de G. Para ello, introducimos para cada elemento x en E, la siguiente relación de equivalencia sobre G, la cual denotamos como R_x. Decimos que dos puntos g_1 y g_2 en G se encuentran relacionados según R_x, si $xg_1 = xg_2$. Si $[g]_x$ es la clase de equivalencia de g según R_x, tenemos los siguientes resultados.

Proposición 2.1.4. Si G es finito, E es un G-espacio y x y g son elementos en E y G respectivamente, entonces se cumple:

1. $Uh = Ug$, para todo conjunto abierto U en G y todo $h \in O_g$.
2. $Fh = Fg$, para todo conjunto cerrado F en G y todo $h \in O_g$.

Demostración.

1. Primero veamos que la afirmación se cumple para $g = e$ (la prueba se sigue de la continuidad de la acción). Si $y \in U$, utilizamos el hecho que $(y, e) \longrightarrow y$, por la continuidad de la acción, existe una vecindad U' de y donde $U'O_e \subseteq U$, pero como $h \in O_e$, el cual es un subgrupo, $h^{-1} \in O_e$, en consecuencia $yh^{-1} \in U'O_e \subseteq U$ y $y \in Uh$. La otra contenencia se prueba similarmente. Si $y \in Uh$ utilizamos el hecho que $(y, h) \longmapsto yh$, por la continuidad de la acción, existe una vecindad U' de y donde $U'O_h = U'O_e h \subseteq Uh$, en donde tenemos que $U'O_e \subseteq U$ y $ye = y \in U$.

   Ahora consideramos el caso para cualquier g. Tenemos que si $h \in O_g$, o equivalentemente, si $hg^{-1} \in O_e$, se cumple de lo anterior, la igualdad $Uhg^{-1} = U$ y en consecuencia $Uh = Ug$.

2. La prueba se sigue del numeral anterior. Si F es un conjunto cerrado en E y $h \in O_g$, la igualdad se obtiene de las siguientes equivalencias

   $x \in Fh \Leftrightarrow xh^{-1} \in F \Leftrightarrow xh^{-1} \notin F^c \Leftrightarrow x \notin F^c h = F^c g \Leftrightarrow xg^{-1} \notin F^c \Leftrightarrow xg^{-1} \in F \Leftrightarrow x \in Fg.$

■

Proposición 2.1.5. Si (E, p, B) es un G-campo parcial T_0 con G finito y x y g son elementos en E y G respectivamente, entonces $xh = xg$, para todo $h \in O_g$ y además se tienen las siguientes igualdades:

$$[g]_x = \bigcup_{h \in [g]_x} O_h = [e]_x g.$$

Demostración.

Probemos la primera parte por contradicción. Si suponemos que $h \in O_g$ es tal que $xh \neq xg$, por ser el espacio T_0, existe una vecindad V de unos de los puntos que no contiene al otro, supongamos que V es vecindad de xh, entonces Vh^{-1} es una vecindad de x y como $h \in O_g$, tenemos que $h^{-1} \in O_{g^{-1}}$, luego de la proposición anterior, $x \in Vh^{-1} = Vg^{-1}$ y por lo tanto $xg \in V$, contradiciendo la existencia de V.

Veamos que $[g]_x = [e]_x g$.
La prueba se sigue de las siguientes equivalencias

$$g' \in [g]_x \Leftrightarrow xg' = xg \Leftrightarrow xg'g^{-1} = x \Leftrightarrow g'g^{-1} \in [e]_x \Leftrightarrow g' \in [e]_x g.$$

Ahora veamos que $\bigcup\limits_{h \in [g]_x} O_h = [g]_x$.
Si $g' \in \bigcup\limits_{h \in [g]_x} O_h$, existe $h \in [g]_x$ tal que $g' \in O_h$ pero $O_h \subseteq [g]_x$. En efecto, si $h' \in O_h$ sabemos que por ser E un espacio T_0, $xh' = xh$, luego $h' \in [h]_x = [g]_x$. De esta forma tenemos que $g' \in [g]_x$ y en consecuencia $\bigcup\limits_{h \in [g]_x} O_h \subseteq [g]_x$. Ahora si suponemos que $g' \in [g]_x$, tenemos que $g' \in O_{g'} \subseteq \bigcup\limits_{h \in [g]_x} O_h$. Así, $[g]_x \subseteq \bigcup\limits_{h \in [g]_x} O_h$.

■

Proposición 2.1.6. Si G es finito y (E, p, B) es un G-campo T_0, entonces el cardinal de cada fibra no vacía del campo, es un divisor tanto del orden de G, como del número de vecindades mínimas de G.

Demostración.
Veamos primero que el cardinal de cada fibra, es un divisor del orden de G. Si tomamos un elemento x en E, tenemos que la relación R_x forma una partición de G y la igualdad $[g]_x = [e]_x g$, de la proposición anterior, nos indica que las clases de equivalencia tienen el mismos tamaño, en consecuencia, la cantidad de clases de equivalencia que forman la partición de G según R_x, es un divisor del orden de G. La prueba concluye al observar que la fibra xG de $p(x)$ tiene la misma cantidad de elementos que de clases de equivalencia según R_x. Para ello basta con considerar la siguiente aplicación

$$w : xG \longrightarrow \{[g]_x : g \in G\} \quad \text{en donde} \quad w(xg) = [g]_x,$$

la cual claramente es un biyección.

Que el cardinal de cada fibra sea un divisor del número de vecindades de G se sigue de lo mostrado anteriormente junto con los hechos que las vecindades mínimas aparte de tener el mismo tamaño, forman una partición de G y la igualdad $[g]_x = \bigcup_{h\in[g]_x} O_h$ muestra que en este caso, el número las vecindades mínimas que componen a cada clase de equivalencia es un divisor del cardinal de la clase. ■

De lo anterior tenemos el siguiente resultado el cual es inmediato y lo damos como un corolario sin la prueba.

Corolario 2.1.1. Si (E, p, B) es un G-campo parcial T_0 con G finito, en donde la acción de G es efectiva, entonces G es discreto.

Del corolario vale la pena mencionar que la implicación contraria no sólo no se tiene, sino que además está lejos de obtenerse, ya que el hecho que G sea discreto permite obtener siempre un sin fin de G-espacios los cuales no están tan ligados a la estructura de grupo de G. Como por ejemplo, Si E es cualquier espacio topológico, tenemos que E se puede ver en este caso como un G-espacio si consideramos la acción de G sobre E dada por $(x, g) \longmapsto x$, la cual resulta continua por ser G discreto y obviamente, la acción no es efectiva. Por otra parte, en la mayor parte de los casos, G siempre resulta ser discreto, dado que por ser finito, se tiene que la condición de ser T_1, es equivalente a ser discreto y algo más general es que por ser un grupo topológico, la condición de ser T_0 es equivalente a ser T_1.

Proposición 2.1.7. Si G es finito y (E, p, B) es un G-campo, entonces se tiene:

1. La imagen de un cero-conjunto es un cero-conjunto.
2. La imagen de un cocero-conjunto es un cocero-conjunto.

Demostración.
Basta con probar que se cumple para el G-campo (E, π, B).

1. Si A es un cero-conjunto en E proveniente de una función $f : E \longrightarrow [0, 1]$, definimos $H_f : B \longrightarrow [0, 1]$ como $H_f(xG) = minf(xG)$. Ésta se encuentra bien definida ya que las órbitas son finitas y por consiguiente existe $minf(xG)$ y además es continua dado que para todo $g \in G$ las aplicaciones $f_g : E \longrightarrow E$ donde $f_g(x) = xg$ son homeomorfismos, luego las aplicaciones $h_g : E \longrightarrow [0, 1]$ dadas por $h_g = f \circ f_g$ son continuas. En consecuencia, la aplicación $h : E \longrightarrow [0, 1]$ definida como $h(x) = minf(xG)$ es continua y además se tiene que $H_f \circ \pi = h$. Luego por tener E/G la topología final inducida por π, concluimos que H_f es continua.

   Por ultimo, es fácil probar que $\pi(A) = H_f^{-1}(0)$ con lo cual obtenemos el resultado a probar.

2. Si U es un cocero-conjunto en E, tenemos, debido a que G es finito, que

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g\in G} Ug$$

es un cocero-conjunto dado que G es finito. Luego del numeral anterior, se tiene que la imagen de su complemento, $\pi([\pi^{-1}(\pi(U))]^c)$ es un cero-conjunto, en donde tenemos que,

$$\pi([\pi^{-1}(\pi(U))]^c) = \pi(\pi^{-1}([\pi(U)]^c))$$

y dado que π es sobreyectiva obtenemos la igualdad

$$\pi([\pi^{-1}(\pi(U))]^c) = [\pi(U)]^C.$$

En consecuencia, $\pi(U)$ es un cocero-conjunto.

■

A continuación mostramos que el resultado obtenido en [2] es un caso particular de la Proposición (2.1.6) en donde además, la condición que el espacio E sea de Tychonoff no hace falta, dado que como ya vimos en el primer capítulo, el espacio βE siempre resulta ser de Hausdorff.

Proposición 2.1.8. Si (E, p, B) es un campo y E es un G-espacio, con G finito. Entonces se cumple lo siguiente:

1. βE es un G-espacio T_0.
2. Si (E, p, B) es un G-campo, entonces $(\beta E, \beta p, \beta B)$ es un G-campo.
3. Para el campo $(\beta E, \beta p, \beta B)$ se tiene que el cardinal de cada fibra es un divisor n.

Demostración.

1. Como ya sabemos, βE siempre es de Hausdorff, así que solo falta probar que que es un G-espacio. Para ello introducimos la siguiente notación. Si $\mathfrak{F}$ es un z-filtro en E y g un elemento de G, denotamos a $\mathfrak{F}g$ como el conjunto $\{Fg : F \in \mathfrak{F}\}$, El cual, claramente resulta ser un z-filtro sobre E. En el caso de ser $\mathfrak{F}$ un z-ultrafiltro, $\mathfrak{F}g$ también lo es. Además, se tiene para todo cero-conjunto F de E la igualdad

$$\widehat{F}^c g = (\widehat{Fg})^c$$

que muestra que efectivamente, el conjunto $\widehat{F}^c g$, es abierto en βE. De esta forma, consideramos la aplicación

$$\beta E \times G \longrightarrow \beta E : \quad (\mathfrak{F}, g) \longmapsto \mathfrak{F}g.$$

La cual por su estructura, cumple con las condiciones de acción.

Veamos que la acción es continua. Para ello recordemos que en la Proposición (2.1.4) tenemos que si $h \in O_g$, entonces para todo conjunto cerrado F en E se tienen que $Fg = Fh$, entonces, en este mismo caso, para todo z-filtro $\mathfrak{F}$ en E se cumple que $\mathfrak{F}g = \mathfrak{F}h$. Teniendo en cuenta lo anterior, tomemos un punto $(\mathfrak{F}, g)$ y una vecindad básica $\widehat{F}^c$ de su imagen $\mathfrak{F}g$, es decir que $\widehat{F}^c g^{-1} = (\widehat{Fg^{-1}})^c$ es una vecindad de $\mathfrak{F}$. En este caso consideramos la vecindad $\widehat{F^c}g^{-1} \times O_g$ de $(\mathfrak{F}, g)$, en donde su imagen según la acción es

$$(\widehat{Fg^{-1}})^c O_g = \bigcup_{h \in O_g} (\widehat{Fg^{-1}})^c h = \bigcup_{h \in O_g} (\widehat{Fg^{-1}h})^c = \bigcup_{h \in O_g} (\widehat{Fg^{-1}g})^c = \widehat{F}^c$$

con lo cual tenemos la continuidad de la acción.

2. Dado que βE es un G-espacio, tomemos a π_1 como la aplicación canónica natural. En este caso $\alpha(\beta E) = (\beta E, \pi_1, \beta E/G)$. Para ver que $(\beta E, \beta p, \beta B)$ es un G-campo parcial, utilizamos la caracterización de G-campos parciales y probamos que la relación $f : \beta E/G \longrightarrow \beta B$ dada por $f({}_{\mathfrak{F}}G) = (\beta p)(\mathfrak{F})$, en donde ${}_{\mathfrak{F}}G$ es la órbita de $\mathfrak{F}$, define una función inyectiva.

   Veamos que f define una función.
   Sean $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{U}$ z-ultrafiltros en E tales que ${}_{\mathfrak{F}}G = {}_{\mathfrak{U}}G$, o equivalentemente, tales que existe un elemento $g \in G$ en donde $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}g$ y por consiguiente $(\beta p)(\mathfrak{F}) = (\beta p)(\mathfrak{U}g)$. El resultado se sigue de probar que $(\beta p)(\mathfrak{U}) = (\beta p)(\mathfrak{U}g)$. Si suponemos que $(\beta p)(\mathfrak{U}) \neq (\beta p)(\mathfrak{U}g)$, tenemos que $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}g$ y por el Lema (1.1.2), existen cero-conjuntos C y D con $C \cup D = E$ en donde $C \in \mathfrak{U} \backslash \mathfrak{U}g$ y $D \in \mathfrak{U}g \backslash \mathfrak{U}$, lo cual implica que Cg^{-1} y Dg^{-1} no se encuentran en $\mathfrak{U}$, pero como $C \cup D = E$ se tiene que $Cg^{-1} \cup Dg^{-1} = E$. Lo cual es absurdo, dado que $\mathfrak{U}$ es primo.

   Veamos que f es inyectiva.
   Si $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{U}$ son z-ultrafiltros en E tales que ${}_{\mathfrak{F}}G \neq_{\mathfrak{U}} G$, es decir, tales que $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{U}g$ para todo $g \in G$, entonces por la Proposición (1.1.3) consideramos, para cada $g \in G$ un cero-conjunto $A_g \in \mathfrak{F}$ tal que $A_g g \notin \mathfrak{U}$ y tomemos $A = \bigcap_{g \in G} A_g$ el cual se encuentra en $\mathfrak{F}$ por ser G finito, además por la Proposición (2.1.7) se tiene que $p(A)$ es un cero-conjunto el cual, según la Proposición (1.3.4) se encuentra en $(\beta p)(\mathfrak{F})$, dado que en este caso, el z-filtro $\mathfrak{F}_p$ coincide con el z-ultrafiltro $(\beta p)(\mathfrak{F})$. Por otra parte tenemos que para cada $g \in G$, $Ag \notin \mathfrak{U}$ debido a que $Ag \subseteq A_g g \notin \mathfrak{U}$ y en consecuencia $p(A) \notin \mathfrak{U}_p = (\beta p)(\mathfrak{U})$ ya que $p^{-1}(p(A)) = \bigcup_{g \in G} Ag$, con lo cual concluimos que $\beta p(\mathfrak{U}) \neq \beta p(\mathfrak{F})$.

   Veamos que f es sobreyectiva.
   El resultado es inmediato del hecho que βp es sobreyectiva, lo cual se tiene de la Proposición (1.3.4) por ser p sobreyectiva.

   Veamos que f es abierta.
   El resultado se sigue de probar que en este caso, βp resulta abierta. En efecto, si tomamos un conjunto abierto U en βE y un z-ultrafiltro $\mathfrak{F}$ en $(\beta p)(U)$, veamos que existe un vecindad básica $\widehat{F}^c$ que se encuentra contenida en $(\beta p)(U)$. Dado que $\mathfrak{F} \in (\beta p)(U)$, existe un z-ultrafiltro $\mathfrak{F}'$ en U con $(\beta p)(\mathfrak{F}') = \mathfrak{F}$ y por ser U un conjunto abierto en βE, existe un cero-conjunto A en E tal que $\widehat{A}^c$ es una vecindad de $\mathfrak{F}'$ con $\widehat{A}^c \subseteq U$, luego de la proposición anterior sabemos que $p(A)$ es un cero-conjunto en B. Este cero-conjunto es precisamente, el encargado de construir la vecindad básica

deseada de $\mathfrak{F}$. Veamos en primer lugar que $\mathfrak{F} \in \widehat{p(A)}^c$. Como $\widehat{A}^c$ es una vecindad de $\mathfrak{F}'$, tenemos que $A \notin \mathfrak{F}'$ y por consiguiente $p(A) \notin (\beta p)(\mathfrak{F}') = \mathfrak{F}$, es decir, $\mathfrak{F} \in \widehat{p(A)}^c$. Ahora probemos que $\widehat{p(A)}^c \subseteq (\beta p)(U)$. Si $\mathfrak{U} \in \widehat{p(A)}^c$, tenemos que $p(A) \notin \mathfrak{U}$ y como βp es sobreyectiva, tomemos un z-ultrafiltro $\mathfrak{U}'$ en E tal que $(\beta p)(\mathfrak{U}') = \mathfrak{U}$, en donde se tiene que $A \notin \mathfrak{U}'$, o equivalentemente, $\mathfrak{U}' \in \widehat{A}^c \subseteq U$ con lo cual tenemos que $\mathfrak{U} \in (\beta p)(U)$.

3. De los numerales anteriores y la Proposición (2.1.6) tenemos que los cardinales de las fibras no vacías de $(\beta E, \beta p, \beta B)$ dividen a n, pero en este caso, por ser βp sobreyectiva so se tienen fibras vacías, con lo cual obtenemos el resultado.

$\blacksquare$

En la proposición anterior, vimos como a partir de un G-espacio E con G finito, podemos obtener otro G-espacio βE al extender, por a si decirlo, la acción de G en E a una acción de G en βE. En donde para un G-campo (E, p, B) donde E es T_0 se tiene que las fibras de los campos (E, p, B) y $(\beta E, \beta p, \beta B)$ cumplen la proposición anterior y son de tamaño a lo mas de n.

En la siguiente sección estudiamos el comportamiento de las fibras de los G-campos (E, p, B) y $(\beta E, \beta P, \beta B)$.

2.2. Degeneración de fibras

En esta sección consideraremos a (E, p, B) como un G-campo con G finito de orden n y mostramos dos resultados que se obtuvieron en [2], los cuales caracterizan la degeneración de las fibras del G-campo $(\beta E, \beta p \beta B)$. Se entiende por la degeneración de una fibra, que su cardinal es menor a n. Los autores del articulo toman como condición que la proyección p sea una función de cubrimiento y los espacios E y B sean de Tychonoff. Como veremos, en el transcurso de la sección, no es necesario que los espacios sean de Tychonoff y para obtener que p sea una función de cubrimiento, sólo basta con pedir que E sea un espacio de Hausdorff y la acción sea efectiva, lo cual no es pedir mucho, ya que como también veremos, cuando la acción no es efectiva las fibras del campo $(\beta E, \beta p, \beta B)$ siempre se degeneran. Por ultimo, mostraremos algunos ejemplos que contradicen argumento utilizados en [2] para algunas pruebas. Esto no quiere decir que los resultados en [2] no sean ciertos. Lo que en realidad ocurre es que son utilizados antes de las condiciones establecidas, en donde fallan.

Lo primero que debemos tener en cuenta, es que cuando (E, p, B) es un G-campo, se tiene que $(\beta E, \beta p, \beta B)$ cuenta con dos tipos de fibras, este hecho, se basa en el siguiente resultado.

Proposición 2.2.1. Si $\mathfrak{F}$ es un z-ultrafiltro en βE. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. $(\beta p)(\mathfrak{F})$ es un z-ultrafiltro principal.

2. $(\beta p)(\mathfrak{F}) = i_B(y)$, para algún $y \in B$ y si $x \in E$ es tal que $p(x) = y$, entonces existe un $g \in G$ tal que $i_E(xg) = \mathfrak{F}$.

3. Existe $x \in E$ tal que $\mathfrak{F} = i_E(x)$.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2) Si $(\beta p)(\mathfrak{F})$ es principal, entonces existe un y en B tal que $(\beta p)(\mathfrak{F}) = i_B(y)$ y como p es sobreyectiva, existe un x en E con $p(x) = y$, por consiguiente tenemos.

$$(\beta p)(i_E(x)) = i_B(p(x)) = i_B(y) = (\beta p)(\mathfrak{F}),$$

lo cual quiere decir que $i_E(x) = \mathfrak{F}$, se encuentran sobre la misma fibra, que en este caso, es un órbita; por lo tanto debe existir $g \in G$, tal que

$$i_E(xg) = i_E(x)g = \mathfrak{F}.$$

2) $\Rightarrow$ 3) Es inmediato ser p sobreyectiva.

3) $\Rightarrow$ 1) Si $x \in E$ es tal que $\mathfrak{F} = i_E(x)$, entonces $i_B(p(x)) = (\beta p)(i_E(x)) = (\beta p)(\mathfrak{F})$, lo cual prueba que $(\beta p)(\mathfrak{F})$ es principal. ■

El resultado anterior muestra que βp envía z-ultrafiltros principales a z-ultrafiltros principales (ésto siempre se tiene de la igualdad $(\beta p) \circ i_E = i_B \circ p$) y z-ultrafiltros no principales a z-ultrafiltros no principales. En consecuencia tenemos los siguiente resultados:

1. Las fibras del campo $(\beta E, \beta p, \beta B)$ están formadas por z-ultrafiltros no principales ó por z-ultrafiltros no principales. En este caso nos referiremos a ellas como fibras u órbitas principales y no principales.

2. Cada fibras principal es de la forma $\{i_E(x)\}_{g \in G}$ para algún $x \in E$ (en este caso nos referiremos a ella como la fibra principal generada por x) y cada fibra no principal tiene la forma $\{\mathfrak{F}g\}_{g \in G}$ para algún z-ultrafiltro $\mathfrak{F}$ no principal en E (en este caso nos referiremos a ella como la fibra generada por $\mathfrak{F}$).

3. Para cada $x \in E$, el cardinal de la fibra que contiene a x (es decir, la órbita de x), es mayor o igual al cardinal de la fibra principal generada por x, la igualdad se obtiene en el caso que la aplicación i_E sea inyectiva sobre la órbita de x, en el caso contrario se obtiene un menor estricto.

4. Del numeral anterior, obtenemos que si la aplicación i_E no es inyectiva en cada fibra del campo (E, p, B), entonces las fibras principles se degeneran.

5. Si x y y son puntos en E en diferente fibras, tales que $i_E(x) = i_E(y)$, entonces generan las misma fibra principal. En tal caso no obtenemos mayor información sobre fibras principales.

6. Si la acción de G sobre E no es efectiva, las fibras principales se degeneran.

Ya vimos que pasaba cuando la aplicación i_E no es inyectiva y la acción no es efectiva y obtuvimos dos resultados inmediatos para la degeneración de las fibras del campo $(\beta E, \beta p, \beta B)$. Por otra parte es fácil ver que i_E no es inyectiva es equivalente a que E no sea funcionalmente de Hausdorff.

Ahora, debido a que (E, p, B) y $(\beta E, \beta p, \beta B)$ son G-campos, es fácil ver que la aplicación i_B se encuentra determinada de manera única por i_E y aparte de eso se tienen los siguientes resultados:

1. i_B se inyectiva, si i_E es inyectiva.
2. i_B es sobreyectiva, si i_E es sobreyectiva.
3. i_B es abierta, si i_E es abierta.

Nota 2.2.1. De lo dicho anteriormente tenemos que si E es funcionalmente de Hausdorff entonces B también lo es.

Si suponemos que E funcionalmente de Hausdorff y que la acción de G sobre E es efectiva, se puede pensar que las fibras del campo $(\beta E, \beta p \beta B)$ nunca se degeneran, dado que esto ocurre en (E, p, B). Esta afirmación no es cierta. Que la acción de G sobre E sea efectivamente, no implica que la acción de G sobre βE también lo sea, lo que si tenemos es bajo estas condiciones los espacios E y $i(E)$, siempre se comportan de igual forma con respecto a sus fibras, sin embargo no sabemos que pasa con las fibras no principales. En ([2]) muestran que es posible que en ciertos casos las fibras no principales se degeneren. Este resultado no lo abordamos, simplemente mencionamos su existencia para interés del lector.

A continuación veremos que cuando la acción sobre E es efectiva y E es de Hausdorff, la proyección p resulta ser una función de cubrimiento. Para ello damos primero una serie de definiciones y comentarios que nos proporciona las herramientas necesarias, no sólo para obtener el resultado mencionado, sino también para entender de una forma mas clara lo restante de la sección.

Definición 2.2.1. Para un campo $\xi = (E, p, B)$ se tiene que:

1. Una sección de ξ es una función continua $s : B \longrightarrow E$ tal que $p \circ s = 1_B$, o equivalentemente, para cada $b \in B$ se cumple que $s(b) \in q^{-1}(b)$.
2. Si A es un subconjunto de B, entonces la restricción de ξ a A, denotada $\xi_{|A}$, es el campo (E', p', A), donde $E' = p^{-1}(A)$ y $p' = p_{|_{E'}}$.
3. Un campo $\eta = (E', p', B)$ se dice que es B-isomorfo a (E, p, B) si existe un homeomorfismo $f : E' \longrightarrow E$ tal que $(f, 1_B) : (E', p', B) \longrightarrow (E, p, B)$ es un morfismo de campos (ver Capítulo 3).
4. Un campo $\eta = (E', p', B)$ es localmente isomorfo con (E, p, B), si para cada $b \in B$, existe una vecindad abierta U de b tal que $\xi_{|U}$ y $\eta_{|U}$ son U-isomorfos. Si para cada $b \in B$ existe una vecindad abierta U de b y un espacio F tal que $\xi_{|U}$ y $(U \times F, \pi_1, U)$ son U-isomorfos decimos que el campo (E, p, B) es localmente trivial.

Note que la definición de sección implica que p es sobreyectiva y s inyectiva. También se tiene que toda sección s de un campo producto $(B \times F, p, B)$ tiene la forma $s(b) = (b, f(b))$, en donde $f : B \longrightarrow F$ es una función continua definida de forma única por s.

Los campos localmente triviales con fibras discretas, están completamente caracterizados por su proyección, en donde se tiene que un campo (E, p, B) es localmente trivial, si y sólo si, p es una función de cubrimiento.

Para ver ésto, supongamos a p es una función de cubrimiento y tomemos, de cada $b \in B$, una vecindad abierta V regularmente cubierta por una colección $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Entonces, si dotamos a J con topología discreta, se tiene que $(V \times J, \pi_1, V)$ y $(p^{-1}(V), p', V)$, (donde p' es la restricción de p,) son V-isomorfos, por medio de la aplicación

$$\psi_b : p^{-1}(V) \longrightarrow V \times J \quad \text{definida por} \quad \psi_b(z) = (p(z), \alpha) \quad \text{si} \quad z \in V_\alpha.$$

Nótese que la condición que el conjunto de subíndices J tenga la topología discreta es necesaria para que la aplicación ψ sea un V-isomorfismo. Recíprocamente se tiene que si el campo (E, p, B) tiene fibras discretas y es localmente trivial, entonces la aplicación p es de cubrimiento.

Por otra parte, si para cada $b \in B$ consideramos el subconjunto F_b de B formado por todos los elementos cuya fibra posea el mismo cardinal que la fibra de b se tiene que F_b es abierto y cerrado con lo cual se tiene que si B es conexo, las fibras del campo tienen el mismo tamaño.

Por ultimo se tiene que toda sección $s : B \longrightarrow E$ es abierta en donde para cada $b \in B$, existe una vecindad abierta V regularmente cubierta por un colección $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ con $s(V) = V_\alpha$ para algún $\alpha \in J$. En otras palabras, $s_{|V}$ es el homeomorfismo inverso de $p_{|V_\alpha}$. Para ver ésto, basta considerar una vecindad W de b que se encuentre regularmente cubierto por una colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Ahora si $s(b) \in U_{\alpha_o}$, por la continuidad de s, existe una vecindad V de b tal que $s(V) \subseteq U_{\alpha_o}$. Dicha vecindad V es a la que hacemos referencia. En tal caso se tiene que B se encuentra inmerso en E por medio de s.

Teniendo en cuenta lo anterior, mostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.2. *Si G actúa efectivamente sobre E y además E es de Hausdorff, entonces p es una función de cubrimiento*

Demostración.
Si $b \in B$ tenemos por la sobreyectividad de p, un elemento $x \in E$ tal que $p(x) = y$. En este caso la fibra de y coincide con la órbita de x y como E es de Hausdorff, G efectiva y la órbita de x es finita, para cada elemento de la órbita de x podemos considerar un conjunto abierto U_g, tal que $xg \in U_g$ y los elementos de la colección $\{U_g\}_{g \in G}$ son disjuntos dos a dos. Así que $x \in U_g g^{-1}$ para cada $g \in G$ y el conjunto $U = \bigcap\limits_{g \in G} U_g g^{-1}$ es una vecindad abierta de x. Afirmamos que la vecindad $p(U)$ de b se encuentra regularmente cubierta por la colección $\{Ug\}_{g \in G}$. En efecto,

1. Es claro que $p^{-1}(p(U)) = \bigcup\limits_{g \in G} Ug$.

2. La colección $\{Ug\}_{g\in G}$ es disyunta dos a dos, debido a que para cada $g \in G$ se tiene que $Ug = (\bigcap_{g\in G} U_g g^{-1})g \subseteq (U_g g^{-1})g = U_g$ y los elementos de la colección $\{U_g\}_{g\in G}$ son disyuntos dos a dos.

3. Ahora para ver que cada Ug es homeomorfo a $p(U)$, basta probar que $p_{|Ug}$ es inyectiva, dado que claramente que por ser p abierta y Ug y $p(U)$ conjuntos abiertos, $p_{|Ug}$ resulta abierta. Si x_1 y x_2 son elementos en Ug con $p_{|U}(x) = p_{|U}(y)$, estos se encuentran en la misma órbita y por consiguiente existe un $g' \in G$ tal que $x_1 = x_2 g'$. Veamos que $g' = e$, con lo cual obtenemos que la restricción de p es inyectiva. Como $x_1, x_2 \in Ug$ y $x_1 = x_2 g'$, tenemos que $x_2 g' \in Ug \cap (Ug)g' = Ug \cap Ugg'$ y dado que los elementos de la colección $\{U_g\}_{g\in G}$ son disyuntos dos a dos, tenemos que $g = gg'$, es decir, $g' = e$.

■

En la prueba anterior, al considera la colección $\{Ug\}_{g\in G}$, no sólo garantizamos que $p(U)$ se encuentra regularmente cubierto por dicha colección, sino que también podríamos decir que la colección es ideal en el sentido que todos los conjuntos que forman la colección son copias de U que se obtiene por la acción de G. Esto no siempre se tiene si se considera otro cubrimiento de $p(U)$, en donde se puede tener que las copias de U por medio de la acción, no se encuentren en el cubrimiento. También es posible que a pesar que la acción no fuese efectiva, p sea una función de cubrimiento. Estos hechos se pueden ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. En el ejemplo (2.1) consideramos dos G-campos en donde la primera acción es efectiva. Si en ella consideramos cualquier punto de $\mathbb{R}^*$ se tiene que el espacio completo es una vecindad del punto que se encuentra regularmente cubierto por la colección $\{\mathbb{R}^* \times \{\bar{n}\}\}_{n=0,1,2}$, sin embargo cualquiera de estos conjuntos de la colección al ser operados por la clase del uno se traslada a otra copia de $\mathbb{R}^*$ que no se encuentra en la colección. Ahora, si consideramos la segunda acción, tenemos que ésta es no efectiva, sin embargo la aplicación π resulta de cubrimiento al considerar para cada punto de $\mathbb{R}^*$ el espacio completo como vecindad y tomamos nuevamente la colección $\{\mathbb{R}^* \times \{\bar{n}\}\}_{n=0,1,2}$ que lo recubre.

De las siguiente dos definiciones tenemos resultados que caracterizan la degeneración de las fibras en el campo $(\beta E, \beta p, \beta E)$ y vienen dadas en forma general por medio de subgrupos de G. Aquí se tiene para un subgrupo H de G, que al restringir la acción de G a $E \times H \longrightarrow E$ tenemos una acción de H sobre E. Así que en adelante entenderemos por H a un subgrupo de G.

Definición 2.1. Decimos que un cocero-conjunto U de E es H-antipolar si $U \cap Uh = \emptyset$, para algún $h \in H$ y decimos que un cero-conjunto F de E es H-ecuatorial si $F \cup Fh = E$, para algún $h \in H \setminus \{e\}$, o lo que es equivalente, si el complemento de F es un H-antipolar.

Proposición 2.2.3. Para un z-ultrafiltro $\mathfrak{F}$ en E, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Todo elemento de H fija a $\mathfrak{F}$, es decir, $\mathfrak{F}h = \mathfrak{F}$.

2. $\mathfrak{F}$ contiene todo conjunto H-ecuatorial.

Demostración.
$\Rightarrow$) Si F es un conjunto H-ecuatorial, debe existir un $h \in H\backslash\{e\}$ tal que $Fh \cup F = E$, lo cual implica que $F \in \mathfrak{F}$ o $Fh \in \mathfrak{F}$, pero por la hipótesis se tiene que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}h$ de lo cual se deduce que $F \in \mathfrak{F}$.

$\Leftarrow$) Si suponemos lo contrario y $h \in H$ es tal que $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}h$, del Lema (1.1.2) se tiene que existen cero-conjuntos C y D en E con $C \cup D = E$ tales que $C \in \mathfrak{F}\backslash\mathfrak{F}h$ y $D \in \mathfrak{F}h\backslash\mathfrak{F}$ de lo cual se sigue que $Fh^{-1} \cup D \notin \mathfrak{F}$ pero como $C \cup D = E$ es fácil ver que $Fh^{-1} \cup D$ es un conjunto H-ecuatorial. Lo cual contradice la hipótesis. ■

Corolario 2.2.1. *H no actúa efectivamente sobre βE, si sólo si, la clase de los conjuntos H-ecuatoriales tienen la propiedad de la intersección finita.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Si H no actúa efectivamente sobre βE, debe existe un z-ultrafiltro $\mathfrak{F}$ en donde $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}h$ para algún $h \in H$, luego por la proposición anterior $\mathfrak{F}$ contiene a todo conjunto H-ecuatorial y en consecuencia la clase de los conjunto H-ecuatoriales tiene la propiedad de la
intersección finita.

$\Leftarrow$) Si la clase de los conjuntos H-ecuatoriales tienen la propiedad de la intersección finita, éstos forman una subbase para un z-filtro $\mathfrak{U}$; por consiguiente, cualquier z-ultrafiltro $\mathfrak{F}$ que contenga a $\mathfrak{U}$ contiene a todos los conjuntos H-ecuatoriales y por la proposición anterior tenemos que todo elemento de H fija a $\mathfrak{F}$, es decir que H no actúa efectivamente sobre βE. ■

Definición 2.2. Decimos que un cocero-conjunto U de E es H-seccional si $U \cap Uh = \emptyset$, para todo $h \in H \setminus \{e\}$ y decimos que un cero-conjunto F de E es H-coseccional si $F \cup Fh = E$, para todo $h \in H \setminus \{e\}$, o lo que es equivalente, si el complemento de F es un H-seccional.

Proposición 2.2.4. *Para un z-ultrafiltro $\mathfrak{F}$ en E, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Algún $h \in H \setminus \{e\}$ fija a $\mathfrak{F}$, es decir, $\mathfrak{F}h = \mathfrak{F}$.*

2. *$\mathfrak{F}$ contiene a todo conjunto H-coseccional.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2) Sea $h \in H \setminus \{e\}$ tal que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}h$ y sea A un H-coseccional, entonces $A \cup Ah^{-1} = E$, es decir, $A \in \mathfrak{F}$ o $Ah^{-1} \in \mathfrak{F}$ y como $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}h$ se deduce que $A \in \mathfrak{F}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que para todo $h \in H \setminus \{e\}$ se cumple que $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}h$ entonces, para cada $h \in H \setminus \{e\}$ consideremos cero-conjuntos $C_h \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}h$ y $C'_h \in \mathfrak{F}h \setminus \mathfrak{F}$ con $C_h \cup C'_h = E$. En consecuencia, el conjunto

$$C = \bigcup_{h \in H\setminus\{e\}} (C_h h^{-1} \cup C'_h)$$

es H-coseccional, luego por hipótesis $C \in \mathfrak{F}$ y dado que H es finito debe existir $h_0 \in H \setminus \{e\}$ tal que $C_{h_0}h_0^{-1} \in \mathfrak{F}$ o $C'_{h_0} \in \mathfrak{F}$ lo cual es absurdo según la escogencia de los cero-conjuntos. ■

Corolario 2.2.2. H no actúa libremente sobre βE, si y sólo si, la clase de los conjuntos H-coseccionales tiene la propiedad de la intersección finita.

Demostración.
$\Rightarrow$) Si H no actúa libremente sobre βE, existe un z-ultrafiltro $\mathfrak{F}$ en E y un $h \in H \setminus \{e\}$ tal que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}h$. Luego por la proposición anterior, $\mathfrak{F}$ contiene todo conjunto H-coseccional y por consiguiente la clase de los H-coseccionales tiene la propiedad de la intersección finita.

$\Leftarrow$) Si la clase de los H-coseccionales en H tiene la propiedad de la intersección finita, dicha clase forma una subbase para un z-filtro $\mathfrak{F}$ en E y por consiguiente cualquier z-ultrafiltro que contenga a $\mathfrak{F}$ contiene como elementos a los conjuntos H-coseccionales. Aplicando la proposición anterior obtenemos que para todo z-ultrafiltro en E que contenga a $\mathfrak{F}$ existe un elemento distinto de e que lo fija, es decir, H no actúa libremente sobre βE. ■

Nótese que en las proposiciones anteriores, la primera implicación se cumple aún si H no es finito. Además sobresaltamos que sus pruebas son considerablemente mas simples que las realizadas en [2]. Por ultimo mencionamos que los corolarios caracterizan la degeneración de las fibras en el campo $(\beta E, \beta p, \beta E)$ al considerar $H = G$.

Lo que resta de la sección esta dado en forma general al considerar a (E, p, B) como un H-campo con H no trivial y sólo lo mostramos para dar un contraejemplo de una caracterización que dan en [2] la cual es falsa, si la acción de H no es efectiva.

Proposición 2.2.5. Para todo subconjunto U de E se tiene que U es H-seccional, si y sólo si, U es la imagen de una sección sobre un subconjunto cocero de B el cual se encuentra regularmente cubierto por $\{hU\}_{h\in H}$.

Demostración.
$\Rightarrow$) Si U es H-seccional, es un cocero-conjunto y su imagen también lo es debido a la Proposición (2.1.7) y como los elementos de la colección $\{Uh\}_{h\in H}$ son disyuntos dos a dos, se sigue de igual forma a la prueba realizada en la Proposición (2.2.2), que $p(U)$ se encuentra regularmente cubierto por dicha colección.

$\Leftarrow$) Sea V un cocero-conjunto en B formado por una función continua $f : B \longrightarrow [0,1]$ y sea $s : B \longrightarrow E$ una sección del H-campo (E, p, B) tal que $s(V) = U$. En consecuencia, $V = p(s(V)) = p(U)$ y como $p(U)$ se encuentra regularmente cubierto por la colección $\{hU\}_{h\in H}$, sólo faltaría por probar que U es un cocero-conjunto. Para ello consideremos la función $g : E \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(p(x)) & \text{si} \quad x \in U, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin U. \end{cases}$$

y veamos que g es puntualmente continua. Sea $x \in E$ y sea W una vecindad abierta de $g(x)$ en $[0,1]$ y hallemos una vecindad W' de x tal que $g(W') \subseteq W$, considerando los siguientes casos:

1) Si $x \in U$ tomemos $W' = p^{-1}(f^{-1}(W)) \cap U$ el cual es abierto dado que U es abierto y f es continua, además

$$\begin{aligned} g(W') = g(p^{-1}(f^{-1}(W) \cap U) &= f(p(p^{-1}(f^{-1}(W)) \cap U)) \\ &\subseteq f(p(p^{-1}(f^{-1}(W))) \cap p(U)) \\ &= f((f^{-1}(W) \cap p(U))) \\ &\subseteq f(f^{-1}(W)) \cap f(p(U)) \\ &\subseteq W \cap f(p(U)) \\ &\subseteq W. \end{aligned}$$

2) Si $x \in p^{-1}(p(U)) \backslash U$, entonces existe $h \in H \backslash \{e\}$ tal que $x \in Uh$ y como $U \cap Uh = \emptyset$ se tiene que $g(Uh) = \{0\}$; por consiguiente, tomemos

$$W' = p^{-1}(f^{-1}(W)) \cap Uh \quad \text{en donde,} \quad g(p^{-1}(f^{-1}(W)) \cap Uh) = \{0\} \subseteq W.$$

3) Si $x \in E \backslash p^{-1}(p(U))$, se tiene que $g(x) = f(p(x)) = 0 \in W$ y en este caso tomamos $W' = p^{-1}(f^{-1}(W))$, en donde $g(W') \subseteq W$. En efecto, si $z \in g(W')$, existe $y \in E$ con $f(p(y)) \in W$ tal que $g(y) = z$, y consideremos los siguientes dos casos: si $y \in U$ entonces $f(p(y)) = g(y) = z \in W$ y si $y \notin U$ entonces $g(y) = 0 = z \in W$

■

Vale la pena mencionar que la proposición anterior, se cumple aún si H no es finito. Dado que con las condiciones establecidas, la Proposición (2.1.7) se cumple para el caso de los coceros-conjuntos, con G arbitrario. Es decir que si U es un cocero-conjunto y la colección $\{Ug\}_{g \in G}$ es disyunta dos a dos, la imagen de U según p, es un cocero-conjunto. Para ello se tiene que si U es el cocero-conjunto proveniente de una función f, definimos $h : B \longrightarrow [0,1]$ como

$$h(b) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad b \in p(U) \quad \text{y} \quad p(x) = b \\ 0 & \text{si} \quad b \notin p(U). \end{cases}$$

En este caso, es fácil ver que $p(U)$ es el cocero-conjunto proveniente de h.

Corolario 2.2.3. Si la acción de H sobre E es efectiva, entonces se puede caracterizar los subconjuntos H-seccionales de E como las imágenes de secciones de (E, p, B) sobre los subconjuntos coceros de B.

Demostración.
De la proposición anterior, basta con probar que si U es la imagen de una sección s de p sobre un subconjunto cocero V de B, entonces V se encuentra regularmente cubierto por $\{UH\}_{h \in H}$. Veamos primero que la colección $\{Uh\}_{h \in H}$ es disjunta dos a dos. Sean $h_1, h_2 \in H$ con $Uh_1 \cap Uh_2 \neq \emptyset$ entonces, como $U = s(V)$ existen $b_1, b_2 \in V$ tal que $s(b_1)h_1 = s(b_2)h_2$ y de lo cual obtenemos

$$b_1 = p(s(b_1)) = p(s(b_1)h_1) = p(s(b_2)h_2) = p(s(b_2)) = b_2$$

así, $s(b_1)h_1 = s(b_1)h_2$ y dado que H actúa efectivamente sobre E, concluimos que $h_1 = h_2$.

Ahora, la prueba que para todo $h \in H$, $p_{|_{Uh}} : Uh \longrightarrow V$ es un homeomorfismo, es la misma realizada en la Proposición (2.2.2), con lo cual obtenemos el resultado a mostrar. ■

De igual forma que la Proposición (2.2.5), el corolario anterior se sigue cumpliendo si H no es finito. Además la condición de ser la acción efectiva es necesaria, en lo cual fallan en [2] como se puede observar si consideramos nuevamente en el ejemplo (2.1) la segunda acción que no es efectiva y si tomamos el conjunto $\mathbb{R}_+^*$ se tiene que es un cocero-conjunto, en donde sus copias en el espacio de las fibras son también coceros-conjuntos, pero ninguna de ellas es G-seccional dado que para $n = 0, 1, 2$ se tiene que

$$(\mathbb{R}_+^* \times \{\bar{n}\})\bar{0} \;=\; (\mathbb{R}_+^* \times \{\bar{n}\})\bar{1} \;=\; (\mathbb{R}_+^* \times \{\bar{n}\})\bar{2}.$$

CAPÍTULO 3

LA CATEGORÍA DE LOS CAMPOS FIBRADOS

En este capítulo terminamos el estudio de los campos (E, p, B) y $(\beta E, \beta p, \beta B)$ al mostrar que β se puede ver como un funtor de la categoría **Top** de los espacios topológicos a la categoría **Hcomp** de los espacios de Hausdorff compactos. Cuando en lugar de la categoría de **Top**, nos restringimos a la categoría **Tycho** de los espacios de Tychonoff, el funtor β recibe el nombre de funtor de compactación de Stone-Čech. Dicho nombre se obtiene dado que en la categoría de los campos el funtor de compactación de Stone-Čech tiene una propiedad universal análoga a su compactación en **Top**. También mostramos que dicho funtor no da lugar a una construcción universal en la categoría de los G-espacios fibrados de Tychonoff análoga a la compactación de Stone-Čech de los espacios topológicos de Tychonoff mostrando un ejemplo. Por último, estudiamos brevemente la categoría de los campos, mostrando el comportamiento de los monomorfismos; con respecto al producto y coproducto en esta categoría, sólo hacemos algunos comentarios dado que en la teoría de categorías son muy conocidos los resultados que se tienen.

3.1. La categoría de los campos

En esta sección mostramos la categoría de los campos y el funtor de compactación de Stone-Čech, como también el hecho que dicho funtor no da lugar a una construcción universal en la categoría de los G-espacios fibrados de Tychonoff análoga a la compactación de Stone-Čech de los espacios topológicos de Tychonoff.

Recordemos que para dos campos $\xi = (E, p, B)$ y $\eta = (E', p', B')$, un morfismo de campos $(u, f) : \xi \longrightarrow \eta$ es una pareja de funciones continuas $f : E \longrightarrow E'$ y $u : B \longrightarrow B'$ que hacen que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

Diagrama 3

Si u y f son homeomorfismos, decimos que (u, f) es un isomorfismo y que ξ y η son isomorfos.

Ejemplo 3.1.1. Si (E, p, B) es un campo, entonces se tiene:

1. Si (E', p', B') es un subcampo de (E, p, B) y si $f : B' \longrightarrow B$ y $u : E' \longrightarrow E$ son las funciones continuas de inclusión, entonces $(u, f) : (E', p', B') \longrightarrow (E, p, B)$ es un morfismo de campos.

2. La pareja $(1_E, 1_B) : (E, p, B) \longrightarrow (E, p, B)$ es claramente un morfismo de campos que es un B-morfismo.

Si $(u, f) : (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B')$ y $(u', f') : (E', p', B') \longrightarrow (E'', p'', B'')$ son morfismos de campos, se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "p"] & E'' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r, "f'"] & B'' \end{tikzcd}$$

Diagrama 4.

En consecuencia definimos el morfismo de campos $(u' \circ u, f' \circ f) : (E, p, B) \longrightarrow (E'', p'', B'')$ como la composición $(u', f') \circ (u, f)$ de (u, f) y (u', f').

Definición 3.1. La categoría de campos, que se denotada como **Bun**, tiene como objetos todos los campos (E, p, B) y como morfismos de (E, p, B) en (E', p', B') la colección de todos los morfismos de campos de (E, p, B) en (E', p', B'), la composición de morfismos es la composición de morfismos de campos. Si tanto E como B son espacios de Tychonoff, decimos que (E, p, B) es un campo de Tychonoff y en este caso tenemos una subcategoría de los campos llamada la categoría de los campos de Tychonoff y denotada **TBun**.

Si $\lambda = (E, p, B)$ y $\xi = (E', p', B')$ son campos y $(g_1, g_2), (h_1, h_2) : \lambda \longrightarrow \xi$ son morfismos de campos entonces sabemos que $p' \circ g_1 = g_2 \circ p$ y $p' \circ h_1 = h_2 \circ p$, pero no necesariamente se tiene que $p' \circ g_1 = h_2 \circ p$, o, $p' \circ h_1 = g_2 \circ p$, sin embargo convenimos en decir que el siguiente diagrama conmuta parcialmente, o que es parcialmente conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "h_1"'] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[r, shift left, "g_2"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Diagrama 5.

En el caso que se cumpla que $p' \circ g_1 = h_2 \circ p$, y, $p' \circ h_1 = g_2 \circ p$ diremos que el diagrama conmuta totalmente o que es totalmente conmutativo.

Proposición 3.1.1. *β define un funtor de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los espacios de Hausdorff compactos.*

Demostración.
Por la Proposición (1.3.4), sólo falta por probar que β preserva identidades y composiciones. Que β preserve identidades es claro, dado que si E es un espacio topológico, se cumple para el campo $(E, 1_E, E)$ que si $\mathfrak{U}$ es un z-ultrafiltro, entonces $\mathfrak{U} = 1_E(\mathfrak{U}) = \beta 1_E(\mathfrak{U})$.

Para ver que β preserva composiciones, suponemos lo contrario, es decir, existen funciones continuas $g : E \longrightarrow B$ y $f : B \longrightarrow B'$ tales que $\beta(f \circ g) \neq \beta f \circ \beta g$. En consecuencia, existe un z-ultrafiltro $\mathfrak{U}$ en E con $\beta((f \circ g)(\mathfrak{U})) \neq \beta f(\beta g(\mathfrak{U}))$. Luego del Lema (1.1.2) se tienen cero-conjuntos C y D en B' con $C \cup D = B'$ tales que:

1) $C \in \beta((f \circ g)(\mathfrak{U}))$ pero $C \notin \beta f(\beta g(\mathfrak{U}))$,

2) $D \in \beta f(\beta g(\mathfrak{U}))$ pero $D \notin \beta((f \circ g)(\mathfrak{U}))$.

De 1) la condición que $C \notin \beta f(\beta g(\mathfrak{U}))$ implica que $(f \circ g)^{-1}(C) \notin \mathfrak{U}$ y de 2) la condición que $D \notin \beta((f \circ g)(\mathfrak{U}))$ también implica que $(f \circ g)^{-1}(D) \notin \mathfrak{U}$ y dado que $C \cup D = B'$ se tiene que

$$E = (f \circ g)^{-1}(B') = (f \circ g)^{-1}(C \cup D) = (f \circ g)^{-1}(C) \cup (f \circ g)^{-1}(D),$$

contradiciendo el hecho que $\mathfrak{U}$ es primo. ■

Como anteriormente mencionamos, el funtor β es conocido como el funtor de compactación de Stone-Čech dado que para cualquier campo fibrado de Tychonoff (E, p, B) y cualquier morfismos de campo $(u, f) : (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B')$, en donde (E', p', B') es un campo fibrado con E' y B' espacios compactos de Hausdorff, existe un único morfismo de campos $(\bar{u}, \bar{f}) : (\beta E, \beta p, \beta B) \longrightarrow (E', p', B')$ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
& \beta E \arrow[dr, "\bar{u}"] \arrow[dd, "\beta p"] & \\
E \arrow[ur, "i_E"] \arrow[rr, "u"] \arrow[dd, "p"'] & & E' \arrow[dd, "p'"] \\
& \beta B \arrow[dr, "\bar{f}"] & \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[rr, "f"'] & & B'
\end{tikzcd}$$

Diagrama 6

La unicidad del morfismo $(\bar{u}, \bar{f})$ se obtiene de la propiedad universal de la compactación de Stone-Čech, aplicada a las funciones u y f por separado.

En topología fibrada, el concepto de compactación difiere al de compactación en espacios topológicos. Para dos campos (E, p, B) y (E', p', B') con la proyección p' cerrada y en donde las fibras de (E', p', B') son compactas y de Hausdorff, se tiene que (E', p', B'), es una compactación de (E, p, B), si existe un morfismo $(u, f) : (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B)$ con f y u inmersiones con recorrido denso.

En [2] cuando se trabaja con G-campos (E, p, B) en donde G es finito, se refieren a $(\beta E, \beta p, \beta B)$ como la compactación de G-campos en el mismo sentido que mencionamos para el funtor de compactación de Stone-Čech. Algo interesante, es que en topología fibrada, también se cumple que $(\beta E, \beta p, \beta B)$ es una compactación de (E, p, B). Por lo tanto, es natural preguntarnos, si $(\beta E, \beta p, \beta B)$ cumple con la propiedad universal que le permita en realidad ser merecedor del nombre de compactación de Stone-Čech del G-campo (E, p, B), es decir, si cuando consideramos a (E, p, B) como un G-campo de Tychonoff y si $(E'p', B')$ es una compactación (en el sentido de topología fibrada), por medio de un morfismo $(u, f) : (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B')$, existe un morfismo $(\bar{u}, \bar{f}) : (\beta E, \beta p) \longrightarrow (E', p', B')$ que hace conmutar el diagrama (12). La respuesta es negativa y como ejemplo tenemos el siguiente.

Ejemplo 3.1. Si consideramos a $\mathbb{R}$ con la topología usual y $G = \{e\}$, tenemos que $(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$, es un G-campo que es compacto como campo. Tomando el morfismo $(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \xrightarrow{(1_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})} (\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$. No existe un morfismo $(\beta\mathbb{R}, \beta 1_{\mathbb{R}}, \beta\mathbb{R}) \xrightarrow{(u,f)} (\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ con $u \circ 1_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{R}}$ y $f \circ 1_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{R}}$, ya que de existir, u y f serían sobreyectivas y como $\beta\mathbb{R}$ es compacto, $\mathbb{R}$ sería compacto.

3.2. Monomorfismos de campos

Dado que los morfismos de campos están compuestos por parejas de funciones continuas, es decir, por morfismos en **Top**, es natural pensar si el estudio de los morfismos en la categoría **Bun** es similar al estudio de los morfismos en **Top** y si esa misma similitud se preserva en los morfismos de la categoría **TBun** con los morfismos de de la categoría de los espacios de Tychonoff **Tycho**. La respuesta a esa pregunta es afirmativa como veremos a continuación.

Recordemos que en categorías se define un monomorfismo como un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ tal que para cada par de morfismos $C \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A$ se tiene que si $f \circ g = f \circ h$, es porque $g = h$.

Ejemplo 3.2. En las categorías, **Set** de los conjuntos, **Top**, **Haus** de los espacios de Hausdorff, **FHaus** de los espacios funcionalmente Hausdorff y **Tycho**; se tiene que los monomorfismos son precisamente los morfismos que son funciones inyectivas.

Otro concepto que se estudia en los morfismos de una categoría es el de epimorfismo, el cual es un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ tal que para cada par de morfismos $B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C$ se tiene que si

$g \circ f = h \circ f$, es porque $g = h$.

Ejemplo 3.3.

1. En **Set** y **Top** los epimorfismos son precisamente los morfismos que son funciones sobreyectivas.

2. En **Haus**, **FHaus** y **Tycho** los epimorfismos son las funciones continuas con recorrido denso.

Para las categorías **Bun** y **TBun** obtenemos los siguientes dos resultados sobre los monomorfismos y epimorfismos.

Proposición 3.2.1. Sean $\xi = (E, p, B)$ y $\eta = (E', p', B'')$ objetos en **Bun** (resp. en **TBun**) y $(u, f) : \xi \longrightarrow \eta$ un morfismo de campos. Entonces en **Bun** (resp. en **TBun**), (u, f) es un monomorfismo, si y solo si, u y f son monomorfismos en **Top**.

Demostración.
La siguiente prueba sirve tanto para **Bun** como para **TBun**.
$\Rightarrow$) (Basta con ver que u y f son funciones inyectivas).

Veamos primero que u es inyectiva.
Si x y y en E son tales que $u(x) = u(y)$, consideremos el campo $\lambda = (\{x, y\}, p'', \{p(x), p(y)\})$ en donde p'' es la restricción de p y los conjuntos $\{x, y\}$ y $\{p(x), p(y)\}$ están dotados con la topología discreta. Ahora consideremos la funciones constantes

$$g_1, g_2 : \{x, y\} \longrightarrow E' \quad \text{y} \quad h_1, h_2 : \{p(x), p(y)\} \longrightarrow B',$$

en donde las imágenes de g_1, g_2, h_1 y h_2 son respectivamente $x, y, p(x)$ y $p(y)$. Claramente estas funciones son continuas y además hacen que el siguiente diagrama sea parcialmente conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\{x,y\} \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] \arrow[d, "p''"'] & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"] & \text{E'} \arrow[d, "p'"] \\
\{p(x),p(y)\} \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & B \arrow[r, "f"] & B'
\end{tikzcd}$$

Diagrama 7

En consecuencia (g_1, h_1) y (g_2, h_2) son morfismos de campos. Ahora dado que $u(x) = u(y)$, se sigue que $(u, f) \circ (g_1, h_1) = (u, f) \circ (g_2, h_2)$ y como (u, f) es un monomorfismo, $(g_1, h_1) = (g_2, h_2)$, lo cual implica que $g_1 = g_2$ y por lo tanto $x = y$.

Ahora veamos que f es inyectiva.
Si b_1, b_2 en B son tales que $f(b_1) = f(b_2)$, consideremos el campo fibrado $\lambda = (E'', p'', B'')$, en donde $E'' = \emptyset$, la proyección p'' es la proyección vacía y B'' es un conjunto unipuntual, por decir, $B'' = \{x\}$. Ahora si tomamos las aplicaciones vacías $g_1, g_2 : E'' \longrightarrow E$ y las aplicaciones $h_1, h_2 : B'' \longrightarrow B$ tales que $h_1(x) = b_1$ y $h_2(x) = b_2$, tenemos que (g_1, h_1) y (g_2, h_2) son morfismos de campos en donde al considerar el hecho que $f(b_1) = f(b_2)$,

obtenemos que $(u, f) \circ (g_1, h_1) = (u, f) \circ (g_2, h_2)$ y como (u, f) es un monomorfismo, $(g_1, h_1) = (g_2, h_2)$ lo cual implica que $h_1 = h_2$ y en consecuencia $b_1 = b_2$.

$\Leftarrow$) Si $\lambda = (E'', p'', B'')$ es un campo y $(g_1, h_1), (g_2, h_2) : \lambda \longrightarrow \xi$ son morfismos de campos tales que $(u, f) \circ (g_1, h_1) = (u, f) \circ (g_2, h_2)$, entonces se tiene que $u \circ g_1 = u \circ g_2$ y $f \circ h_1 = f \circ h_2$ y dado que u y f son funciones inyectivas en **Top**, $g_1 = g_2$ y $h_1 = h_2$ o equivalentemente, $(g_1, h_1) = (g_2, h_2)$. ■

Proposición *3.2.2.* Sean $\xi = (E, p, B)$ y $\eta = (E', p', B'')$ campos fibrados y $(u, f) : \xi \longrightarrow \eta$ un morfismo de campos. En la categoría **Bun**, (resp. en **TBun**) se cumple que (u, f) es un epimorfismo, si y solo si, u y f son epimorfismos en la categoría **Top**, (resp. en **Tycho**).

Demostración.
En la categoría **Bun**.
$\Rightarrow$) Basta con probar que u y f son sobreyectivas.

Veamos que u es sobreyectiva.
Consideremos el campo $\lambda = (\{0, 1\}, p'', \{1\})$ donde $\{0, 1\}$ está dotado con la topología indiscreta. Ahora consideremos las funciones

$$g_1, g_2 : E' \longrightarrow \{0, 1\} \quad \text{y} \quad h_1, h_2 : B' \longrightarrow \{1\},$$

en donde g_1 es la función característica que envía a los puntos de $u(E)$ en 1 y a su complemento en 0, g_2 es la función constante cuya imagen es 1 y claramente $h_1 = h_2$ es la única función posible. De esta forma el siguiente diagrama es parcialmente conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] \arrow[d, "p'"] & \{0,1\} \arrow[d, "p''"] \\
B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & \{1\}
\end{tikzcd}$$

Diagrama 8

Entonces $(g_1, h_1), (g_2, h_2) : \eta \longrightarrow \lambda$ son morfismos de campos, tales que

$$(g_1, h_1) \circ (u, f) = (g_2, h_2) \circ (u, f)$$

y dado que (u, f) es un epimorfismo, $(g_1, h_1) = (g_2, h_2)$, lo cual implica que $g_1 = g_2$. En consecuencia, $u(E) = E'$.

Ahora veamos que f es sobreyectiva.
Consideremos el campo $\lambda = (\{0, 1\}, p'', \{0, 1\})$, en donde p'' es la identidad y $\{0, 1\}$ está dotado con la topología indiscreta. Las siguientes funciones son continuas.

$$g_1, g_2 : E' \longrightarrow \{0, 1\} \quad \text{y} \quad h_1, h_2 : B' \longrightarrow \{0, 1\},$$

en donde h_1 es la función característica que envía a $f(B')$ en 1 y a su complemento en 0 y h_2 es la función constante cuya imagen es 1 y tomemos $g_1 = h_1 \circ p'$ y $g_2 = h_2 \circ p'$. El siguiente diagrama conmuta parcialmente.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] \arrow[d, "p'"] & \{0,1\} \arrow[d, "p''"] \\
B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & \{0,1\}
\end{tikzcd}$$

Diagrama 9

De esta forma, $(g_1, h_1), (g_2, h_2) : \eta \longrightarrow \lambda$ son morfismos de campos, en donde además se cumple que $(g_1, h_1) \circ (u, f) = (g_2, h_2) \circ (u, f)$ y dado que (u, f) es un epimorfismo, $(g_1, h_1) = (g_2, h_2)$, lo cual implica que $h_1 = h_2$ y en consecuencia $f(B) = B'$.

$\Leftarrow$) Si $\lambda = (E'', p'', B'')$ es un campo y $(g_1, h_1), (g_2, h_2) : \eta \longrightarrow \lambda$ son morfismos de campos tales que $(g_1, h_1) \circ (u, f) = (g_2, h_2) \circ (u, f)$, entonces se tiene que $g_1 \circ u = g_2 \circ u$ y $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ y dado que u y f son epimorfismos en **Top**, $g_1 = g_2$ y $h_1 = h_2$ o equivalentemente, $(g_1, h_1) = (g_2, h_2)$.

En la categoría **TBun**.
$\Rightarrow$) Basta con probar que u y f tienen recorridos densos.

Veamos el resultado para u.
Si suponemos que $\overline{u(E)} \neq E'$ y tomamos un punto $x_0 \in E' \backslash \overline{u(E)}$, por ser E' de Tychonoff, existe una función continua $g_1 : E' \longrightarrow [0, 1]$ que envía a $\overline{u(E)}$ en 1 y a x_0 en 0. Consideremos el campo fibrado $\lambda = ([0, 1], p'', [0, 1])$ en donde p'' es la aplicación constante con imagen 1 y tomamos las funciones continuas

$$g_2 : E' \longrightarrow [0, 1] \quad \text{y} \quad h_1, h_2 : B' \longrightarrow [0, 1],$$

en donde h_1, h_2 y g_2 son aplicaciones constantes con imagen 1. Tenemos que el siguiente diagrama conmuta parcialmente

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] \arrow[d, "p'"] & {[0,1]} \arrow[d, "p''"] \\
B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Diagrama 10

de esta forma $(g_1, h_1), (g_2, h_2) : \eta \longrightarrow \lambda$ son morfismos de campos en donde

$$(g_1, h_1) \circ (u, f) = (g_2, h_2) \circ (u, f),$$

de lo cual se deduce que $g_1 = g_2$, contradiciendo la existencia de x_0 y mostrando que el recorrido de u es denso en E'.

Ahora veamos que el recorrido de f es denso en B'.
Si suponemos que $\overline{f(B)} \neq B'$ y tomamos un punto $b_0 \in B' \backslash \overline{f(B)}$, por ser B' de Tychonoff, existe una función continua $h_1 : B' \longrightarrow [0,1]$ que envía a $\overline{f(B)}$ en 1 y a b_0 en 0. Consideremos el campo fibrado $\lambda = ([0,1], p'', [0,1])$, en donde p'' es la identidad y tomemos las funciones continuas

$$g_1 : E' \longrightarrow [0,1] \quad \text{y} \quad h_1, h_2 : B' \longrightarrow [0,1],$$

en donde h_2 es la aplicación constante con imagen 1 y $g_1 = h_1 \circ p'$ y $g_2 = h_2 \circ p'$. La elección de g_1 y g_2 implica que efectivamente $(g_1, h_1), (g_2, h_2) : \eta \longrightarrow \lambda$ son morfismos de campos, tales que $(g_1, h_1) \circ (u, f) = (g_2, h_2) \circ (u, f)$, de lo cual se sigue que $g_2 = h_2$, en consecuencia $\overline{f(B)} = B'$.
$\Leftarrow$) la prueba es análoga a la realizada en la categoría **Bun**. ■

Un tipo especial de monomorfismo que se estudia en teoría de categorías es el igualador. Si $A \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} B$ son morfismos, un morfismo $E \xrightarrow{e} A$ se llama igualador de g y h si cumple:

1. $g \circ e = h \circ e$.

2. Para cualquier morfismo $E' \xrightarrow{e'} A$ con $g \circ e' = h \circ e'$, existe un único morfismo $E' \xrightarrow{\bar{e}} E$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[d, "\bar{e}"'] \arrow[dr, "e'"] & & \\
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

Diagrama 11

Es fácil ver que los igualadores son únicos (salvo isomorfismos).

Ejemplo 3.4. En las categorías **Top**, **Haus**, **FHaus** y **Tycho** se tiene que si $A \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} B$ son morfismos y $E = \{x \in A : g(x) = h(x)\}$ con la topología de subespacio, la función inclusion $E \xrightarrow{j} A$ es un igualador de g y h.

Para las categorías **Bun** y **TBun** se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2.3. Sean $\xi = (E, p, B)$, $\eta = (E', p', B'')$ y $\lambda = (E'', p'', B'')$ campos y $(e_1, e_2) : \lambda \longrightarrow \xi$ y $(g_1, h_1), (g_2, h_2) : \xi \longrightarrow \eta$ un morfismos de campos. Entonces en la categoría **Bun** (resp. en **TBun**), (e_1, e_2) es un igualador de (g_1, h_1) y (g_2, h_2), si y sólo si, en **Top** e_1 es un igualador de g_1 y g_2, y e_2 es un igualador de h_1 y h_2.

Demostración.
Las siguiente prueba sirve tanto para la categoría **Bun** como **TBun**.
$\Rightarrow$) Dado que (e_1, e_2) es un igualador es claro que $g_1 \circ e_1 = g_2 \circ e_1$ y $h_1 \circ e_2 = h_2 \circ e_2$; por tal motivo sólo falta probar la segunda condición de igualador descrita anteriormente.

Veamos que e_1 es un igualador de g_1 y h_1.
Si $E_1 \xrightarrow{e_1'} E$ es una función continua con $g_1 \circ e_1' = g_2 \circ e_1'$ y consideramos el espacio $B_1 = E_1$ y q como la identidad de E_1, obtenemos el campo $\delta = (E_1, q, B_1)$. Si además, tomamos $e_2' = p \circ e_1'$ tenemos que $(e_1', e_2') : \delta \longrightarrow \xi$ es un morfismo de campos el cual iguala a los morfismos (g_1, h_1) y (g_2, h_2) al componer. Este hecho se sigue del siguiente resultado $g_1 \circ e_1' = g_2 \circ e_1'$ implica que $h_1 \circ e_2' = h_2 \circ e_2'$. En efecto (ver diagrama 12).

$$\begin{aligned}
g_1 \circ e_1' = g_2 \circ e_1' &\Rightarrow p' \circ (g_1 \circ e_1') = p' \circ (g_2 \circ e_1') \\
&\Rightarrow (p' \circ g_1) \circ e_1' = (p' \circ g_2) \circ e_1' \\
&\Rightarrow (h_1 \circ p) \circ e_1' = (h_2 \circ p) \circ e_1' \\
&\Rightarrow h_1 \circ (p \circ e_1') = h_2 \circ (p \circ e_1') \\
&\Rightarrow h_1 \circ e_2' = h_2 \circ e_2'.
\end{aligned}$$

Ahora, debido a que (e_1, e_2) es un igualador, existe un único morfismo $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) : \delta \longrightarrow \lambda$ tal que $(e_1', e_2') = (e_1, e_2) \circ (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ y por consiguiente $e_1' = e_1 \circ \bar{e}_1$.

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[dr, "\bar{e}_1"'] \arrow[drr, "e_1'"] \arrow[dd, "q"'] & & & \\
& E'' \arrow[r, "e_1"'] \arrow[dd, "p''"] & E \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] \arrow[dd, "p"'] & E' \arrow[dd, "p'"] \\
B_1 \arrow[dr, "\bar{e}_2"'] \arrow[drr, "e_2'"] & & & \\
& B'' \arrow[r, "e_2"'] & B \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Diagrama 12

La unicidad de $\bar{e}_1$ se sigue de la unicidad de $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ junto con la estructura del campo λ.

Veamos que e_2 es un igualador de g_2 y h_2.
Si $E_2 \xrightarrow{e_2'} B$ es una función continua con $h_1 \circ e_2' = h_2 \circ e_2'$, en este caso, consideremos a el espacio E_1 como el conjunto vacío y q la aplicación vacía, entonces $\delta = (E_1, q, B_1)$ es un campo. En consecuencia, si tomamos a e_1' como la aplicación vacía, obtenemos el morfismo de campo $(e_1', e_2') : \delta \longrightarrow \xi$, el cual claramente iguala a los morfismos (g_1, h_1) y (g_2, h_2) al componer.

Ahora, debido a que (e_1, e_2) es un igualador, existe un único morfismo $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) : \delta \longrightarrow \lambda$ tal que $(e_1', e_2') = (e_1, e_2) \circ (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ y por consiguiente $e_2' = e_2 \circ \bar{e}_2$ (ver diagrama 12). La unicidad de $\bar{e}_2$ se sigue de la unicidad de $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ junto con el hecho que $\bar{e}_1$ necesariamente es la aplicación vacía.

$\Leftarrow$) Si e_1 es un igualador de g_1 y g_2 y e_2 es un igualador de h_1 y h_2, entonces claramente $(g_1, h_1) \circ (e_1, e_2) = (g_2, h_2) \circ (e_1, e_2)$. Por otra parte, para cada campo $\delta = (E_1, q, B_1)$ y cada morfismo de campo $(e_1', e_2') : \delta \longrightarrow \xi$ en donde $(g_1, g_2) \circ (e_1', q, e_2') = (h_1, h_2) \circ (e_1', q, e_2')$, se sigue que $g_1 \circ e_1' = h_1 \circ e_1'$ y $g_2 \circ e_2' = h_2 \circ e_2'$ y por consiguiente, existen funciones continuas únicas $\overline{e}_1 : E'_1 \longrightarrow E$ y $\overline{e}_2 : E'_2 \longrightarrow B$ que hacen que el diagrama (10) conmute. Así, $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) : \lambda \longrightarrow \xi$ es un morfismo de campos. La unicidad del morfismo $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ se sigue de la unicidad de $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$. ■

Dos tipos especiales de monomorfismos que se estudian en la teoría categorías son los monomorfismos regulares y los monomorfismos extremos. Un monomorfismo $E \xrightarrow{e} A$ se dice regular si es igualador para un par de morfismos. Un monomorfismo m es extremo si la única forma en la que se puede factorizar como $f \circ e$ con e epimorfismo, es considerando un isomorfismo e.

Un resultado categórico que se tiene es que todo monomorfismo regular es extremo.

Ejemplo 3.5.

1. En **Top**, los monomorfismos regulares son precisamente las inmersiones de subespacios.

2. En **FHaus** los monomorfismos regulares son las inmersiones de subespacios cerrados que se pueden ver como intersección de cero-conjuntos.

3. En **Tycho** pasa igual que en **FHaus**, sin embargo recordemos que todo cerrado en un espacio de Tychonoff es la intersección de los ceros-conjuntos que lo contienen. En este caso una implicación es inmediata ya que si $E \xrightarrow{f} A$ es un monomorfismo regular, es igualador para un par de funciones $A \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} B$, luego $f(A)$ es el conjunto cerrado $\{b \in B : g(b) = h(b)\}$. Para la otra implicación basta considerar la colección $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de todas funciones continuas definidas desde B hasta $[0, 1]$ en donde $f(A) \subseteq f_\alpha^{-1}(0)$, en consecuencia $f(A) = \bigcap_{\alpha\in\Delta} f_\alpha^{-1}(0)$ y consideramos las funciones $e : B \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} I_\alpha$ como la función evaluación y $n : E' \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} I_\alpha$ como la función constante cuya imagen es el cero del producto, denotémoslo como $\mathbf{0}_\alpha$. En este caso, f es un igualador de e y n. Note también, que la función evaluación no es inyectiva.

Ejemplo 3.6. En **FHaus**, los monomorfismos extremos son inmersiones de subespacios cerrados al igual que en **Tycho**; por consiguiente, en esta ultima categoría los monomorfismos extremos y los regulares coinciden. Para observar que en **Tycho** los monomorfismos extremos son precisamente las inmersiones de subespacios cerrados, basta con probar que las inmersiones de subespacios cerrados definen un monomorfismo extremo, dado que como mencionamos anteriormente, en categorías todo monomorfismo regular es extremo. Para ello tomamos una inmersión $A \xrightarrow{f} B$ y consideramos nuevamente la colección $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de todas funciones continuas definidas de B en $[0, 1]$, donde $f(A) \subseteq f_\alpha^{-1}(0)$, en este caso $\overline{f(A)} = \bigcap_{\alpha\in\Delta} f_\alpha^{-1}(0)$ y además $e \circ f = n \circ f$ tomando a e y n como las funciones descritas anteriormente. Ahora si consideramos el conjunto $B' = \{b \in B : e(b) = n(b)\}$ tenemos que la función inclusión $j : B' \longrightarrow B$ es un igualador de e y n, lo cual implica que existe una función continua $k : A \longrightarrow B'$ tal que $f = j \circ k$. Es fácil observar que en realidad k es un epimorfismo, lo cual implica, por ser f extremo, que k es un homeomorfismo y como A es homeomorfo a $f(A)$, por ser f una inmersión, se sigue que $f(A)$ es homeomorfo a B', es decir, $f(A)$ es cerrado en B.

En las categorías **Bun** y **TBun** se tiene el siguiente resultado con respecto a los monomorfismos regulares.

Proposición 3.2.4. Si $\xi = (E, p, B)$ y $\eta = (E', p', B')$ son campos fibrados y $(u, f) : \xi \longrightarrow \eta$ es un morfismo de campos. Entonces, (u, f) es un monomorfismo regular en **Bun** (resp. en **TBun**), si y sólo si, u y f son monomorfismos regulares en **Top** (resp. en **Tycho**)

Demostración.
Para la categoría **Bun**.
$\Rightarrow$) Si (u, f) es un monomorfismo regular, entonces existen morfismos de campos $(g_1, h_1), (g_2, h_2) : (E', p', B') \longrightarrow (E'', p'', B'')$ tales que (u, f) es un igualador de (g_1, h_1) y (g_2, h_2), luego por la Proposición (3.2.3), sabemos que u es un igualador de g_1 y g_2 al igual que f es un igualador de h_1 y h_2.

$\Leftarrow$) Si u y f son monomorfismos regulares, entonces son inmersiones. Consideremos las funciones

$$g_1, g_2 : E' \longrightarrow \{0, 1\} \quad \text{y} \quad h_1, h_2 : E' \longrightarrow \{0, 1\},$$

en donde g_1 y h_1 son las funciones características que envían a $u(E)$ y a $f(B)$ en 1 y a sus complementos en 0 y g_2 y h_2 son las funciones constantes con imagen 1. Ahora si dotamos a $\{0, 1\}$ con la topología indiscreta, las funciones son continuas y además u es un igualador de g_1 y g_2 como también f es un igualador de h_1 y h_2. Por otra parte, si tomamos a $p'' : \{0, 1\} \longrightarrow \{0, 1\}$ como la identidad, tenemos que $\lambda = (\{0, 1\}, p''\{0, 1\})$ es un campo y dado que $(p'(u(E)) \subseteq f(B)$, se sigue que $(g_1, h_1), (g_2, h_2) : \xi \longrightarrow \lambda$ son morfismos de campos, en donde $(g_1, h_1) \circ (u, f) = (g_2, h_2) \circ (u, f)$. Luego por la Proposición (3.2.3) tenemos que (u, f) es un igualador de (g_1, h_1) y (g_2, h_2).

Para la categoría **TBun**.

$\Rightarrow$) La prueba es la misma que en la categoría **Bun**.

$\Leftarrow$) Si u y f son monomorfismo regulares en **Tycho** entonces $u(E)$ y $f(B)$ son subespacios cerrados en E' y B' respectivamente. Por consiguiente se pueden ver como la intersección de los cero-conjuntos que lo contienen. Si la colección $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ es la colección de todas las funciones continuas definidas de E' en $[0, 1]$, donde $u(E) \subseteq u_\alpha^{-1}(0)$ y $\{f_\beta\}_{\beta \in \Upsilon}$ es la colección de todas las funciones continuas definidas de B' en $[0, 1]$, donde $f(B) \subseteq f_\beta^{-1}(0)$.

En este caso consideramos las funciones

$$e_1, n_1 : E' \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Delta} I_\alpha \quad \text{y} \quad e_2, n_2 : B' \longrightarrow \prod_{\beta \in \Upsilon} I_\beta,$$

en donde e_1 y e_2 son las funciones evaluación y tanto n_1 como n_2 son las funciones constantes cuyas imágenes son $\mathbf{0}_\alpha$ y $\mathbf{0}_\beta$, respectivamente.

Como se indicó en el ejemplo anterior. Tenemos que u es un igualador de e_1 y n_1, como también que f es un igualador de e_2 y n_2.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] \arrow[d, "p'"] & \prod_{\alpha\in\Delta} I_\alpha \\ B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & \prod_{\beta\in\Upsilon} I_\beta \end{tikzcd}$$

Diagrama 13

Ahora si tomamos $E_1 = \prod_{\alpha\in\Delta} I_\alpha$ y $B_1 = \prod_{\beta\in\Upsilon} I_\beta$, la prueba se sigue si construimos un campo $\lambda = (E_1, q, B_1)$, es decir, si construimos una función continua $q : E_1 \longrightarrow B_1$, en donde $(e_1, e_2), (n_1, n_2) : \eta \longrightarrow \lambda$ sean morfismos de campos, ya que como sabemos (de la Proposición 3.2.3) ésto implica que (u, f) es un igualador de (e_1, e_2) y (n_1, n_2), con lo cual termina la prueba. Para construir la función q tenemos en cuenta los siguientes hechos:

1) Para todo $\beta \in \Upsilon$, $u(E) \subseteq (p')^{-1}[f_\beta^{-1}(0)]$.

2) Para todo $\beta \in \Upsilon$, existe $\alpha \in \Delta$ tal que $f_\beta \circ p' = u_\alpha$.

3) Para todo $\beta \in \Upsilon$, existe $\alpha \in \Delta$ tal que $\pi_\beta \circ e_2 \circ p' = \pi_\alpha \circ e_1$.

4) Si x y y en E' son tales que $e_1(x) = e_1(y)$ entonces $e_2(p'(x)) = e_2(p'(y))$.

En efecto, (ver diagrama 13).

1). Se sigue del hecho que $p'(U(E)) \subseteq f(B)$ y que $f(B) \subseteq f_\beta^{-1}(0)$ para todo $\beta \in \Upsilon$.

2). Si tomamos $\beta \in \Upsilon$, se tiene que $f_\beta \circ p' : E' \longrightarrow [0,1]$ y $(p')^{-1}[f_\beta^{-1}(0)]$ es un cero-conjunto el cual por 1) contiene a $u(E)$; por consiguiente, existe $\alpha \in \Delta$ tal que $u_\alpha = f_\beta \circ p'$.

3). El resultado se sigue de 2) dado que para todo $\beta \in \Upsilon$, $\pi_\beta \circ e_2 = f_\beta$ y para todo $\alpha \in \Delta$, $\pi_\alpha \circ e_1 = u_\alpha$. En este caso si tomamos $\beta \in \Upsilon$, de 2), existe un $\alpha \in \Delta$ tal que

$$(\pi_\beta \circ e_2) \circ p' = f_\beta \circ p' = u_\alpha = \pi_\alpha \circ e_1.$$

4). Veamos la contrarecíproca. Si existen x y y en E' tales que $e_2(p'(x)) \neq e_2(p'(y))$ es por que existe $\beta \in \Upsilon$ en donde $\pi_\beta(e_2(p'(x))) \neq \pi_\beta(e_2(p'(y)))$ lo cual quiere decir, por 3), que existe un $\alpha \in \Delta$ en donde $\pi_\alpha(e_1(x)) \neq \pi_\alpha(e_1(y))$, o equivalentemente, en donde $e_1(x) \neq e_1(y)$.

De lo anterior definimos la función

$$q : E_1 \longrightarrow B_1, \quad \text{donde} \quad q(a) = b, \quad \text{si } a = e_1(x) \ \text{ y } b = e_2(p'(x)).$$

Por 4) se tiene que q está bien definida y además es continua dado que si $\beta \in \Upsilon$, entonces por 3), $\pi_\beta \circ q = \pi_\alpha$, para algún $\alpha \in \Delta$. (Note que son necesarios los resultados anteriores para probar que q está bien definida, dado que como recordamos en este caso las funciones evaluaciones no son inyectivas)

Por otra parte, la definición de q está dada para que $(e_1, e_2) : \eta \longrightarrow \lambda$ sea un morfismo de campos. Así, sólo falta probar que $(n_1, n_2) : \eta \longrightarrow \lambda$ hace conmutar el diagrama, o equivalentemente, que $q(\mathbf{0}_\alpha) = \mathbf{0}_\beta$. Si consideremos un $x \in u(E)$, tenemos que $n_1(x) = e_1(x) = \mathbf{0}_\alpha$ y por 2), $p'(x) \in f(B)$, lo cual implica que $e_2(p'(x)) = \mathbf{0}_\beta$ y por la definición de q obtenemos que

$$q(\mathbf{0}_\alpha) = q(n_1(x)) = q(e_1(x)) = e_2(p'(x)) = \mathbf{0}_\beta.$$

■

Con respecto a los monomorfismos extremos en **Top**, no conocemos si se encuentran caracterizados. Sin embargo, se sigue obteniendo la misma similitud entre monomorfismo extremo en **Bun** y pares de monomorfismos extremos en **Top**. Como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.2.5. Si $\xi = (E, p, B)$ y $\eta = (E', p', B')$ son campos fibrados y $(u, f) : \xi \longrightarrow \eta$ es un morfismo de campos, entonces, (u, f) es un monomorfismo extremo en **Bun** (resp. en **TBun**), si y sólo si, u y f son monomorfismos extremos en **Top** (resp. en **Tycho**).

Demostración.
Para la categoría **TBun**.

$\Rightarrow$) (Veamos que u es un monomorfismo extremo)
Si $h : E \longrightarrow E''$ y $m : E'' \longrightarrow E'$ son funciones continuas en donde $u = m \circ h$ y h es un epimorfismo, entonces se tiene:

$$(p' \circ m)(E'') \subseteq \overline{f(B)} \qquad (1).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(p' \circ u)(E) = (f \circ p)(E) \subseteq f(B) &\Leftrightarrow [p' \circ (m \circ h)](E) \subseteq f(B)\\ &\Leftrightarrow ((p' \circ m)(h(E)) \subseteq f(B)\\ &\Rightarrow (p' \circ m)(\overline{h(E)}) \subseteq \overline{(p' \circ m)(h(E))} \subseteq \overline{f(B)}\\ &\Leftrightarrow (p' \circ m)(E'') \subseteq \overline{f(B)}.\end{aligned}$$

De 1) consideramos la función $p'' : E'' \longrightarrow \overline{f(B)}$ como la restricción de $p' \circ m$ y obtenemos el campo fibrado $\lambda = (E'', p'', \overline{f(B)})$.

Ahora consideramos las aplicaciones, $f' : B \longrightarrow \overline{f(B)}$ como la restricción de f y $j : \overline{f(B)} \longrightarrow B'$ como la inclusión. El siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & E'' \arrow[dr, "m"] \arrow[dd, "p''"] & \\
E \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "u"] \arrow[dd, "p"'] & & E' \arrow[dd, "p'"] \\
 & \overline{f(B)} \arrow[dr, "j"] & \\
B \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & & B'
\end{tikzcd}$$

Diagrama 14

Así, $(h, f') : \xi \longrightarrow \lambda$ y $(m, j) : \lambda \longrightarrow \eta$ son morfismos de campos en donde además $(u, f) = (m, j) \circ (h, f')$ y como h es un epimorfismo y f' obviamente también lo es, por la Proposición (3.2.2) tenemos que (h, f') es un epimorfismo y por la hipótesis, (h, f') es un isomorfismo, lo cual implica que h es un homeomorfismo; por consiguiente, u es un monomorfismo extremo.

Veamos que f es un monomorfismo extremo.
Si $h : B \longrightarrow B''$ y $m : B'' \longrightarrow B'$ son funciones continuas tales que $f = m \circ h$, en donde h es un epimorfismo, consideremos el subespacio $E'' = \{(p(x), u(x)) : x \in E\}$ de $B \times E'$ y tomemos a π_1 y π_2 como las proyecciones de E'' a B y E' respectivamente, de lo cual obtenemos el campo fibrado $\lambda = (E'', h \circ \pi_1, B'')$. Ahora, si denotamos a la restricción de $p \times u : E \longrightarrow E''$ como k, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
& E'' \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[d, "h \circ \pi_1"] \arrow[dddl, "\pi_1"'] & \\
E \arrow[ur, "k"] \arrow[rr, "u"] \arrow[dd, "p"'] & & E' \arrow[dd, "p'"] \\
& B'' \arrow[dr, "m"] & \\
B \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f"'] & & B'
\end{tikzcd}$$

Diagrama 15

Así, $(k, h) : \xi \longrightarrow \lambda$ y $(\pi_2, m) : \lambda \longrightarrow \eta$ forman morfismos de campos los cuales cumplen la igualdad $(u, f) = (\pi_2, m) \circ (p \times u, h)$ y como h es un epimorfismo al igual que k, de la Proposición (3.2.2) obtenemos que (k, h) es un epimorfismo y por la hipótesis, (h, k) es un isomorfismo , lo cual implica que h es un homeomorfismo. Luego f es un monomorfismo extremo.

$\Leftarrow$) Si u y f son monomorfismos extremos, también son monomorfismos regulares, luego por la Proposición (3.2.4) tenemos que (u, f) es un monomorfismo regular y por consiguiente (u, f) también es un monomorfismo extremo.

Para la categoría **TBun**.

La prueba se puede ver como un caso particular de la realizada en la categoría **TBun** en donde se tiene que $\overline{f(B)} = f(B)$. ■

Por último mencionamos que debido a que no encontramos resultados correspondientes a los epimorfismo en **Tycho** y para no extendernos tanto, decidimos no realizar su presentación en **Bun** y **TBun**. También mencionamos de manera muy informal dado que que son muy conocidos en la teoría de categorías, los resultados con respecto al producto y coproducto.
Definición 3.2. Dada una familia de campos $\{(E_\alpha, p_\alpha, B_\alpha)\}_{\alpha \in J}$, en donde $\pi_\beta : \prod E_\alpha \longrightarrow E_\beta$ y $\pi'_\beta : \prod B_\alpha \longrightarrow B_\beta$ son sus productos topológicos, la única función $\Pi p_\alpha : \prod E_\alpha \longrightarrow \prod B_\alpha$ que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} \prod E_\alpha \arrow[r, "\pi_\beta"] \arrow[d, "\Pi p_\alpha"'] & E_\beta \arrow[d, "p_\beta"] \\ \prod B_\alpha \arrow[r, "\pi'_\beta"] & B_\beta \end{tikzcd}$$

Diagrama 16

se conoce como función producto y resulta continua. Definimos el campo $(\prod E_\alpha, \Pi p_\alpha, \prod B_\alpha)$, como el campo producto de la familia $\{(E_\alpha, p_\alpha, B_\alpha)\}_{\alpha \in J}$.

De igual forma, si $\kappa_\beta : \coprod E_\alpha \longrightarrow E_\beta$ y $\kappa'_\beta : \coprod B_\alpha \longrightarrow B_\beta$ son sus coproductos topológicos, la única función $\Sigma p_\alpha : \coprod E_\alpha \longrightarrow \coprod B_\alpha$ que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} \coprod E_\alpha \arrow[r, "\kappa_\beta"] \arrow[d, "\Sigma p_\alpha"'] & E_\beta \arrow[d, "p_\beta"] \\ \coprod B_\alpha \arrow[r, "\kappa'_\beta"] & B_\beta \end{tikzcd}$$

Diagrama 17

se conoce como función coproducto, la cual resulta continua. En este caso definimos el campo $(\coprod E_\alpha, \Sigma p_\alpha, \coprod B_\alpha)$, como el campo coproducto de la familia $\{(E_\alpha, p_\alpha, B_\alpha)\}_{\alpha \in J}$.

Un resultado familiar en la teoría de categorías es que el producto en **Bun** y **TBun** corresponde al campo producto y el coproducto en **Bun** corresponde al campo coproducto.

BIBLIOGRAFÍA

[1] B. A. Pasynkov, *On extension to mappings of certain notions and assertions concerning spaces*, Mapping and functors, Izdat, MGU. Moscow, 1989, pp. 131-136.

[2] D. Feldman & A. Wilce *Degenerate fibres in the Stone-Čech compactification of the universal bundle of a finite group*, Transactions of the American Mathematical Society Vol. 354, No. 9, 2002, pp. 3757-3769.

[3] E. G. Manes, *Compact, Hausdorff objects*, Gen. Topology Appl. 4, 1974.

[4] G. Nordo, *A brief survey on Fibrewise General Topology*, Preprint.

[5] G. T. Whyburn, *A unified space for mappings*, Transactions of the American Mathematical Society Vol. 74, 1953, pp. 344-350.

[6] G. T. Whyburn, *Compactification of mappings*, Math. Ann. Vol. 166, 1966, pp. 168-174.

[7] H. Dale, *Fibre Bundles*, Springer-Verlag, New Yourk Heidelberg Berlin, 1966.

[8] H. P. A. Künzi and B. A. Pasynkov, *Tychonoff compactifications and R-completions of mappings and rings of continuous functions*, Applied Categorical Structures, Vol. 4, 1996, pp. 175-202.

[9] I. M. James, *Fibrewise Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[10] J. Adámek et al, *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*, Wiley & Sons, 1990.

[11] J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., Canada, 1955.

[12] J. R. Munkres, *Topology a First Course*, Prentice Hall, New Jersey, 1975.

[13] M. García Marrero, J. Margalef Roig, C. Olano de Lorenzo-Cáceres, E. Outerelo Domínguez & J. L. Pinilla Ferrando, *Topología*, Alhambra, Madrid, 1975.

[14] M. M. Clementino, *On Categorical Notions of Compact Objects*, Applied Categorical Structures, Vol. 4, 1996.

[15] M. M. Clementino, E. Giuli & W. Tholen *Topology in a Category: Compactness*, Portugaliae Mathematica Vol. 53, Fasc. 4, 1996.

[16] N. Bourbaki, *General Topology*, Addison Wesley, 1966.

[17] R. F. Dickman Jr., *On closed extensions of functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 62, 1969, pp. 326-332.

[18] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlín, 1971.

[19] S. Willard, *General Topology*, Addison Wesley, 1970.

[20] V. M. Ul'janov, *On compactifications satisfying the first axiom of countability and absolutes*, Math. USSR Sbornik, Vol. 27, No. 2, 1975, pp. 199-226.