ACERCA DE LAS SOLUCIONES NO TRIVIALES PARA UN PROBLEMA DE DIRICHLET ASINTÓTICAMENTE LINEAL

MIREYA GARCÍA

Código 830108

Director

Ph. D. JOSÉ FRANCISCO CAICEDO CONTRERAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Bogotá D.C, 2010

ACERCA DE LAS SOLUCIONES NO TRIVIALES PARA UN PROBLEMA DE DIRICHLET ASINTÓTICAMENTE LINEAL

Trabajo Final presentado a la Facultad de Ciencias
de la Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá
como requisito para optar al título de
MAESTRÍA EN CIENCIAS-MATEMÁTICAS

Por: MIREYA GARCÍA

Director
Vo.Bo Ph. D. JOSÉ FRANCISCO CAICEDO CONTRERAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá D.C, 2010

Vo. Bo Ph. D. JOSÉ FRANCISCO CAICEDO CONTRERAS

Jurado

Jurado

Bogotá D.C, 2010

Agradecimientos

Quiero agradecer primero que todo a Dios por permitirme culminar con éxito esta etapa de mi carrera profesional y de mi vida.
Agradezco inmensamente al profesor José Francisco Caicedo por aceptar dirigir este trabajo, por su dedicación incondicional, sus consejos y sobre todo por sus valiosos aportes.
A mi esposo Wilson, por estar a mi lado, por apoyarme durante todo este tiempo, con amor y dedicación.

Resumen

En este trabajo se demuestra que el problema elíptico semilineal tiene por lo menos tres soluciones no triviales. Una de estas es positiva, otra negativa y la tercera cambia de signo. La demostración se hace mediante el uso del Teorema de Paso de Montaña y del grado de Leray Schauder.
Palabras claves: Problema elíptico semilineal, cambio de signo de las soluciones, grado de Leray Schauder.

Abstrac

This paper shows that the semilinear elliptic boundary problem has at least three non-trivial solutions. One of his solutions positive, one negative and the third changes sign. The proof uses the Mountain Pass Theorem and the Leray Schauder degree.

Keywords or phrases: Semilinear elliptic boundary problem, sign-changing solutions, Leray Schauder degree.

TABLA DE CONTENIDO

Introducción

Encontrar las soluciones no triviales para un problema de Dirichlet de tipo elíptico ha sido un problema fundamental de la física-matemática en especial para los no lineales, donde la teoría clásica ya no funciona. Más precisamente, en este trabajo se estudiara la existencia de soluciones múltiples para el siguiente problema de Dirichlet si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ con frontera suave, $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ el operador de laplace

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Siendo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y f es asintóticamente lineal, y

$$\exists f'(\infty) := \lim_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{t} \in \mathbb{R}$$

Consideramos la sucesión de autovalores de $(-\Delta)$, $\quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \ldots$ con condición cero en la frontera de Ω y la sucesión de funciones propias asociadas a cada autovalor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$; se plantea la existencia de tres soluciones no triviales a un problema elíptico seminileal (problema (0.0.1)), cuando el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los dos primeros valores propios. En este trabajo se estudia la existencia de las soluciones al problema (0.0.1) con las condiciones dadas, llevándose a cabo dicho estudio en tres partes, en el primer capítulo se estudiaran algunos conceptos básicos de los espacios L^p, los espacios de Sobolev, operadores compactos, Grado de Brouwer, índice local y grado de Leray-Schauder, entre otros. En el segundo capítulo se hace un estudio de las soluciones débiles de un problema de Dirichlet con condición en la frontera tanto de tipo no homogéneo como homogéneo, haciendo uso del Teorema de paso de montaña, en el capítulo 3 se muestra que el problema (0.0.1) tiene dos soluciones débiles clásicas, que no cambian de signo, una positiva, negativa y la existencia de otra solución que cambia de signo.

CAPÍTULO 1

Los Espacios $\mathbf{L}^p$

En esté capítulo se estudian algunos conceptos preliminares de los espacios L^p empezando con el Teorema de convergencia Monotona, Desigualdad de Young, Desigualdad de Hölder, Espacios de Hilbert, Operadores Compactos, Espacios de Sobolev, entre los cuales se miran los $W^{1,p}$ y los espacios $W_0^{1,p}(\Omega)$. En todo lo que sigue Ω denota el abierto de $\mathbb{R}^N$. Luego, se finaliza este capítulo con el Grado de Brouwer y la Teoría de grado de Leray-Schauder, que serán indispensable para el estudio del problema de Dirichlet asintóticamente lineal (0.0.1); estos preliminares fueron estudiados en la mayor parte en [6] y de otros textos que se referencian en la bibliografía y a lo largo del trabajo; recordemos . . .

1.1. Algunos Resultados de Integración

Teorema 1.1 (Teorema de Convergencia Monótona de Beppo Levi). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones de $L^1(\Omega)$ tal que $\sup\left\{\int_\Omega f_n(x)dx : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$. Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge c.t.p en Ω a un limite finito c.t.p denotado por $f(x)$; además $f \in L^1(\Omega)$ y $||f_n - f||_1 \to 0$.*

Lema 1.2 (Lema de Fatou). *Si $f \in L^1(\Omega)$ es una sucesión de funciones no negativas*

$$\int_{\Omega)} \liminf_{n\to\infty} f_n dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n dx$$

Teorema 1.3 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$. Supongamos que*

1. $f_n(x) \to f(x) c.t.p$ en Ω

2. Existe una función g en $L^1(\Omega)$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leqslant g(x) c.t.p.$ en Ω. Entonces f esta en $L^1(\Omega)$ y $||f_n - f||_1 \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Notación 1.1. *Se designa por $C_c(\Omega)$ el espacio de funciones continuas en Ω y con soporte compacto contenido en Ω.*

Teorema 1.4 (Teorema de Densidad). *El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$.*

Algunas definiciones y propiedades de los espacios L^p.

1.2. Definición y Propiedades Elementales de los Espacios L^p

Definición 1.1. *Sean p en $\mathbb{R}$ con $1 \leqslant p < \infty$; se define*

$$L^p(\Omega) : \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ es medible y } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

y se nota

$$||f||_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Definición 1.2. *Se define*
$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ medible y existe } C \text{ tal que} |f(x)| \leqslant C \ c.t.p \text{ en } \Omega \}$
y se nota

$$||f||_\infty = \inf \{ C : |f(x)| \leqslant C \ c.t.p \text{ en } \Omega \}$$

Notación 1.2. *Sea* $1 \leqslant p < \infty$*; se denotará por* p' *el exponente conjugado de* p *i.e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, 1' = \infty$ *y* $\infty' = 1$.

Algunos resultados clásicos

Teorema 1.5 (Desigualdad de Young)**.** *Sean* $1 < p < \infty$*. Entonces*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \qquad (a, b \geqslant 0)$$

.

Demostración. La función $x \to e^x$ es convexa, y por lo tanto

$$\begin{aligned} ab &= e^{\log(ab)} = e^{\log(a)+\log(b)} = e^{\frac{1}{p}\log(a^p)+\frac{1}{p'}\log(b^{p'})} \\ &\leqslant \frac{1}{p} e^{\log(a^p)} + \frac{1}{p'} e^{\log(b^{p'})} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \end{aligned}$$

□

Teorema 1.6 (Desigualdad de Hölder's)**.** *Sean* $f \in L^p(\Omega)$ *y* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *con* $1 \leqslant p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*. Entonces* $fg \in L^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |fg| dx \leqslant ||f||_{L^p} ||g||_{L^{p'}}.$$

La demostración puede verse en [6] pág 56.

Corolario 1.1 (Desigualdad de Interpolación)**.** *Si* $f \in L^p(\Omega) \cap L^p(\Omega)$*con* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$*, entonces* $f \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leqslant r \leqslant q$ *y se verifica la desigualdad de interpolación*

$$||f||_r \leqslant ||f||_p^\alpha ||f||_q^{1-\alpha}$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$

Teorema 1.7 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sean* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *y* $f, g \in L^p(\Omega)$*. Entonces*

$$||f + g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$$

Demostración.

$$\begin{aligned}||f+g||_p^p &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx \leqslant \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}\left(|f(x)+|g(x)|\right)dx \\ &\leqslant \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= ||f+g||_p^{p-1}\left(||f||_p+||g||_p\right).\end{aligned}$$

□

Teorema 1.8. *$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Vér prueba en [6]*

1.3. Los Espacios de Hilbert

Definición 1.3. *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H dotado de un producto escalar $< u, v >$ y que es completo para la norma inducida por este producto escalar $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. De aquí en adelante H designa un espacio de Hilbert.*

1.3.1. El dual de un espacio de Hilbert

Teorema 1.9 (Teorema de representación de Riesz-Frechet)**.** *Dada $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único, tal que*

$$\varphi(v) =< f, v > \forall v \in H$$

Además se verifica que

$$|f| = ||\varphi||_{H'}$$

Definición 1.4. *Se dice que una forma bilineal $B(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ es*

(i) Continua si existe una constante $c > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leqslant c|u||v|, \forall u, v \in H,$$

(ii) Coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ *tal que*

$$B(v,v) \geq \alpha|v|^2, \forall v \in H.$$

Teorema 1.10 (Stampacchia)**.** *Sea* $B(u,v)$ *una forma bilineal continua y coerciva. Sea* K *un convexo, cerrado y no vacío en* H *espacio de Hilbert. Dado* $\varphi \in H'$*, existe* $u \in K$ *único, tal que*

$$B(u, v-u) \quad \geqslant \quad < \varphi, v-u > \quad \forall v \in K.$$

Teorema 1.11 (Lax-Milgram)**.** *Sea* $B(u,v)$ *una forma bilineal, continua y coerciva. Entonces para toda* $\varphi \in H'$ *existe* $u \in H$ *único tal que*

$$B(u,v) = \langle \varphi, v\rangle \forall v \in H.$$

Además, si B *es simétrica, entonces* u *se caracteriza por la propiedad*

$$u \in H \quad y \quad \frac{1}{2}B(u,v) - \langle \varphi, u\rangle = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}B(u,v) - \langle \varphi, v\rangle\right\}$$

La demostración puede ser vista en [6]página 84.

1.4. Operadores Compactos

Sean E y F dos espacios de Banach.

Definición 1.5. *Se dice que un operador* $B \in \mathcal{L}(E,F)$ *es compacto si* $B(A_E)$ *es relativamente compacto en la topología fuerte de* F*, donde* $A_E = \{x \in E; ||x|| \leqslant 1\}$*. Se designa por* $K(E,F)$ *el conjunto de los operadores compactos y se escribe* $K(E)$ *en lugar de* $K(E,E)$.

Teorema 1.12. *El espacio* $K(E,F)$ *es un subespacio vectorial cerrado de* $\mathcal{L}(E,F)$ *(para la norma* $|| \quad ||_{L(E,F)}$.

Vér en [6]pág 89.

Definición 1.6. *Se dice que un operador* $B \in \mathcal{L}(E, F)$ *es de rango finito si* $dim R(B) < \infty$*, donde* $R(B)$ *es el rango de* $B(E)$*. Es claro que todo operador de rango finito es compacto.*

Corolario 1.2. *Sea* (B_n) *una sucesión de operadores compactos continuos de rango finito de* E *en* F *y sea* $B \in \mathcal{L}(E, F)$ *tal que* $||B_n - B||_{L(E,F)} \to 0$*. Entonces* $B \in K(E, F)$*.*

Proposición 1.13. *Sea* E, F *y* G *tres espacios de Banach. Si* $B \in \mathcal{L}(E, F)$ *y* $S \in K(F, G)$*, entonces*

$$(S \circ B) \in K(E, G)$$

1.5. Espectro de un Operador Compacto

Definición 1.7. *Sea* $B \in \mathcal{L}(E, E)$*. El conjunto resolvente es*

$$\rho(B) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (B - \lambda I) \text{ es biyección de } E \text{ sobre } E\}$$

El espectro $\sigma(B)$ *es el complementario del conjunto resolvente,* $\sigma(B) = \mathbb{R} - \rho(B)$*.*
Se dice que λ *es valor propio y se escribe* $\lambda \in VP(B)$ *si* $N(B - \lambda I) \neq 0$*; donde* $N(T - \lambda I)$ *es el espacio propio asociado a* λ*.*

Proposición 1.14. *El espectro* $\sigma(B)$ *es un conjunto compacto de* $\mathbb{R}$

$$\sigma(B) \subset [- \parallel B \parallel, \parallel B \parallel].$$

Excepto, si $dim E < \infty$ *entonces* $VP(B) = \sigma(B)$*.*

Teorema 1.15. *Sea* $B \in K(E)$*, con dim* $E = \infty$*. Entonces se tiene*

(i) $0 \in \sigma(B)$

(ii) $\sigma(B) - \{0\} = VP(B) - \{0\}$

(iii) Una de las siguientes situaciones

o bien $\sigma(B) = \{0\}$,

o bien $\sigma(B) - \{0\}$ *es finito,*

o bien $\sigma(B) - \{0\}$ *es una sucesión que tiende a cero.*

Para la prueba de la proposición y el teorema anterior Vér [6] páginas 94,95.

Lema 1.16. *Sea* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de números reales distintos tal que*

$$\lambda_n \to \lambda$$

y $\lambda_n \in \sigma(B) - \{0\}$ *para todo* n, *entonces* $\lambda = 0$.
Dicho de otro modo, todos los puntos de $\sigma(B) - \{0\}$ *son aislados.*

1.5.1. Descomposición espectral de los operadores compactos auto-adjuntos

De aquí en adelante supongamos que $E = H$ *es un espacio de Hilbert y también que* $B \in \mathcal{L}(H)$; *recordando al espacio* H *y* H' *se puede considerar que* $B^* \in \mathcal{L}(H)$.

Definición 1.8. *Se dice que un operador* $B \in \mathcal{L}(H)$ *es auto-adjunto si* $B^* = B$, *es decir,*

$$\langle Bu, v\rangle = \langle u, Bv\rangle \ \forall u, v \in H.$$

Proposición 1.17. *Sea* $B \in \mathcal{L}(H)$ *un operador auto-adjunto. Sean*

$$m = \inf_{\substack{u\in H\\ |u|=1}} \langle Bu, v\rangle, \qquad M = \sup_{\substack{u\in H\\ |u|=1}} \langle Bu, v\rangle.$$

Entonces el espectro de B, $\sigma(B) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(B)$ *y* $M \in \sigma(B)$.

Definición 1.9. *Se llama base Hilbertiana a toda sucesión* (e_n) *de elementos de* H *tales que* *(i)* $|e_n| = 1\ \forall n,\ \langle e_m, e_n\rangle = 0\ \forall m, n,\ m \neq n$

(ii) El espacio vectorial generado por los (e_n) *es denso en* H*.*

Teorema 1.18. *Supongamos que* H *es separable. Sea* B *un operador compacto y auto-adjunto. Entonces* H *admite una base Hilbertiana formada por vectores propios de* B*.*

Teorema 1.19 (Teorema espectral para operadores compactos auto-adjuntos)**.** *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $K : H \longrightarrow H$ *un operador compacto auto-adjunto. Entonces existe un conjunto* $\{\phi_i; i = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ *tal que*

(i) Existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *y* $\phi_i \in H$*; con* $i \in I \subset \mathbb{Z} - \{0\}$ *tales que* $K(\phi_i) = \lambda_i \phi_i$*.*

(ii) El conjunto $\{\phi_i; i \in I\}$ *es un conjunto ortonormal.*

(iii) Si $\{\lambda_i; i \in I \cap \mathbb{N}\}$ *es finito (respectivamente el conjunto* $\{\lambda_i; i \in I \cap (-\mathbb{N})\}$*) entonces* $\lambda_i \longrightarrow 0$ *(respectivamente* $\lambda_{-i} \longrightarrow 0$*) .*

(iv) Si $I = \mathbb{Z} - \{0\}$*, el conjunto* $\{\phi_i; i \in I\}$ *es completo en el complemento ortogonal de* $\mathcal{N} = \{u \in H; K(u) = 0\}$*.*

A continuación se hará un recorrido por los espacios de Sobolev.

1.6. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev son espacios vectoriales cuyos elementos son funciones definidas en espacios euclideanos $n-$*dimensionales* $\mathbb{R}^N$ *y sus derivadas parciales satisfacen ciertas condiciones de integrabilidad. En esta parte se hace un estudio sin prueba a los espacios de Sobolev de un orden entero y concretando algunas de sus propiedades más relevantes, muchas de esas propiedades de los espacios de Sobolev están definidas en un dominio arbitrario* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *y además son subespacios vectoriales de diversos espacios de Lebesgue* $L^p(\Omega)$*.*

1.6.1. El espacio de Sobolev $W^{1,p}$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *y* $p \in \mathbb{R}$ *con* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Definición 1.10. *Los espacios de sobolev* $W^{1,p}$ *se definen como:*

$$W^{1,p} = \Big\{ u \in L^p(\Omega); \quad \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega g\varphi; \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \Big\}$$

Se notan los espacios $H^m(\Omega) = W^{m,2}, m \in \mathbb{Z}$ *en particular* $H^1(\Omega) = W^{1,2}$.

Definición 1.11. *Si* $u \in W^{1,p}(\Omega), 1 \leqslant p \leqslant \infty$ *Con norma,*

$$||u||_{W^{1,p}} = \Big(||u||_{L^p} + ||\nabla u||_{L^p} \Big)$$

Si $p = \infty$

$$||u||_{1,\infty} = \sup\big(|u| + |\nabla u|\big).$$

Notación 1.3. *El espacio* $H^1(\Omega)$ *está dotado del producto escalar*

$$< u, v >_{1,(\Omega)} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2} = \int_\Omega uvdx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u \partial v}{\partial x_i \partial x_i} dx \forall u, v \in H^1(\Omega);$$

Y se tiene la norma asociada dada como:

$$||u||_{H^1,(\Omega)} = \Big(||u||_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \Big|\Big| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|\Big|_{L^2}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.6.1}$$

Pero recordemos que dadas dos normas $||x||_1, ||x||_2$ *en un espacio vectorial* E*, se dice que las dos normas son equivalentes si las topologías inducidas en* E *por las normas son equivalentes, es decir si la aplicación lineal continua* $i : (E, ||x||_1) \to (E, ||x||_2)$ *es un homeomorfismo lineal. Tomado en [10] pág 20. Y por [6] pág 121 entonces, la norma asociada (1.6.1)es equivalente a la norma de* $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposición 1.20. *El espacio* $W^{1,p}(\Omega)$. *es un espacio de Banach para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Demostración. 1. $||.||_{W^{1,p}}$ es una norma.
Es claro que

$$||\lambda u||_{W^{1,p}} = |\lambda|||u||_{W^{1,p}}$$

y

$$||u||_{W^{1,p}} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad u = 0 \quad c.t.p.$$

Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, por la desigualdad de Minkowski 1.7,

$$\begin{aligned}
||u+v||_{W^{1,p}} &= \Big(||u+v||_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N}\Big|\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|\Big|_{L^p}^p\Big)^{1/p} \\
&\leqslant \Big(||u||_{L^p}^p + ||v||_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N}\Big|\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|\Big|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N}\Big|\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|\Big|_{L^p}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \Big(||u||_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N}\Big|\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|\Big|_{L^p}^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(||v||_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N}\Big|\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|\Big|_{L^p}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= ||u||_{W^{1,p}} + ||v||_{W^{1,P}}
\end{aligned}$$

2. Ahora, $W^{1,p}(\Omega)$ es completo.
Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de Cauchy en el espacio $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}(1 \leqslant i \leqslant N)$ son suciones de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ es completo, existen $u, u_1, \dots u_N \in L^p(\Omega)$. Tal que

$$u_n \to u \in L^p(\Omega)$$

y

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to u_i \quad \text{en} \quad L^p(\Omega) \quad (i = 1, \dots, N)$$

3. Veamos que

$$u \in W^{1,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i(i, \dots, N) \tag{1.6.2}$$

Sea $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\phi dx\\ &= \int_\Omega u_i\phi dx\end{aligned}$$

Luego (1.6.2) es verdadero. Usando 2 tenemos que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$,que era lo que se quería probar. □

Definición 1.12. *Sean* $(u_n)n_{n\in\mathbb{N}}, u \in W^{1,p}(\Omega)$

1. Diremos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* u *en* $W^{1,p}(\Omega)$*, y se nota como*

$$u_n \to u \quad en \quad W^{1,p}(\Omega),$$

si

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{1,p} = 0$$

2. Diremos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente a* u *en* $W^{1,p}(\Omega)$*, y se notará como*

$$u_n \rightharpoonup u \quad en \quad W^{1,p}(\Omega),$$

si

$$u_n \rightharpoonup u \quad enL^p(\Omega) \quad y \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} en \quad L^p(\Omega)\forall 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Proposición 1.21. $W^{1,p}(\Omega)$ *es reflexivo para* $1 < p < \infty$ *y separable para* $1 \leqslant p < \infty$*. El espacio* $H_0^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert separable.*

Demostración. Primero probemos que $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$. En efecto, el espacio producto $E = \big(L^p(\Omega)\big)^{N+1}$ es reflexivo. El operador $T : W^{1,p}(\Omega) \to E$ definido por $Tu = (u, \nabla u)$ es una isometría de $W^{1,p}(\Omega)$ en E; por lo tanto $T(W^{1,p}(\Omega))$ es un subespacio cerrado de E, resulta entonces que $T(W^{1,p}(\Omega))$ es reflexivo y por tanto también $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo. Por proposición [III -17] en [6]

Ahora probemos que $W^{1,p}(\Omega)$ es separable para $1 \leqslant p < \infty$. Como el espacio $E = \big(L^p(\Omega)\big)^{N+1}$ es separable, ya que conjunto finito de separables es separable, entonces $T(W^{1,p}(\Omega))$ es separable por consiguiente $W^{1,p}(\Omega)$ es separable. □

1.6.2. El Espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definición 1.13. *Sea* $1 \leqslant p < \infty : W_o^{1,p}(\Omega)$ *designa la clausura de* $C_c^1(\Omega)$ *en* $W^{1,p}(\Omega)$. *Se nota*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ *dotado de la norma inducida por* $W^{1,p}(\Omega)$, *y el espacio* H_0^1 *esta dotado del producto escalar inducido por* $H^1(\Omega)$. *También se tiene que el espacio* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach separable, es reflexivo si* $1 < p < \infty$; *y el espacio* $H_0^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert con el producto escalar del espacio* $H^1(\Omega)$.

Nota 1.22. *Se comprueba con ayuda de una sucesión regularizante que* $C_c^\infty(\Omega)$ *es denso en* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *es decir se puede utilizar indistintamente* $C_c^\infty(\Omega)$ *y* $C_c^1(\Omega)$ *en la definición de* $W_0^{1,p}(\Omega)$

Proposición 1.23 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Supongamos que* Ω *es un abierto acotado. Entonces existe una constante* C *(dependiente de* Ω *y de* p*) tal que*

$$||u||_p \leqslant C||\nabla u||_p$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$.
En otras palabras, significa que la cantidad de normas $||u'||_{L^p}$ *en* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *es una norma equivalente a la norma del espacio* $W^{1,p}$.
Veamos ahora otros resultados importantes en los esapacios de Sobolev que tienen aplicaciones en el análisis.

Teorema 1.24 (Rellich - Kondrachov)**.** *Sea el abierto* Ω *acotado de clase* C^1. *Se verifica*

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & p < N \text{ entonces} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & \forall q \in [1, p^*), \text{ donde } \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, \\ \text{Si} & p = N \text{ entonces} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & \forall q \in [1, \infty) \\ \text{Si} & p > N \text{ entonces} & W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}), & \end{array}$$

Con inyecciones compactas [1]
Ver prueba en [6] pág 169.

[1]En particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ con inyección compacta para todo p.

Si queremos ver el comportamiento de las soluciones a problemas de ecuaciones diferenciales lineales del tipo $X' = AX$, donde A es la matriz de tamaño $n \times n$ real cuando $t \to \infty$, el saber que el polinomio característico tiene sus raíces en $\mathbb{C}$, no sirve de mucho. Diversas teorías han surgido para atacar este tipo de problemas, una de ellas es la teoría de Grado; deteniéndonos ahora en el grado de Brouwer. Los resultados que se presentan a continuación acerca del grado de Brouwer sin prueba están en: notas de clase del Profesor Francisco Caicedo [11]que aún no han sido publicadas, y en [19].

1.7. Grado de Brouwer

Ahora daremos la definición de grado para funciones continuas definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$; luego extenderemos esta definición a espacios normados de dimensión finita y por último desarrollaremos algunas de las propiedades y aplicaciones de esta teoría.

Definición 1.14. *Sean Ω un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}^n$ valor regular de $f|_\Omega$ y $a \notin f(\partial(\Omega))$, definimos*

$$d(f, \Omega, a) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} sign \ (\det(f'(x)))$$

con a entero. $d(f, \Omega, a)$ es un entero llamado el grado (de Brouwer) de f, respecto a Ω y a.
Este número está bien definido gracias a que bajo las condiciones de la definición $f^{-1}(a)$ es finito. ver en [19].

Proposición 1.25. *Sea Ω un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$,*

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n, \ f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega).$$

Si $a \in \mathbb{R}^n$ es valor regular de $f|_\Omega$ y $a \notin f(\partial(\Omega))$, entonces existe V abierto, $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$, tal que si $b \in V$, b es valor regular de $f|\Omega$, $b \notin f(\partial(\Omega))$, b no es imagen de ningún punto frontera de Ω y además

$$d(f, \Omega, a) = d(f, \Omega, b)$$

para todo $b \in V$.

La siguiente proposición es una de las más importantes de teoría del grado.

Proposición 1.26. *Sea* Ω *subconjunto abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, $f,\ g : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f, g \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ *tales que*

(i) $a \in \mathbb{R}^n$ *es valor regular de* $f|_\Omega$ *y de* $g|\Omega$,

(ii) $a \notin f(\partial(\Omega))$ *y* $a \notin g(\partial(\Omega))$,

(iii) Existe una función $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *de clase* C^∞ *tal que* $a \notin h(\partial(\Omega) \times [0,1])$, *es decir,* $a \neq h(x,s)$ *para todo* $(x,s) \in \partial(\Omega) \times [0,1]$,

(iv) $h(x,0) = f(x)$, $h(x,1) = g(x)$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$,

bajo estas hipótesis,

$$d(f,\Omega,a) = d(g,\Omega,a)$$

Proposición 1.27. *Sea* Ω *abierto acotado,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, *valor regular de* $f|_\Omega$, $a \notin f(\partial(\Omega))$. *Entonces cero es un valor regular de* $f - a$ *y*

$$d((f-a),\Omega,0) = d(f,\Omega,a).$$

Demostración. Sea $g(x) = f(x) - a$, para $x \in \overline{\Omega}$, entonces $a \notin f(\partial(\Omega))$ implica que $0 \notin g(\partial(\Omega))$, como $g^{-1}(0) = f^{-1}(a)$ y $g'(x) = f'(x)$, deducimos que

$$\begin{aligned} d(g,\Omega,0) &= \sum_{x \in g^{-1}(0) = f^{-1}(a)} sign(\det(g'(x))) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(a)} sign(\det(f'(x))) \\ &= d(f,\Omega,a). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.28. *Sea* Ω *subconjunto abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, *valor regular de* f, $a \notin f(\partial(\Omega))$, *si* a_1 *y* a_2 *son valores regulares de* $f|_\Omega$, *tales que para* $k = 1, 2$

$$\| a - a_k \| < \text{mín}\{\| f(x) - a_k \|, x \in \partial\Omega\}$$

entonces,

$$d(f, \Omega, a_1) = d(f, \Omega, a_2)$$

Definición 1.15. *Sea* Ω *subconjunto abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $a_1 \in \mathbb{R}^n$, *valor regular de* $f|_\Omega$, $a \notin f(\partial(\Omega))$, *tales que*

$$\| a - a_1 \| < \text{mín}\{\| f(x) - a \|,\ x \in \partial\Omega\}$$

un tal a_1 *existe, por el teorema de Sard; así podemos definir*

$$d(f, \Omega, a) = d(f, \Omega, a_1) = \sum_{x \in f^{-1}(a_1)} sign(\det(f'(x)))$$

La proposición 1.28 implica que la anterior definición tiene sentido, ya que no depende del valor regular escogido, es decir, si a_2 *es otro valor regular de* $f|_\Omega$, *tal que*

$$\| a - a_2 \| < \text{mín}\{\| f(x) - a \|; x \in \partial(\Omega)\}$$

entonces $d(f, \Omega, a_1) = d(f, \Omega, a_2)$.
Si a *es un valor regular, obtenemos, al tomar* $a_1 = a$, *que la nueva definición coincide con la anterior. Hemos quitado la condición de que* a *sea valor regular de* f. *Se pretende a continuación eliminar la condición de que* f *sea suave. La condición* $a \notin f(\partial(\Omega))$ *es ineludible.*

Proposición 1.29. *Sean* Ω *subconjunto abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *y* $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$, *tales que* $h(x, 0) = f(x)$, $h(x, 1) = g(x)$, *si* $x \in \overline{\Omega}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $a \notin h(\partial(\Omega) \times [0, 1])$, *entonces*

$$d(f, \Omega, a) = d(g, \Omega, a)$$

Proposición 1.30. *Sean* Ω *un subconjunto abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n, a \notin f(\partial(\Omega))$, *si* $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *para* $k = 1, 2$, *tales que*

$$\| f_k(x) - f(x) \| < \| f(x) - a \|$$

para todo $x \in \partial(\Omega)$, *entonces*

$$d(f_1, \Omega, a) = d(f_2, \Omega, a).$$

La proposición 1.30 permite definir grado para aplicaciones continuas.

Definición 1.16. *Sean* Ω *subconjunto abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $a \notin f(\partial(\Omega))$, $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, *cualquier función tal que*

$$\| f(x) - f_1(x) \| < \| f(x) - a \|,$$

para todo $x \in \partial(\Omega)$, *definimos*

$$d(f, \Omega, a) = d(f_1, \Omega, a). \tag{1.7.3}$$

La anterior definición tiene sentido, en efecto, la proposición 1.30 nos dice que si $f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *es otra función que satisface la ecuación 1.7.3, entonces* $d(f_1, \Omega, a) = d(f_2, \Omega, a)$.
Utilizaremos el teorema de aproximación de Weierstrass para justificar por completo que la definición anterior está bien dada. Para ello recordemos dicho teorema.

Teorema 1.31 (Weierstrass)**.** *Sea* K *subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$, $g \in C(K, \mathbb{R})$ *y* $\epsilon > 0$. *Entonces existe un polinomio* P *en* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *tal que,* $P : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *y*

$$\| g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| < \epsilon$$

para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K$.
Es decir, el conjunto de polinomios en n *variables es denso en* $C(K, \mathbb{R})$, *provisto de la norma del sup.*
Para la prueba de este teorema ver [18].
Se escoge entonces por f_1 *en la definición 1.16 cualquier función cuyas componentes sean polinomios en* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Teorema 1.32. *Sea Ω subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), a \in \mathbb{R}^n$, $a \notin f(\partial(\Omega))$, $d(f, \Omega, a) \neq 0$, entonces $f^{-1}(a) \neq 0$, es decir la ecuación $f(x) = a$ posee soluciones en Ω.*

Teorema 1.33 (Invarianza bajo homotopía)**.** *Sean Ω un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), h \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^n)$, funciones y $a \in \mathbb{R}^n$, $a \notin h(\partial(\Omega) \times [0,1])$ tales que $f(x) = h(x, 0)$, $g(x) = h(x, 1)$. Entonces*

$$d(f, \Omega, a) = d(g, \Omega, a).$$

Definición 1.17. *Un punto x para el cual $f(x) = a$ es llamado un a-punto de f. Para un dominio Ω de f, $f^{-1}(a)$ es la colección de todos los a-puntos de f en Ω.*
Las anteriores propiedades del grado, son bastante útiles para estimar los lugares donde encuentran, en caso de tenerlos, los a-puntos de una función. Esto porque si el grado es distinto de cero, puede que sea posible dividir el dominio en conjuntos sobre los cuales también se pueda calcular el grado y consecuentemente descubrir en cuales de estas divisiones el grado es distinto de cero.

1.8. Aplicaciones de la teoría de grado de Brouwer

Teorema 1.34 (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.** *Sean $B = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x \| \leq 1\}$ y $F \in C(B, B)$, es decir, F continua de B en B. Entonces existe un punto $a \in B$, tal que $F(a) = a$.*

Teorema 1.35 (Teorema de escisión)**.** *Sea Ω un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f \in (\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, tal que $a \notin f(\partial(\Omega))$, $d(f, \Omega, a) \neq 0$, $W \subset \Omega$ abierto, $a \notin f(\partial(W))$. Entonces*

$$d(f, \Omega, a) = d(f, W, a) + d(f, \Omega - \overline{W}, a).$$

1.9. Índice local

Si x_0 *es un* $a-$*punto aislado (es decir,* $f(x) = a$*), existe un subconjunto* $W \subseteq \Omega$ *abierto tal que* $a \notin f(\overline{W})$*, por lo tanto al adicionar en el teorema de escisión la hipótesis* $a \notin f(W)$ *entonces* $d(f, W, a) = 0$ *y por lo tanto la consecuencia del teorema 1.35 sería* $d(f, \Omega, a) = d(f, \Omega - \overline{W}, a)$*; esta transformación en el teorema de escisión, conocida como escisión para compactos, introduce la idea de índice de una solución aislada de la ecuación* $f(x) = a$.

Si $U_1, U_2, \in \Omega$ *son vecindades abiertas del* $a-$*punto aislado* x_0*, que no contienen otro* $a-$*punto de* f*,* $a \notin f(U_1 \cup U_2)$ *luego por la propiedad de escisión para compactos* $d(f, U_1 \cup U_2, a) = d(f, U_k, a)$ *para* $k = 1, 2$*. Esto induce la siguiente definición.*

Definición 1.18. *Suponga que* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *con* Ω *subconjunto abierto y acotado de* $\mathbb{R}^n$ *y* x_0 *un* $a-$*punto aislado de* f *en* Ω*. Sea* $\mathcal{U}$ *la colección de todas las vecindades abiertas de* x_0 *que no contienen otro* $a-$*punto de* f*. Se define el índice de* f *en* x_0 *con respecto a* a *como el valor común* $d(f, U, a)$ *para algún* $U \in \mathcal{U}$*; el índice se denota como* $i(f, x_0, a)$.

Proposición 1.36. *Supongase que* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *con* Ω *subconjunto abierto y acotado de* $\mathbb{R}^n$ *y* $a \in \mathbb{R}^n$*. Si* $a \notin f(\partial\Omega)$ *y* $f^{-1}(a)$ *es finito, entonces*

$$d(f, \Omega, a) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} i(f, x, a).$$

Demostración. Sea $f^{-1}(a) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ y supongase que V_i son vecindades abiertas disyuntas de x_i tales que $d(f, V_i, a) = i(f, x_i, a)$; al escribir el conjunto Ω como $\cup V_i \cup (\Omega - \cup V_i)$, el resultado se sigue fácilmente usando primero la propiedad de descomposición del dominio y luego el teorema de escisión. □

Proposición 1.37. *Si* $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$*,* $x \in f^{-1}(a)$ *y* $J_f(x) \neq 0$*, entonces* $i(f, x, a) = (-1)^k$*, donde* k *es el número de valores propios no negativos de* $f'(x)$ *(contando multiplicidad algebraica).*

Demostración. El operador lineal $f'(x)$ es invertible, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de $f'(x)$ (no necesariamente distintos), entonces $J_f(x) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Ya que los valores propios complejos ocurren en pares conjugados, entonces

$$\text{sign } J_f(x) = (-1)^k.$$

Por la proposición 1.36 se tiene que x es un $a-$punto aislado, por lo tanto, $i(f, x, a)$ está definido como sign $J_f(x)$. $\square$

1.10. Grado de Leray-Schauder

Extenderemos ahora la teoría estudiada anteriormente para funciones definidas sobre subconjuntos abiertos acotados de espacios de Banach de dimensión infinita, ya que Teorema del punto fijo de Brouwer falla en espacios de dimensión infinita por que los abiertos dejan de ser compactos;
Supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio lineal normado,* $D \subset X$, D *abierto y acotado,* $p \in X$. *Deseamos definir un entero* $d(\phi, D, p)$ *para una clase de funciones* $\phi : \overline{D} \longrightarrow X$ *de tal forma que satisfaga las siguientes propiedades:*

1. $d(I, D, p) = 1$ $(p \in D)$,

2. *si* $d(\phi, D, p) \neq 0$ *entonces* $\phi(x) = p$ *para algún* $x \in D$,

3. *si* $h_t(x)$ *es una homotopía con* $p \notin h_t(\partial(\Omega))$ *para* $0 \leq t \leq 1$, *entonces* $d(h_t, D, p)$ *es independiente de* t.

En espacios de dimensión finita, el grado está definido para funciones continuas; en dimensión infinita, será necesario poner más condiciones sobre estas funciones, por lo tanto se hará sobre una subclase particular de $C(\overline{D})$.
En adelante, consideraremos funciones de la forma $I-T$, *donde* I *es la función identidad y* T *es un operador compacto.*

Definición 1.19. *Sea E un espacio de Banach y $D \subset X$. Decimos que el operador $T : D \rightarrow X$ es compacto si es continuo y además $T : \overline{D} \longrightarrow X$ es un subconjunto compacto de X.*
La técnica para definir el grado de Leray-Schauder consiste en aproximar T mediante operadores de rango finito.

Teorema 1.38. *Supongamos que E y F son espacios de Banach, M subconjunto acotado de E y $T : M \longrightarrow F$ compacto. Dado $\epsilon > 0$, existe una aplicación continua $T_\epsilon : M \longrightarrow F$ cuyo rango $T_\epsilon(M)$ es de dimensión finita y*

$$\| T(u) - T_\epsilon(u) \| < \epsilon, \qquad (u \in M).$$

Ver demostración [19]

Ahora, si tomamos X espacio lineal normado, $D \subset X$ abierto y acotado, $p \in X$. Consideramos $\phi = I - T$, donde $T : \overline{D} \longrightarrow X$ es compacto ya que podemos encontrar una aplicación T_ϵ la cual aproxime a T y tenga rango de dimensión finita, nos es posible definir $d(\phi, D, p)$ en términos del grado de $I - T_\epsilon$ relativo a un subconjunto apropiado de D de dimensión finita.
Para continuar con el desarrollo de nuestra idea es necesario el siguiente lema. Si $m < n$, $\mathbb{R}^m$ puede ser considerado como $\mathbb{R}^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n; x_{m+1} = x_{m+2} = \cdot = x_m = 0\}$. En el siguiente lema, ρ denota la distancia en $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.39. *Supongamos que $m \leq n$, D un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $\phi \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^m)$. Sea $\psi : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\psi(x) = x + \phi(x)$, $(x \in \overline{D})$. Si $D^m = \mathbb{R}^m \cap D$ y χ es la restricción de ψ a $\mathbb{R}^m \cap \overline{D}$. Tomando $p \in \mathbb{R}^m - \psi(\partial(\Omega))$, entonces*

$$d(\psi, D, p) = d(\chi, D^m, p).$$

En adelante ρ denotará la distancia inducida por la norma en χ. Siempre supondremos que $p \notin \phi(\partial(D))$.

Para dar la definición de grado de Leray-Schauder es necesario seguir varios pasos. Recordemos que considerando la aplicación $\phi : \overline{D} \longrightarrow \chi$ *de la forma* $\phi = I - T$*, donde* T *es compacto.*

(a) *Tomemos* $r = \rho(p, \phi(\partial(D)))$ *es decir,*

$$r = \text{ínf}\{\parallel p - \phi(x) \parallel; x \in \partial(D)\}$$

entonces $r > 0$*; si no lo fuera, existiría una sucesión* (x_n) *en* $\partial(D)$ *tal que* $\phi(x_n) \longrightarrow p$ *cuando* $n \to \infty$*. El conjunto* $T(x_n)$ *es relativamente compacto; por lo tanto existe una subsucesión convergente de* $(T(x_n))$*. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que*

$$(T(x_n) \longrightarrow y)$$

así $y \in \overline{T(D)}$ *y,* $x_n = T(x_n) + \phi(x_n) \longrightarrow y + p$ *cuando* $n \to \infty$*.*

Y, como $x_n \in \partial(\Omega)$*, que es un conjunto cerrado,* $y+p \in \partial(D)$*. Pero por continuidad*

$$Y = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(Y + p)$$

esto implica que $\phi(Y + p) = p$*, es decir,* $p \in \phi(\partial(D))$ *lo cual es una contradicción, así que* $r > 0$*.*

(b) *Tomemos* $\epsilon > 0$*, con* $0 < \epsilon < r$*. Usando el teorema 1.38 existe una aplicación* $T_\epsilon : \overline{D} \longrightarrow \chi$ *con rango de dimensión finita tal que*

$$\parallel T(x) - T_\epsilon(x) \parallel < \epsilon, \qquad (x \in \overline{D}).$$

Sea G_ϵ *el espacio generado por* $T_\epsilon(\overline{D})$ *y* P*:*

$$G_\epsilon = gen\{T_\epsilon(\overline{D}), p\}.$$

Sea $D_\epsilon = D \cap G_\epsilon$ *y* $\phi_\epsilon(x) = x - T_\epsilon(x), (x \in \overline{D})$*. Entonces* D_ϵ *es un subconjunto abierto acotado de* G*; además,* $\partial_\epsilon(D_\epsilon) \subset \partial(D)$ *donde* $\partial_\epsilon(D_\epsilon)$ *es la frontera de* D_ϵ *en* G_ϵ*. Podemos ver que* $\phi_\epsilon(\overline{D}_\epsilon) \subset G_\epsilon$*, y para* $x \in \partial(D)$*,*

$$\parallel x - T_\epsilon(x) - p \parallel \geq \parallel x - T(x) - p \parallel - \parallel T(x) - T_\epsilon(x) \parallel > r - \epsilon > 0$$

así que $d(\phi_\epsilon, D_\epsilon, p)$ *está definido; donde* ϕ_ϵ *es la restricción de* ϕ *a* D_ϵ*.*

1.11. Propiedades de la teoría de grado de Leray-Schauder

A continuación extenderemos algunas de las propiedades de grado de Brouwer a grado de Leray-Schauder.

Tengamos en cuenta que p, D, ϕ y T seguirán siendo tomados como se hizo anteriormente. Si $M \subset X$, tomaremos $k(M)$ como el conjunto de aplicaciones compactas de M en X y

$$k_1(M) = \{\phi : \phi = I - T,\ T \in k(M)\}$$

es decir, $k_1(M)$ es el conjunto de las perturbaciones compactas de la identidad en M.

Teorema 1.40. *Si $p \in D$, entonces $d(I, D, p) = 1$, si $p \notin \overline{D}$, entonces $d(I, D, p) = 0$.*

Demostración. Tomaremos V como en la definición , como $p \in V$ si hacemos $\overline{T} = 0$ el resultado es inmediato ya que en dimensión finita se tiene que $d(I, V, p) = 1$ si $p \in V$ y $d(I, V, p) = 0$ si $p \notin \overline{V}$. $\square$

Teorema 1.41 (Existencia)**.** *Sean $\phi \in k_1(\overline{D})$ y $d(\phi, D, p) \neq 0$; entonces existe $x \in D$ tal que $\phi(x) = p$.*

Definición 1.20. *Dado un subconjunto M de X, supongamos que h es una aplicación definida en el intervalo $[0, 1]$ a $k(M)$. Decimos que h es una homotopía de transformaciones compactas en M si dado $\epsilon > 0$ y un subconjunto acotado L de M, existe $\delta(\epsilon, L) > 0$ tal que*

$$\| (h(t))(x) - (h(s))(x) \| < \epsilon,\ \ (x \in L, |t - s| < \delta).$$

Teorema 1.42 (Invarianza bajo homotopía)**.** *Sea D un subconjunto abierto, acotado de X, y $h(t)$ una homotopía de una transformación compacta en $\overline{D}$ tal que si $\phi_t = I - h(t)$,*

$$p \notin \phi_t(\partial(D))\ (0 \leq t \leq 1)$$

entonces $d(\phi_t, D, p)$ es independiente de $t \in [0, 1]$.

Teorema 1.43. *Supongamos que* $\phi \in k_1(\overline{D}), \psi \in k_1(\overline{D})$ *y* $\phi = \psi$ *en* $\partial(D)$. *Entonces, si* $p \in \phi(\partial(D))$,

$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p).$$

Demostración. Sea $\phi = I - T_1$ y $\psi = I - T_2$. Consideremos la homotopía $\phi_t = I - h(t)$ donde

$$h(t)(x) = (1-t)T_1(x) + tT_2(x) \ (x \in \overline{D},\ 0 \leq t \leq 1)$$

Claramente $h(t)$ es una homotopía de una transformación compacta en $\overline{D}$, y si $x \in \partial(D)$, entonces

$$\phi_t(x) = (1-t)\phi(x) + t\phi(x).$$

Como $p \notin \phi(\partial(D))$, el resultado se sigue del teorema 1.42. □

Teorema 1.44. *Supongamos que* $\phi \in k_1(D), p \notin \phi(\partial(D))$ *y que* $q \in X$; *sea* $\phi_1(x) = \phi(x) - q \ (x \in \overline{D})$. *Entonces*

$$d(\phi, D, p) = d(\phi_1, D, p-q).$$

Teorema 1.45. *Supongamos que* $\phi \in k_1(\overline{D})$ *y* $p \notin \phi(\partial(D))$. *Si* $\psi(x) \in k_1(\overline{D})$ *y*

$$\| \phi(x) - \psi(x) \| < r = \rho(p, \phi(\partial(D))) \ (x \in \overline{D}).$$

Entonces $p \notin \psi(\partial(D))$ *y*

$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p).$$

Teorema 1.46. *Supongamos que* $\phi \in k_1(\overline{D})$, *entonces* $d(\phi, D, p)$ *es el mismo para todo* p *en la misma componente conexa de* $\complement(\phi(\partial(D)))$

Demostración. Tomemos la bola $B(p, \epsilon)$ contenida en $C\phi(\partial(D))$. Tomando $q \in B(p, \epsilon)$ entonces por el teorema anterior 1.45

$$d(\phi, D, q) = d(\phi, D, p)$$

por el teorema

$$d(\phi - (q-p), D, q) = d(\phi, D, p)$$

para ϵ suficientemente pequeño. Por lo tanto la función $P \longrightarrow d(\phi, D, p)$ es continua en $C\phi(\partial(D))$, con valor entero; esta es por lo tanto constante en $C\phi(\partial(D))$.

Las demostraciones de los siguientes teoremas se omitirán, las cuales pueden consultarse en [19].

Teorema 1.47 (Descomposición del dominio)**.** *Supongamos que* $\phi \in k_1(\overline{D})$ *y* $p \notin \phi(\partial(D))$. *Si* D *es unión de subconjuntos disyuntos abiertos* D_i $(i = 1, 2, \ldots, , n)$ *entonces*

$$d(\phi, D, p) = \sum_i d(\phi, D_i, p).$$

Teorema 1.48 (Escisión)**.** *Supongamos que* $\phi \in k_1(\overline{D})$ *y* $p \notin \phi(\partial(D))$. *Si* $K \subset \overline{D}$ *es cerrado y* $p \notin \phi(\partial(K))$, *entonces*

$$d(\phi, D, p) = d(D - K, p).$$

Teorema 1.49 (Multiplicación)**.** *Supongamos que* $\phi \in k_1(\overline{D})$ *y* M *es un subconjunto abierto y acotado conteniendo* $\phi(\overline{D})$. *Tomemos* $\Delta = M - \phi(\partial(D))$ *y sea* Δ_i $(i = 1, 2, \ldots,)$ *las componentes de* Δ. *Si* $\psi \in k_1(\overline{M})$ *y* $P \notin \psi(\phi(\partial(D))) \cup \psi(\partial(M))$, *entonces*

$$d(\psi \circ \phi, D, p) = \sum_j d(\psi, \Delta_j, p) d(\phi, D, \Delta_j).$$

Teorema 1.50 (Homeomorfismo)**.** *Supongamos que* D *es un subconjunto acotado de un espacio de Banach* X *y que* $\phi \in k_1(\overline{D})$ *es una aplicación uno a uno. Si* $p \in \phi(D)$, *entonces*

$$d(\phi, D, p) = \pm 1.$$

CAPÍTULO 2

Soluciones Débiles a un Problema de Dirichlet

En las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, los puntos críticos corresponden a las soluciones débiles de la ecuación, haciendo que la teoría de puntos críticos sea fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales.
Si se considera un problema elíptico semilineal con valores en la frontera

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = g, & en \quad \Omega \\ u = 0, & en \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.0.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *es un abierto acotado,* $\partial\Omega$ *la frontera de* Ω, $(-\Delta)$ *el operador de Laplace,*$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es diferenciable con derivada continua y* $g \in L^2(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$. *Una solución débil al problema de Dirichlet 2.0.1 es una función* $u \in H_0^1(\Omega)$, *que a continuación miraremos.*

2.1. Soluciones débiles

El espacio de Sobolev, con su norma definida y algunas de sus propiedades resulta ser una herramienta fundamental para el desarrollo de la teoría variacional; específicamente se considera el espacio $L^2(\Omega) \times H_0^{1,2}(\Omega)$ *dotado del producto interior*

$$\langle (f,u),(g,v)\rangle = \langle f,g\rangle_{0,2} + \langle u,v\rangle_{1,2}$$

el cual es también un espacio de Hilbert, como de igual manera lo son tanto L^2 *como* $H_0^{1,2}$.

Sea $B : H_0^{1,2}(\Omega) \times H_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *el funcional definido por*

$$B[\phi,\psi] = \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha \phi D^\beta \psi + \int_\Omega \phi\psi$$

donde $a_{\alpha\beta}(x),\ c(x) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ *(mientras no haya ambigüedad, así como en la ecuación anterior, se suprimirá el símbolo* dx *y la dependencia de los elementos, es decir, por ejemplo* $\psi(x) \equiv \psi$*; también puede verse que este funcional resulta ser una forma bilineal continua (por la densidad de* $C_0^\infty(\Omega)$*) en* $H_0^{1,2}(\Omega)$*, la forma bilineal podría definirse solamente sobre el espacio* $C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$ *con la norma de* $H_0^{1,2}(\Omega)$ *y extenderse continuamente). Conjuntamente con la notación anterior se define,*

$$J : L^2(\Omega) \times H_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que denotará el funcional lineal definido por

$$J(g,u) = \frac{1}{2} B[u,u] - \int_\Omega F(u) + \int_\Omega gu$$

donde $F(\zeta) = \int_0^\zeta f(s)ds$*. Finalmente* $J(g) : H_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *denotará el funcional definido por* $J(g)(\phi) = J(g,\phi)$ *para* $\phi \in H_0^{1,2}(\Omega)$*, con* g *fijo.*

Definición 2.1. *Un elemento* $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$*, se dice solución débil de (2.0.1) si*

$$B[u,\phi] - \int_\Omega f(u)\phi = -\int_\Omega g\phi$$

para todo $\phi \in H_0^{1,2}(\Omega)$.

Lema 2.1. *El funcional J es continuo.*

Demostración. Sean g_n y g en L^2 y sean u_n y u en $H_0^{1,2}(\Omega)$, tal que (g_n, u_n) converge a (g, u). Como B y F son continuas la desigualdad

$$|J(g_n, u_n) - J(g, u)| \leq \frac{1}{2}|B[u_n, u_n] - B[u, u]| \\ + \int_\Omega |F(u_n) - F(u)| + |\langle g, u\rangle_{0,2} - \langle g_n, u_n\rangle_{0,2}| \quad (2.1.2)$$

implica que $\lim_{n\to\infty} |J(g_n, u_n) - J(g, u)| \leq \lim_{n\to\infty} |\langle g, u\rangle_{0,2} - \langle g_n, u_n\rangle_{0,2}|$.
Por la definición del producto interno, claramente $\| g_n - g \|_2 \longrightarrow 0$ y $\| u_n - u \|_{1,2} \longrightarrow 0$, luego

$$\begin{aligned} |\langle g, u\rangle_{0,2} - \langle g_n, u_n\rangle_{0,2}| &\leq |\langle g - g_n, u\rangle_{0,2}| + |\langle g_n, u - u_n\rangle_{0,2}| \\ &\leq \| g - g_n \|_2 \| u \|_2 + \| g_n \|_2 \| u - u_n \|_2 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} J(g_n, u_n) = J(g, u)$. □

Definición 2.2. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si existe una constante $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x)| \leq a(1 + |x|)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, se dice que f es sublineal.

Proposición 2.2. *Sea el problema de Dirichlet con condición de frontera (2.0.1) con f una función sublineal. $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ es una solución débil de (2.0.1) si y sólo si u es un punto crítico del funcional $J(g)$.*

Demostración. Para comprobar esta afirmación es necesario justificar la diferenciabilidad de $J(g)$, por esta razón se comprobará la existencia de sus derivadas direccionales. Sea $\phi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ entonces

$$\begin{aligned} \partial J(g)(u)(\phi) &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2t}(2tB[u, \phi] + t^2 B[\phi, \phi] + 2t\langle g, \phi\rangle_{0,2}) - \frac{1}{t}\int_\Omega (F(u + t\phi) - F(u))\right) \\ &= B[u, \phi] + \langle g, \phi\rangle_{0,2} - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega (F(u + t\phi) - F(u)); \end{aligned}$$

ya que F es un funcional de clase C^1, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega (F(u+t\phi)-F(u))dx &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega\left(\int_0^1 \langle\nabla F(u+st\phi),t\phi\rangle ds\right)dx\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega\left(\int_0^1 \frac{dF}{du}(u+st\phi)(t\phi)ds\right)dx\\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega\left(\int_0^1 \frac{dF}{du}(u+st\phi)ds\right)\phi dx\\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega\left(\int_0^1 f(u+st\phi)ds\right)\phi dx.
\end{aligned}$$

Ya que f es sublineal el teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega\left(\int_0^1 f(u+st\phi)ds\right)\phi dx=\int_\Omega\left(\int_0^1 f(u)ds\right)\phi dx=\int_\Omega f(u)\phi dx.$$

Para probar que la última integral es medible, por la desigualdad de Hölder, basta con que $f\in L^2$ y esto se tiene porque f es sublineal. Luego, se ha probado que

$$\partial J(g)(u)(\phi)=B[u,\phi]+\langle g,u\rangle_{0,2}-\int_\Omega f(u)\phi \tag{2.1.3}$$

para cada $\phi\in H_0^{1,2}(\Omega)$, claramente la anterior igualdad también implica que cada derivada direccional es continua y por lo tanto $J(g)\in C^1(H_0^{1,2}(\Omega),\mathbb{R})$. Así la ecuación (2.1.3) puede escribirse de la forma

$$\langle\nabla J(g)(u),\phi\rangle_{1,2}=B[u,\phi]-\int_\Omega f(u)\phi+\int_\Omega g\phi$$

con lo cual, si u es un punto crítico este resulta ser una solución débil.

□

Ahora consideremos un problema elíptico homogéneo lineal con valor en la frontera dado como:

$$\begin{cases}\Delta u+f(u)=0, & en\quad \Omega\\ u=0, & en\quad \partial\Omega\end{cases}\tag{2.1.4}$$

u es solución clásica de (2.1.4) si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ de tal manera que al multiplicar a ambos lados a (2.1.4) por $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ resulta

$$\int_{(\Omega)} \nabla\varphi\nabla u + \int_{(\Omega)} f(u)\varphi = 0 \tag{2.1.5}$$

y luego integrando por partes. Sea $W_0^{1,2}$ que denota la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ con la norma

$$||u||_{W_0^{1,2}} = \Big[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}}$$

como se definió en el capítulo 1.
Si $u \in W_0^{1,2}$ y satisface (2.1.5) para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces u es una solución débil de (2.1.4)
Muchas son las aplicaciones del Teorema de Paso de Montaña en las ecuaciones diferenciales elípticas semilineales con valores en la frontera, para esto veamos primero la definición de la condición de Palais Smale y luego el Teorema de Paso de Montaña.

Definición 2.3. *Condición de Palais-Smale Sea E un espacio de Banach, se dice que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisface la condición de Palais-Smale ($\mathbf{P} - \mathbf{S}$) si toda sucesión $\{u_n\} \subset E$, tal que $\{I(u_n)\}$ es acotada y $\{I'(u_n)\}$ converge a cero, posee una subsucesión convergente.*

Teorema 2.3. *(Teorema de Paso de Montaña)Sea E un espacio de Banach, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ con I que satisface la condición de Palais-Smale. Si $I(0) = 0$ existen $\alpha, \beta > 0$, $v \in E - B_\beta$, tales que $I\big|_{\partial B_\beta} \geq \alpha$, e, $I(v) \leq 0$, entonces ,I tiene un valor crítico.*

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta u + p(x, u) = 0, & en \quad \Omega \\ u = 0, & en \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Donde de igual manera $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, $\partial\Omega$ la frontera de Ω. El cual la función p satisface

(j) $p(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$

(jj) existen constantes $a_1, a_2 > 0$ *tal que*

$$|p(x,\xi)| \leqslant a_1 + a_2|\xi|^s$$

donde, $0 \leqslant s < (n+2)(n-2)^{-1}$ *y* $n > 2$

Si $n = 1$, *(j) puede ser quitado, mientras que si* $n = 2$ *es suficiente que*

$$|p(x,\xi)| \leqslant a_1 \exp \varphi(\xi),$$

donde $\varphi(\xi)\xi^{-2} \to 0$ *cuando* $\xi \to \infty$*(ver [20])*

El funcional I *asociado al problema (2.1.6) se define como:*

$$I(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u)\Big)dx, \tag{2.1.7}$$

siendo $P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt$. *Sea el espacio* $E = W_0^{1,2}$, *la clausura de* $C_0^\infty(\Omega)$ *con respecto a la norma*

$$\Big[\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + u^2 dx\big)\Big]^{\frac{1}{2}}$$

Y la desigualdad de Poincaré (1.23) nos dice que existe una constante $\mu_1 > 0$ *tal que*

$$\int_\Omega u^2 dx \leqslant \mu_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

Para todo $u \in E$. *Al aplicar el teorema (2.3) al funcional (2.1.7) en el que* $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, *los puntos críticos del funcional* I *son soluciones débiles al problema (2.1.6), en [20] pág 90 puede ser vista la prueba que (j) , (jj) se satisfacen.*
Un Lema que simplifica la verificación que I *satisfaga el Teorema de Paso de Montaña esta dado como:*

Proposición 2.4. *Sea* p *que satisface (j) y (jj),* I *el funcional definido en (2.1.7) Si* $\{u_m\}$ *es una sucesión acotada en* E *un espacio real de Banach,* $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ *tal que* $I'(u_m) \to 0$, *entonces* $\{u_m\}$ *es un precompacto en* E.

La prueba de este lema puede ser vista en [20] pág 11.

CAPÍTULO 3

Existencia de tres soluciones a un problema de Dirichlet asintóticamente Lineal

En este capítulo se estudia un problema de Dirichlet no lineal

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & en \quad \Omega \\ u = 0, & en \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.0.1}$$

donde Ω es un abierto acotado en $\mathbb{R}^N (N \geqslant 3)$ con frontera suave, Δ el operador de Laplace y f la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(0) = 0$ y también asintóticamente lineal. Sea la sucesión de valores propios $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \dots \lambda_k \leqslant \dots$ de $(-\Delta)$, con condición cero en la frontera del abierto Ω y la sucesión de funciones propias asociadas a cada valor propio $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots$; entonces mediante el siguiente teorema dado en [12] se muestra la existencia de dos soluciones de un signo(positivo, negativo respectivamente) como primera parte, y posteriormente la existencia de otra solución no trivial que cambia de signo, al problema (3.0.1), mediante la teoría de los espacios de Sobolev,los operadores compactos, el Teorema de Paso de Montaña (ver [3] , [20]), la *teoría de grado de Leray-Schauder es posible su prueba.*

Teorema 3.1. *Si $f'(0) < \lambda_1$ y $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, con k un número entero par, $k \geqslant 2$, entonces el problema (3.0.1) tiene por lo menos tres soluciones no triviales, de las cuales una es positiva, otra negativa y la tercera cambia de signo.*

Antes de la demostración primero veamos que:
La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable con la condición inicial $f(0) = 0$, además f es asintóticamente lineal, es decir

$$f'(\infty) := \lim_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{t} \in \mathbb{R}$$

Como $f'(\infty)$ es un número real entonces,

$$\forall \quad \varepsilon > 0, \exists A > 0 \quad \textit{tal que} \quad |t| > A \to \left| \frac{f(t)}{t} - f'(\infty) \right| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow$$

$$-\varepsilon \leqslant \frac{|f(t) - f'(\infty)t|}{|t|} \leqslant \varepsilon,$$

Entonces

$$|t|(|f'(\infty)| - \varepsilon) \leqslant |f(t)| \leqslant (\varepsilon + |f'(\infty)|)|t|$$

Además existe $N > 0$ tal que $|f| < N$, para todo $|t| \leq a$. Al hacer $a := \max\{N, |f'(\infty)| + \varepsilon\}$, con $0 < \varepsilon \leqslant 1$ y si se hace $\varepsilon = 1$ se tiene $|f(t)| < a(1 + |t|)$, es decir, la suposición dada implica que f es sublineal. Evidentemente la condición $f(0) = 0$ implica que $u = 0$ es una solución del problema , esta solución es conocida como la solución trivial.

Cabe anotar que la existencia de soluciones al problema de Dirichlet con condición en la frontera, ha sido ampliamente estudiada por muchos autores, entre ellos (ver [3],[4],[7], [8],...).

3.1. Existencia de dos soluciones que no cambian de signo

Sea el truncamiento $f^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *por*

$$f^+(t) := \begin{cases} f(t), & t \geqslant 0 \\ f'(0)t, & t < 0 \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Y se define $F^+(t) = \int_0^t f^+(s)ds$, f^+ *es diferenciable y por tanto continua, ya que*

$$\lim_{t \to o^+} \frac{f^+(t) - f'(0)}{t} = f'(0)$$

$$\lim_{t \to o^-} \frac{f^+(t) - f'(0)}{t} = \frac{f'(0)t}{t} = f'(0)$$

Consideremos el funcional $J^+ : H \to \mathbb{R}$ *donde* H *es el espacio de Sobolev* $H_0^1(\Omega)$, *definido por:*

$$J^+(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F^+(u) \Big) dx$$

Como $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ *y recordemos que* f *es sublineal; por lo tanto* $J^+(C^1(H, \mathbb{R})$ *y su derivada es:*

$$
\begin{aligned}
DJ^{+}(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{J(u+vt)-J(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}|\nabla(u+tv)|^2-F^{+}(u+tv)\Big)dx-\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}|\nabla(u)|^2-F^{+}(u)\Big)dx}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}|\nabla u+t\nabla v)|^2-F^{+}(u+tv)\Big)dx-\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}|\nabla(u)|^2-F^{+}(u)\Big)dx}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\Bigg[\frac{\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\big[|\nabla u|^2+2t\nabla u\nabla v)+t^2|\nabla v|^2\big]-F^{+}(u+tv)\Big)dx}{t}\\
&-\frac{\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}|\nabla(u)|^2-F^{+}(u)\Big)dx}{t}\Bigg]\\
&= \int_\Omega \nabla u\nabla v dx-\lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega\big(F^{+}(u+tv)-F^{+}(u)\big)dx}{t}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$DJ^{+}(u)v=\int_\Omega\Big(\nabla u\nabla v-f^{+}(u)v\Big)dx \quad \forall u\in H, \quad \forall v\in H \tag{3.1.3}$$

Luego una solución clásica al problema (3.0.1) es una función $u\in H_0^1(\Omega)$, *haciendo una trabajo similar visto en el capítulo 2, multiplicamos a ambos lados* $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ *en (3.0.1)*

$$\int_\Omega \varphi\Delta u+f(u)\varphi=\int_\Omega\varphi\Delta u+\int_\Omega f(u)\varphi \tag{3.1.4}$$

E integrando se verifica

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla u+\int_\Omega f(u)\varphi=0 \tag{3.1.5}$$

Entonces u es solución débil de (3.0.1). Si f *es sustituido por* f^{+} *se obtiene*

$$\int_\Omega\Big(\nabla u\nabla\varphi-f^{+}(u)\varphi\Big)=0 \tag{3.1.6}$$

si y sólo si u es punto crítico de J^+; para mostrar la existencia de este punto crítico hacemos uso del teorema (2.3.)
Se tiene que $f(0) = 0, J^+(0) = 0$ entonces se puede concluir que la primera parte se cumple, ahora miremos que las siguientes condiciones se tienen.

Lema 3.2. *Existen $\alpha > 0$ y $\rho > 0$ tales que*

$$||u||_H = \rho \Rightarrow J^+(u) \geqslant \alpha$$

Demostración. Como $f'(0) < \lambda_1$ existen $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que, si

$$-\varepsilon \leqslant \frac{f^+(t)}{t} - f'(0) \leqslant \varepsilon \tag{3.1.7}$$

$$-\varepsilon + f'(0) \leqslant \frac{f^+(t)}{t} \leqslant \varepsilon + f'(0) \tag{3.1.8}$$

$$f^+(t) \leqslant (\lambda_1 - \varepsilon)t \tag{3.1.9}$$

Y por tanto integrando a ambos lados se obtiene

$$F^+(\zeta) = \int_0^\zeta f^+(t)dt \leqslant (\lambda_1 - \epsilon)\frac{\zeta^2}{2}, \quad \forall \zeta \in (-\delta, \delta) \tag{3.1.10}$$

Como f es sublineal, existen constantes $a_1 > 0, a_2 > 0$ tal que, si $\eta > 0$ entonces,

$$|F^+(\zeta)| \leqslant \int_o^\zeta (a_1 + a_2|t|)dt \leqslant + \left(\frac{a_1}{2^{\delta\eta}} + \frac{a_2}{\delta^{\eta+1}}\right)|\zeta|^{2+\eta} =: M(\delta, \eta)|\zeta| \geqslant \delta. \tag{3.1.11}$$

donde $u \in H$. y se definen los conjuntos

$A_1 := x \in \Omega,$ tal que $|u(x)| < \delta$ y $A_2 := x \in \Omega,$ tal que $|u(x)| \geqslant \delta$.
Usando (3.1.10) y (3.1.11) se tiene que

$$\begin{aligned} J^+(u) =& \frac{1}{2}||u||_H^2 - \int_{A_1} F^+(u)dx - \int_{A_2} F^+(u)dx \\ \geqslant& \frac{1}{2}||u||_H^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2}\int_\Omega u^2 dx - M(\delta, \eta)\int_\Omega |u|^{2+\eta}dx \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Sea $0 < \eta \leqslant \frac{4}{N-2}$. De (3.1.12), haciendo uso de la desigualdad de Poincaré (1.23) y también el Teorema de Encaje de Sobolev de H en $L^{2+\eta}(\Omega)$, entonces existe un $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} J^{+}(u) =& \frac{1}{2}||u||_H^2 - \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{2\lambda_1}||u||_H^2 - CM(\delta,\eta)||u||_H^{2+\eta} \\ =& \frac{1}{2}||u||_H^2 \left(\frac{\varepsilon}{2\lambda_1} - CM(\delta,\eta)||u||_H^{\eta} \right) \end{aligned}$$

□

Lema 3.3. *Existe $\hat{u} \in H$ tal que $||\hat{u}||_H > \rho \quad y \quad J^{+}(u) < 0$*

Demostración. Dado que $f'(\infty) > \lambda_2$, existen constantes $a_3 > \lambda_2$ y a_4 tales que

$$F^{+}(\zeta) = \int_0^{a_3} f(t)dt + \int_{a_3}^{\zeta} f(t)dt$$

Entonces,

$$F^{+}(\zeta) \geqslant a_3\frac{\zeta^2}{2} + a_4, \forall \zeta \geqslant 0 \tag{3.1.13}$$

Sea φ la primer función propia del operador $-\Delta$, con condición de Dirichlet cero en la frontera Ω por la definición del funcional J^{+} se tiene $t \geqslant 1$ y además por (3.1.13) se obtiene que:

$$J^{+}(t\varphi) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}||\nabla(t\varphi)||^2 - F^{+}(t\varphi) \right) dx$$

Pero como,

$$F^{+}(\varphi) \geqslant a_3\frac{\varphi^2}{2} + a_4, \forall \varphi \geqslant 0$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} J^{+}(t\varphi) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}||\nabla(t\varphi)||^2 - F^{+}(t\varphi) \right) dx \\ &\leqslant \frac{t^2}{2}\int_{\Omega}||\nabla(t\varphi)||^2 - \frac{t^2 a_3}{2}\int_{\Omega}\varphi^2 dx - a_4|\Omega| \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Luego,

$$\frac{t^2}{2}\Big(\int_\Omega ||\nabla(t\varphi)||^2 - a_3\int_\Omega \varphi^2 dx\Big) - a_4|\Omega| \quad \int_\Omega ||\nabla\varphi||^2 dx = \int_\Omega \lambda_1\varphi^2 dx \tag{3.1.15}$$

Entonces por las ecuaciones (3.1.14) y (3.1.15)

$$J^+(t\varphi) \leqslant \frac{t^2}{2}(\lambda_1 - a_3)\int_\Omega \varphi^2 dx - a_4|\Omega|$$

y como $a_3 > \lambda_1$ luego, $(\lambda_1 - a_3) < 0$ Entonces:

$$J^+(t\varphi) \to -\infty$$

$\square$

Con el siguiente lema se muestra que el funcional J^+ cumple la condicón de Paleis-Smale (P-S) dada en (2.3).

Lema 3.4. *Sea la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en H tal que $\{J^+(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y su derivada $DJ^+(u_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.*

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tal que $\{J^+(u_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $DJ^+(u_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$.
Sea la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada como

$$h(t) = \begin{cases} f'(\infty)t, & t \geqslant 0 \\ f'(0)t, & t < 0. \end{cases}$$

Donde h es diferenciable y por tanto es continua y, por definición de f^+, se tiene que:

$$f^+(t) = h(t) + \gamma(t). \tag{3.1.16}$$

Pero recordemos que $f^+(t)$ es continua y $h(t)$ también lo es, entonces $\gamma(t)$ es continua; donde

$$\frac{\gamma(t)}{t} \to 0, \text{cuando} |t| \to +\infty. \tag{3.1.17}$$

Por hipótesis $DJ^{+}(u_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$ entonces $\frac{DJ^{+}(u_n)}{||u_n||}_H \to 0$, cuando $n \to \infty$, de (3.1.3)y (3.1.16) se tiene que para cada $v \in H$

$$\int_\Omega \left(\nabla \left(\frac{u_n}{||u_n||_H} \right) .\nabla v - \frac{h(u_n)}{||u_n||_H} v - \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right) dx \to 0.$$

Entonces, basta probar que

$$\int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right) dx \to 0, \forall v \in H$$

Ya que

$$\int_\Omega \left(\nabla \left(\frac{u_n}{||u_n||_H} \right) .\nabla v - \frac{h(u_n)}{||u_n||_H} v \right) dx = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$ pero por (3.1.17), existe $M_2 > 0$ tal que si $|t| \geqslant M_2$ entonces

$$\left| \frac{\gamma(t)}{t} \right| < \varepsilon$$

Luego,existe $k > 0$, tal que $|\gamma(t)| \leqslant k, \forall t \in [-M_2, M_2]$

Entonces, para $v \in H$ fijo, aplicando Hölder y la continuidad del encaje $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$ a $\int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right) dx$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right) dx \right| &\leqslant \int_{|u_n| > M_2} \left| \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right| dx + \int_{|u_n| \leqslant M_2} \left| \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right| dx \\
&\leqslant \int_{|u_n| > M_2} \left| \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} \frac{||u_n||_H}{||u_n||_H} v \right| dx + \int_{|u_n| \leqslant M_2} \left| \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right| dx \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{||u_n||}_H ||u_n||_{L^2} ||v||_{L^2} + \frac{k}{||u_n||}_H ||v||_{L^2} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \varepsilon C ||v||_{L^2} + \frac{k}{||u_n||}_H ||v||_{L^2} |\Omega|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Luego, recordemos que $\varepsilon > 0$ y $\frac{||u_n||_{L^2}}{||u_n||_H} = C \in \mathbb{R}$ Entonces, $\varepsilon C||v||_2 \to 0$
Y también,
Como $||u_n||_H$ está acotada entonces, $\frac{k|\Omega|^{\frac{1}{2}}||v||_{L^2}}{||u_n||_H} \to 0$ cuando $n \to \infty$ luego se prueba que:

$$\int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right) dx \to 0$$

$$\int_\Omega \left(\nabla \left(\frac{u_n}{||u_n||_H} \right) . \nabla v - \frac{h(u_n)}{||u_n||_H} v - \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right) dx \to 0, \forall v \in H$$

Ya que se supuso que $\left\{ \frac{u_n}{||u_n||_H} \right\}$ es acotada entonces existe una subsucesión que converge débilmente [1], y que por abuso de notación también llamaremos $\left\{ \frac{u_n}{||u_n||_H} \right\}$, es decir

$$\frac{u_n}{||u_n||_H} \rightharpoonup \omega \text{ en } H \Longleftrightarrow f\left(\frac{u_n}{||u_n||} \right) \to f(\omega), \forall f \in H'$$

Dado que el encaje $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacto, entonces $\frac{u_n}{||u_n||_H}$ converge fuertemente en ω es decir

$$\frac{u_n}{||u_n||_H} \longrightarrow \omega \text{ en } L^2(\Omega)$$

Ahora probemos que ω es solución débil no trivial del problema (3.0.1), para esto primero mostremos que $\omega \neq 0$.

Demostración. Supóngamos que $\omega = 0$, luego

$$\frac{DJ^+(u_n)}{||u_n||}_H \frac{(u_n)}{||u_n||_H} = \int_\Omega \left[\nabla \left(\frac{u_n}{||u_n||_H} \right) \nabla \left(\frac{u_n}{||u_n||_H} \right) \right] - f^+(u_n) \left(\frac{u_n}{||u_n||_H} \right) dx$$

y se tiene que

$$\left| \frac{DJ^+(u_n)}{||u_n||_H} \frac{(u_n)}{||u_n||}_H \right| \leqslant \frac{1}{||u_n||_H} ||DJ^+(u_n)||_{H^*} \longrightarrow 0$$

Entonces

$$\frac{DJ^+(u_n)}{||u_n||_H} \frac{(u_n)}{||u_n||_H} = \left|\left| \frac{u_n}{||u_n||_H} \right|\right|_H^2 - \int_\Omega \left[\frac{h(u_n)}{||u_n||_H} \frac{u_n}{||u_n||_H} + \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} \frac{u_n}{||u_n||_H} \right] dx \longrightarrow 0$$

[1] Proposición III.5 [Análisis Funcional- H.Brézis]

Luego, se debe mostrar que $\int_\Omega \frac{h(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}dx \to 0$ y también que $\int_\Omega \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}dx \to 0$

Teniendo encuenta (3.1.4) y la hipótesis de que $\omega = 0$, probemos que $\int_\Omega \frac{h(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}dx \to 0$

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{h(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}dx\right| &\leqslant \left|\int_{u_n\geqslant 0}\left(\frac{h(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}\right)dx\right| + \left|\int_{u_n<0}\left(\frac{h(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}\right)dx\right| \\
&= \int_{u_n\geqslant 0}|f'(\infty)|\frac{u_n}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}dx + \int_{u_n<0}|f'(0)|\frac{u_n}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}dx \\
&= |f'(\infty)|\int_{u_n\geqslant 0}\frac{{u_n}^2}{{||u_n||_H}^2}dx + |f'(0)|\int_{u_n<0}\frac{{u_n}^2}{{||u_n||_H}^2}dx \\
&\leqslant |f'(\infty)|\left|\left|\frac{u_n}{||u_n||_H}\right|\right|_{L^2}^2 + |f'(0)|\left|\left|\frac{u_n}{||u_n||_H}\right|\right|_{L^2}^2 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Ahora para mostrar que $\int_\Omega \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}dx \to 0$ se deja al lector dicho razonamiento, que se hace de manera similar como se probo que $\int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H}v\right)dx \to 0$
Por siguiente,

$$\int_\Omega \left[\frac{h(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H} + \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}\right]dx \longrightarrow 0$$

Así que,

$$\left|\left|\frac{u_n}{||u_n||_H}\right|\right|_H^2 - \int_\Omega \left[\frac{h(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H} + \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H}\frac{u_n}{||u_n||_H}\right]dx = 1 - 0 \neq 0$$

Lo cual es una contradicción y se demuestra que $\omega \neq 0$. □

Luego ω es solución débil no trivial del problema (3.0.1)y se tiene que

$$\int_\Omega (\nabla\omega\nabla v - h(\omega)v)dx = 0$$

Por que $\frac{u_n}{||u_n||_H} \to \omega$ y se tiene la proposición (2.4); es decir

$$\begin{cases} \Delta\omega + h(\omega) = 0, & \text{en} \quad \Omega \\ \omega = 0, & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.18}$$

También se concluye por los resultados de S. Agmon que ω es solución débil clasica del problema (3.1.18).
Sea el abierto $\Omega_1 := \{x \in \Omega : \omega(x) < 0\}$, entonces $\omega = 0$ en $\partial\Omega_1$. Entonces,

$$\begin{cases} \Delta\omega + f'(0)\omega = 0, & \text{en} \quad \Omega_1 \\ \omega = 0, & \text{en} \quad \partial\Omega_1 \end{cases}$$

Cualquier valor propio de $-\Delta$ en una subregión del abierto Ω debe ser mayor o igual al primer valor propio λ_1 y por hipótesis $f'(0) > \lambda_1$, entonces se tiene que la subregión Ω_1 es vacía.
Entonces $\omega \geqslant 0$ en Ω. y de (3.1.18) se obtiene

$$\begin{cases} \Delta\omega + f'(\infty)\omega = 0, & \text{en} \quad \Omega \\ \omega = 0, & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Y se tiene por hipótesis que $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, con k un entero par $k \geqslant 2$, el cual contradice que $f'(\infty) > \lambda_1$. Por consiguiente,
La sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. $\square$

Con los lemas (3.2), (3.3) y (3.4) se muestra que el funcional J^+ cumple la hipótesis del Teorema del Paso de Montaña, entonces u es punto crítico del funcional J^+ y es solución débil no trivial del problema dado (3.0.1); pero además es solución débil clásica.

3.1.1. Solución positiva

Sea el abierto acotado $\Omega' := \{x \in \Omega tal\ que\ u(x) < 0\}$, teniendo en cuenta la definición de la función f^+ (3.1.2)entonces el problema (3.0.1) está dado como

$$\begin{cases} \Delta u + f'(0)u = 0, & en \quad \Omega' \\ u = 0, & en \quad \partial\Omega' \end{cases} \tag{3.1.19}$$

Pero cualquier valor propio de $(-\Delta)$ *en cualquier sub-región del abierto* Ω *deberá ser mayor o igual al primer valor propio* λ_1 *y se tiene por hipótesis que* $f'(0) < \lambda_1$*, entonces* $\Omega' = \emptyset$

De este modo $u \geqslant 0$ *en* Ω*. Por lo tanto,* $f^+(u) = f(u)$*, así que el problema (3.0.1) puede re-escribirse de la forma:*

$$\begin{cases} \Delta(-u) + \frac{f_-(u)}{u}(-u) = \frac{f_+(u)}{u}u, & en \quad \Omega \\ u = 0, & en \quad \partial\Omega \end{cases}$$

donde,

$$\frac{f_+(\xi)}{\xi} := \frac{\text{máx}\{f(\xi), 0\}}{\xi} \quad , \quad \frac{f_-(\xi)}{\xi} := \frac{\text{mín}\{f(\xi), 0\}}{\xi}$$

Para todo $\xi > 0$ *y se define que* $\frac{f_\pm(\xi)}{\xi}(0) := \{f'(0)\}\pm$ *y de está manera se tiene que* $\frac{f_\pm(\xi)}{\xi}$ *son continuas en el intervalo* $(0, \infty)$

Para concluir en esta parte que $u > 0$ *en* Ω *se hace necesario utilizar el principio del máximo fuerte, siendo esta una herramienta útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales, debido a que nos permite obtener información de la solución de la ecuación diferencial sin necesidad de conocerla explícitamente, aunque a parecen en distintas formas a continuación se verá para el problema dado de tipo elíptico.*

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto acotado y conexo y consideremos el operador* Δ *de la forma*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u\right] + c_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u$$

donde los coeficientes $a_{ij}, b_i, c_j, d \quad (i, j = 1, \ldots, N)$ *son funciones medibles en* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*. Si* $u \in H^1(\Omega)$ *y las funciones* $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u, c_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u, i = 1, \ldots, N$ *son integrables entonces decimos que* u *satisface* $\Delta u = 0, (\geqslant 0, \leqslant 0)$ *en* Ω *si*

$$J(u, v) = \sum_{i=1}^{N}\left\{\int_\Omega \left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u\right]\frac{\partial v}{\partial x_i} + \left[c_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u\right]v\right\}dx$$

para todo $v \in C_0^1(\Omega)$. *Sea* f *integrable en* $\Omega, u \in H^1(\Omega)$ *es una solución débil de*

$$\Delta u = f$$

en Ω *si*

$$J(u,v) = F(v) := \int_\Omega fv dx \forall v \in C_0^1(\Omega) \tag{3.1.20}$$

Suponiendo a Δ *estrictamente elíptico en* Ω *y como el primer valor propio es* $\lambda > 0$ *se tiene*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \forall x \in \Omega \forall \xi \in \mathbb{R}^N \tag{3.1.21}$$

y u *solución débil del problema de Dirichlet (3.0.1)entonces tenemos que:*

$$\begin{aligned} |J(u,v)| &\leqslant \sum_{i=1}^N \left\{ \int_\Omega \sum_{j=1}^N \left| a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| + \left| b_i(x)u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| + \left| c_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right| + |d(x)uv| \right\} dx \\ &\leqslant C||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H_0^1}(\Omega) \end{aligned}$$

Teorema 3.5 (Pincipio Fuerte del Máximo)**.** *Sea* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *y* $c \geqslant 0$ *en* Ω

(i) Si $\Delta u \leqslant 0$, *en* Ω, *entonces*

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leqslant \max_{\partial\Omega} u^+$$

(ii) De la misma forma, si $\Delta u \geqslant 0$, *en* Ω, *entonces*

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geqslant -\min_{\partial\Omega} u^-$$

En particular, si $\Delta u = 0$ *en* Ω, *entonces*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

La prueba del anterior teorema puede ser vista en [14]
Retomando, se tiene que $u \in C(\bar{\Omega})$, *u acotada y, por lo tanto, c es acotada. Por el Principio del máximo se tiene que* $u > 0$ *en* Ω. *De la misma forma se muestra la otra solución, la negativa.*
Hasta esta parte esta probada la existencia de dos soluciones que no cabmbian de signo; en el siguiente capítulo se mostrará la existencia de una tercera solución que si cambia de signo, prueba en la cual se hace necesario el uso de teoría de grado de Leray-Schauder.

Nota 3.6. *En [12]se hace la aclaración que el funcional* J *en esta primera parte esta definido a partir de la truncación dada en (3.1.2), es de clase* C^2. *Sin embargo, en el Teorema de Paso de Montaña sólo se usó el hecho de ser el funcional* J *de clase* C^1. *Si la truncación en (3.1.2) se hubiera definido de la siguiente manera*

$$f^+(t) := \begin{cases} f(t), & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{3.1.22}$$

el funcional J *resultaría de clase* C^1, *pero no se mostrara que la correspondiente solución, obtenida en vía del Teorema de Paso de Montaña, no cambia de signo.*

3.2. Existencia de una solución que cambia de signo para el problema de Dirichlet asintóticamente lineal

En la sección anterior se mostró que u es solución débil clásica del problema de Dirichlet con valor en la frontera(3.0.1), y la existencia de dos soluciones, una positiva y la otra negativa, en está tercera parte se demostrará según la existencia de otra solución pero que cambia de signo.

Consideremos ahora la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida como:*

$$\gamma(t) := f(t) - f'(\infty)t$$

por lo tanto $\gamma(t) = o(t)$ *cuando* $|t| \to +\infty$*, con está función y ya probado que* u *es solución del problema de Dirichlet (3.0.1) entonces se tiene el problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u + f'(\infty)u + \lambda\gamma(u) = 0, & en \quad \Omega \\ u = 0, & en \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.23}$$

donde $\lambda \in [0,1]$
Si G *es la primitiva de la* γ *de tal manera que* $G(0) = 0$ *y* $J_\lambda : H_0^1 \to \mathbb{R}$ *entonces se define el funcional*

$$J_\lambda(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f'(\infty)\frac{u^2}{2} - \lambda G(u) \right) dx$$

Pero por hipótesis en el teorema (3.1) $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$*,* f *es sublineal y por lo tanto* $J_k \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ *ver [20], luego el producto punto del gradiente del funcional y el vector* v *está dado como:*

$$< \nabla J_\lambda, v >= DJ_\lambda(u)v = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v - f'(\infty)uv - \lambda\gamma(u)v)\, dx, \quad \forall v \in H \tag{3.2.24}$$

Entonces, u *es solución débil del problema (3.2.23) si y sólo si* u *es un punto crítico de* J_λ*, pero se mirara para un radio bastante grande y cualquier valor propio* $\lambda \in [0,1]$ *que el funcional* J_λ *no tiene puntos críticos en la esfera de centro* 0 *y radio* R*, para probar este se establece el siguiente lema.*

Lema 3.7. *Existe* $R > 0$ *tal que si* $||u|| \geqslant R$ *entonces* $\nabla J_\lambda(u) \neq 0$

Demostración. Para mostrar el lema bastará con probar que la soluciones débiles del problema (3.2.23) están acotadas. Supongamos, por el absurdo, que existe una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ de soluciones débiles del problema (3.2.23), tal que $||u_n|| \to \infty$. Como $DJ_\lambda(u_n) = 0$,y haciendo uso de (3.2.24) se tiene

$$\int_\Omega \left(\nabla \frac{u}{||u_n||}.\nabla v - f'(\infty)\frac{u}{||u_n||}v - \lambda\gamma\frac{u}{||u_n||}v \right) dx = 0 \quad \forall v \in H, \tag{3.2.25}$$

de manera similar a como se hizo la demostración del lema (3.4), se prueba que

$$\int_{\Omega}\left(\gamma\frac{u}{||u_n||}v\right)dx \to o, \qquad \forall v \in H. \tag{3.2.26}$$

De (3.2.25) y (3.2.26) se concluye que

$$\int_{\Omega}\left(\nabla\frac{u}{||u_n||}\nabla v - f'(\infty)\frac{u_n}{||u_n||}v\right)dx \to o, \qquad \forall v \in H. \tag{3.2.27}$$

Como

$$\left\{\frac{u_n}{||u_n||}\right\}$$

es una sucesión acotada en el espacio de Hilbert H, entonces existe una subsucesión que converge débilmente a un elemento $w \in H$, de manera similar que en el lema (3.4) se muestra que $w \neq 0$ y dado que el encaje de H en L^{Ω} es compacto se tiene que

$$\frac{u_n}{||u_n||} \to w \quad \text{en} \quad L^2(w) \tag{3.2.28}$$

entonces se tiene que

$$\int_{\Omega}\left(\nabla\frac{u}{||u_n||}\nabla v - f'(\infty)\frac{u_n}{||u_n||}v\right)dx \to 0 \qquad\qquad \forall v \in H \tag{3.2.29}$$

$$\int_{\Omega}\left(\nabla w \nabla v - f'(\infty)wv\right)dx = 0, \forall v \in H \tag{3.2.30}$$

Luego, se tiene que w es una solución débil no trivial del problema

$$\begin{cases} \Delta w + f'(\infty)w = 0, & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2.31}$$

entonces se obtiene que $f'(\infty)$ es un valor propio del laplaciano, pero esta contradicción prueba que las soluciones del problema (3.2.23) están acotadas. □

Lema 3.8. *Si $B_R, R > 0$ es la bola en el espacio H de centro 0 y radio R entonces*

$$d(\nabla J_0, B_R, 0) = (-1)^k = 1$$

ya que $k \leqslant 2$, donde $d(\nabla J_0, B_R, 0)$ denota al grado de Leray-Schauder.

Demostración. Ya que se tiene que:

$$DJ_\lambda(u)v = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v - f'(\infty)uv - \lambda\gamma(u)v)\, dx, \quad \forall v \in H$$

entonces $DJ_0(u)v = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v - f'(\infty)uv)\, dx, \quad \forall v \in H$ y como $f'(\infty)$ no es un valor propio de $-\Delta$ concluyendo así que $u = 0$ es el único punto crítico de J_0; ya que en este caso $f(u) = f'(\infty)u$. Pero se debe determinar el grado de J_0 en la bola B_R de centro 0 y radio $R > 0$, entonces se deberá calcular el número de valores propios negativos de la segunda solución derivada del funcional J_0 y cero es su único punto crítico. Supongamos que λ es un valor propio del operador segunda derivada de J_0 en cero y φ una función propia asociada al valor propio λ es decir,

$$\begin{aligned}
D^2J_0(u)w &= D^2J_0(u+t\varphi)w \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \Big(\nabla(u+t\varphi)\nabla w - f'(\infty)(u+t\varphi)w\Big)dx}{t} \\
&\text{como} \quad u = 0 \\
&\lim_{t\to 0} t\frac{\int_\Omega \Big(\nabla(\varphi)\nabla w - f'(\infty)(\varphi)w\Big)dx}{t}
\end{aligned}$$

Por otro lado $\langle D^2J_0(0)\varphi, w\rangle =< \lambda\varphi, w >= \lambda < \varphi, w >$ Entonces

$$\langle D^2J_0(0)\varphi, w\rangle = \int_\Omega \Big(\nabla\varphi\nabla w - f'(\infty)\varphi w\Big)dx = \lambda \int_\Omega \nabla\varphi\nabla w dx$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)\int_\Omega \nabla\varphi\nabla w dx &= \int_\Omega f'(\infty)\varphi w dx \\
&= f'(\infty)\int_\Omega \varphi w dx \qquad (3.2.32)
\end{aligned}$$

□

Luego, $\varphi_j, (r \geqslant j \in \mathbb{N})$ *es función propia asociada al valor propio y solución débil del problema lineal*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_j u = 0, & en \quad \Omega \\ u = 0, & en \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.33}$$

Se tiene que

$$\int_\Omega \nabla\varphi_j \nabla w dx = \lambda_j \int_\Omega \varphi_j w dx, \quad \forall w \in H,$$

reemplazando en (3.2.32)

$$(1-\lambda)\lambda_j \int_\Omega \nabla\varphi_j \nabla w dx = f'(\infty) \int_\Omega \varphi_j w dx$$

Por igualación tenemos:

$$(1-\lambda)\lambda_j = f'(\infty)$$
$$\lambda = 1 - \frac{f'(\infty)}{\lambda_j}, j \in \mathbb{N}$$

Pero, recordemos que por hipótesis $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$*, se concluye que el número de valores propios negativos del operador de la segunda derivada de* J_0 *es* $k = r$ *entonces supongamos que el conjunto de puntos críticos del funcional* J *es discreto(No hay puntos de acumulación)y usando el lema anterior y la invarianza del grado de Leray-Schauder bajo homotopía se obtiene:*

$$d(\nabla J_1, B_R, 0) = d(\nabla J_0, B_R, 0)$$

Como $J = J_1$ *y haciendo uso del lema anterior*

$$d(\nabla J, B_R, 0) = d(\nabla J_1, B_R, 0) = d(\nabla J, B_R, 0) = (-1)^k = 1$$

Como 0 *es un mínimo local aislado de* J*, entonces* $d(\nabla J, B_\rho, 0) = 1$ *Ahora, la bola de centro* 0 *y radio* ρ B_ρ *que no contiene ningún otro punto crítico de* J *ver [2].*

Definida las regiones P acotada como la región que contiene sólo las soluciones positivas del problema dado (3.0.1), y la región N la región acotada que contiene las soluciones negativas del problema de Dirichlet (3.0.1), entonces,

$$d(\nabla J, P, 0) = -1 = d(\nabla J, N, 0) \tag{3.2.34}$$

Consideremos que el conjunto de puntos críticos del funcional J es discreto, entonces existe P la región acotada que contiene sólo las soluciones positivas, N la región acotada que contiene sólo las soluciones negativas y B_ρ la bola centrada en cero que sólo contiene el cero como punto crítico de J. Por los resultados (3.2.34),[12] y aplicando la propiedad de escisión del grado de Leray - Schauder

$$\begin{aligned}
1 =& d(\nabla J, B_R, 0) \\
=& d(\nabla J, B_\rho, 0) + d(\nabla J, P, 0) + d(\nabla J, N, 0) + d(\nabla J, B_R - \overline{(B_\rho \cup N \cup P), 0}) \\
=& 1 - 1 - 1 + d(\nabla J, B_R - \overline{(B_\rho \cup N \cup P), 0})
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d(\nabla J, B_R - \overline{(B_\rho \cup N \cup P), 0}) \neq 0$$

Por la existencia de grado de Leray- Schauder (ver[5] existe $u \in B_R - \overline{(B_\rho \cup N \cup P)}$, tal que

$$\nabla J(u) = 0$$

Por consiguiente se muestra que una solución no trivial u cambia de signo, concluyendo así la demostración del Teorema 3.1.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Adams, Sobolev Spaces, Second Edition New York, Academic Press, 1975.

[2] Amann, A Note on Degree Theory for Gradient Mappings,Proc. of the A.M.S.,85 no 4 (1982), 591-595.

[3] Ambrosetti y P. Rabinowitz, Dual Variational methods in critical point theory, J. Funct. Anal.,14(1963),343-381.

[4] Ambrosetti y G. Mancini, Sharp Nonuniqueness Results for some Nonlinear Problems, Nonlinear Anal.,3 no.5(1979),635-645.

[5] Castro, Non Linear Functional Analysis, II Escuela de Verano en Geometría Diferencial, Análisis numérico y Ecuaciones Diferenciles parciales, Universidad Nacional Medellín, Colombia, 1994.

[6] Brézis Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[7] Bartsch y Z.Q.Wang, On the Existence of Sign Chaging Solutions for Semilinear Dirichlet Problems, Topological Methods in Nonlinear Analysis,7,(1996),115-131.

[8] *Castro and J. Cossio, Multiple Radial Solutions for a Semilinear Dirichlet problem in a ball, Rev. Colombiana Math,27(1993),15-24.*

[9] *Castro and J. Cossio, Multiple Solutions for a Nonlinar Dirichlet problem, SIAM J. Math. Anal.,25(1994),1554-1561.*

[10] *Caicedo, Cálculo Avanzado Introducción, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, 2000.*

[11] *Caicedo,Notas de Clase de Teoría de Grado "Sin Publicar", Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.*

[12] *Cossio y C. Vélez, Soluciones no triviales para un Problema de Dirichlet Asintóticamente Lineal, Rev. Colombiana de matematicas,27(2003),25-36.*

[13] *Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1980.*

[14] *Evans, Partial Differential Equations, Departament of Mathematics University of California, Berkeley, Graduate Studies in Mathematics,Volumen 19, 1998.*

[15] *G.Folland, Introduction Partial Differential Equations, Princeton University Press, New Jaersey, 1976.*

[16] *Kolmogorov, Introduction Real Analysis,Prentice Hall, 1970.*

[17] *Kung - Ching Chang, Infinite imensional Morse Theory and Multiple Solution Problems,Birkhauser, 1991.*

[18] *Lang, Real Analysis, Second Edition, Yale University, Addison-Wesley publishing compana,1983.*

[19] *Lloyd, Noel Glynne, Degree Theory, CambridgebUniversity Press, 1978.*

[20] Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, Regional Conference Series in Mathematics, 65,Providence, R.I.,AMS(1986).

[21] Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Third Edition, McGraw-Hill International Editions, 1976.