

ECUACIÓN DE DESVÍO GEODÉSICO EN  
COSMOLOGÍAS DE BIANCHI Y SUS  
IMPLICACIONES COSMOLÓGICAS  
(GEODESIC DEVIATION EQUATION IN  
BIANCHI COSMOLOGIES AND ITS  
COSMOLOGICAL IMPLICATIONS)

DIEGO LEONARDO CÁCERES URIBE



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL  
BOGOTÁ, COLOMBIA

ECUACIÓN DE DESVÍO GEODÉSICO EN  
COSMOLOGÍAS DE BIANCHI Y SUS  
IMPLICACIONES COSMOLÓGICAS  
(GEODESIC DEVIATION EQUATION IN  
BIANCHI COSMOLOGIES AND ITS  
COSMOLOGICAL IMPLICATIONS)

DIEGO LEONARDO CÁCERES URIBE

TESIS DE MAESTRÍA SOMETIDO COMO  
REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS - ASTRONOMÍA

DIRECTOR  
LEONARDO CASTAÑEDA COLORADO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL  
BOGOTÁ, COLOMBIA

## NOTA DE ACEPTACIÓN

Los abajo firmantes certifican que han leído y aprueban el trabajo de grado titulado **Ecuación de Desvío Geodésico en Cosmologías de Bianchi y sus Implicaciones Cosmológicas** (Geodesic Deviation Equation in Bianchi Cosmologies and its cosmological implications), presentado por **Diego Leonardo Cáceres Uribe** como requisito parcial para optar al grado de **Magíster en Ciencias - Astronomía**.

Fecha: \_\_\_\_\_

Director:

\_\_\_\_\_  
Leonardo Castañeda Colorado

Jurados:

\_\_\_\_\_  
José Róbel Arenas Salazar

\_\_\_\_\_  
Eduard Alexis Larrañaga Rubio

*Conócete a ti mismo y conocerás al Universo y a los Dioses.*  
INSCRIPCIÓN DEL TEMPLO DE DELFOS.

*A mis padres, quienes me permitieron conocer esta aventura de la existencia que  
llamamos vida.*

---

---

## TABLA DE CONTENIDO

Índice de figuras	VIII
Resumen (Abstract)	IX
Agradecimientos	X
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Relatividad General</b>	<b>5</b>
2.1. El modelo estándar de la cosmología moderna . . . . .	8
2.1.1. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître . . . . .	9
2.1.2. Parámetros cosmológicos . . . . .	10
<b>3. Formalismo 1+3 de la Relatividad General</b>	<b>13</b>
3.1. Cuadri-velocidad de materia promedio y cantidades cinemáticas . . . . .	13
3.2. Tensor Momentum-Energía . . . . .	15
3.3. El tensor de curvatura de Weyl . . . . .	15
3.4. Las identidades de Ricci . . . . .	18
3.5. Las identidades de Bianchi dos veces contraídas y las ecuaciones de conservación . . . . .	19
3.6. Las otras identidades de Bianchi . . . . .	20
3.7. Hipersuperficies . . . . .	21
3.7.1. Definición de Hipersuperficies . . . . .	21
3.7.2. Vector Normal . . . . .	22
3.7.3. Métrica Inducida . . . . .	22
3.7.4. Campos Tensoriales Tangentes y Derivada Covariante Intrínseca . . . . .	23
3.7.5. Curvatura Extrínseca . . . . .	24
3.7.6. Ecuaciones de Gauss-Codacci . . . . .	25
<b>4. Universos de FLRW y relaciones observacionales</b>	<b>27</b>
4.1. Coordenadas y Métrica . . . . .	27
4.2. Ecuaciones Dinámicas . . . . .	28
4.3. Observaciones . . . . .	28
4.3.1. Redshift . . . . .	28
4.3.2. Áreas . . . . .	29
4.3.3. Luminosidad y Teorema de Reciprocidad . . . . .	30

4.3.4. Intensidad Específica . . . . .	31
<b>5. Ecuación de Desvío Geodésico</b>	<b>32</b>
5.1. Derivada covariante a lo largo de una curva . . . . .	34
<b>6. Ecuación de Desvío Geodésico en FLRW</b>	<b>37</b>
6.1. Primera Integral . . . . .	37
6.2. Tensor de Curvatura de Riemann y EDG trispacial . . . . .	39
6.3. El Espacio Pantalla . . . . .	42
6.4. Ecuación de Pirani . . . . .	45
6.5. EDG para observadores temporales . . . . .	45
6.5.1. EDG para observadores fundamentales . . . . .	45
6.5.2. Materia Comóvil . . . . .	46
6.5.3. Materia no comóvil . . . . .	48
6.6. Obtención del teorema de reciprocidad a partir de la primera integral . . . . .	51
<b>7. Cosmologías de Bianchi y Anomalía del cuadrupolo</b>	<b>53</b>
7.1. Clasificación de los modelos de Bianchi . . . . .	53
7.2. Ecuaciones de la dinámica del Modelo Cosmológico de Bianchi I . . . . .	55
7.3. Evolución cosmológica del modelo Bianchi I con dominio de materia . . . . .	59
<b>8. Universo Elipsoidal y anomalía de la radiación cósmica de fondo</b>	<b>66</b>
8.1. Caracter cuadrupolar del Modelo de Bianchi I y ley de Redshift . . . . .	67
8.2. El universo elipsoidal, magnitud y dirección del campo magnético cosmológico y valor de la excentricidad según los datos de la RCF . . . . .	69
<b>9. EDG en Cosmologías de Bianchi</b>	<b>75</b>
<b>10. Conclusiones</b>	<b>77</b>
<b>11. Apéndice A. Ecuación de Raychaudhuri</b>	<b>79</b>
<b>12. Apéndice B. Identidades de Bianchi para el tensor de Weyl</b>	<b>84</b>
<b>13. Apéndice C. Relación de Mattig a partir de la Ecuación de Desvío Geodésico</b>	<b>86</b>
<b>14. Apéndice D. Ecuación de Desvío Geodésico generalizada, con torsión</b>	<b>89</b>
<b>15. Apéndice E. Ecuaciones Dinámicas del modelo de Bianchi tipo I</b>	<b>91</b>
15.1. Ecuaciones dinámicas obtenidas a partir de las Ecuaciones de Campo de Einstein . . . . .	91
15.2. Dinámica del modelo de Bianchi I para el dominio de materia . . . . .	95
15.3. Ley de Redshift . . . . .	97
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

---



---

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Espectro de Potencias de la RCF. . . . .	2
7.1. Evolución de los factores de escala para el caso $\Sigma_1 = 0, \Sigma_2 = -\Sigma_3 = 0.05$ . . . . .	59
7.2. Evolución de los factores de escala para el caso $\Sigma_1 = \Sigma_2 = -0.05, \Sigma_3 = 0.1$ . En este caso $a(t) = b(t)$ . . . . .	60
7.3. Evolución de los factores de escala para el caso $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0.05, \Sigma_3 = -0.1$ . En este caso $a(t) = b(t)$ . . . . .	60
7.4. Evolución de las componentes del shear para el caso $\Sigma_1 = 0, \Sigma_2 = -\Sigma_3 = 0.05$ . . . . .	61
7.5. Evolución de las componentes del shear para el caso $\Sigma_1 = \Sigma_2 = -0.05, \Sigma_3 = 0.1$ . En este caso $a(t) = b(t)$ . . . . .	61
7.6. Evolución de las componentes del shear para el caso $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0.05, \Sigma_3 = -0.1$ . En este caso $a(t) = b(t)$ . . . . .	62
7.7. Evolución de los parámetros de anisotropía para el caso $\Sigma_1 = 0, \Sigma_2 = -\Sigma_3 = 0.05$ . . . . .	62
7.8. Evolución de los parámetros de anisotropía para el caso $\Sigma_1 = \Sigma_2 = -0.05, \Sigma_3 = 0.1$ . En este caso $a(t) = b(t)$ . . . . .	63
7.9. Evolución de los parámetros de anisotropía para el caso $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0.05, \Sigma_3 = -0.1$ . En este caso $a(t) = b(t)$ . . . . .	63
7.10. Evolución de las componentes del tensor eléctrico de Weyl para el caso $\Sigma_1 = 0, \Sigma_2 = -\Sigma_3 = 0.05$ . . . . .	64
7.11. Evolución de las componentes del tensor eléctrico de Weyl para el caso $\Sigma_1 = \Sigma_2 = -0.05, \Sigma_3 = 0.1$ . En este caso $a(t) = b(t)$ . . . . .	64
7.12. Evolución de las componentes del tensor eléctrico de Weyl para el caso $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0.05, \Sigma_3 = -0.1$ . En este caso $a(t) = b(t)$ . . . . .	65



---

---

## RESUMEN (ABSTRACT)

**Resumen** Últimamente los datos de la Radiación Cósmica de Fondo (RCF) han dado como resultado anomalías o desviaciones con respecto al modelo estándar de la cosmología, lo cual ha llevado a varios cosmólogos a considerar modelos alternativos al modelo estándar (homogeneo e isotrópico), como los modelos de Bianchi, los cuales son homogéneos pero anisotrópicos. En especial, el modelo de Bianchi I podría explicar un valor bajo del cuadrupolo de la RCF, lo cual se muestra en uno de los capítulos de esta tesis. Basándonos en estas motivaciones para considerar modelos alternativos, proponemos estudiar la Ecuación de Desvío Geodésico (EDG) en este modelo. Se muestran las ecuaciones dinámicas para fluidos generales y luego para el caso particular de este universo en el dominio de materia. Encontramos que una cosmología de este tipo tiende a la isotropía (buena candidata para generalizar a la cosmología estándar), tanto por el comportamiento de la parte eléctrica del tensor de Weyl como por el comportamiento del tensor shear. Es precisamente este tensor de Weyl el que hace la diferencia en la EDG con respecto al caso del modelo estándar, ya que en el modelo estándar el tensor de Weyl es nulo. Se discuten algunas consecuencias de carácter observacional y cosmológico de este término.

*Palabras Claves:* Ecuación de Desvío Geodésico; Cosmologías de Bianchi; Anomalía del Cuadrupolo.

**Abstract** Recently Cosmic Microwave Background (CMB) data have given results like anomalies or deviations with respect to Standard Cosmological Model, which has led to many cosmologists to consider alternative models to the Standard Model (which is homogeneous and isotropic), such as Bianchi models, which are homogeneous but anisotropic. Specially, Bianchi type I model could explain a low value of quadrupole in CMB, which is shown in one chapter of this thesis. Considering these motivations to justify alternative models, we propose to study the Geodesic Deviation Equation (GDE) in this model. Dynamic equations for general fluids are shown and then for the particular case of this universe with matter domination. We find that this cosmology tends to isotropy (good candidate to generalize the Standard Cosmology), owing to the behavior of both the electric part of Weyl tensor and the shear tensor. Precisely, this Weyl tensor makes the difference in the GDE with respect to the Standard Model case because in the Standard model the Weyl tensor is null. Some observational and cosmological consequences of this term are discussed.

*Key Words:* Geodesic Deviation Equation; Bianchi Cosmologies; Quadrupole Anomaly.

---

---

## AGRADECIMIENTOS

Quiero en primer lugar agradecer a la Universidad Nacional de Colombia y en especial al Observatorio Astronómico Nacional, por haberme aceptado para realizar este trabajo. Agradezco al profesor Juan Manuel Tejeiro por haber creído en mi como estudiante, por lo cual me respaldó en la obtención de la beca que la Universidad Nacional ofrece a sus estudiantes por medio de su vicerrectoría. Sin su respaldo financiero no habría sido posible haber realizado este trabajo satisfactoriamente. Igualmente agradezco a la Universidad por esa ayuda económica. También agradezco al profesor Juan Manuel, al Observatorio y a la Universidad por haberme apoyado económicamente en los diferentes eventos que participé como ponente en representación de la Universidad.

Agradezco al profesor Leonardo Castañeda por haberme aceptado como estudiante y por aceptar dirigir mi tesis. También por todas las asesorías académicas que me dió, sin él este trabajo habría sido diferente.

Agradezco a mis compañeros Javier, Alejandro, William, Roger,... con quienes compartí los seminarios de los viernes y escucharon mis exposiciones, haciendo varias veces comentarios que juntos con los del profesor Leonardo dieron ideas para este trabajo. A ellos y a mis compañeros de maestría, Javier, Wilson, Giovanni, Joel,... quienes me brindaron su amistad y con los cuales pasé momentos muy gratos.

Agradezco a Carlos Cedeño por ayudarme en el manejo del programa GnuPlot, a Alejandro Guarnizo, Javier Cano, Jonatan Nuñez, por haberme ayudado con algunas dudas sobre el programa  $\text{\LaTeX}$ .

Agradezco a mi familia, quien siempre me ha apoyado en todos mis proyectos. Su compañía ha sido fundamental para mi, e igual ha sido todo lo que hemos compartido.

No alcanzo a nombrar a todas las personas con las que me he cruzado en esta etapa de la vida y cuya presencia ha enriquecido mi vida tanto en lo personal como en lo académico y profesional. Doy gracias al destino por habérmelos puesto en esta vida.

Bogotá D.C.

Diego Leonardo Cáceres Uribe

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN

El modelo estándar de la cosmología supone como válida la teoría general de la relatividad y plantea las hipótesis de homogeneidad e isotropía a las ecuaciones de campo de Einstein, obteniendo como solución la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [1]. Aunque a pequeñas escalas (menos de 100 Mpc) se observan inhomogeneidades porque el universo tiene estructura y se ven cúmulos de galaxias, a grandes escalas esta suposición, según datos observacionales tiene validez, hay homogeneidad e isotropía a nivel estadístico. Sin embargo, los modelos de FLRW no son los únicos homogéneos, existe una familia de soluciones que cumplen la condición de homogeneidad mas no isotropía en general, modelos conocidos como universos de Bianchi [2], [3], [4]. En esta familia de modelos, los modelos de FLRW son un caso particular.

A pesar del gran éxito del modelo estándar de la cosmología para dar cuenta de muchas observaciones [5], los modelos de Bianchi aun no se descartan y tienen aun pruebas observacionales que los pueden verificar. Por ejemplo, aunque hoy el universo sea isotrópico, en épocas tempranas pudo no serlo y las anisotropías pudieron disminuir con el paso de la evolución del universo [4], [6]. Según esto, se han calculado las abundancias relativas de Helio para distintos modelos de Bianchi y se han impuesto fuertes cotas a las anisotropías, del orden de  $\left| \frac{\sigma}{H_0} \right| < 10^{-9} - 10^{-13}$  dependiendo del tipo de modelo, donde  $\sigma$  es el parámetro de shear, que da una cuantificación de la expansión anisotrópica del universo.

También se pueden hacer predicciones de la radiación cósmica de fondo (CBR) dependiendo de los modelos de Bianchi que se consideren. Se obtienen restricciones en la vorticidad del orden de  $|\omega/H_0| < 10^{-3} - 10^{-5}$ . Estas restricciones parecen un poco más débiles que las de nucleosíntesis, esencialmente porque estas observaciones miden tiempos mucho más antiguos[4].

A pesar de ello, el modelo estándar de la cosmología tiene problemas en explicar algunas observaciones, como la anomalía del cuadrupolo [7], obtenida de los análisis de la radiación cósmica de fondo. Esta anomalía puede tener una explicación con los modelos de Bianchi. Sin embargo, hay otras explicaciones para este fenómeno, entre ellas el fenómeno de contaminación galáctica [8]. El sorprendente bajo valor del momento de cuadrupolo fue reportado por primera vez en 1992 [9]. En la figura 1.1 se muestra una gráfica tomada de [10]; se puede apreciar el bajo valor del cuadrupolo ( $l = 2, 90^\circ$ ).

Angélica de Oliveira-Costa y Max Tegmark presentan un método para medir los coeficientes  $a_{lm}$  en vez de los coeficientes del espectro de potencias  $C_l$ , dado el ruido anisotrópico, un incompleto cubrimiento

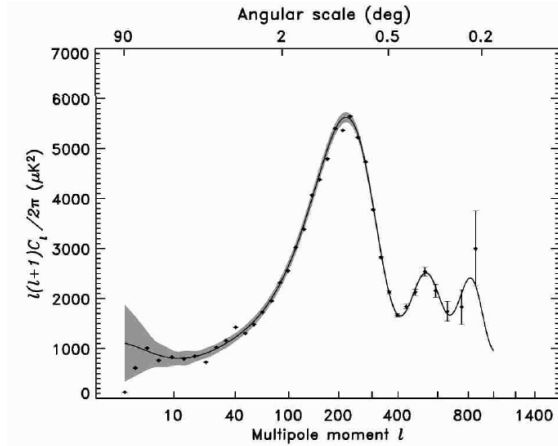


Figura 1.1: Espectro de Potencias de la RCF.

del cielo y contaminación de fondo [11]. Investigación más detallada de la anomalía del cuadrupolo ha revelado varias pistas sobre la no-gaussianidad a grandes escalas angulares. También se han encontrado anomalías con respecto al octupolo [11].

Se ha descubierto que el cuadrupolo y el octupolo son planares, esto es, con la mayoría de sus manchas más calientes y frías ubicadas en un plano, con sus dos planos de referencia sorpresivamente cercanamente alineados [11]. Estas y otras anomalías se han intentado explicar con fenómenos como emisión galáctica de fondo, estructuras locales y con explicaciones teóricas que van más allá del modelo estándar de la cosmología como la topología cósmica compacta, inflación modificada y las cosmologías anisotrópicas de Bianchi. Últimamente se ha encontrado que el alineamiento se ha extendido a cuatro multipolos,  $l = 2 - 5$ , a lo largo del eje  $(b, l) = (60, -100)$ , dando origen a lo que se conoce como eje del mal. [12]. Recientemente Campanelli et. al. [13], [14] han podido explicar el bajo valor del cuadrupolo utilizando un modelo de Bianchi I, recurriendo a un campo magnético uniforme. El origen de estos campos magnéticos aun no está del todo claro, estudios de magnetogénesis, observaciones del CMB y de la rotación de Faraday, así como la abundancia de elementos y nucleosíntesis ponen fuertes cotas al campo magnético primordial.

Estas son algunas de las motivaciones para estudiar los modelos cosmológicos de Bianchi. Aunque la motivación proviene más de la cosmología y de las últimas observaciones astronómicas que la soportan, el objetivo principal de esta tesis tiene que ver más con la teoría clásica de la Relatividad General (RG). La Ecuación de Desvío Geodésico, que describe la separación y la propagación de geodésicas a través del espacio-tiempo, es una de las ecuaciones más importantes de la RG porque nos demuestra como la curvatura del universo afecta nuestras medidas [2], [15], [16]. Esta ecuación será diferente en un universo de Bianchi y tiene importantes consecuencias observacionales y cosmológicas porque afecta la forma de medir distancias, como la distancia diametral angular. También, los vectores desviación tendrán una deformación no solo en magnitud, caso que sucede cuando hay isotropía, sino también en dirección. En este trabajo se mostrará detalladamente como sucede esto, dado que el tensor de marea o de curvatura

de Riemann cambia.

Por esta razón, después de hacer una breve introducción y un repaso de los fundamentos de la Relatividad General, en el capítulo 3 daremos una introducción a la formulación 1+3 de la Relatividad General. Se introducen cantidades cinemáticas tales como el shear y la vorticidad. La parte de la curvatura que no viene dada por la distribución de momentum-energía de la materia, es decir, aquella que no depende del tensor de Ricci, se denomina *Tensor de Weyl*. Este tensor de Weyl es el responsable de que una partícula “interactúe a distancia” con una distribución de momentum-energía y es así mismo, también responsable de la propagación de las ondas gravitacionales [17]. El tensor de Weyl cumple algunas propiedades, análogas al tensor de campo electromagnético. El tensor de Weyl se puede descomponer en una parte eléctrica y en una parte magnética y es una de estas propiedades lo que permite hablar actualmente de *Gravito-electromagnetismo* [2], [18].

Al final del capítulo 3 se presentarán algunas definiciones concernientes a la teoría de hipersuperficies y se presentará la definición de curvatura espacial del universo, la cual es diferente de la curvatura espacio-temporal. En la hipersuperficie espacial se puede definir una conexión, así como un tensor curvatura de Riemann y una métrica inducida.

En el capítulo 4 se presentan algunas propiedades de la cosmología estándar y de la métrica de Robertson-Walker a la luz del formalismo 1+3 de la RG. Se presentan algunas definiciones muy útiles para la cosmología observacional, diferentes formas de definir distancia.

En el capítulo 5 se presentará la deducción de la Ecuación de Desvío Geodésico para un espacio-tiempo arbitrario. Luego, en el capítulo 6 veremos algunas propiedades de la EDG en la métrica de RW. Se verá explícitamente como en este universo el vector desviación solo cambia en magnitud debido a la isotropía.

En el capítulo 7 se introduce una pequeña reseña sobre los modelos cosmológicos de Bianchi y se presenta la dinámica del modelo de Bianchi I cuando hay dominio de materia. Se presenta la evolución de los factores de escala bajo diferentes escenarios cosmológicos, de igual manera se estudia la isotropización de este modelo. Se presenta este caso, pues es de fácil integración analítica, pero casos más generales se pueden considerar para un trabajo posterior.

En el capítulo 8 se muestra como un universo levemente excéntrico puede explicar el bajo valor del cuadrupolo. Como consecuencia de que las ecuaciones geodésicas cambian, cambia la ley de redshift y bajo la hipótesis de pequeñas anisotropías se puede obtener una relación que generaliza la ley de redshift del modelo estándar,  $S = \frac{1}{1+z}$ . Esta ley de redshift generalizada depende del ángulo de observación. Esta es una consecuencia fundamental, una pequeña excentricidad introduce una modificación en el redshift cosmológico que depende de la dirección de observación. Se modifica también la distribución de la temperatura y a primer orden solo afecta el cuadrupolo de la RCF. Finalmente, basándonos en el trabajo de Campanelli et. al. [13], [17], veremos como un ajuste de parámetros pueden dar una explicación plausible

de esta anomalía. Se han usado otros modelos de Bianchi para encontrar su distribución de temperatura [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25].

Por último, en el capítulo 9 presentamos la EDG en las cosmologías de Bianchi, específicamente, para la de tipo I. Veremos explícitamente como la parte eléctrica afecta la dirección del vector desviación a diferencia del caso de FRW donde solo cambia la magnitud. Para el modelo de Bianchi I la parte magnética del tensor de Weyl es nula, por lo que no contribuye a la EDG. Se analizan posibles consecuencias en los observables cosmológicos como la distancia diametral angular.

# CAPÍTULO 2

---

## RELATIVIDAD GENERAL

---

En la teoría general de la relatividad, la geometría del espacio-tiempo está caracterizada por un tensor simétrico de segundo orden, cuyas componentes en el sistema de coordenadas  $\{x^\mu\}$  (con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) serán denotadas por  $g_{\mu\nu}$ . El cuadrado de la distancia entre dos puntos vecinos del espacio-tiempo está dado por la expresión

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

Asumiremos un tensor métrico con signatura  $(-, +, +, +)$ .

En un cambio de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ , las nuevas componentes de la métrica se obtienen usando las fórmulas estándares para la transformación de tensores [26, 27]:

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta}. \quad (2.2)$$

Con una métrica asociada a la variedad espacio-tiempo se puede definir una derivada covariante asociada a esta métrica, denotada por  $\nabla_\mu$ , cuya acción sobre un tensor es:

$$\nabla_\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} = \partial_\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\alpha} T^{\alpha\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} + \cdots - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\alpha\nu_2\cdots} - \cdots, \quad (2.3)$$

(un término similar debe ser sumado por cada índice covariante o contravariante adicional), donde los  $\Gamma$  son los símbolos de Christoffel, que en el caso de la conexión métrica e imponiendo una condición de metricidad ( $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ ), vienen dados por:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (2.4)$$

La curvatura del espacio-tiempo está caracterizada por el tensor de Riemann [28, 29], cuyas componentes pueden ser expresadas en términos de los símbolos de Christoffel de acuerdo a la expresión:

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} \Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}. \quad (2.5)$$

Hemos de aclarar que el tensor curvatura de Riemann se define para cualquier variedad en términos de la conexión independientemente de la definición de un tensor métrico. La RG exige una métrica dado que debe generalizarse el concepto de distancia espacio-temporal de la relatividad especial. En nuestras definiciones hemos usado la convención espacial de Landau-Lifshitz [30], la cual es la misma usada por [28]. Hay otras convenciones, donde se usa la otra signatura de la métrica o donde se define el tensor de Riemann como el definido pero con un signo menos. Para ver los distintos tipos de convenciones remitimos

al lector a [28]. En este texto se usarán estas convenciones.

Las Ecuaciones de Campo de Einstein (ECE) relacionan la geometría del espacio-tiempo con su contenido de materia. Estas ecuaciones son uno de los postulados de la Relatividad General y están basados en la condición de que en condiciones no relativistas reproduzcan la mecánica newtoniana y la ecuación de Poisson [31]. La geometría aparece en las ecuaciones de campo a través del tensor de Ricci, definido por:

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}, \quad (2.6)$$

y el escalar curvatura, el cual es la traza del tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

La materia entra en las ecuaciones de campo vía el tensor de momentum-energía, denotado por  $T_{\mu\nu}$ , cuya componente tiempo-tiempo corresponde a la densidad de energía, las componentes tiempo-espacio a la densidad de momentum y las componentes espacio-espacio al tensor de esfuerzo [30, 1]. Las ecuaciones de campo se escriben, según la convención espacial de Landau-Lifshitz [30, 28]:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde el tensor  $G_{\mu\nu}$  es llamado el tensor de Einstein. Puesto que, por construcción, el tensor de Einstein satisface la identidad  $\nabla_{\mu} G^{\mu}_{\nu} = 0$ , cualquier tensor de momentum-energía en el lado derecho de la ecuación de campo debe necesariamente satisfacer la relación

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0, \quad (2.9)$$

la cual puede ser interpretada como una generalización, en el contexto de espacio-tiempos curvos, de las leyes de conservación para la energía y el momentum. Es curioso notar que por un lado tenemos una identidad geométrica,  $\nabla_{\mu} G^{\mu}_{\nu} = 0$ , y por otro lado una ley de conservación física,  $\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0$ .

Cuando Einstein dedujo sus ecuaciones descubrió que estas no permitían una solución estática, por lo que propuso modificarlas añadiendo una constante  $\Lambda$ , conocida como constante cosmológica, obteniéndose una modificación de las ecuaciones de campo de Einstein (2.8). La adición de esta constante puede obtenerse al agregar una constante al lagrangiano de materia, ya que las ecuaciones de campo de Einstein pueden obtenerse a partir de un principio variacional [32, 30], empezando desde la acción efectiva de Einstein-Hilbert dada por:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x R \sqrt{-g} + \int d^4x \mathcal{L}_M(\phi, \partial\phi) \sqrt{-g} \quad (2.10)$$

donde  $\mathcal{L}_M$  es el lagrangiano para la materia, el cual depende de algunas variables dinámicas, generalmente denotadas por  $\phi$  [33, 34]. La variación de esta acción con respecto a  $\phi$  conduce a la ecuación de movimiento para la materia  $(\delta\mathcal{L}_M/\delta\phi) = 0$ . Para ver el principio variacional en las teorías alternativas  $f(R)$  de la gravitación, con una discusión faltante en la literatura sobre los términos frontera, ver [35].



Considerando un nuevo lagrangiano de materia  $\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M - (\Lambda/8\pi G)$ :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int R\sqrt{-g} d^4x + \int \left( \mathcal{L}_M - \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.11a)$$

$$= \frac{1}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x \quad (2.11b)$$

conduce a nuevos interrogantes en la interpretación y el significado físico de esta constante [36]. Se pueden hacer dos interpretaciones: la primera interpretación, basada en la ecuación (2.11a), trata a  $\Lambda$  como el corrimiento en el lagrangiano de materia lo que implica también un corrimiento en el hamiltoniano de materia. Esto podría pensarse como un corrimiento en la energía del punto cero del sistema. Se modifica entonces el lado derecho de la Ecuación de campo de Einstein, considerando un nuevo tensor momentum-energía efectivo  $Q_{\mu\nu}$ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}), \quad Q_{\mu\nu} \equiv -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \equiv -\mu_\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

En la segunda interpretación, la ecuación (2.11b) puede ser tratada como el campo gravitacional descrito por el lagrangiano de la forma  $\mathcal{L}_G \propto (1/G)(R - 2\Lambda)$ , interactuando con la materia, cuya dinámica está contenida en el lagrangiano de materia  $\mathcal{L}_M$ . En esta interpretación, la gravedad está representada por dos constantes, la constante  $G$  de Newton y la constante cosmológica  $\Lambda$ . Se modifica el lado izquierdo de las ECE y se escribe la ecuación (2.12) como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

En esta interpretación, el espacio-tiempo es curvo aún en ausencia de materia ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) puesto que la ecuación  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$  no admite como soluciones espacio-tiempos planos.

El movimiento de una partícula es descrito por su trayectoria en el espacio-tiempo,  $x^\mu(\lambda)$ , donde  $\lambda$  es un parámetro. Una partícula libre, i.e., una partícula sobre la que no se ejerce fuerza alguna (otra diferente de la gravedad), satisface la ecuación de la geodésica, la cual se escribe

$$V^\mu \nabla_\mu V^\nu = 0, \quad (2.14)$$

donde  $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$  es el vector tangente a la trayectoria (note que la ecuación geodésica escrita en esta forma asume que el parámetro  $\lambda$  es afín). La ecuación geodésica puede ser escrita como:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.15)$$

La ecuación geodésica aplica para los siguientes dos casos:

- Partículas con masa, en cuyo caso usualmente se toma como parámetro  $\lambda$  el llamado tiempo propio tal que el correspondiente vector tangente  $V^\mu$  está normalizado:  $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = -1$ .
- Partículas sin masa, en particular el fotón, en cuyo caso el vector tangente, usualmente denotado por  $k^\mu$  es nulo, i.e.,  $g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$ .

## 2.1. El modelo estándar de la cosmología moderna

A continuación se presentan los fundamentos de la cosmología moderna. Estos se siguen de las ECE introducidas anteriormente y de algunas hipótesis concernientes a la estructura del espacio-tiempo y a su contenido de materia. Una de las suposiciones esenciales de la cosmología es considerar que el universo es homogéneo e isotrópico espacialmente a gran escala. Esta afirmación se conoce como el *principio cosmológico* [1] y significa que las hipersuperficies son maximalmente simétricas, es decir, que como subvariedades admiten el mayor número de vectores de Killing posibles [1] y por lo tanto el mayor número de simetrías (para ver más detalladamente una introducción de la teoría de hipersuperficies revisar la parte final del capítulo 3 o el libro de Poisson [37]).

Se puede probar que si una variedad es de dimensión  $n$ , el mayor número de vectores de Killing linealmente independientes que puede admitir esta variedad es  $\frac{1}{2}n(n+1)$  [31, 1] (ver capítulo 13 del libro de Weinberg, [1]). Por lo tanto, las hipersuperficies espaciales tienen asociadas, para el caso de la cosmología estándar, seis simetrías o seis vectores de Killing, tres asociadas a la isotropía y tres a la homogeneidad [1], i. e., tres correspondientes a los tres tipos de rotaciones de ejes que puedo hacer en cualquier punto y tres asociadas a las translaciones espaciales. Además, para una variedad de cualquier dimensión con simetría maximal se puede probar que la curvatura solo depende de un parámetro [1], el cual, para el caso del modelo estándar, es una constante que determinará de manera única el tipo de geometría del universo, que puede ser euclidiana, hiperbólica o esférica [1, 28].

La hipótesis mencionada resulta ser muy restrictiva y las únicas métricas compatibles con este requerimiento se reducen a las llamadas métricas de Robertson-Walker [38, 1], las cuales se escriben en un sistema coordenado apropiado como:

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.1.1)$$

Esta métrica se encuentra caracterizada por dos cantidades, el factor de escala  $S(t)$  y una constante  $k$ , la cual caracteriza su curvatura espacial (esta puede asumir los valores 0,  $-1$  y  $+1$ , dependiendo de la curvatura de las hipersuperficies espaciales: localmente plano, localmente hiperbólico o localmente esférico, respectivamente) y es la constante que, como mencionamos antes, caracteriza totalmente la curvatura del espacio, dado que la simetría maximal lo permite.

El contenido de materia compatible con las simetrías del espacio-tiempo de homogeneidad e isotropía necesariamente está descrito por un tensor de momentum-energía (en el mismo sistema de coordenadas que la métrica definida en (2.1.1)) de la forma [1]:

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\mu(t), p(t), p(t), p(t)). \quad (2.1.2)$$

La cantidad  $\mu$  corresponde a una densidad de energía y  $p$  a una presión. Otras cosmologías también pueden ser compatibles con el tensor momentum-energía de un fluido perfecto, como algunos modelos de Bianchi. El modelo de fluido perfecto, por definición es isotrópico en el sistema coordenado de observadores

comóviles. De esta manera, un fluido perfecto no es compatible con un tensor de presión anisotrópica, el cual definimos en el capítulo 3, y que tiene que ver con componentes espaciales cruzadas del tensor  $T_{\mu\nu}$ , en este caso solo hay una presión isotrópica  $p(t)$ . Este tensor de fluido perfecto tampoco admite flujo de calor, pues las componentes espacio-temporales son nulas. Los modelos de Bianchi son compatibles con fluidos más generales, por ejemplo, uno donde hay campos electromagnéticos cosmológicos, los cuales necesariamente introducen una presión anisotrópica [39, 40].

### 2.1.1. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître

Sustituyendo la métrica de Robertson-Walker (2.1.1) en las ECE (2.8), se obtienen las llamadas ecuaciones de Friedmann-Lemaître:

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 = \frac{8\pi G\mu}{3} - \frac{k}{S^2}, \quad (2.1.1.3a)$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{4\pi G}{3}(\mu + 3p). \quad (2.1.1.3b)$$

Una consecuencia inmediata de estas dos ecuaciones es la ecuación de continuidad:

$$\dot{\mu} + 3H(\mu + p) = 0. \quad (2.1.1.4)$$

donde  $H \equiv \frac{\dot{S}}{S}$  es el parámetro de Hubble [28]. La ecuación de continuidad también puede ser obtenida directamente de la conservación del momentum-energía  $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ , como se mencionó antes.

Con el fin de determinar la evolución cosmológica, es más fácil combinar (2.1.1.3a) con (2.1.1.4). Para ello se asume una ecuación de estado para la materia cosmológica de la forma  $p = w\mu$ , con  $w \equiv w(S)$  no necesariamente constante. Con esta suposición, la ecuación de continuidad puede ser integrada para dar:

$$\mu(S) = \mu(S_0) \exp\left[-3 \int_{S_0}^S (1 + w(u)) \frac{du}{u}\right]. \quad (2.1.1.5)$$

Para el caso particular en que la cantidad  $w$  de la ecuación de estado es una constante, la densidad es

$$\mu(S) = \mu(S_0) \left(\frac{S}{S_0}\right)^{-3(1+w)}. \quad (2.1.1.6)$$

Esta incluye los dos principales tipos de materia que desempeñan un papel muy importante en cosmología, gas de partículas relativistas, con  $w = \frac{1}{3}$  y materia no relativista, con  $w \simeq 0$ .

Sustituyendo la ecuación (2.1.1.6) en la (2.1.1.4):

$$3\frac{\dot{S}^2}{S^2} = 8\pi G\mu_0 \left(\frac{S}{S_0}\right)^{-3(1+w)}, \quad (2.1.1.7)$$

donde, por convención, el subíndice '0' representa cantidades presentes ( $\mu_0 = \mu(S_0)$ ). Por tanto, se encuentra que  $\dot{S}^2 \propto S^{2-3(1+w)}$ , lo cual implica para la evolución del factor de escala:

- en un universo dominado por materia no relativista ( $w = 0$ ),  $S(t) \propto t^{2/3}$ ,

- y en un universo dominado por radiación ( $w = \frac{1}{3}$ ),  $S(t) \propto t^{1/2}$ .

Se puede hacer mención también a la constante cosmológica, la cual corresponde a una ecuación de estado  $w = -1$  y por tanto, implica una evolución exponencial para el factor de escala,  $S(t) \propto \exp(Ht)$ .

### 2.1.2. Parámetros cosmológicos

A continuación se definirán los parámetros cosmológicos más importantes. El más conocido de estos es el *parámetro de Hubble*  $H = \frac{\dot{S}}{S}$ , enunciado en párrafos anteriores, cuyo valor hoy se denomina *constante de Hubble*  $H_0 = \frac{\dot{S}(t_0)}{S(t_0)}$ . Se puede escribir la constante de Hubble en unidades de  $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ , el cual puede ser usado para estimar el orden de magnitud para la edad y el tamaño presente del universo, mediante un parámetro  $h$ :

$$H_0 \equiv 100 h \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}, \quad (2.1.2.8)$$

$$cH_0^{-1} = 3000 h^{-1} \text{Mpc}, \quad (2.1.2.9)$$

$$H_0^{-1} = 9.773 h^{-1} \text{Gyr}. \quad (2.1.2.10)$$

El parámetro  $h$  tiene su valor dentro del rango  $0.4 < h < 1$ , y en los últimos años se ha concluido por las observaciones que  $h = 0.70$ , con un error del 4%. Usando el parámetro de Hubble, se puede definir la *densidad de energía crítica*, la cual corresponde a la densidad de energía que debe tener el universo para que su geometría sea plana:

$$\mu_{\text{crit}} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.1.2.11)$$

En términos de la densidad de energía es posible definir el *parámetro densidad*

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \mu(t) = \frac{\mu(t)}{\mu_{\text{crit}}}, \quad (2.1.2.12)$$

cuyo signo puede ser usado para determinar la curvatura espacial. Para universos cerrados ( $k = +1$ ) se tiene que  $\Omega > 1$ , universos planos ( $k = 0$ ) se tiene  $\Omega = 1$ , y para universos abiertos ( $k = -1$ ) se tiene  $\Omega < 1$ .

Más generalmente, cuando varios tipos de materia coexisten cada uno de ellos con una ecuación de estado de la forma  $p_\alpha = w_\alpha \mu_\alpha$ , resulta conveniente introducir los parámetros adimensionales  $\Omega_\alpha$  para materia, radiación, constante cosmológica y curvatura:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{M}} &= \frac{8\pi G \mu_{\text{M}}}{3H^2}, & \Omega_{\Lambda} &= \frac{\Lambda}{3H^2}, \\ \Omega_{\text{R}} &= \frac{8\pi G \mu_{\text{R}}}{3H^2}, & \Omega_{\kappa} &= -\frac{\kappa}{S^2 H^2}. \end{aligned} \quad (2.1.2.13)$$

Los valores de estas cantidades en el tiempo actual se denotarán por

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{M}_0} &= \frac{8\pi G \mu_{\text{M}_0}}{3H_0^2}, & \Omega_{\Lambda_0} &= \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \\ \Omega_{\text{R}_0} &= \frac{8\pi G \mu_{\text{R}_0}}{3H_0^2}, & \Omega_{\kappa_0} &= -\frac{\kappa}{S_0^2 H_0^2}, \end{aligned} \quad (2.1.2.14)$$

los cuales expresan la tasa presente de la densidad de energía de las especies dadas con respecto a la densidad de energía crítica  $\mu_{\text{crit}}$ .

Las observaciones cosmológicas actuales permiten estimar los distintos parámetros cosmológicos como:

- Materia bariónica:  $\Omega_{\text{B}_0} = \Omega_{\text{B}_{\text{lum}}} + \Omega_{\text{B}_{\text{osc}}} \approx 0.05$ .
- Materia oscura:  $\Omega_{\text{DM}_0} = \Omega_{\text{CDM}_0} + \Omega_{\text{HDM}_0} \approx 0.25$ .
- Energía oscura (compatible con una constante cosmológica):  $\Omega_{\text{DE}_0} \equiv \Omega_{\Lambda_0} \approx 0.7$ .
- Radiación:  $\Omega_{\text{R}_0} \approx 5 \times 10^{-5}$ .

Por lo tanto, se puede con toda seguridad, rechazar la contribución de partículas relativistas a la densidad total de energía hoy, i.e.,  $\Omega_{\text{R}} \approx 0$ , la cual está dominada por partículas no-relativistas (bariones, materia oscura o neutrinos masivos) y por una constante cosmológica. La tasa de expansión en términos de su valor hoy [41] se puede escribir de la siguiente manera

$$H^2(S) = H_0^2 \left( \Omega_{\text{R}_0} \frac{S_0^4}{S^4} + \Omega_{\text{M}_0} \frac{S_0^3}{S^3} + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{\kappa_0} \frac{S_0^2}{S^2} \right) \quad (2.1.2.15)$$

$$= H_0^2 \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha_0} \exp \left[ -3 \int_{S_0}^S (1 + w_{\alpha}(u)) \frac{du}{u} \right], \quad (2.1.2.16)$$

donde  $\Omega_{\alpha_0}$  es el parámetro densidad para la  $\alpha$ -ésima componente (como radiación, materia, constante cosmológica, curvatura o alguna otra forma de materia/energía) y  $w_{\alpha}(S)$  es la correspondiente ecuación de estado, no necesariamente constante.

Una consecuencia interesante de estas definiciones es que con  $S = S_0$  y  $\Omega_{\text{R}} \approx 0$  por lo mencionado antes, se obtiene una relación de consistencia entre los parámetros cosmológicos, la llamada *regla de suma cósmica* [41]:

$$\Omega_{\text{M}_0} + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{\kappa_0} = 1. \quad (2.1.2.17)$$

Por lo que respecta a la segunda ecuación de Friedmann-Lemaître (véase la ecuación (2.1.1.3b)), se puede definir otro parámetro básico, el *parámetro desaceleración* [42]:

$$q = -\frac{S\ddot{S}}{\dot{S}^2} = \frac{4\pi G}{3H^2}(\mu + 3p). \quad (2.1.2.18)$$

El parámetro de desaceleración se puede escribir de otra manera teniendo presente los parámetros densidad para especies conocidas y desconocidas:

$$q = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1 + 3w_{\alpha}). \quad (2.1.2.19)$$

La expansión uniforme corresponde a  $q = 0$  y requiere una cancelación entre la materia y la energía de vacío. Para dominio de materia se tiene  $q > 0$ , mientras que para dominio de energía de vacío,  $q < 0$ . La densidad de radiación actual es despreciable pero, extrapolando hacia atrás, la radiación era dominante

en el pasado, puesto que su escala de densidad de energía se comporta según  $\mu_R \propto S^{-4}$ , en contraste con la materia no relativista ( $\mu_M \propto S^{-3}$ ). Es más, el contenido de materia presente parece estar dominado por la energía oscura similar a una constante cosmológica ( $w_\Lambda = -1$ ), y como consecuencia de esto, se tiene que la expansión del universo en el presente se está acelerando.

# CAPÍTULO 3

---

## FORMALISMO 1+3 DE LA RELATIVIDAD GENERAL

---

En este capítulo haremos un breve recuento de la formulación 1+3 de la relatividad general. Esto se puede hacer debido a que la variedad  $(M, g_{\alpha\beta})$  es *temporalmente orientable* [43], [15], es decir, es posible definir la noción de vectores dirigidos hacia el futuro y vectores dirigidos hacia el pasado.

Primero se definirán a partir de la cuadrivelocidad del fluido algunos tensores proyección. Luego se mostrarán cantidades cinemáticas en función de esta 4-velocidad, las cuales nos darán una idea de la simetría del espacio-tiempo, cantidades tales como el shear  $\sigma_{\alpha\beta}$  y la vorticidad  $\omega_{\alpha\beta}$ . Luego se muestra el tensor momentum-energía  $T_{\alpha\beta}$  en terminos de la 4-velocidad. En seguida se define el tensor de Weyl,  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , que es la parte sin traza del tensor de Riemann, i. e., es la parte del tensor de Riemann que no viene determinada por las ECE. Se verá luego que el tensor de Weyl se descompone en una parte eléctrica y en una parte magnética, permitiendo esto descomponer el tensor de Riemann en cuatro partes: una parte eléctrica de Weyl  $R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ , una parte magnética de Weyl  $R_H^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$  y dos partes que dependen de la traza del tensor de Riemann, el tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta}$ , que a través de las ECE se descompone en una contribución de fluido perfecto  $R_P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$  y en una de fluido imperfecto  $R_I^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ .

A partir de las ECE y de algunas propiedades geométricas se obtienen tres conjuntos de ecuaciones de evolución. El primer conjunto permite obtener la ecuación de Raychaudhuri, y la evolución para el shear y la vorticidad. El segundo conjunto da las ecuaciones de conservación de Energía y de Momentum. El tercer conjunto da la evolución de las partes eléctrica y magnética del tensor de Weyl. Este tercer conjunto es análogo a las ecuaciones de la electrodinámica.

Por último se presentan nociones de la teoría de hipersuperficies. Esto nos permite hablar del tensor de Riemann, conexión y métrica inducida en una hipersuperficie de cualquier naturaleza, que en nuestro caso luego usaremos para las hipersuperficies espaciales.

### 3.1. Cuadri-velocidad de materia promedio y cantidades cinemáticas

En cada punto del espacio tiempo se puede definir un campo de 4-velocidades que representa el movimiento promedio de la materia, las líneas de mundo asociadas a este campo se denominan “observadores

fundamentales". Se denota esta cuadrivelocidad por [42]:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad u_\alpha u^\alpha = -1, \quad (3.1.1)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio medido por los observadores de las líneas de mundo fundamentales.

Dado  $u^\alpha$ , se definen dos tensores de proyección, que tienen las siguientes propiedades:

$$U^\alpha_\beta := -u^\alpha u_\beta \quad \Rightarrow \quad U^\alpha_\gamma U^\gamma_\beta = U^\alpha_\beta, \quad U^\alpha_\alpha = 1, \quad U_{\alpha\beta} u^\beta = u_\alpha, \quad (3.1.2)$$

$$h_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \quad \Rightarrow \quad h^\alpha_\gamma h^\gamma_\beta = h^\alpha_\beta, \quad h^\alpha_\alpha = 3, \quad h_{\alpha\beta} u^\beta = 0. \quad (3.1.3)$$

El primer tensor proyecta a lo largo del vector 4-velocidad  $u^\alpha$  y el segundo determina las propiedades métricas de las hipersuperficies espaciales ortogonales a la 4-velocidad  $u^\alpha$ . También se define el elemento de volumen, que depende del tensor de Levi-Civita:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} := u^\delta \eta_{\delta\alpha\beta\gamma} \quad \Rightarrow \quad \eta_{\alpha\beta\gamma} = \eta_{[\alpha\beta\gamma]}, \quad \eta_{\alpha\beta\gamma} u^\gamma = 0, \quad (3.1.4)$$

donde  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$  es el elemento de volumen 4-dimensional, ( $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{[\alpha\beta\gamma\delta]}$ ,  $\eta_{0123} = \sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|}$ ).

A partir de los tensores proyección se pueden definir dos derivadas adicionales: la derivada covariante temporal a lo largo de las líneas de mundo fundamentales, denotada por un punto y la derivada covariante proyectada ortogonalmente  $\tilde{\nabla}$ . Para cualquier tensor  $T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$  tenemos:

$$\dot{T}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} := u^\epsilon \nabla_\epsilon T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}, \quad (3.1.5)$$

$$\tilde{\nabla}_\epsilon T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} := h^\alpha_\zeta h^\beta_\eta h^\theta_\gamma h^\kappa_\delta h^\lambda_\epsilon \nabla_\lambda T^{\zeta\eta}_{\theta\kappa}. \quad (3.1.6)$$

Finalmente, usamos paréntesis angulares,  $\langle \rangle$ , para denotar proyecciones ortogonales de vectores y la parte libre de traza simétrica proyectada ortogonalmente de tensores de segundo rango, definiendo de esta manera:

$$\nu^{\langle\alpha\rangle} := h^\alpha_\beta \nu^\beta, \quad T^{\langle\alpha\beta\rangle} := [h^{\langle\alpha}_\gamma h^{\beta\rangle}_\delta - \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} h_{\gamma\delta}] T^{\gamma\delta}. \quad (3.1.7)$$

Por conveniencia, los paréntesis angulares también se usan para denotar proyecciones ortogonales de las derivadas covariantes temporales a lo largo de  $u^\alpha$ :

$$\dot{\nu}^{\langle\alpha\rangle} := h^\alpha_\beta \dot{\nu}^\beta, \quad \dot{T}^{\langle\alpha\beta\rangle} := [h^{\langle\alpha}_\gamma h^{\beta\rangle}_\delta - \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} h_{\gamma\delta}] \dot{T}^{\gamma\delta}. \quad (3.1.8)$$

Ahora, descomponiendo la primera derivada covariante de  $u_\alpha$  en sus partes irreducibles, definidas por sus propiedades de simetría:

$$\nabla_\alpha u_\beta = -u_\alpha \dot{u}_\beta + \tilde{\nabla}_\alpha u_\beta = -u_\alpha \dot{u}_\beta + \frac{1}{3} \Theta h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}, \quad (3.1.9)$$

donde la traza  $\Theta := \tilde{\nabla}_\alpha u^\alpha$  es la *rata de expansión volumétrica* del fluido, la cual está directamente relacionada con la constante de Hubble ( $H = \frac{\Theta}{3}$ );  $\sigma_{\alpha\beta} := \tilde{\nabla}_{\langle\alpha} u_{\beta\rangle}$  es el *tensor de shear*, simétrico y libre de traza,



$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{(\alpha\beta)}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}u^\beta = 0$ ,  $\sigma_\alpha^\alpha = 0$ , que describe la rata de distorsión del flujo de materia; y  $\omega_{\alpha\beta} := \tilde{\nabla}_{[\alpha}u_{\beta]}$  es el *tensor de vorticidad*, un tensor antisimétrico, ( $\omega_{\alpha\beta} = \omega_{[\alpha\beta]}$ ,  $\omega_{\alpha\beta}u^\beta = 0$ ), que describe la rotación de la materia, con respecto a un marco no rotante con propagación de Fermi.

A partir de estas cantidades es directo definir unas cantidades auxiliares que serán de utilidad. Definimos el vector vorticidad por:

$$\omega^\alpha := \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta\gamma} \quad \Rightarrow \quad \omega_\alpha u^\alpha = 0, \quad \omega_{\alpha\beta}\omega^\beta = 0, \quad (3.1.10)$$

definimos además las magnitudes:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(\omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}) \geq 0, \quad (3.1.11)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}) \geq 0, \quad (3.1.12)$$

y la escala de longitud promedio o factor de escala  $S$  determinado por:

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{1}{3}\Theta = H. \quad (3.1.13)$$

## 3.2. Tensor Momentum-Energía

El *Tensor Momentum-Energía* se puede descomponer con respecto a la cuadrivelocidad en:

$$T_{\alpha\beta} = \mu u_\alpha u_\beta + q_\alpha u_\beta + u_\alpha q_\beta + p h_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta}, \quad (3.2.1)$$

donde  $\mu = (T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta)$  es la *densidad de energía relativista* relativa a  $u^\alpha$ ,  $q^\alpha = -T_{\beta\gamma}u^\beta h^{\gamma\alpha}$  es la *densidad de momentum relativista*, que también es el flujo de energía relativo a  $u^\alpha$ ,  $p = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta})$  es la *presión isotrópica* y  $\pi_{\alpha\beta} = T_{\gamma\delta}h^\gamma_{(\alpha}h^\delta_{\beta)}$  es el *tensor de presión anisotrópica*, el cual por definición es libre de traza.

Se tienen las siguientes propiedades:

$$q_\alpha u^\alpha = 0, \quad \pi_\alpha^\alpha = 0, \quad \pi_{\alpha\beta} = \pi_{(\alpha\beta)}, \quad \pi_{\alpha\beta}u^\beta = 0. \quad (3.2.2)$$

La física viene a ser modelada por una ecuación de estado, que nos relaciona la presión  $p$  con la densidad  $\mu$ . Por ejemplo, es muy conocido el caso donde se imponen las restricciones:

$$q^\alpha = \pi^{\alpha\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_{\alpha\beta} = \mu u_\alpha u_\beta + p h_{\alpha\beta}, \quad (3.2.3)$$

la cual caracteriza a un fluido perfecto, que en general tiene una ecuación de estado  $p = p(\mu)$ . Si aparte de eso asumimos  $p = 0$ , tenemos el caso mas simple, materia libre de presión o materia oscura fría.

## 3.3. El tensor de curvatura de Weyl

Recordemos que el tensor de Ricci se define como la traza de los índices 1 y 3 del tensor de Riemann:

$$R_{\alpha\beta} = R^\gamma_{\alpha\gamma\beta}. \quad (3.3.1)$$

Por lo tanto, esta parte del tensor de curvatura de Riemann se puede determinar a partir de las ECE. Queda una parte, que se llama el tensor de Weyl, que es precisamente la parte libre de traza del tensor de Riemann:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - E_{\alpha\beta\gamma\delta} - G_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (3.3.2)$$

donde:

$$E_{\alpha\beta\gamma\delta} := \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma}S_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}S_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}S_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}S_{\alpha\delta}), \quad (3.3.3)$$

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} := \frac{R}{12}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) := \frac{R}{12}g_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (3.3.4)$$

$$S_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}Rg_{\alpha\beta}. \quad (3.3.5)$$

Se puede comprobar, a partir de la definición de este tensor, que este tiene traza nula,

$$C^{\alpha}{}_{\beta\alpha\delta} = 0. \quad (3.3.6)$$

Este tensor guarda cierta analogía con el tensor de Maxwell o tensor campo electromagnético  $F_{\alpha\beta}$ . Recordemos que los campos eléctrico  $E_{\alpha}$  y magnético  $H_{\alpha}$  vienen dados en términos de este tensor:

$$E_{\alpha} = F_{\alpha\beta}u^{\beta} = E_{\langle\alpha}, \quad H_{\alpha} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\gamma} = {}^*F_{\alpha\beta}u^{\beta} = H_{\langle\alpha}, \quad (3.3.7)$$

donde \* denota el dual. La inversa de esta ecuación es:

$$F_{\alpha\beta} = 2u_{[\alpha}E_{\beta]} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}H^{\gamma}. \quad (3.3.8)$$

Por las Ecuaciones de Maxwell, cuando hay un término fuente, el tensor Campo Electro-Magnético cumple la siguiente relación:

$$\nabla_{\beta}F^{\alpha\beta} = j_e^{\alpha}. \quad (3.3.9)$$

El tensor campo electromagnético es antisimétrico, el tensor de Weyl tiene también algunas propiedades de antisimetría, gracias a estas propiedades, el tensor de Weyl cumple una ecuación similar a la ecuación que cumple el tensor de Faraday, donde el término fuente en este caso es una expresión que depende del tensor de Ricci y el escalar de Ricci:

$$\nabla^{\delta}C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \nabla_{[\beta}R_{\alpha]\gamma} + \frac{1}{6}g_{\gamma[\beta}\nabla_{\alpha]}R. \quad (3.3.10)$$

La demostración de esta fórmula está en el Apéndice B.

Esta similitud nos permite ver con más claridad el porque se puede descomponer el tensor de Curvatura de Weyl en una parte eléctrica  $E_{\alpha\beta}$  y en una parte magnética  $H_{\alpha\beta}$ , las cuales se definen como:

$$E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}u^{\gamma}u^{\delta}, \quad (3.3.11)$$

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\delta\epsilon}C^{\delta\epsilon}{}_{\beta\gamma}u^{\gamma}. \quad (3.3.12)$$

Estas satisfacen algunas identidades:

$$E_{\alpha}^{\alpha} = 0, \quad E_{\alpha\beta} = E_{(\alpha\beta)}, \quad E_{\alpha\beta}u^{\beta} = 0. \quad (3.3.13)$$

$$H_{\alpha}^{\alpha} = 0, \quad H_{\alpha\beta} = H_{(\alpha\beta)}, \quad H_{\alpha\beta}u^{\beta} = 0. \quad (3.3.14)$$

Estas representan el “campo gravitacional libre”, son las responsables de la acción gravitacional a distancia, las fuerzas de marea y de la propagación de las ondas gravitacionales e influyen el movimiento de la materia y de la radiación a través del *desvío geodésico*. Como vemos, el tensor de Ricci viene dado por la distribución de materia local, pero el tensor de Weyl es aquella parte de la curvatura que no viene directamente dada por la distribución de materia (en realidad viene dado indirectamente por la ecuación (3.3.10)). Este tensor es el responsable, por ejemplo, del efecto del lente gravitacional, que es una manifestación de la curvatura del Espacio-Tiempo, en un caso como el lente de Schwarzschild, ya que la luz viaja por fuera de la distribución, lo que quiere decir que el tensor de Ricci y el escalar de Ricci son nulos, por lo que solamente interactúan con la distribución de materia gracias al tensor de Weyl.

Como vemos, hay una analogía, que aun no se entiende del todo, entre el electromagnetismo y la gravitación. Es esto lo que nos permite hablar del fenómeno del Gravitoelectromagnetismo. Aunque la analogía es evidente, hay diferencias. Algunas de estas son [44]:

- Las Ecuaciones de Maxwell son lineales mientras que las ECE no lo son.
- Mientras la razón entre la masa gravitacional y la masa inercial es universal, lo mismo no aplica para la razón entre la carga eléctrica y la masa inercial, i.e., no hay contraparte electromagnética del principio de equivalencia.
- El análogo gravitacional de la densidad de carga eléctrica  $\rho_e$  es  $\rho_m + T_{\alpha}^{\alpha}$ , siendo  $\rho_m$  la densidad de masa. En el caso de un fluido perfecto tenemos la correspondencia  $\rho_e \leftrightarrow \rho_m + 3p$ , lo cual muestra que se puede ver la presión como una fuente de campo gravitacional.
- En ambos casos, no hay monopolos magnéticos.
- No hay análogo gravitacional de la ley de inducción de Faraday.
- Si hay una clara correspondencia en la contraparte gravitacional de la ley de Ampère.

Por último, cuando se analiza el movimiento relativo de dos geodésicas cercanas, se puede usar la EDG, que es el tema de esta tesis. La aceleración relativa, como veremos más adelante, depende enteramente del tensor de curvatura de Riemann, por lo tanto de las partes eléctrica y magnética del tensor de Weyl. Para analizar la contraparte electromagnética, cuando analizamos el movimiento de dos partículas, dado

que no hay contraparte del principio de equivalencia debemos suponer que tienen la misma razón carga sobre masa, la ecuación de desvío de las líneas de mundo viene dado por la derivada covariante del tensor de Faraday [44]. Esta es otra razón para ver que la analogía es muy fuerte. Sin embargo, este tema tan interesante no es el objetivo de este trabajo, el lector interesado puede consultar bibliografía más especializada, [2], [44].

Teniendo en cuenta estas definiciones, es posible entonces descomponer el tensor de Riemann en cuatro componentes. Dos partes que dependen del tensor de Ricci y dos que dependen del tensor de Weyl. El tensor de Ricci se relaciona con el tensor Momentum-Energía a través de las ECE, hay una contribución  $R_P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$  que depende de las variables que aparecen en un fluido perfecto, tal como la presión isotrópica  $p$ , la densidad de energía  $\mu$  y la constante cosmológica  $\Lambda$ , mientras que hay otra contribución  $R_I^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ , de las variables que únicamente aparecen en un fluido imperfecto, tales como la presión anisotrópica  $\pi_{\alpha\beta}$  o la densidad de momentum-relativista  $q_\alpha$ . En cuanto a la parte que depende del tensor de Weyl, hay una parte  $R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$  que depende de la parte eléctrica del tensor de Weyl y una parte  $R_H^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$  que depende de la parte magnética. La descomposición del tensor de Riemann que se obtiene es la siguiente:

$$R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = R_P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + R_I^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + R_H^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \quad (3.3.15)$$

$$R_P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \frac{2}{3}(\mu + 3p - 2\Lambda)u^{[\alpha}u_{[\gamma}h^{\beta]}{}_{\delta]} + \frac{2}{3}(\mu + \Lambda)h^\alpha{}_{[\gamma}h^\beta{}_{\delta]}, \quad (3.3.16)$$

$$R_I^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = -2u^{[\alpha}h^{\beta]}{}_{[\gamma}q_{\delta]} - 2u_{[\gamma}h^{[\alpha}q^{\beta]}{}_{\delta]} - 2u^{[\alpha}u_{[\gamma}\pi^{\beta]}{}_{\delta]} + 2h^{[\alpha}{}_{[\gamma}\pi^{\beta]}{}_{\delta]}, \quad (3.3.17)$$

$$R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 4u^{[\alpha}u_{[\gamma}E^{\beta]}{}_{\delta]} + 4h^{[\alpha}{}_{[\gamma}E^{\beta]}{}_{\delta]}, \quad (3.3.18)$$

$$R_H^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 2\eta^{\alpha\beta\epsilon}u_{[\gamma}H_{\delta]\epsilon} + 2\eta_{\gamma\delta\epsilon}u^{[\alpha}H^{\beta]\epsilon}. \quad (3.3.19)$$

### 3.4. Las identidades de Ricci

El primer conjunto de ecuaciones surge de las *Identidades de Ricci* para el campo vectorial  $u^\alpha$ , i.e.

$$2\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}u^\gamma = R_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta u^\delta. \quad (3.4.1)$$

Al sustituir en (3.1.9), separando la parte ortogonal a  $u^\alpha$  en la traza, la parte simétrica libre de traza y la parte antisimétrica, obtenemos tres ecuaciones de propagación y al considerar similarmente la parte paralela, al separarla en la parte que depende de la traza, la parte simétrica libre de traza y la parte antisimétrica, obtenemos tres ecuaciones de ligadura. Las tres ecuaciones de propagación son:

1. La *Ecuación de Raychaudhuri*:

$$\dot{\Theta} - \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{u}^\alpha = -\frac{1}{3}\Theta^2 + (\dot{u}_\alpha \dot{u}^\alpha) - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda, \quad (3.4.2)$$

la cual es la *ecuación básica de la atracción gravitacional*. Podemos ver que una constante cosmológica positiva actúa como entidad de naturaleza repulsiva, contrario a la densidad de masa  $\mu$  y la presión  $p$ . Podemos ver, como habíamos señalado en la subsección anterior, que podemos considerar a la presión como una fuente de gravedad y considerar a  $(\mu + 3p)$  como una densidad de masa gravitacional activa.

2. La *Ecuación de Propagación de la Vorticidad*,

$$\dot{\omega}^{\langle\alpha\rangle} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma}\tilde{\nabla}_\beta\dot{u}_\gamma = -\frac{2}{3}\Theta\omega^\alpha + \sigma^\alpha_\beta\omega^\beta. \quad (3.4.3)$$

3. La *Ecuación de Propagación de Shear*

$$\dot{\sigma}^{\langle\alpha\beta\rangle} - \tilde{\nabla}^{\langle\alpha}\dot{u}^{\beta\rangle} = -\frac{2}{3}\Theta\sigma^{\alpha\beta} + \dot{u}^{\langle\alpha}\dot{u}^{\beta\rangle} - \sigma^{\langle\alpha}_\gamma\sigma^{\beta\rangle\gamma} - \omega^{\langle\alpha}\omega^{\beta\rangle} - \left(E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi^{\alpha\beta}\right), \quad (3.4.4)$$

donde el término fuente de presión anisotrópica  $\pi_{\alpha\beta}$  se anula para un fluido perfecto; esta ecuación muestra la estrecha relación entre el tensor eléctrico de Weyl y el tensor de Shear.

De estas ecuaciones solo mostramos como se deduce la primera en el Apéndice A. Las ecuaciones de ligadura son:

1. La *Ecuación  $0\alpha$* :

$$0 = (C_1)^\alpha = \tilde{\nabla}_\beta\sigma^{\alpha\beta} - \frac{2}{3}\tilde{\nabla}^\alpha\Theta + \eta^{\alpha\beta\gamma}[\tilde{\nabla}_\beta\omega_\gamma + 2\dot{u}_\beta\omega_\gamma] + q^\alpha, \quad (3.4.5)$$

lo cual nos muestra como el flujo de momentum, el cual es cero para un fluido perfecto, se relaciona con la inhomogeneidad espacial de la expansión.

2. La *Identidad de Divergencia de la Vorticidad*,

$$0 = (C_2) = \tilde{\nabla}_\alpha\omega^\alpha - (\dot{u}_\alpha\omega^\alpha). \quad (3.4.6)$$

3. La *Ecuación- $H_{\alpha\beta}$*

$$0 = (C_3)^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta} + 2\dot{u}^{\langle\alpha}\omega^{\beta\rangle} + \tilde{\nabla}^{\langle\alpha}\omega^{\beta\rangle} - (\text{curl } \sigma)^{\alpha\beta}, \quad (3.4.7)$$

la cual caracteriza al tensor magnético de Weyl como una cantidad construida de la distorsión de la vorticidad y del “curl” del shear,  $(\text{curl } \sigma)^{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta\langle\alpha}\tilde{\nabla}_\gamma\sigma^{\beta\rangle}_\delta$ .

### 3.5. Las identidades de Bianchi dos veces contraídas y las ecuaciones de conservación

Las identidades de Bianchi se utilizaron en el Apéndice B para deducir la ecuación de propagación del tensor de Weyl. Estas identidades se pueden escribir como:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \quad (3.5.1)$$

Contrayendo  $\lambda$  con  $\nu$  obtenemos:

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R^\nu_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \quad (3.5.2)$$

Si contraemos de nuevo, por ejemplo,  $\kappa$  con  $\mu$ , obtenemos:

$$R_{;\eta} - R^\mu_{\eta;\mu} - R^\nu_{\eta;\nu} = 0, \quad (3.5.3)$$

lo cual podemos escribir de manera equivalente a:

$$\left( R^\mu{}_\eta - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\eta R \right)_{;\mu} = 0, \quad (3.5.4)$$

o finalmente como:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} = 0. \quad (3.5.5)$$

Esta ecuación, por medio de las ECE implica inmediatamente la ecuación de la conservación del Tensor Momentum-Energía  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ . Proyectando esta ecuación paralela y ortogonalmente a  $u^\alpha$ , obtenemos las siguientes dos ecuaciones de propagación:

$$\dot{\mu} + \tilde{\nabla}_\alpha q^\alpha = -\Theta(\mu + p) - 2(\dot{\mu}_\alpha q^\alpha) - (\sigma^\alpha{}_\beta \pi^\beta{}_\alpha), \quad (3.5.6)$$

$$\dot{q}^{(\alpha)} + \tilde{\nabla}^\alpha p + \tilde{\nabla}_\beta \pi^{\alpha\beta} = -\frac{4}{3} \Theta q^\alpha - \sigma^\alpha{}_\beta q^\beta - (\mu + p) \dot{u}^\alpha - \dot{u}_\beta \pi^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta q_\gamma. \quad (3.5.7)$$

Para fluidos perfectos estas ecuaciones se reducen respectivamente a:

$$\dot{\mu} = -\Theta(\mu + p), \quad (3.5.8)$$

que es la *ecuación de conservación de la Energía* y una ecuación de ligadura:

$$0 = \tilde{\nabla}_\alpha p + (\mu + p) \dot{u}_\alpha, \quad (3.5.9)$$

que es la *ecuación de conservación del momentum*.

### 3.6. Las otras identidades de Bianchi

El tercer conjunto de ecuaciones proviene de las identidades de Bianchi, que podemos escribir de manera compacta como:

$$\nabla_{[\alpha} R_{\beta\gamma]\delta\epsilon} = 0. \quad (3.6.1)$$

A partir de estas identidades, contrayéndolas una vez, se obtiene la ecuación de propagación del tensor de Weyl mostrada en el Apéndice B. Teniendo en cuenta la descomposición del tensor de Weyl en una parte eléctrica y en una magnética, se obtienen dos ecuaciones de propagación, junto con dos ecuaciones de ligadura, que son análogas a las ecuaciones de campo de Maxwell [42], [45]. Las *ecuaciones de propagación* son:

$$\begin{aligned} \left( \dot{E}^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2} \dot{\pi}^{(\alpha\beta)} \right) - (\text{curl } H)^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^{\langle\alpha} q^{\beta\rangle} &= -\frac{1}{2} (\mu + p) \sigma^{\alpha\beta} - \Theta \left( E^{\alpha\beta} + \frac{1}{6} \pi^{\alpha\beta} \right) \\ &+ 3\sigma_\gamma^{\langle\alpha} \left( E^{\beta\rangle\gamma} - \frac{1}{6} \pi^{\beta\rangle\gamma} \right) - \dot{u}^{\langle\alpha} q^{\beta\rangle} \\ &+ \eta^{\gamma\delta\langle\alpha} \left[ 2\dot{u}_\gamma H^{\beta\rangle}_\delta + \omega_\gamma \left( E^{\beta\rangle}_\delta + \frac{1}{2} \pi^{\beta\rangle}_\delta \right) \right], \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

que es la *ecuación- $\dot{E}$*  [42] y:

$$\begin{aligned} \dot{H}^{(\alpha\beta)} + (\text{curl } E)^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\text{curl } \pi)^{\alpha\beta} &= -\Theta H^{\alpha\beta} + 3\sigma_\gamma^{\langle\alpha} H^{\beta\rangle\gamma} + \frac{3}{2} \omega^{\langle\alpha} q^{\beta\rangle} \\ &- \eta^{\gamma\delta\langle\alpha} \left[ 2\dot{u}_\gamma E^{\beta\rangle}_\delta - \frac{1}{2} \sigma^{\beta\rangle}_\gamma q_\delta - \omega_\gamma H^{\beta\rangle}_\delta \right], \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

que es la *ecuación  $\dot{H}$*  y donde hemos definido los “curls” o rotacionales como:

$$(\text{curl } H)^{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta} \langle \alpha \tilde{\nabla}_\gamma H^\beta \rangle_\delta, \quad (3.6.4)$$

$$(\text{curl } E)^{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta} \langle \alpha \tilde{\nabla}_\gamma E^\beta \rangle_\delta, \quad (3.6.5)$$

$$(\text{curl } \pi)^{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta} \langle \alpha \tilde{\nabla}_\gamma \pi^\beta \rangle_\delta. \quad (3.6.6)$$

Estas ecuaciones son las responsables de la propagación de las ondas gravitacionales.

Las ecuaciones de ligadura son:

$$\begin{aligned} 0 = (C_4)^\alpha = & \tilde{\nabla}_\beta \left( E^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \pi^{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{3} \tilde{\nabla}^\alpha \mu + \frac{1}{3} \Theta q^\alpha - \frac{1}{2} \sigma^\alpha_\beta q^\beta \\ & - 3\omega_\beta H^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta\gamma} \left[ \sigma_{\beta\delta} H^\delta_\gamma - \frac{3}{2} \omega_\beta q_\gamma \right], \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

que es la *Ecuación Divergencia de E* cuya fuente es el gradiente espacial de la Densidad de Energía, la cual puede considerarse como un análogo vectorial de la Ecuación de Poisson Newtoniana [46], permitiendo una acción de fuerza de marea a distancia. La otra ecuación de ligadura es:

$$\begin{aligned} 0 = (C_5)^\alpha = & \tilde{\nabla}_\beta H^{\alpha\beta} + (\mu + p)\omega^\alpha + 3\omega_\beta \left( E^{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \pi^{\alpha\beta} \right) \\ & + \eta^{\alpha\beta\gamma} \left[ \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\beta q_\gamma + \sigma_{\beta\delta} \left( E^\delta_\gamma + \frac{1}{2} \pi^\delta_\gamma \right) \right], \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

también conocida como la *ecuación divergencia de H*, cuya fuente es la vorticidad del fluido.

## 3.7. Hipersuperficies

Lo que se mostrará en esta última sección se basa en lo expuesto en el libro de Eric Poisson [37]. Dado un espacio-tiempo que está asociado a una métrica  $g_{\alpha\beta}$ , ¿cómo se puede definir una métrica inducida tridimensional  $h_{ab}$  sobre una hipersuperficie en particular? Y dada esta métrica, ¿es posible definir una derivada covariante sobre esta hipersuperficie, al igual que un tensor curvatura de Riemann? La respuesta, como veremos, es que sí.

La teoría de hipersuperficies es muy importante en la cosmología estándar ya que gracias a las propiedades de simetría de la métrica de FRW, se tienen hipersuperficies espaciales maximalmente simétricas [1] y se distinguen tres casos: geometría plana o euclidiana, geometría hiperbólica y geometría esférica. El modelo de Bianchi I se reduce al modelo de geometría euclídea, lo cual quiere decir, como veremos, que el tensor de Riemann triespacial se anula,  $R_{abcd} = 0$ .

### 3.7.1. Definición de Hipersuperficies

En una variedad espacio-tiempo 4-dimensional una *hipersuperficie* es una subvariedad 3-dimensional que puede ser temporal, espacial o nula. Una hipersuperficie particular  $\Sigma$  se selecciona, por ejemplo, imponiendo una restricción en las coordenadas,

$$\Phi(x^\alpha) = 0, \quad (3.7.1.1)$$

o dando ecuaciones paramétricas de la forma:

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a), \quad (3.7.1.2)$$

donde  $y^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) son las coordenadas intrínsecas a la hipersuperficie,. Por ejemplo, una 2-esfera en un espacio tridimensional plano se describe por:

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \quad (3.7.1.3)$$

donde  $R$  es el radio de la esfera; o podemos caracterizar la hipersuperficie por:

$$x = R \sin \theta \cos \phi, \quad (3.7.1.4)$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi, \quad (3.7.1.5)$$

$$z = R \cos \theta, \quad (3.7.1.6)$$

donde  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas intrínsecas.

### 3.7.2. Vector Normal

El vector  $\Phi_{,\alpha}$  es normal a la hipersuperficie porque el valor de  $\Phi$  solo cambia en la dirección ortogonal a  $\Sigma$ . Un vector unitario normal  $n_\alpha$  se puede introducir si la hipersuperficie no es nula. Esta se define por:

$$n^\alpha n_\alpha = \epsilon \equiv \begin{cases} -1 & \text{si } \Sigma \text{ es espacial,} \\ +1 & \text{si } \Sigma \text{ es temporal,} \end{cases} \quad (3.7.2.7)$$

y demandamos que  $n^\alpha$  apunte en la dirección de incremento de  $\Phi$ :  $n^\alpha n_\alpha > 0$ . Es fácil comprobar que  $n_\alpha$  está dada por:

$$n_\alpha = \frac{\epsilon \Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|^{1/2}}, \quad (3.7.2.8)$$

si la hipersuperficie es temporal o espacial.

Esta normal unitaria no está definida para un  $\Sigma$  nulo ya que  $g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}$  es igual a cero. En este caso se escoge:

$$k_\alpha = -\Phi_{,\alpha}. \quad (3.7.2.9)$$

El signo se escoge de tal manera que  $k^\alpha$  es dirigida al futuro cuando  $\Phi$  se incrementa hacia el futuro.

### 3.7.3. Métrica Inducida

La métrica intrínseca a la hipersuperficie  $\Sigma$  se obtiene al restringir el elemento de línea a desplazamientos confinados a la hipersuperficie. Se tiene que los vectores:

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}, \quad (3.7.3.10)$$



son tangentes a las curvas de  $\Sigma$  (esto implica que  $e_a^\alpha n_\alpha = 0$  en el caso no-nulo y  $e_a^\alpha k_\alpha = 0$  en el caso nulo). Ahora, para desplazamientos dentro de  $\Sigma$ :

$$ds_\Sigma^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.7.3.11)$$

$$= g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) \quad (3.7.3.12)$$

$$= h_{ab} dy^a dy^b, \quad (3.7.3.13)$$

donde:

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (3.7.3.14)$$

es llamada la *métrica inducida* o *primera forma fundamental*. Esta es un escalar con respecto a transformaciones de la forma  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ , ya que  $g_{\alpha\beta}$  transforma dos veces contravariante pero  $e_a^\alpha e_b^\beta$  transforman dos veces covariante; pero transforma como un tensor bajo transformaciones  $y^a \rightarrow y^{a'}$  de las coordenadas de la hipersuperficie.

### 3.7.4. Campos Tensoriales Tangentes y Derivada Covariante Intrínseca

Dada una hipersuperficie  $\Sigma$  puede haber campos tensoriales definidos solamente en  $\Sigma$  y que son puramente tangentes a la hipersuperficie, por lo que admiten la descomposición:

$$A^{\alpha\beta\cdots} = A^{ab\cdots} e_a^\alpha e_b^\beta \cdots. \quad (3.7.4.15)$$

Ahora, restringiremos nuestra atención al caso de un campo vectorial tangente  $A^\alpha$ , tal que:

$$A^\alpha = A^a e_a^\alpha, \quad A^\alpha n_\alpha = 0, \quad A_a = A_\alpha e_a^\alpha. \quad (3.7.4.16)$$

Definimos la *derivada covariante intrínseca* de un trivector  $A_a$  como la proyección de  $A_{\alpha;\beta}$  sobre la hipersuperficie:

$$A_{a|b} \equiv A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (3.7.4.17)$$

Veamos que esta derivada covariante está definida en la forma usual en términos de una conexión  $\Gamma_{bc}^a$  que es compatible con  $h_{ab}$ :

$$\begin{aligned} A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta &= (A_\alpha e_a^\alpha)_{;\beta} e_b^\beta - A_\alpha (e_{a;\beta}^\alpha) e_b^\beta \\ &= A_{a;\beta} e_b^\beta - A^\alpha e_{\alpha a;\beta} e_b^\beta \\ &= A_{a;\beta} e_b^\beta - A^c e_c^\alpha e_{\alpha a;\beta} e_b^\beta \\ &= \frac{\partial A_a}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} - e_c^\alpha e_{\alpha a;\beta} e_b^\beta A^c \\ &= A_{a,b} - \Gamma_{cab} A^c, \end{aligned} \quad (3.7.4.18)$$

donde hemos definido:

$$\Gamma_{cab} = e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta. \quad (3.7.4.19)$$

Por lo tanto la ecuación (3.7.4.17) es:

$$A_{a|b} = A_{a,b} - \Gamma_{ab}^c A_c. \quad (3.7.4.20)$$

Mostremos que si la condición de metricidad ( $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ ) se cumple en la variedad original, entonces también se cumple en la hipersuperficie,  $h_{ab|c} = 0$ . De hecho:

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma &= (g_{\alpha\beta} - \epsilon n_\alpha n_\beta)_{;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma \\ &= -\epsilon (n_{\alpha;\gamma} n_\beta + n_\alpha n_{\beta;\gamma}) e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.7.4.21)$$

porque  $n_\alpha e_a^\alpha = 0$ .

### 3.7.5. Curvatura Extrínseca

La cantidad  $A_{a|b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$  es la componente tangencial del vector  $A^\alpha_{;\beta} e^\beta_b$ . La pregunta que sigue es saber si este vector posee también una componente normal. Para ello:

$$\begin{aligned} A^\alpha_{;\beta} e^\beta_b &= g^\alpha_\mu A^\mu_{;\beta} e^\beta_b \\ &= (\epsilon n^\alpha n_\mu + h^\alpha_\mu) A^\mu_{;\beta} e^\beta_b \\ &= (\epsilon n^\alpha n_\mu + h^{am} e_a^a e_{\mu m}) A^\mu_{;\beta} e^\beta_b \\ &= \epsilon (n_\mu A^\mu_{;\beta} e^\beta_b - b) + h^{am} (A_{\mu;\beta} e^\mu_m e^\beta_b) e^\alpha_a, \end{aligned}$$

y vemos que solamente el segundo término es tangente a la hipersuperficie. Entonces:

$$\begin{aligned} A^\alpha_{;\beta} e^\beta_b &= -\epsilon (n_{\mu;\beta} A^\mu e^\beta_b) n^\alpha + h^{am} A_{m|b} e^\alpha_a \\ &= -\epsilon (n_{\mu;\beta} A^a e^\mu_a e^\beta_b) n^\alpha + A^a_{|b} e^\alpha_a \\ &= -\epsilon A^a (n_{\mu;\beta} e^\mu_a e^\beta_b) n^\alpha + A^a_{|b} e^\alpha_a. \end{aligned} \quad (3.7.5.22)$$

Introducimos el tri-tensor:

$$K_{ab} \equiv n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (3.7.5.23)$$

llamada la *curvatura extrínseca* o *segunda forma fundamental* de la hipersuperficie  $\Sigma$ ,

$$A^\alpha_{;\beta} e^\beta_b = A^a_{|b} e^\alpha_a - \epsilon A^a K_{ab} n^\alpha \quad (3.7.5.24)$$

y vemos que  $A^a_{|b}$  representa la parte puramente tangencial del campo vectorial mientras que  $-\epsilon A^a K_{ab}$  representa la componente normal entonces la componente normal se anula si y solo si la curvatura extrínseca se anula.

Se define otro escalar:

$$K \equiv h^{ab} K_{ab} = n^\alpha_{;\alpha}. \quad (3.7.5.25)$$

Si una congruencia de geodésicas intersecta la hipersuperficie, si esta es *convexa* ( $K > 0$ ) la congruencia es divergente y si es *cóncava* ( $K < 0$ ) la congruencia es convergente.

### 3.7.6. Ecuaciones de Gauss-Codacci

Las hipersuperficies constituyen subvariedades con su propia métrica inducida  $h_{ab}$  y su asociada derivada covariante intrínseca. De manera análoga definimos un tensor de curvatura intrínseco  $R^a{}_{bcd}$  por la relación:

$$A^c{}_{|ab} - A^c{}_{|ba} = -R^c{}_{dab}A^d, \quad (3.7.6.26)$$

lo que conduce a la siguiente ecuación:

$$R^c{}_{dab} = \Gamma^c{}_{db,a} - \Gamma^c{}_{da,b} + \Gamma^c{}_{ma}\Gamma^m{}_{db} - \Gamma^c{}_{mb}\Gamma^m{}_{da}. \quad (3.7.6.27)$$

Es posible entonces relacionar el tensor de Riemann  $R_{abcd}$  de las hipersuperficies espaciales con el tensor de Riemann de la variedad espacio-tiempo  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  [37]:

$$R_{abcd} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}e^\alpha{}_a e^\beta{}_b e^\gamma{}_c e^\delta{}_d - K_{ac}K_{bd} + K_{ad}K_{bc}. \quad (3.7.6.28)$$

El tensor de Riemann proyectado con cuatro dimensiones (obtenidas al multiplicar por  $e^\alpha{}_\alpha$ ) viene dado por[14]:

$${}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} = h^{\alpha'}{}_\alpha h^{\beta'}{}_\beta h^{\gamma'}{}_\gamma h^{\delta'}{}_\delta R_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} - v_{\alpha\gamma}v_{\beta\delta} + v_{\alpha\delta}v_{\beta\gamma}, \quad (3.7.6.29)$$

donde  $v_{\alpha\beta} = \tilde{\nabla}_\beta u_\alpha$  es el tensor de flujo relativo entre dos observadores cercanos.

Usando las descomposiciones del tensor de Riemann y de  $u_{\alpha;\beta}$  es posible escribir el tensor de Riemann espacial proyectado de la forma [14]:

$$\begin{aligned} {}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} = & -\eta_{\alpha\beta\kappa}\eta_{\gamma\delta\lambda}E^{\kappa\lambda} + \frac{1}{3}\left(\mu - \frac{1}{3}\Theta^2 + \Lambda\right)(h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}) \\ & + \frac{1}{2}(h_{\alpha\gamma}\pi_{\beta\delta} + \pi_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}\pi_{\beta\gamma} - \pi_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}) \\ & - \frac{1}{3}\Theta[h_{\alpha\gamma}(\sigma_{\beta\delta} + \omega_{\beta\delta}) + (\sigma_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\gamma})h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}(\sigma_{\beta\gamma} + \omega_{\beta\gamma}) - (\sigma_{\alpha\delta} + \omega_{\alpha\delta})h_{\beta\gamma}] \\ & - (\sigma_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\gamma})(\sigma_{\beta\delta} + \omega_{\beta\delta}) + (\sigma_{\alpha\delta} + \omega_{\alpha\delta})(\sigma_{\beta\gamma} + \omega_{\beta\gamma}). \end{aligned} \quad (3.7.6.30)$$

Esto nos da una descomposición irreducible del tensor de Riemann proyectado. En analogía a la variedad espacio-tiempo, el tensor de Ricci proyectado y el escalar de Ricci se definen respectivamente por:

$${}^3R_{\alpha\beta} = h^{\gamma\delta} {}^3R_{\alpha\gamma\beta\delta} = {}^3R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}, \quad (3.7.6.31)$$

$${}^3R = h^{\alpha\beta} {}^3R_{\alpha\beta}. \quad (3.7.6.32)$$

Las simetrías algebraicas de  ${}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  están dadas por [14]:

$${}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^3R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} \quad (3.7.6.33)$$

y

$$\begin{aligned} {}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} - {}^3R_{\gamma\delta\alpha\beta} = & -\frac{2}{3}\Theta(h_{\alpha\gamma}\omega_{\beta\delta} + \omega_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}\omega_{\beta\gamma} - \omega_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}) \\ & - 2(\sigma_{\alpha\gamma}\omega_{\beta\delta} + \omega_{\alpha\gamma}\sigma_{\beta\delta} - \sigma_{\alpha\delta}\omega_{\beta\gamma} - \omega_{\alpha\delta}\sigma_{\beta\gamma}). \end{aligned} \quad (3.7.6.34)$$

Se sigue de arriba que  ${}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^3R_{\gamma\delta\alpha\beta}$  en ausencia de vorticidad, en cuyo caso el tensor espacial de Riemann posee todas las simetrías de su contraparte 4-dimensional.

Contrayendo el primer y el tercer índices obtenemos lo que usualmente se conoce como fórmula de Gauss-Codacci:

$${}^3R_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} \left( \mu - \frac{1}{3}\Theta^2 + \sigma^2 - \omega^2 + \Lambda \right) h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\Theta(\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}) + \sigma_{\gamma\langle\alpha}\sigma_{\beta\rangle}^{\gamma} - \omega_{\gamma\langle\alpha}\omega_{\beta\rangle}^{\gamma} + 2\sigma_{\gamma[\alpha}\omega_{\beta]}^{\gamma}, \quad (3.7.6.35)$$

y donde una contracción adicional nos conduce a la ecuación de Friedmann generalizada:

$${}^3R = 2 \left( \mu - \frac{1}{3}\Theta^2 + \sigma^2 - \omega^2 + \Lambda \right). \quad (3.7.6.36)$$

Para el caso de un universo FLRW el tensor de Riemann espacial se puede escribir así:

$${}^3R = 2\mu - \frac{2}{3}\Theta^2 = \frac{6k}{S^2} \quad (3.7.6.37)$$

donde  $k$  es una constante, 0, 1 o  $-1$ .

# CAPÍTULO 4

## UNIVERSOS DE FLRW Y RELACIONES OBSERVACIONALES

El modelo estándar de la cosmología se basa en el principio Copernicano, es decir, que el Espacio-Tiempo es homogéneo e isotrópico en todo punto [15], [1], [2]. El asumir un Espacio-Tiempo de este estilo implica que el fluido de Materia-Energía debe ser un fluido perfecto [1], es decir:

$$\pi_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.1}$$

$$q_\alpha = 0. \tag{4.2}$$

Por otro lado, tenemos que la métrica de RW es conformalmente plana, es decir, que el tensor de Weyl es igual a cero [1], [15]. Esta métrica también tiene shear y vorticidad nulas [2], [42]. Tenemos entonces:

$$0 = \dot{u}^\alpha = \sigma_{\alpha\beta} = \omega^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 0 = E_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad 0 = X_\alpha = Z_\alpha = \tilde{\nabla}_\alpha p \tag{4.3}$$

donde  $X_\alpha \equiv \tilde{\nabla}_\alpha \mu$ ,  $Z_\alpha \equiv \tilde{\nabla}_\alpha \Theta$ . El primer conjunto de ecuaciones nos muestra que las cantidades cinemáticas son localmente isotrópicas, el segundo que estos universos son conformalmente planos y el tercero nos dice que la isotropía local en cada punto implica homogeneidad [1], [42]. Estas implicaciones siguen de asumir un universo barotrópico,  $p = p(\mu)$ .

### 4.1. Coordenadas y Métrica

En coordenadas comóviles la métrica toma la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t)(dr^2 + f^2(r)d\Omega^2), \quad u^\alpha = \delta_0^\alpha \tag{4.1.1}$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ ,  $u_\alpha = -\nabla_\alpha t$ , y  $\frac{\dot{S}}{S} = \frac{1}{3}\Theta$ , caracterizando a  $S(t)$  como el factor de escala para las distancias entre cualquier par de observadores fundamentales. Como podemos ver, este factor de escala solo depende del tiempo cósmico por lo que la expansión de materia es isotrópica. La función  $f(r)$  toma tres posibles valores dependiendo del valor de la constante  $k$ :

$$f(r) = \begin{cases} \sin r & k = +1, \\ r & k = 0, \\ \sinh r & k = -1. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

## 4.2. Ecuaciones Dinámicas

Las Ecuaciones que gobiernan la dinámica de este modelo son la ecuación (3.5.8), la ecuación de Raychudhuri (3.4.2), que escrita en términos del factor de escala  $S(t)$  toma la forma:

$$3\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{1}{2}(\mu + 3p) = 0, \quad (4.2.1)$$

y la ecuación de Friedmann que se sigue de la relación de Gauss-Codacci:

$${}^3R = 2\mu - \frac{2}{3}\Theta^2 = \frac{6k}{S^2}. \quad (4.2.2)$$

Cualesquiera dos de estas ecuaciones implica la tercera, siempre y cuando  $\dot{S} \neq 0$ .

## 4.3. Observaciones

Las observaciones astronómicas están basadas en la radiación que viaja a través del Espacio-Tiempo y que llegan a nosotros a través de geodésicas nulas. En el caso del universo de FLRW es posible escoger geodésicas radiales, por lo que para estas geodésicas  $ds^2 = d\theta = d\phi = 0$ , por lo que se sigue que  $0 = -dt^2 + S^2(t)dr^2$ . De aquí se sigue que la radiación emitida en E y recibida en O obedece las siguientes relaciones:

$$r = \int_E^O dr = \int_{t_E}^{t_O} \frac{dt}{S(t)} = \int_{S_E}^{S_O} \frac{dS}{S(t)\dot{S}(t)} \quad (4.3.1)$$

donde el término  $\dot{S}(t)$  ha de encontrarse usando la ecuación de Friedmann (4.2.2).

### 4.3.1. Redshift

Vamos a considerar un pulso de luz que se emite en E y llega a O. Definimos  $1 + z_c$ , siendo  $z_c$  el redshift cosmológico, como la razón entre la longitud de onda medida por el observador O,  $\lambda_O$  y la longitud de onda emitida en E,  $\lambda_E$ . Dado que la longitud de onda es inversamente proporcional al período entonces:

$$(1 + z_c) = \frac{\lambda_O}{\lambda_E} = \frac{\Delta T_O}{\Delta T_E} \quad (4.3.1.2)$$

Podemos interpretar el período  $\Delta T$  como el tiempo entre cresta y cresta de la onda de luz. La distancia propia comóvil, tal como la definimos en la ecuación (4.3.1), no depende del tiempo cosmológico, es decir, dos observadores comóviles siempre estarán separados por la misma distancia propia comóvil  $r$ , es decir que las galaxias típicas tienen coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  constantes. Por lo tanto, consideremos primero una cresta que sale de la fuente en el tiempo cósmico  $t_E$  y llega al observador en el tiempo cosmológico  $t_0$ . Ahora, otra cresta que sale en el tiempo  $t_E + \Delta T_E$  y llega al observador en el tiempo  $t_0 + \Delta T_0$  atravesando la misma distancia propia comóvil que atraviesa la primera cresta. Por lo tanto tenemos:

$$r = \int_{t_E + \Delta T_E}^{t_0 + \Delta T_0} \frac{dt}{S(t)} = \int_{t_E}^{t_0} \frac{dt}{S(t)} \quad (4.3.1.3)$$

Podemos descomponer estas integrales en intervalos de integración determinados:

$$\int_{t_E + \Delta T_E}^{t_0 + \Delta T_0} \frac{dt}{S(t)} = \int_{t_E + \Delta T_E}^{t_0} \frac{dt}{S(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T_0} \frac{dt}{S(t)} \quad (4.3.1.4)$$

$$\int_{t_E}^{t_0} \frac{dt}{S(t)} = \int_{t_E}^{t_E+\Delta T_E} \frac{dt}{S(t)} + \int_{t_E+\Delta T_E}^{t_0} \frac{dt}{S(t)} \quad (4.3.1.5)$$

Igualando estas dos expresiones, vemos que el primer término de la derecha de (4.3.1.4) se anula con el segundo de la derecha de (4.3.1.5), de tal manera que:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta T_0} \frac{dt}{S(t)} = \int_{t_E}^{t_E+\Delta T_E} \frac{dt}{S(t)} \quad (4.3.1.6)$$

Ahora, teniendo en cuenta que los períodos de las señales de luz son tan cortos que el factor de escala practicamente no cambia, tenemos entonces que:

$$\frac{\Delta T_0}{S(t_0)} = \frac{\Delta T_E}{S(t_E)} \quad (4.3.1.7)$$

De esta manera:

$$(1 + z_c) = \frac{\lambda_0}{\lambda_E} = \frac{\Delta T_0}{\Delta T_E} = \frac{S(t_0)}{S(t_E)} \quad (4.3.1.8)$$

Como es de esperarse por la isotropía espacial el redshift cosmológico solo depende del tiempo cosmológico desde el cual se emite la señal de luz y no de la dirección desde la cual se observa. Cuando se considera un universo anisotrópico el redshift depende directamente de la dirección en la cual se observe, pues no todas las direcciones son equivalentes [47], [48], [49]. Como pudimos ver, el redshift es un efecto de dilatación temporal, esto implica que es acromático, es decir, es independiente de la frecuencia de la onda emitida. Otra implicación es que el ancho de cualquier banda de frecuencia emitida  $d\nu_E$  es alterada proporcionalmente al redshift cuando esta alcanza al observador, esto es, el ancho de la banda observada es  $d\nu_0 = (1 + z)d\nu_E$ .

Recordemos que este es solamente el redshift cosmológico. Ninguna galaxia esta sola, interactua gravitacionalmente con otras galaxias y está ubicada en un cúmulo o cluster de galaxias, por lo que estos efectos gravitacionales locales ocasionados por estas inhomogeneidades aseguran movimientos peculiares que tienen una contribución importante, dependiendo del caso, al redshift total que es medido.

### 4.3.2. Áreas

La segunda magnitud importante en las observaciones astronómicas es el tamaño aparente. Consideremos rayos de luz convergiendo a un observador en un tiempo  $t_0$  y en un ángulo sólido  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ . En el tiempo  $t_E$  estos rayos forman un área  $dA = S^2(t_E)f^2(r)d\Omega$  que es ortogonal a los rayos de luz, donde  $r$  esta dado por la ecuación (4.3.1). De esta manera definimos la *distancia área observador*  $r_0(z)$ , por la relación de área estándar, encontramos:

$$dA = r_0^2 d\Omega \quad \rightarrow \quad r_0^2 = S^2(t_E)f^2(r) \quad (4.3.2.9)$$

Dado que estos modelos son isotrópicos alrededor de cada punto, cosa que no sucede en los modelos de Bianchi, esta misma distancia relaciona el ángulo observado  $\alpha$  correspondiente a una longitud de escala  $l$  ortogonal a los rayos de luz:

$$l = r_0\alpha \quad (4.3.2.10)$$

Se puede entonces calcular  $r_0$  a partir de esta formula junto con la ecuación (4.3.1) y la ecuación de Friedmann, o a partir de la Ecuación de Desvío Geodésico (ver Apéndice C) para obtener para una mezcla no interactuante de materia y radiación:

$$r_0(z) = \frac{1}{H_0 q_0 (q_0 + \beta - 1)} \frac{[(q_0 - 1)\{1 + 2q_0 z + q_0 z^2(1 - \beta)\}^{1/2} - (q_0 - q_0 \beta z - 1)]}{(1 + z)^2}, \quad (4.3.2.11)$$

donde  $\beta$  representa la razón materia a radiación:  $(1 - \beta)\mu_{m0} = 2\beta\mu_{r0}$  y  $q_0$  es el parámetro de desaceleración actual, definido por la ecuación (2.1.2.18). La relación estándar de Mattig para materia libre de presión se obtiene cuando  $\beta = 1$  [42] y la correspondiente para el dominio de radiación resulta para  $\beta = 0$ .

Podemos ver que una propiedad importante de esta magnitud  $r_0$  es que no es una función monotonamente creciente con el aumento del redshift cosmológico. Hay un redshift  $z_*$  para el cual la distancia área alcanza un máximo y luego decrece para mayores  $z$ ; de igual manera el tamaño aparente de un objeto de tamaño fijo alcanza un mínimo en ese punto y luego se incrementa conforme el objeto se mueve mas allá [50]. Para ver esto en un caso específico, consideremos el ejemplo mas simple, el universo Einstein-de Sitter con  $p = \Lambda = k = 0$ . Encontramos entonces:

$$\beta = 1, \quad q_0 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad r_0(z) = \frac{2}{H_0} \frac{1}{(1 + z)^{3/2}} (\sqrt{1 + z} - 1), \quad (4.3.2.12)$$

El reenfocamiento, el cual encontramos al hacer de esta expresión un máximo, es decir, al derivar e igualar a cero, se produce para un redshift  $z_* = 5/4$  [51]. Esto quiere decir que objetos mas lejanos para nosotros tendrán el mismo tamaño aparente que el de objetos mucho mas cercanos. Por ejemplo, un objeto a un redshift  $z_1 = 1023$ , que es aproximadamente en la superficie de última dispersión, aparecerá con el mismo tamaño angular de un objeto de idéntico tamaño que está a un redshift  $z_2 = 0.0019$ .

### 4.3.3. Luminosidad y Teorema de Reciprocidad

Definimos la *distancia área galaxia*  $r_G$  de la misma manera que  $r_0$ , pero suponiendo ahora congruencias de geodésicas que salen del observador O y llegan a la fuente. La expresión matemática para esta distancia es exactamente la misma que la dada por la definición (4.3.2.9), excepto que los tiempos  $t_E$  y  $t_0$  se intercambian. Usando la ecuación (4.3.1.8) se puede obtener el siguiente resultado [?]:

**Teorema de Reciprocidad:** La distancia área observador y la distancia área galaxia son iguales salvo un factor de redshift cosmológico:

$$\frac{r_0^2}{r_G^2} = \frac{1}{(1 + z)^2} \quad (4.3.3.13)$$

Esto es válido para cualquier espacio-tiempo que cumpla con los postulados de la Teoría de la Relatividad General. Se puede ver que es una consecuencia de la primera integral estándar de la EDG [52], [16], ver también capítulo 6. Como se ve en ese capítulo, esa integral se obtiene como consecuencia de que el espacio-tiempo está libre de torsión, es decir, como se vió en el capítulo 2, la conexión es simétrica en los dos índices inferiores. Por lo tanto esta relación también es válida para los modelos de Bianchi [42]. Pero en universos con torsión no nula esta primera integral ya no se puede derivar de la EDG ya que aparece



un término adicional al tensor de Riemann, que depende de la torsión, que hace que la ecuación pierda la simetría que permitía la integración [53]. Esto puede tener importantes consecuencias observacionales.

Ahora, de la conservación de fotones, el *flujo de luminosidad* recibido de la fuente de *luminosidad*  $L$  en el tiempo  $t_E$  que será medido es:

$$F = \frac{L(t_E)}{4\pi} \frac{1}{(1+z)^2} \frac{1}{r_G^2} \quad (4.3.3.14)$$

con  $r$  dado por (4.3.1) y los factores  $(1+z)$  que provienen del redshift de los fotones y la dilatación temporal de la rata de emisión, respectivamente. Al usar el teorema de reciprocidad podemos escribirla así:

$$F = \frac{L_{t_E}}{4\pi} \frac{1}{(1+z)^4} \frac{1}{r_0^2} \quad (4.3.3.15)$$

#### 4.3.4. Intensidad Específica

Nosotros medimos en una banda de longitud de onda muy limitada y no en todas las longitudes de onda. Además los aparatos de observación astronómica miden la intensidad específica (radiación recibida por unidad de ángulo sólido) en cada punto de cada imagen en vez de medir la luminosidad total de la fuente. Teniendo en cuenta estas consideraciones tenemos que si el *espectro fuente* es  $\mathcal{I}_{\nu_E}$ , i.e., una fracción  $\mathcal{I}_{\nu_E} d\nu_E$  de la radiación de la fuente que es emitida en el rango de frecuencia  $d\nu_E$ , por lo tanto, la *intensidad específica* observada está dada por:

$$I_\nu d\nu = \frac{B_E}{(1+z)^3} \mathcal{I}(\nu(1+z)) d\nu \quad (4.3.4.16)$$

donde  $B_E$  es el *brillo superficial* del objeto emisor. La distancia área  $r_0(z)$  se ha cancelado debido al teorema de reciprocidad. Esto nos dice que la intensidad aparente de la radiación detectada en cada dirección es independiente de la distancia área y depende solo del redshift de la fuente, el espectro y el brillo superficial. Junto con la distancia diametral angular (4.3.2.10) esta cantidad determina lo que actualmente es medido por un detector[54].

## ECUACIÓN DE DESVÍO GEODÉSICO

La Ecuación de Desvío Geodésico fue publicada en primer lugar por Levi-Civita en 1925 [55] y da la segunda derivada covariante de la distancia entre dos geodésicas infinitesimalmente cercanas en una variedad Riemanniana arbitraria n-dimensional:

$$\frac{\delta^2 \eta^\alpha}{\delta \nu^2} = -R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \eta^\mu V^\nu.$$

Aquí,  $\eta^\alpha$  es el vector infinitesimal que conecta las geodésicas,

$$V^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\nu}, \tag{5.1}$$

es el vector tangente a la geodésica básica y  $R^\alpha_{\mu\nu\delta}$  es el tensor de curvatura de Riemann. Esta ecuación generaliza la clásica *ecuación de Jacobi*[56] para la distancia entre dos geodésicas en una superficie 2-dimensional:

$$\frac{d^2 y}{d\sigma^2} + Ky = 0, \tag{5.2}$$

donde  $\sigma$  es el arco de la geodésica base y  $K[\sigma]$  es la *curvatura gaussiana* de la superficie.

Para derivar la Ecuación de Desvío Geodésico se asumen las siguientes suposiciones [2]:

1. Las dos curvas son geodésicas:

$$\frac{DV_1^\alpha}{d\tau} = 0, \tag{5.3}$$

$$\frac{DV_2^\alpha}{d\sigma} = 0, \tag{5.4}$$

donde  $\tau$  y  $\sigma$  son parámetros afines de las correspondientes curvas geodésicas.

2. La ley de correspondencia entre los puntos de las dos geodésicas, esto es, la definición del vector conexión  $\eta^\alpha[\tau]$ , es tal que, si  $d\tau$  es un arco infinitesimal en la geodésica 1 y  $d\sigma$  el arco en la geodésica 2 correspondiente a los vectores conexión  $\eta^\alpha[\tau]$  y  $\eta^\alpha[\tau + d\tau]$ , entonces:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = 1 + \lambda, \tag{5.5}$$

donde

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = 0. \tag{5.6}$$

3. Las geodésicas son infinitesimalmente cercanas en una vecindad U:

$$x_2^\alpha[\sigma] = x_1^\alpha[\tau] + \eta^\alpha[\tau], \quad (5.7)$$

donde el cambio relativo en la curvatura es pequeño:

$$\left| \frac{R_{,\alpha} \eta^\alpha}{R} \right| \ll 1, \quad (5.8)$$

y  $R^{-2}$  es aproximadamente la magnitud típica de las componentes del tensor de Riemann.

4. La diferencia entre los vectores tangentes a las dos geodésicas es infinitesimalmente pequeña en la vecindad U:

$$\left| \frac{\|\delta V^\alpha\|}{\|V^\alpha\|} \right| \ll 1, \quad (5.9)$$

donde  $\delta V^\alpha \equiv V_2^\alpha[\sigma] - V_1^\alpha[\tau]$ .

5. La Ecuación de Desvío Geodésico se halla despreciando términos mayores que el primer orden en  $\eta^\alpha$  y en  $\delta V^\alpha$ . Además, por simplicidad, el vector conexión  $\eta^\alpha$  es aquel que conecta los puntos de igual longitud de arco s en las dos geodésicas, entonces  $d\tau = d\sigma = ds$  y s satisface:

$$V_1^\alpha[s]V_{1\alpha}[s] = -1, \quad (5.10)$$

$$V_2^\alpha[s]V_{2\alpha}[s] = -1. \quad (5.11)$$

La evolución de la geodésica base viene descrita por la ecuación:

$$\frac{d^2 x_1^\alpha}{d\nu^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx_1^\beta}{d\nu} \frac{dx_1^\gamma}{d\nu} = 0, \quad (5.12)$$

y sean  $x_2^\alpha = x_1^\alpha + \eta^\alpha$  las coordenadas de la geodésica vecina, la cual satisface la ecuación:

$$\frac{d^2 x_2^\alpha}{d\nu^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx_2^\beta}{d\nu} \frac{dx_2^\gamma}{d\nu} = 0. \quad (5.13)$$

La conexión afín a primer orden se puede escribir

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_2^\alpha) = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_1^\alpha + \eta^\alpha) \cong \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_1^\alpha) + \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\sigma}(x_1^\alpha) \eta^\sigma. \quad (5.14)$$

Y por otro lado:

$$\frac{dx_2^\alpha}{d\nu} = \frac{dx_1^\alpha}{d\nu} + \frac{d\eta^\alpha}{d\nu}. \quad (5.15)$$

Por lo tanto, la ecuación resultante para la ecuación (5.13) es:

$$\frac{d^2 x_1^\alpha}{d\nu^2} + \frac{d^2 \eta^\alpha}{d\nu^2} + \left( \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_1^\alpha) + \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x_1^\sigma} \eta^\sigma \right) \frac{dx_2^\beta}{d\nu} \frac{dx_2^\gamma}{d\nu} \cong 0. \quad (5.16)$$

Reescribiendo  $x_1^\alpha \equiv x^\alpha$ ,  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_1^\alpha) \equiv \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ , tenemos:

$$\frac{d^2\eta^\alpha}{d\nu^2} + \frac{d^2x^\alpha}{d\nu^2} + \left( \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\sigma} \eta^\sigma \right) \left( \frac{dx^\beta}{d\nu} + \frac{d\eta^\beta}{d\nu} \right) \left( \frac{dx^\gamma}{d\nu} + \frac{d\eta^\gamma}{d\nu} \right) \cong 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{d^2\eta^\alpha}{d\nu^2} + \left( \frac{d^2x^\alpha}{d\nu^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\nu} \frac{dx^\gamma}{d\nu} \right) + \left( \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\nu} \frac{d\eta^\gamma}{d\nu} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\gamma}{d\nu} \frac{d\eta^\beta}{d\nu} \right) + \Gamma_{\beta\gamma,\sigma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\nu} \frac{dx^\gamma}{d\nu} \eta^\sigma \cong 0. \quad (5.18)$$

El término del primer paréntesis se anula debido a la ecuación geodésica 5.12. Los dos términos del segundo paréntesis se pueden escribir en un solo término, debido a la simetría de la conexión (véase que esto no es cierto para una teoría con torsión diferente de cero; (en el Apéndice D se muestra la EDG generalizada con torsión no nula) tenemos entonces:

$$\frac{d^2\eta^\alpha}{d\nu^2} + \Gamma_{\beta\gamma,\sigma}^\alpha \eta^\sigma \frac{dx^\beta}{d\nu} \frac{dx^\gamma}{d\nu} + 2\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{d\eta^\beta}{d\nu} \frac{dx^\gamma}{d\nu} = 0. \quad (5.19)$$

Esta ecuación es posible escribirla de manera más compacta acudiendo al concepto de derivada covariante a lo largo de una curva.

## 5.1. Derivada covariante a lo largo de una curva

Se considera un campo vectorial  $A^\mu$  definido sobre una curva cuyo parámetro afín es  $\nu$ . Al igual que como se define la derivada covariante sobre todo el espacio, la operación definida como:

$$\frac{\delta A^\mu}{\delta\nu} := \frac{dA^\mu}{d\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\nu} A^\rho, \quad (5.1.1)$$

define la derivada covariante a lo largo de la curva, con:

$$V^\sigma = \frac{dx^\sigma}{d\nu}, \quad (5.1.2)$$

el vector tangente a la curva. Escrito de forma más compacta:

$$\frac{\delta A^\mu}{\delta\nu} = A^\mu_{;\rho} V^\rho. \quad (5.1.3)$$

Como  $\frac{\delta A^\mu}{\delta\nu}$  es otro campo vectorial, podemos tomar su derivada covariante a lo largo de esta curva:

$$\frac{\delta^2 A^\mu}{\delta\nu^2} = \left( \frac{\delta A^\mu}{\delta\nu} \right)_{;\rho} V^\rho. \quad (5.1.4)$$

Utilizando entonces la definición de derivada covariante:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta A^\mu}{\delta\nu} \right)_{;\rho} &= \left( \frac{\delta A^\mu}{\delta\nu} \right)_{,\rho} + \Gamma_{\rho\beta}^\mu \left( \frac{\delta A^\beta}{\delta\nu} \right), \\ \left( \frac{\delta A^\mu}{\delta\nu} \right)_{;\rho} &= \left( \frac{dA^\mu}{d\nu} + \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu V^\sigma A^\gamma \right)_{,\rho} + \Gamma_{\rho\beta}^\mu \left( \frac{\delta A^\beta}{\delta\nu} \right). \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Entonces:

$$\left( \frac{\delta A^\mu}{\delta\nu} \right)_{;\rho} V^\rho = \left( \frac{dA^\mu}{d\nu} + \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu V^\sigma A^\gamma \right)_{,\rho} V^\rho + \Gamma_{\rho\beta}^\mu \frac{\delta A^\beta}{\delta\nu} V^\rho. \quad (5.1.6)$$

Tenemos por un lado:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dA^\mu}{d\nu} \right)_{,\rho} V^\rho &= \frac{d}{dx^\rho} \left( \frac{dA^\mu}{d\nu} \right) \frac{dx^\rho}{d\nu} \\ \left( \frac{dA^\mu}{d\nu} \right)_{,\rho} V^\rho &= \frac{d}{d\nu} \left( \frac{dA^\mu}{d\nu} \right) = \frac{d^2 A^\mu}{d\nu^2} \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\delta^2 A^\mu}{\delta\nu^2} = \frac{d^2 A^\mu}{d\nu^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\gamma,\rho} V^\sigma V^\rho A^\gamma + \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} V^\sigma_{,\rho} V^\rho A^\gamma + \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} V^\sigma A^\gamma_{,\rho} V^\rho + \Gamma^\mu_{\rho\beta} \left( \frac{dA^\beta}{d\nu} + \Gamma^\beta_{\sigma\alpha} V^\sigma A^\alpha \right) V^\rho \quad (5.1.7)$$

Debido a que  $V^\alpha$  es el vector tangente a la curva geodésica, esto es, la derivada covariante de  $V^\alpha$  a lo largo de la misma curva del vector tangente es nula,  $\frac{\delta V^\mu}{\delta\nu} = 0$ , podemos utilizar:

$$V^\sigma_{,\rho} V^\rho = -\Gamma^\beta_{\nu\rho} V^\nu V^\rho \quad (5.1.8)$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 A^\mu}{\delta\nu^2} &= \frac{d^2 A^\mu}{d\nu^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\gamma,\rho} V^\sigma V^\rho A^\gamma + \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} V^\sigma A^\gamma_{,\rho} V^\rho \\ &\quad - \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} A^\gamma \Gamma^\sigma_{\nu\rho} V^\nu V^\rho + \Gamma^\mu_{\rho\beta} \left( \frac{dA^\beta}{d\nu} + \Gamma^\beta_{\sigma\alpha} A^\sigma V^\alpha \right) V^\rho. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Ahora, volviendo a la ecuación (5.19), ecuación para la separación de dos geodésicas próximas, despejando  $\frac{d^2 \eta^\mu}{d\nu^2}$ :

$$\frac{d^2 \eta^\mu}{d\nu^2} = -\Gamma^\mu_{\beta\gamma,\sigma} \eta^\sigma V^\beta V^\gamma - 2\Gamma^\mu_{\beta\gamma} \frac{d\eta^\beta}{d\nu} V^\gamma \quad (5.1.10)$$

De esta manera, si consideramos a  $\eta^\mu$  como el campo vectorial  $A^\mu$ , reemplazando el valor de la derivada parcial segunda de la ecuación (5.1.9) y reescribiendo algunos índices mudos, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \eta^\mu}{\delta\nu^2} &= -\Gamma^\mu_{\beta\gamma,\sigma} \eta^\sigma V^\beta V^\gamma - 2\Gamma^\mu_{\beta\gamma} \frac{d\eta^\beta}{d\nu} V^\gamma \\ &\quad + \Gamma^\mu_{\beta\gamma,\sigma} \eta^\gamma V^\beta V^\sigma + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} V^\beta \frac{d\eta^\gamma}{dx^\rho} V^\rho \\ &\quad - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\beta_{\nu\rho} \eta^\gamma V^\nu V^\rho + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \left( \frac{d\eta^\gamma}{d\nu} + \Gamma^\gamma_{\sigma\alpha} \eta^\sigma V^\alpha \right) V^\beta, \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Agrupando términos semejantes:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \eta^\mu}{\delta\nu^2} &= -\Gamma^\mu_{\beta\gamma,\sigma} [\eta^\sigma V^\beta V^\gamma - \eta^\gamma V^\beta V^\sigma] \\ &\quad + \left[ -2\Gamma^\mu_{\beta\gamma} \frac{d\eta^\beta}{d\nu} V^\gamma + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} V^\beta \frac{d\eta^\gamma}{d\nu} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \frac{d\eta^\gamma}{d\nu} V^\beta \right] \\ &\quad - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\beta_{\nu\rho} \eta^\gamma V^\nu V^\rho + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\gamma_{\sigma\alpha} \eta^\sigma V^\alpha V^\beta \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Dado que  $\Gamma^\mu_{\beta\gamma} = \Gamma^\mu_{\gamma\beta}$  (torsión nula), los términos del segundo paréntesis se anulan y:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \eta^\mu}{\delta\nu^2} &= -\Gamma^\mu_{\beta\gamma,\sigma} [\eta^\sigma V^\gamma - \eta^\gamma V^\sigma] V^\beta - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\beta_{\nu\rho} [\eta^\gamma V^\nu V^\rho - \eta^\nu V^\rho V^\gamma] \\ \frac{\delta^2 \eta^\mu}{\delta\nu^2} &= -\Gamma^\mu_{\beta\gamma,\sigma} \eta^\sigma V^\gamma V^\beta + \Gamma^\mu_{\beta\gamma,\sigma} \eta^\gamma V^\sigma V^\beta - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\beta_{\nu\rho} \eta^\gamma V^\nu V^\rho + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\beta_{\nu\rho} \eta^\nu V^\rho V^\gamma \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Cambiando en el segundo término  $\gamma$  por  $\sigma$  y  $\sigma$  por  $\gamma$ , en el tercero,  $\rho$  por  $\beta$ ,  $\nu$  por  $\gamma$ ,  $\gamma$  por  $\sigma$  y  $\beta$  por  $\nu$  y  $\beta$  por  $\nu$ ,  $\nu$  por  $\sigma$ ,  $\rho$  por  $\beta$  en el cuarto término:

$$\frac{\delta^2 \eta^\mu}{\delta \nu^2} = -\Gamma^\mu_{\beta\gamma,\sigma} \eta^\sigma V^\gamma V^\beta + \Gamma^\mu_{\beta\sigma,\gamma} \eta^\sigma V^\gamma V^\beta - \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \Gamma^\nu_{\gamma\beta} \eta^\sigma V^\gamma V^\beta + \Gamma^\mu_{\nu\gamma} \Gamma^\nu_{\sigma\beta} \eta^\sigma V^\gamma V^\beta$$

$$\frac{\delta^2 \eta^\mu}{\delta \nu^2} = [\Gamma^\mu_{\beta\sigma,\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma,\sigma} + \Gamma^\mu_{\nu\gamma} \Gamma^\nu_{\sigma\beta} - \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \Gamma^\nu_{\gamma\beta}] \eta^\sigma V^\gamma V^\beta \quad (5.1.14)$$

El término entre paréntesis es el tensor de curvatura de Riemann, por lo que la ecuación de desvío geodésico queda escrita como:

$$\boxed{\frac{\delta^2 \eta^\mu}{\delta \nu^2} = -R^\mu_{\beta\gamma\sigma} V^\beta \eta^\gamma V^\sigma} \quad (5.1.15)$$

Este procedimiento se basó en las deducciones de Weinberg [1] y de Castañeda [57].

# CAPÍTULO 6

---

## ECUACIÓN DE DESVÍO GEODÉSICO EN FLRW

---

Este capítulo se basa fundamentalmente en [16]. Primero se demuestra un resultado muy importante que se presenta en dicha referencia, la primera integral. Esta primera integral nos permite deducir unas importantes consecuencias a nivel observacional y cosmológico, como es por ejemplo el teorema de reciprocidad nula [58]. Luego veremos el tensor de Riemann para FLRW expresado en términos de la densidad de energía, la presión y la constante cosmológica y presentaremos por completez la EDG triespacial, la cual solo dependerá del escalar de curvatura. Luego, presentaremos una propiedad muy importante que cumplen los vectores desviación en universos homogéneos, en la sección titulada *Espacio Pantalla*. Esta propiedad será de utilidad para después hallar la expresión de la EDG en FLRW, también conocida como la ecuación de Pirani [16], [59]. Analizaremos luego la EDG para el caso de una geodésica temporal, especialmente para el caso de un observador fundamental o un observador comóvil. Luego analizaremos el caso de las geodésicas nulas, un resultado importante relacionado con esta sección se deja para un Apéndice, la relación de Mattig. Se obtiene el teorema de reciprocidad nula y se analizan sus consecuencias.

### 6.1. Primera Integral

Para seguir la notación de [16] consideramos el campo vectorial tangente normalizado de la geodésica  $V^\alpha$ , parametrizado por un parámetro afín  $\nu$ . Entonces:

$$V^\alpha := \frac{dx^\alpha(\nu)}{d\nu}, \quad (6.1.1)$$

$$V_\alpha V^\alpha := \epsilon, \quad (6.1.2)$$

$$0 = \frac{\delta V^\alpha}{\delta \nu} = V^\beta \nabla_\beta V^\alpha, \quad (6.1.3)$$

donde  $\epsilon = +1, 0, -1$  si las geodésicas son espaciales, nulas o temporales, respectivamente, y donde la última de estas tres ecuaciones nos asegura que  $\mathbf{V}$  es un campo vectorial geodésico. Ahora, recordemos la expresión que obtuvimos de la EDG:

$$\frac{\delta^2 \eta^\alpha}{\delta \nu^2} = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta} V^\beta \eta^\gamma V^\delta, \quad (6.1.4)$$

donde  $V^\alpha$  es el campo vectorial geodésico. Esta expresión se obtuvo a partir de la ecuación de la geodésica, de la definición del tensor de Riemann en términos de la conexión y de considerar que el espacio-tiempo no admite torsión, es decir, que los términos de conexión son simétricos en los dos índices inferiores [31], [2], [28]. En caso de que se considere la torsión, aparece otro término que depende de esta y con el cual no podríamos continuar con el siguiente procedimiento y no podríamos obtener la primera integral de la EDG [53], lo cual tiene importantes consecuencias observacionales. La EDG generalizada con torsión se

presenta en el Apéndice D. La literatura es amplia en cuanto al tema de la torsión, tanto en la formulación de teorías con torsión como en propuestas de tests experimentales para corroborarlas [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67], [68], [69].

La primera integral nos relaciona basicamente los vectores desviación  $\eta_1^\alpha$ ,  $\eta_2^\alpha$  de dos geodésicas que comparten el mismo campo vectorial geodésico fiduciario  $V^\alpha$ . Es decir, ambas cumplen:

$$\frac{\delta^2 \eta_1^\alpha}{\delta \nu^2} = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta} V^\beta \eta_1^\gamma V^\delta, \quad (6.1.5)$$

$$\frac{\delta^2 \eta_2^\alpha}{\delta \nu^2} = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta} V^\beta \eta_2^\gamma V^\delta. \quad (6.1.6)$$

Multiplicando (6.1.5) por  $\eta_{2\alpha}$  y (6.1.6) por  $\eta_{1\alpha}$  y teniendo en cuenta que podemos subir y bajar los índices que se suman:

$$\eta_{2\alpha} \frac{\delta^2 \eta_1^\alpha}{\delta \nu^2} = -\eta_{2\alpha} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} V^\beta \eta_1^\gamma V^\delta = -\eta_2^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta} V^\beta \eta_1^\gamma V^\delta, \quad (6.1.7)$$

$$\eta_{1\alpha} \frac{\delta^2 \eta_2^\alpha}{\delta \nu^2} = -\eta_{1\alpha} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} V^\beta \eta_2^\gamma V^\delta = -\eta_1^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta} V^\beta \eta_2^\gamma V^\delta. \quad (6.1.8)$$

Teniendo en cuenta que las derivadas covariantes cumplen la regla de Leibnitz:

$$\eta_{2\alpha} \frac{\delta^2 \eta_{1\alpha}^\alpha}{\delta \nu^2} = \frac{\delta}{\delta \nu} \left( \eta_{2\alpha} \frac{\delta \eta_1^\alpha}{\delta \nu} \right) - \frac{\delta \eta_{2\alpha}}{\delta \nu} \frac{\delta \eta_1^\alpha}{\delta \nu}, \quad (6.1.9)$$

$$\eta_{1\alpha} \frac{\delta^2 \eta_{2\alpha}^\alpha}{\delta \nu^2} = \frac{\delta}{\delta \nu} \left( \eta_{1\alpha} \frac{\delta \eta_2^\alpha}{\delta \nu} \right) - \frac{\delta \eta_{1\alpha}}{\delta \nu} \frac{\delta \eta_2^\alpha}{\delta \nu}. \quad (6.1.10)$$

Así, cuando restamos estas dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \eta_{1\alpha} \frac{\delta^2 \eta_2^\alpha}{\delta \nu^2} - \eta_{2\alpha} \frac{\delta^2 \eta_1^\alpha}{\delta \nu^2} &= \frac{\delta}{\delta \nu} \left( \eta_{1\alpha} \frac{\delta \eta_2^\alpha}{\delta \nu} - \eta_{2\alpha} \frac{\delta \eta_1^\alpha}{\delta \nu} \right) - \left( \frac{\delta \eta_{2\alpha}}{\delta \nu} \frac{\delta \eta_1^\alpha}{\delta \nu} - \frac{\delta \eta_{1\alpha}}{\delta \nu} \frac{\delta \eta_2^\alpha}{\delta \nu} \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta \nu} \left( \eta_{1\alpha} \frac{\delta \eta_2^\alpha}{\delta \nu} - \eta_{2\alpha} \frac{\delta \eta_1^\alpha}{\delta \nu} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, restando (6.1.7) de (6.1.8) y teniendo en cuenta las propiedades de simetría del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} \eta_{1\alpha} \frac{\delta^2 \eta_2^\alpha}{\delta \nu^2} - \eta_{2\alpha} \frac{\delta^2 \eta_1^\alpha}{\delta \nu^2} &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} V^\beta V^\delta (\eta_2^\alpha \eta_1^\gamma) - R_{\alpha\beta\gamma\delta} V^\beta V^\delta (\eta_1^\alpha \eta_2^\gamma) \\ &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} V^\beta V^\delta (\eta_2^\alpha \eta_1^\gamma) - R_{\gamma\delta\alpha\beta} V^\beta V^\delta (\eta_1^\alpha \eta_2^\gamma) \\ &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} V^\beta V^\delta (\eta_2^\alpha \eta_1^\gamma) - R_{\alpha\beta\gamma\delta} V^\delta V^\beta (\eta_1^\gamma \eta_2^\alpha) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

De esta manera:

$$\frac{\delta}{\delta \nu} \left( \eta_{1\alpha} \frac{\delta \eta_2^\alpha}{\delta \nu} - \eta_{2\alpha} \frac{\delta \eta_1^\alpha}{\delta \nu} \right) = 0. \quad (6.1.12)$$

Con lo cual finalmente obtenemos la primera integral de la EDG [16]:

$$\boxed{\eta_{1\alpha} \frac{\delta \eta_2^\alpha}{\delta \nu} - \eta_{2\alpha} \frac{\delta \eta_1^\alpha}{\delta \nu} = const} \quad (6.1.13)$$



Esta ecuación es válida para cualquier modelo cosmológico que supone válida la Relatividad General, la cual es una teoría de la gravitación donde la torsión es nula y se cumple la condición de metricidad,  $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$  [60]. Por consiguiente, esta identidad es válida tanto para los modelos de Bianchi como para los modelos FLRW. Esto tiene consecuencias cosmológicas y observacionales, pues como veremos al final de este capítulo, la validez de esta primera integral implica la validez del teorema de reciprocidad [58], [42], [?].

## 6.2. Tensor de Curvatura de Riemann y EDG triespacial

Con un tensor de Weyl nulo, el tensor de Riemann viene dado por:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} + R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}) - \frac{1}{6}R(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}). \quad (6.2.1)$$

De las ECE podemos determinar  $R_{\alpha\beta}$  en términos del tensor de materia  $T_{\alpha\beta}$ :

$$R_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}. \quad (6.2.2)$$

Multiplicando por  $g^{\alpha\beta}$ :

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} - \Lambda g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}.$$

Simplificando:

$$R = -T + 4\Lambda \quad (6.2.3)$$

Cuando la materia toma la forma de un fluido perfecto, que es el caso de FLRW:

$$T_{\alpha\beta} = (\mu + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta} \quad (6.2.4)$$

Multiplicando de igual manera que en el caso anterior, por  $g^{\alpha\beta}$  para obtener  $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} T &= (\mu + p)g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + pg^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}, \\ T &= 3p - \mu. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

La expresión para el tensor de Ricci es:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= (\mu + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\mu - 3p + 4\Lambda)g_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}, \\ R_{\alpha\beta} &= (\mu + p)u_\alpha u_\beta + \frac{1}{2}(\mu - p + 2\Lambda)g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Por lo tanto, según la expresión para el tensor de curvatura de Riemann (6.2.1):

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} + R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}) - \frac{1}{6}R(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(\mu + p)u_\alpha u_\gamma g_{\beta\delta} + \frac{1}{4}(\mu - p + 2\Lambda)g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - \frac{1}{2}(\mu + p)u_\alpha u_\delta g_{\beta\gamma} \\ &\quad - \frac{1}{4}(\mu - p + 2\Lambda)g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}(\mu + p)u_\beta u_\delta g_{\alpha\gamma} + \frac{1}{4}(\mu - p + 2\Lambda)g_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} \\ &\quad - \frac{1}{2}(\mu + p)u_\beta u_\gamma g_{\alpha\delta} - \frac{1}{4}(\mu - p + 2\Lambda)g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} - \frac{1}{6}(\mu - 3p + 4\Lambda)(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \end{aligned}$$

Factorizando,

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(\mu + p)[g_{\alpha\gamma}u_\beta u_\delta - g_{\alpha\delta}u_\beta u_\gamma + g_{\beta\delta}u_\alpha u_\gamma - g_{\beta\gamma}u_\alpha u_\delta] \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mu - p + 2\Lambda)g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - \frac{1}{2}(\mu - p + 2\Lambda)g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - \frac{1}{6}(\mu - 3p + 4\Lambda)(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}), \\
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(\mu + p)[g_{\alpha\gamma}u_\beta u_\delta - g_{\alpha\delta}u_\beta u_\gamma + g_{\beta\delta}u_\alpha u_\gamma - g_{\beta\gamma}u_\alpha u_\delta] \\
&\quad + \frac{1}{6}(3\mu - 3p + 6\Lambda - \mu + 3p - 4\Lambda)g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + \frac{1}{6}(\mu - 3p + 4\Lambda - 3\mu + 3p - 6\Lambda)g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}, \\
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(\mu + p)[g_{\alpha\gamma}u_\beta u_\delta - g_{\alpha\delta}u_\beta u_\gamma + g_{\beta\delta}u_\alpha u_\gamma - g_{\beta\gamma}u_\alpha u_\delta] \\
&\quad + \frac{1}{6}(2\mu + 2\Lambda)g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - \frac{1}{6}(2\mu + 2\Lambda)g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}, \\
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(\mu + p)[g_{\alpha\gamma}u_\beta u_\delta - g_{\alpha\delta}u_\beta u_\gamma + g_{\beta\delta}u_\alpha u_\gamma - g_{\beta\gamma}u_\alpha u_\delta] + \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)[g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}].
\end{aligned}$$

Si el campo vectorial  $V^\alpha$  está normalizado,  $V_\alpha V^\alpha = \epsilon$ , tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta &= \frac{1}{2}(\mu + p)[g_{\alpha\gamma}u_\beta u_\delta V^\beta V^\delta - g_{\alpha\delta}V^\delta u_\beta u_\gamma V^\beta] \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mu + p)[g_{\beta\delta}V^\beta V^\delta u_\alpha u_\gamma - g_{\beta\gamma}V^\beta V^\delta u_\alpha u_\delta] \\
&\quad + \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)[g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}V^\beta V^\delta - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}V^\delta V^\beta], \\
R_{\alpha\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta &= \frac{1}{2}(\mu + p)[g_{\alpha\gamma}(u_\beta V^\beta)(u_\delta V^\delta) - V_\alpha u_\gamma(u_\beta V^\beta)] \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mu + p)[(V_\delta V^\delta)u_\alpha u_\gamma - V_\gamma u_\alpha(u_\delta V^\delta)] + \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)[g_{\alpha\gamma}(V_\delta V^\delta) - V_\alpha V_\gamma], \\
R_{\alpha\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta &= \frac{1}{2}(\mu + p)[g_{\alpha\gamma}(u_\beta V^\beta)^2 - (u_\beta V^\beta)\{V_\alpha u_\gamma + V_\gamma u_\alpha\} + \epsilon u_\alpha u_\gamma] \\
&\quad + \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)[\epsilon g_{\alpha\gamma} - V_\alpha V_\gamma].
\end{aligned}$$

Se obtiene finalmente [16]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta = \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)[\epsilon g_{\alpha\gamma} - V_\alpha V_\gamma] + \frac{1}{2}(\mu + p)[(u_\beta V^\beta)^2 g_{\alpha\gamma} - 2(V_\beta u^\beta)u_{(\alpha} V_{\gamma)} + \epsilon u_\alpha u_\gamma]. \quad (6.2.7)$$

Ahora, recordemos que al considerar la ecuación de Gauss-Codazzi [37], [14], que nos da el tensor de Riemann  ${}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  de la hipersuperficie espacial, para el caso de la métrica de Robertson-Walker, esta se convierte en:

$${}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} = (R_{\alpha\beta\gamma\delta})_\perp - \frac{1}{9}\Theta^2(h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}), \quad (6.2.8)$$

donde

$$(R_{\alpha\beta\gamma\delta})_\perp = h_\alpha^\kappa h_\beta^\lambda h_\gamma^\mu h_\delta^\nu R_{\kappa\lambda\mu\nu}. \quad (6.2.9)$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
(R_{\alpha\beta\gamma\delta})_{\perp} &= \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)h^{\kappa}_{\alpha}h^{\lambda}_{\beta}h^{\mu}_{\gamma}h^{\nu}_{\delta}(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mu + p)h^{\kappa}_{\alpha}h^{\lambda}_{\beta}h^{\mu}_{\gamma}h^{\nu}_{\delta}(g_{\kappa\mu}u_{\lambda}u_{\nu} - g_{\kappa\nu}u_{\lambda}u_{\mu} + g_{\lambda\nu}u_{\kappa}u_{\mu} - g_{\lambda\mu}u_{\kappa}u_{\nu}), \\
(R_{\alpha\beta\gamma\delta})_{\perp} &= \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)g^{\kappa\zeta}h_{\zeta\alpha}g^{\lambda\eta}h_{\beta\eta}g^{\mu\theta}h_{\gamma\theta}g^{\nu\vartheta}h_{\vartheta\delta}(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mu + p)g^{\kappa\zeta}h_{\zeta\alpha}g^{\lambda\eta}h_{\beta\eta}g^{\mu\theta}h_{\gamma\theta}g^{\nu\vartheta}h_{\vartheta\delta} \times (g_{\kappa\mu}u_{\lambda}u_{\nu} - g_{\kappa\nu}u_{\lambda}u_{\mu} + g_{\lambda\nu}u_{\kappa}u_{\mu} - g_{\lambda\mu}u_{\kappa}u_{\nu}), \\
(R_{\alpha\beta\gamma\delta})_{\perp} &= \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)(\delta^{\zeta}_{\mu}h_{\zeta\alpha}\delta^{\eta}_{\nu}h_{\beta\eta}g^{\mu\theta}h_{\gamma\theta}g^{\nu\vartheta}h_{\vartheta\delta} - \delta^{\zeta}_{\nu}h_{\zeta\alpha}\delta^{\eta}_{\mu}h_{\beta\eta}g^{\mu\theta}h_{\gamma\theta}g^{\nu\vartheta}h_{\vartheta\delta}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mu + p)[\delta^{\zeta}_{\mu}h_{\zeta\alpha}(u^{\eta}h_{\beta\eta})g^{\mu\theta}h_{\gamma\theta}(u^{\vartheta}h_{\vartheta\delta})] - \frac{1}{2}(\mu + p)[\delta^{\zeta}_{\nu}h_{\zeta\alpha}(u^{\eta}h_{\beta\eta})(u^{\theta}h_{\theta\gamma})g^{\nu\vartheta}h_{\vartheta\delta}] \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mu + p)[(u^{\zeta}h_{\zeta\alpha})\delta^{\eta}_{\nu}h_{\beta\eta}(u^{\theta}h_{\theta\gamma})g^{\nu\vartheta}h_{\vartheta\delta}] - \frac{1}{2}(\mu + p)[(u^{\zeta}h_{\zeta\alpha})\delta^{\eta}_{\mu}h_{\beta\eta}g^{\mu\theta}h_{\gamma\theta}(u^{\vartheta}h_{\vartheta\delta})].
\end{aligned}$$

Pero tenemos que:

$$u^{\eta}h_{\beta\eta} = u^{\eta}(g_{\beta\eta} + u_{\beta}u_{\eta}) = u_{\beta} + (u^{\eta}u_{\eta})u_{\beta} = u_{\beta} - u_{\beta} = 0. \quad (6.2.10)$$

Por lo tanto:

$$(R_{\alpha\beta\gamma\delta})_{\perp} = \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)[h_{\mu\alpha}h_{\nu\beta}h^{\mu}_{\gamma}h^{\nu}_{\delta} - h_{\nu\alpha}h_{\beta\mu}h^{\mu}_{\gamma}h^{\nu}_{\delta}]. \quad (6.2.11)$$

Ahora, tengamos en cuenta que:

$$\begin{aligned}
h^{\mu}_{\gamma}h_{\mu\alpha} &= h^{\mu}_{\gamma}(g_{\mu\alpha} + u_{\mu}u_{\alpha}), \\
&= h_{\gamma\alpha} + (g^{\mu\epsilon}h_{\epsilon\gamma}u_{\mu}u_{\alpha}), \\
&= h_{\gamma\alpha} + h_{\epsilon\gamma}(g^{\mu\epsilon}u_{\mu})u_{\alpha}, \\
&= h_{\gamma\alpha} + (h_{\epsilon\gamma}u^{\epsilon})u_{\alpha}, \\
&= h_{\gamma\alpha}.
\end{aligned}$$

De esta manera:

$$(R_{\alpha\beta\gamma\delta})_{\perp} = \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)[h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}]. \quad (6.2.12)$$

Así, podemos escribir la ecuación (6.2.8) como:

$${}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K(t)(h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}), \quad (6.2.13)$$

donde  $K(t)$  es la curvatura escalar espacial dada por:

$$K(t) := \frac{1}{6}R = \frac{1}{3}\left(\mu - \frac{1}{3}\Theta^2 + \Lambda\right). \quad (6.2.14)$$

De esta manera:

$${}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta}V^{\beta}V^{\delta} = K(t)[h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta}V^{\beta}V^{\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}V^{\beta}V^{\delta}] \quad (6.2.15)$$

Tengamos en cuenta que:

$$h_{\beta\delta}V^{\beta} = (g_{\beta\delta} + u_{\beta}u_{\delta})V^{\beta} = V_{\delta} + u_{\delta}(u_{\beta}V^{\beta}). \quad (6.2.16)$$

Si suponemos que  $u_\beta V^\beta = 0$ , entonces  $h_{\beta\delta} V^\beta = V_\delta$ , por lo tanto :

$$h_{\beta\delta} V^\beta V^\delta = V_\delta V^\delta = \epsilon. \quad (6.2.17)$$

Así, el factor  $K(t)$  determina el término fuente de la EDG triespacial:

$$\boxed{{}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} V^\beta V^\delta = K(t)(\epsilon h_{\alpha\gamma} - V_\alpha V_\gamma)} \quad (6.2.18)$$

### 6.3. El Espacio Pantalla

Por definición los campos vectoriales  $\eta$  y  $\mathbf{V}$  conmutan. Se muestra primero una consecuencia importante de este hecho, que después permitirá obtener un importante teorema, mostrado en esta misma sección. Si  $\eta$  y  $\mathbf{V}$  conmutan:

$$[\eta, \mathbf{V}] = \eta^\alpha \partial_\alpha (V^\beta \partial_\beta) - V^\alpha \partial_\alpha (\eta^\beta \partial_\beta) = 0. \quad (6.3.1)$$

Por un lado tenemos:

$$\nabla_\alpha V^\beta = \partial_\alpha V^\beta + \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} V^\gamma, \quad (6.3.2)$$

$$\nabla_\alpha \eta^\beta = \partial_\alpha \eta^\beta + \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} \eta^\gamma. \quad (6.3.3)$$

Así:

$$\eta^\alpha \nabla_\alpha (V^\beta \partial_\beta) = \eta^\alpha \partial_\alpha V^\beta \partial_\beta + \eta^\alpha \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} V^\gamma \partial_\beta + \eta^\alpha V^\beta \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \partial_\sigma, \quad (6.3.4)$$

$$V^\alpha \nabla_\alpha (\eta^\beta \partial_\beta) = V^\alpha \partial_\alpha \eta^\beta \partial_\beta + V^\alpha \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} \eta^\gamma \partial_\beta + \eta^\alpha V^\beta \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \partial_\sigma. \quad (6.3.5)$$

Restando estos dos términos:

$$\begin{aligned} \eta^\alpha \nabla_\alpha (V^\beta \partial_\beta) - V^\alpha \nabla_\alpha (\eta^\beta \partial_\beta) &= [\eta^\alpha \partial_\alpha (V^\beta \partial_\beta) - V^\alpha \partial_\alpha (\eta^\beta \partial_\beta)] \\ &\quad + [\Gamma^\beta_{\gamma\alpha} \eta^\alpha V^\gamma \partial_\beta - \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} \eta^\gamma V^\alpha \partial_\beta]. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

El primer término se anula por la ecuación (6.3.1) y el segundo por el hecho de que los índices  $\gamma$  y  $\alpha$  son mudos y no hay torsión, por lo tanto:

$$\eta^\alpha \nabla_\alpha (V^\beta \partial_\beta) = V^\alpha \nabla_\alpha (\eta^\beta \partial_\beta). \quad (6.3.7)$$

De esta manera:

$$\frac{\delta \eta^\alpha}{\delta \nu} = V^\beta \nabla_\beta \eta^\alpha = \eta^\beta \nabla_\beta V^\alpha. \quad (6.3.8)$$

Esto significa entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\eta_\alpha V^\alpha)}{\delta \nu} &= V^\alpha \frac{\delta \eta_\alpha}{\delta \nu} + \eta_\alpha \frac{\delta V^\alpha}{\delta \nu} \\ &= V^\alpha g_{\alpha\gamma} \frac{\delta \eta^\gamma}{\delta \nu} \\ &= V^\alpha g_{\alpha\gamma} \eta^\beta \nabla_\beta V^\gamma = 0. \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Por consiguiente, a lo largo de las geodésicas:

$$(\eta_\alpha V^\alpha) = \text{const.} \quad (6.3.10)$$

Para simplificar las ecuaciones relevantes, las escogemos siempre ortogonales:

$$\eta_\alpha V^\alpha = 0. \quad (6.3.11)$$

Cuando  $V^\alpha$  no es paralelo a  $u^\alpha$ , el vector  $\eta^\alpha$  está en el *espacio pantalla* de  $u^\alpha$  (esto es, la 2-superficie tipo espacio ortogonal a ambos vectores  $u^\alpha$  y  $V^\alpha$ ) si, adicionalmente a  $\eta_\alpha V^\alpha = 0$ ,  $\eta^\alpha$  también está en el triespacio en reposo de  $u^\alpha$ , esto es:  $(\eta_\alpha u^\alpha) = 0$ . Podemos escoger esta condición *inicialmente*; ¿se mantendrá esta condición a lo largo de las curvas integrales de cualquier campo vectorial geodésico  $V^\alpha$ ? Calculamos  $\frac{\delta}{\delta\nu}(\eta_\alpha u^\alpha)$  para averiguarlo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\nu}(\eta_\alpha u^\alpha) &= V^\beta \nabla_\beta (\eta^\alpha u_\alpha) \\ &= V^\beta (\nabla_\beta \eta^\alpha) u_\alpha + V^\beta \eta^\alpha (\nabla_\beta u_\alpha) \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Gracias a que  $\eta$  y  $\mathbf{V}$  conmutan se cumple (6.3.8) y:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\eta_\alpha u^\alpha)}{\delta\nu} &= \eta^\beta (\nabla_\beta V^\alpha) u_\alpha + V^\beta \eta^\alpha (\nabla_\beta u_\alpha) \\ &= \eta^\beta (\nabla_\beta V^\alpha) u_\alpha + \frac{1}{3} \Theta h_{\alpha\beta} \eta^\alpha V^\beta \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

Pero recordemos que el primer término lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \eta^\beta (\nabla_\beta V^\alpha) u_\alpha &= \eta^\beta \nabla_\beta (V^\alpha u_\alpha) - \eta^\beta V^\alpha \nabla_\beta u_\alpha \\ &= \eta^\beta \nabla_\beta (V_\alpha u^\alpha) - \frac{1}{3} \Theta h_{\alpha\beta} \eta^\beta V^\alpha. \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\nu}(\eta_\alpha u^\alpha) &= \eta^\beta \nabla_\beta (V^\alpha u_\alpha) + \frac{1}{3} \Theta h_{\alpha\beta} (\eta^\alpha V^\beta - \eta^\beta V^\alpha) \\ &= \eta^\beta \nabla_\beta (V^\alpha u_\alpha) + \frac{2}{3} \Theta h_{\alpha\beta} \eta^{[\alpha} V^{\beta]}. \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

Dado que  $h_{\alpha\beta}$  es simétrico, el segundo término se anula y:

$$\frac{\delta}{\delta\nu}(\eta_\alpha u^\alpha) = \eta^\beta \nabla_\beta (V_\alpha u^\alpha) \quad (6.3.16)$$

la cual será cero si  $\eta^\beta \nabla_\beta (V_\alpha u^\alpha) = 0$  y esto es verdad para las congruencias que estamos considerando. Si esta condición se sigue cumpliendo a lo largo de las curvas integrales de  $u^\alpha$ , confirma su preservación. Veamos entonces que esto se cumple, primero, partiendo de la identidad (6.3.8) [16]:

$$V^\beta \eta^\alpha_{;\beta} = \eta^\beta V^\alpha_{;\beta} \quad (6.3.17)$$

Tomando derivadas covariantes a ambos lados:

$$(V^\beta \eta^\alpha_{;\beta})_{;\gamma} = (\eta^\beta V^\alpha_{;\beta})_{;\gamma} \quad (6.3.18)$$

Dado que la derivada covariante cumple la regla de Leibnitz:

$$V^\beta_{;\gamma} \eta^\alpha_{;\beta} + V^\beta \eta^\alpha_{;\beta\gamma} = \eta^\beta_{;\gamma} V^\alpha_{;\beta} + \eta^\beta V^\alpha_{;\beta\gamma} \quad (6.3.19)$$

Multiplicando por  $u_\alpha u^\gamma$ :

$$0 = u_\alpha [u^\gamma (\nabla_\gamma V^\beta) (\nabla_\beta \eta^\alpha) + V^\beta u^\gamma \nabla_\gamma \nabla_\beta \eta^\alpha - u^\gamma (\nabla_\gamma \eta^\beta) (\nabla_\beta V^\alpha) - \eta^\beta u^\gamma \nabla_\gamma \nabla_\beta V^\alpha] \quad (6.3.20)$$

Ahora consideramos la siguiente expresión:

$$V^\beta \nabla_\beta (\eta_\alpha u^\alpha) - \eta^\beta \nabla_\beta (V_\alpha u^\alpha). \quad (6.3.21)$$

Usando la regla de Leibnitz:

$$\begin{aligned} V^\beta \nabla_\beta (\eta_\alpha u^\alpha) - \eta^\beta \nabla_\beta (V_\alpha u^\alpha) &= V^\beta \eta^\alpha (\nabla_\beta u_\alpha) + V^\beta u_\alpha (\nabla_\beta \eta^\alpha) - \eta^\beta u_\alpha (\nabla_\beta V^\alpha) - \eta^\beta V^\alpha (\nabla_\beta u_\alpha) \\ &= (V^\beta u_\alpha (\nabla_\beta \eta^\alpha) - \eta^\beta u_\alpha (\nabla_\beta V^\alpha)) + (V^\beta \eta^\alpha (\nabla_\beta u_\alpha) - \eta^\beta V^\alpha (\nabla_\beta u_\alpha)) \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

Consideramos la derivada covariante de esta expresión a lo largo de las curvas integrales de  $u^\alpha$ :

$$[V^\beta \nabla_\beta (\eta_\alpha u^\alpha) - \eta^\beta \nabla_\beta (V_\alpha u^\alpha)] \cdot = u^\gamma \nabla_\gamma [V^\beta \nabla_\beta (\eta_\alpha u^\alpha) - \eta^\beta \nabla_\beta (V_\alpha u^\alpha)] \quad (6.3.23)$$

Ahora, consideramos la derivada covariante a lo largo de  $u$  para la primera expresión en paréntesis:

$$\begin{aligned} [V^\beta u_\alpha (\nabla_\beta \eta^\alpha) - u_\alpha \eta^\beta (\nabla_\beta V^\alpha)] \cdot &:= u^\gamma \nabla_\gamma [V^\beta u_\alpha (\nabla_\beta \eta^\alpha) - u_\alpha \eta^\beta (\nabla_\beta V^\alpha)] \\ &= u^\gamma u_\alpha (\nabla_\gamma V^\beta) (\nabla_\beta \eta^\alpha) + u^\gamma (\nabla_\gamma u_\alpha) V^\beta (\nabla_\beta \eta^\alpha) \\ &\quad + u^\gamma V^\beta u_\alpha (\nabla_\gamma \nabla_\beta \eta^\alpha) - u^\gamma (\nabla_\gamma u_\alpha) \eta^\beta (\nabla_\beta V^\alpha) \\ &\quad - u^\gamma u_\alpha (\nabla_\gamma \eta^\beta) (\nabla_\beta V^\alpha) - u^\gamma u_\alpha \eta^\beta (\nabla_\gamma \nabla_\beta V^\alpha). \end{aligned}$$

En los términos 2 y 4 podemos utilizar la ecuación descomposición de  $\nabla_\alpha u_\beta$ . Los términos 1, 3, 5 y 6 se anulan gracias a (6.3.20). De esta forma:

$$\begin{aligned} [V^\beta u_\alpha (\nabla_\beta \eta^\alpha) - u_\alpha \eta^\beta (\nabla_\beta V^\alpha)] \cdot &:= \frac{1}{3} \Theta h_{\alpha\gamma} u^\gamma [V^\beta \eta^\alpha_{;\beta} - \eta^\beta V^\alpha_{;\beta}], \\ [V^\beta u_\alpha (\nabla_\beta \eta^\alpha) - u_\alpha \eta^\beta (\nabla_\beta V^\alpha)] \cdot &= \frac{2}{3} \Theta h_{\alpha\gamma} u^\gamma [V^{[\beta} \eta^{\alpha]}]_{;\beta}, \\ [V^\beta u_\alpha (\nabla_\beta \eta^\alpha) - u_\alpha \eta^\beta (\nabla_\beta V^\alpha)] \cdot &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

Por otro lado, gracias a la descomposición de  $\nabla_\alpha u_\beta$ :

$$V^\beta \eta^\alpha (\nabla_\beta u_\alpha) - \eta^\beta V^\alpha (\nabla_\beta u_\alpha) = (\nabla_\beta u_\alpha) [V^\beta \eta^\alpha - \eta^\beta V^\alpha] = \frac{2}{3} \Theta h_{\alpha\beta} (V^{[\beta} \eta^{\alpha]}). \quad (6.3.25)$$

De esta forma, con ayuda de la ecuación (6.3.20) hemos podido demostrar que:

$$[V^\beta \nabla_\beta (\eta_\alpha u^\alpha) - \eta^\beta \nabla_\beta (V_\alpha u^\alpha)] \cdot = \frac{2}{3} \Theta h_{\alpha\beta} (V^{[\beta} \eta^{\alpha]}) = 0. \quad (6.3.26)$$

La cual se anula debido a que  $h_{\alpha\beta}$  es simétrico en sus índices. Así, la solución a estas ecuaciones es:

$$(\eta_\alpha u^\alpha) = 0, \quad (6.3.27)$$

$$(\eta_\alpha V^\alpha) = 0, \quad (6.3.28)$$

$$D_\alpha (V_\beta u^\beta) = 0. \quad (6.3.29)$$

Esto garantiza que si  $\eta$  es en un punto de la curva ortogonal a  $u$ , lo seguirá siendo a lo largo de toda la curva. Esto permitirá hallar la ecuación de desvío geodésico para la métrica de FLRW, donde aparece el término fuerza [59].

## 6.4. Ecuación de Pirani

Aplicamos el resultado de la sección anterior para hallar la ecuación de Pirani, recordemos la ecuación (6.2.7)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta = \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)[\epsilon g_{\alpha\gamma} - V_\alpha V_\gamma] + \frac{1}{2}(\mu + p)[(u_\beta V^\beta)^2 g_{\alpha\gamma} - 2(V_\beta u^\beta)u_{(\alpha} V_{\gamma)} + \epsilon u_\alpha u_\gamma]$$

Subiendo el primer índice del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta &= g^{\alpha\mu}R_{\mu\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta \\ R^\alpha_{\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta &= \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)(\epsilon g^{\alpha\mu}g_{\mu\gamma} - g^{\alpha\mu}V_\mu V_\gamma) + \frac{1}{2}(\mu + p)[(V_\beta u^\beta)^2 g^{\alpha\mu}g_{\mu\gamma} \\ &\quad - (V_\beta u^\beta)g^{\alpha\mu}u_\mu V_\gamma - (V_\beta u^\beta)g^{\alpha\mu}u_\gamma V_\mu + \epsilon g^{\alpha\mu}u_\mu u_\gamma] \end{aligned}$$

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta = \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)(\epsilon \delta^\alpha_\gamma - V^\alpha V_\gamma) + \frac{1}{2}(\mu + p)[(V_\beta u^\beta)^2 \delta^\alpha_\gamma - (V_\beta u^\beta)u^\alpha V_\gamma - (V_\beta u^\beta)V^\alpha u_\gamma] \quad (6.4.1)$$

Multiplicando por  $\eta^\gamma$ :

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\gamma\delta}V^\beta \eta^\gamma V^\delta &= \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)[\epsilon \delta^\alpha_\gamma \eta^\gamma - V^\alpha (V_\gamma \eta^\gamma)] + \frac{1}{2}(\mu + p)[(V_\beta u^\beta)^2 \delta^\alpha_\gamma \eta^\gamma \\ &\quad - (V_\beta u^\beta)u^\alpha (V_\gamma \eta^\gamma) - (V_\beta u^\beta)V^\alpha (u_\gamma \eta^\gamma)] \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Haciendo uso de (6.3.27) obtenemos finalmente [16]:

$$\boxed{R^\alpha_{\beta\gamma\delta}V^\beta \eta^\gamma V^\delta = \left[ \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)\epsilon + \frac{1}{2}(\mu + p)E^2 \right] \eta^\alpha} \quad (6.4.3)$$

donde  $E = -V_\alpha u^\alpha$ . Esta es conocida en la literatura como la ecuación de Pirani. En este caso no se consideraron los efectos de Shear y Vorticidad que puede tener un fluido más general que el considerado en la cosmología estándar. Para considerar estos efectos, hay que considerar en la ecuación de desvío geodésico un tensor de Weyl no nulo, el cual es el objetivo de este trabajo.

Notemos que este término fuerza es proporcional al mismo  $\eta^\alpha$ , i.e., de acuerdo con la EDG (6.4.3) *solo la magnitud  $\eta$  cambia a lo largo de la geodésica, mientras que su orientación espacial permanece fija*. Consecuentemente la EDG (6.4.3) se reducirá simplemente a una relación diferencial para la cantidad escalar  $\eta$ . Esto refleja la isotropía espacial del tensor de curvatura de Riemann alrededor de cada punto en la presente situación.

## 6.5. EDG para observadores temporales

### 6.5.1. EDG para observadores fundamentales

En este caso, el campo vectorial geodésico  $V^\alpha$  es el campo vectorial de la cuadrivelocidad del fluido  $u^\alpha$ . El parámetro afín coincide con el tiempo propio del observador fundamental, i.e.,  $\nu = t$ . Como estas son

geodésicas temporales,  $\epsilon = -1$  y dado que los campos vectoriales están normalizados,  $E = 1$  y de la ecuación (6.4.3) se tiene:

$$\bar{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} V^{\beta} \eta^{\gamma} V^{\delta} = \left[ \frac{-1}{3}(\mu + \Lambda) + \frac{1}{2}(\mu + p) \right] \eta^{\alpha}. \quad (6.5.1.1)$$

Desarrollando un poco el algebra y bajando el índice  $\alpha$ :

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} V^{\beta} \eta^{\gamma} V^{\delta} = \frac{1}{6}(\mu + 3p)\eta_{\alpha} - \frac{1}{3}\Lambda\eta_{\alpha}. \quad (6.5.1.2)$$

Si el vector desviación es  $\eta_{\alpha} = le_{\alpha}$ , la isotropía implica que:

$$\frac{\delta e^{\alpha}}{\delta t} = u^{\beta} \nabla_{\beta} e^{\alpha} = 0. \quad (6.5.1.3)$$

Tenemos además que  $e_{\alpha} e^{\alpha} = 1$ ,  $e_{\alpha} u^{\alpha} = 0$ . Con base en esto, según (6.5.1.2) y la EDG:

$$\frac{\delta^2 \eta^{\alpha}}{\delta t^2} = -\bar{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} V^{\beta} \eta^{\gamma} V^{\delta} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2}(\mu + 3p) - \Lambda \right] \eta^{\alpha}. \quad (6.5.1.4)$$

Dado que la derivada covariante cumple la regla de Leibnitz:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \eta^{\alpha}}{\delta t} &= \frac{\delta}{\delta t} (le^{\alpha}) = \frac{\delta l}{\delta t} e^{\alpha} + l \left( \frac{\delta e^{\alpha}}{\delta t} \right) = \frac{\delta l}{\delta t} e^{\alpha}, \\ \frac{\delta^2 \eta^{\alpha}}{\delta t^2} &= \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta \eta^{\alpha}}{\delta t} \right) = \frac{\delta^2 l}{\delta t^2} e^{\alpha} + \frac{\delta l}{\delta t} \frac{\delta e^{\alpha}}{\delta t}, \\ \frac{\delta^2 \eta^{\alpha}}{\delta t^2} &= \frac{\delta^2 l}{\delta t^2} e^{\alpha}. \end{aligned} \quad (6.5.1.5)$$

De esta manera:

$$\boxed{\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{1}{6}(\mu + 3p)l + \frac{1}{3}\Lambda l} \quad (6.5.1.6)$$

Esta es la ecuación de Raychaudhuri [16]. Con esta ecuación se pueden obtener unas famosas relaciones de Friedmann, las cuales obtendremos en las siguientes subsecciones. Analizaremos el caso de geodésicas comóviles y geodésicas no comóviles.

## 6.5.2. Materia Comóvil

Para materia comóvil  $V^{\alpha} = u^{\alpha} \Rightarrow |E_0| = 1 \Rightarrow |E| = 1$  para toda la familia de geodésicas. Pongamos entonces  $l = S$ , siendo  $S$  el factor de escala (seguimos considerando la aproximación de geodésicas muy cercanas, lo cual no debe entrar en conflicto con el hecho de introducir el factor de escala que es un factor global) por lo que la ecuación de Raychaudhuri (6.5.1.6) se convierte en:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \frac{1}{6}(\mu + 3p)S - \frac{1}{3}\Lambda S = 0. \quad (6.5.2.7)$$

Multiplicamos por  $\frac{dS}{dt}$ :

$$\frac{d^2 S}{dt^2} \frac{dS}{dt} + \frac{1}{6}(\mu + 3p)S \frac{dS}{dt} - \frac{1}{3}\Lambda S \frac{dS}{dt} = 0. \quad (6.5.2.8)$$



Usando la ecuación de conservación de la densidad de materia, la cual se obtiene a partir de la ecuación de conservación del tensor Momentum-Energía, lo cual se mostró en el capítulo 2:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{-3}{S} \frac{dS}{dt} (\mu + p) \quad (6.5.2.9)$$

De esta manera, al considerar la derivada de  $\mu S^2$

$$\begin{aligned} \frac{d(\mu S^2)}{dt} &= \frac{d\mu}{dt} S^2 + \mu \frac{dS^2}{dt} = S^2 \frac{d\mu}{dt} + 2S\mu \frac{dS}{dt} \\ &= S^2 \left( \frac{-3}{S} \frac{dS}{dt} (\mu + p) \right) + 2S\mu \frac{dS}{dt}. \end{aligned} \quad (6.5.2.10)$$

Reorganizando términos

$$\frac{d(\mu S^2)}{dt} = -(\mu + 3p)S \frac{dS}{dt}. \quad (6.5.2.11)$$

De esta manera, reemplazando (6.5.2.11) en (6.5.2.7):

$$\frac{dS}{dt} \frac{d^2 S}{dt^2} - \frac{1}{6} \frac{d(\mu S^2)}{dt} - \frac{1}{3} \Lambda S \frac{dS}{dt} = 0. \quad (6.5.2.12)$$

El primer término se puede escribir como la derivada del cuadrado de la derivada de  $S(t)$ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dS}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{6} \frac{d(\mu S^2)}{dt} - \frac{\Lambda}{6} \frac{d}{dt} S^2 = 0. \quad (6.5.2.13)$$

Escribiendo todo como una sola derivada:

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dS}{dt} \right)^2 - \frac{1}{3} \mu S^2 - \frac{1}{3} \Lambda S^2 \right] = 0. \quad (6.5.2.14)$$

Por lo tanto, lo que está dentro del paréntesis debe ser igual a una constante  $-k$ :

$$\left( \frac{dS}{dt} \right)^2 - \frac{1}{3} \mu S^2 - \frac{1}{3} \Lambda S^2 = -k \quad (6.5.2.15)$$

Dividiendo por  $S(t)^2$  y teniendo en cuenta la ecuación (6.2.14) tenemos:

$$\boxed{\left( \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} \right)^2 - \frac{1}{3} \mu - \frac{1}{3} \Lambda = -\frac{k}{S^2} = -K,} \quad (6.5.2.16)$$

identificando  $K$  como la constante de curvatura de las trisuperficies espaciales ( $t = const.$ ), Vemos que podemos recobrar las ecuaciones dinámicas estándares de los modelos de FLRW a partir de la EDG. Cuando  $K$  no sea cero, podemos reescalar el escalar de curvatura  $S(t)$  de tal manera que la cantidad adimensional  $k$  puede ser normalizada a  $\pm 1$ .

Continuando con nuestro análisis, si consideramos una mezcla no interactuante tanto de materia como de radiación, tenemos para la densidad de energía y para la presión:

$$\mu = 3H_0^2 \Omega_{m0} \left( \frac{S_0}{S} \right)^3 + 3H_0^2 \Omega_{r0} \left( \frac{S_0}{S} \right)^4, \quad (6.5.2.17)$$

$$p = H_0^2 \Omega_{r0} \left( \frac{S_0}{S} \right)^4. \quad (6.5.2.18)$$

Evaluando la ecuación (6.5.2.16) en  $t = t_0$ :

$$H_0^2 - \frac{1}{3}(\mu_{m0} + \mu_{r0}) - \frac{1}{3}\Lambda = \frac{-k}{S_0^2}. \quad (6.5.2.19)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\Omega_i := \frac{\mu_i}{3H^2}, \quad (6.5.2.20)$$

$$\Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (6.5.2.21)$$

$$K_0 := \frac{k}{S_0^2}. \quad (6.5.2.22)$$

Y factorizando  $H_0^2$ :

$$H_0^2(\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda0} - 1) = K_0. \quad (6.5.2.23)$$

Similarmente, evaluando la ecuación (6.5.1.6) en  $t = t_0$ :

$$\frac{\ddot{S}_0}{S_0} = \frac{-1}{6} [\mu_{m0} + \mu_{r0} + 3H_0^2\Omega_{r0}] + \frac{1}{3}\Lambda. \quad (6.5.2.24)$$

Dividiendo por  $H_0^2$  obtenemos el parámetro de desaceleración actual  $q_0$ , el cual se define como:

$$q_0 := \frac{-1}{H_0^2} \left( \frac{\ddot{S}_0}{S_0} \right) = \frac{1}{2}\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda0} \simeq \frac{1}{2}\Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda0} \quad (6.5.2.25)$$

### 6.5.3. Materia no comóvil

Para materia test distribuida isotrópicamente que se mueve con otras 4-velocidades alrededor de los observadores fundamentales, i.e.,  $V^\alpha \neq u^\alpha \Rightarrow |E_0| > 1$ , excepto para la curva geodésica central de la congruencia donde  $V^\alpha$  coincide con  $u^\alpha$ , necesitamos obtener otras soluciones para la EDG para las curvas temporales evaluadas a lo largo de esta línea de mundo central (donde de nuevo el tiempo propio  $t$  es el mismo parámetro afín  $\nu$  y los vectores desviación tienen orientación radial).

Hay dos formas de obtener las soluciones. Una es especificando completamente la fuente de materia en las ecuaciones de la discusión previa en el caso de materia comóvil, resolver estas ecuaciones para obtener el término fuente en la EDG (6.5.1.6) y luego resolver la EDG para obtener su solución general, con dos constantes arbitrarias. La otra es usando la primera integral la cual nos relaciona diferentes soluciones de la EDG. Mostramos el primer procedimiento a continuación.

En el caso del universo de de-Sitter tenemos que  $\mu = p = 0$ ,  $\Lambda \neq 0$  (o equivalentemente  $(\mu + p = 0) \Rightarrow (\mu + 3p) = -2\mu = \text{const.}$ , dando una constante cosmológica efectiva), así la ecuación (6.5.1.6) se convierte en:

$$0 = \frac{d^2 l}{dt^2} - \frac{1}{3}\Lambda l \quad (6.5.3.26)$$

y la solución es:

$$l(t) = \begin{cases} C_1 \cosh(\alpha t) + C_2 \sinh(\alpha t) & \Lambda > 0, \\ C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t) & \Lambda < 0, \end{cases} \quad (6.5.3.27)$$

con  $\alpha := \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$  y  $C_1$  y  $C_2$  constantes de integración que son de la misma dimensión de  $l(t)$ . Esto muestra la desviación para geodésicas temporales arbitrarias en los casos de de-Sitter y anti-de-Sitter ( $\Lambda > 0$  y  $\Lambda < 0$  respectivamente).

Para analizar el caso donde la densidad  $\mu$  es diferente de cero, definimos un tiempo conforme adicional  $\tau$  por:

$$\frac{dt}{d\tau} := S \Rightarrow \frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{dS}{d\tau}. \quad (6.5.3.28)$$

De esta manera, si multiplicamos (6.5.2.16) por  $S^4$ :

$$\left(S \frac{dS}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{3}\mu S^4 - \frac{1}{3}\Lambda S^4 = -kS^2. \quad (6.5.3.29)$$

Si tenemos en cuenta que:

$$S \frac{dS}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{dS}{d\tau}. \quad (6.5.3.30)$$

Y además que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\mu S^4 &= \frac{1}{3}(\mu_m + \mu_r)S^4, \\ \frac{1}{3}\mu S^4 &= H_0^2 \Omega_{m0} S_0^3 S + H_0^2 \Omega_{r0} S_0^4. \end{aligned} \quad (6.5.3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\Lambda S^4 &= H_0^2 \left(\frac{\Lambda}{3H_0^2}\right) S^4, \\ \frac{1}{3}\Lambda S^4 &= H_0^2 S^4 \Omega_{\Lambda 0}. \end{aligned} \quad (6.5.3.32)$$

Así, despejando  $S \frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{d\tau}$  de (6.5.3.30) se obtiene otra famosa ecuación de la cosmología estándar [16]:

$$\boxed{\frac{dS}{d\tau} = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda S^4 - kS^2 + S_0^3 H_0^2 \Omega_{m0} S + S_0^4 H_0^2 \Omega_{r0}}} \quad (6.5.3.33)$$

Esta ecuación puede ser fácilmente resuelta cuando  $\Lambda = 0$  para algún valor dado del parámetro de curvatura espacial  $k$ .

Continuamos con nuestro análisis para obtener la solución  $l(t)$ . Tengamos en cuenta que:

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{dl}{dt} \frac{dt}{d\tau} = S(t) \frac{dl}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dl}{dt} = \frac{1}{S(t)} \frac{dl}{d\tau}} \quad (6.5.3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2l}{d\tau^2} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left( S(t) \frac{dl}{dt} \right), \\ \frac{d^2l}{d\tau^2} &= S(t) \left[ \frac{dS}{dt} \left( \frac{dl}{dt} \right) + S(t) \frac{d^2l}{dt^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.5.3.35)$$

Pero tenemos además que:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dS}{d\tau} = \frac{1}{S} \frac{dS}{d\tau}. \quad (6.5.3.36)$$

De esta manera:

$$\frac{d^2l}{d\tau^2} = \frac{dS}{d\tau} \left( \frac{dl}{dt} \right) + S^2 \frac{d^2l}{dt^2}. \quad (6.5.3.37)$$

Usando (6.5.3.34):

$$S^2 \frac{d^2l}{dt^2} = \frac{d^2l}{d\tau^2} - \frac{1}{S(\tau)} \left( \frac{dS}{d\tau} \right) \frac{dl}{d\tau}. \quad (6.5.3.38)$$

Multiplicando (6.5.1.6) por  $S^2$  y usando (6.5.3.38):

$$S^2 \frac{d^2l}{dt^2} = \frac{d^2l}{d\tau^2} - \frac{1}{S} \left( \frac{dS}{d\tau} \right) \frac{dl}{d\tau} = -\frac{1}{6}(\mu + 3p)S^2l + \frac{1}{3}\Lambda S^2l. \quad (6.5.3.39)$$

Tenemos por un lado:

$$\frac{1}{6}(\mu + 3p)S^2l = \left( \frac{1}{2}H_0^2\Omega_{m0} \frac{S_0^3}{S} + H_0^2\Omega_{r0} \frac{S_0^4}{S^2} \right) l. \quad (6.5.3.40)$$

Así:

$$0 = \frac{d^2l}{d\tau^2} - \frac{1}{S} \frac{dS}{d\tau} \frac{dl}{d\tau} + \frac{1}{2}S_0^2H_0^2 \left[ \Omega_{m0} \left( \frac{S_0}{S} \right) + 2\Omega_{r0} \left( \frac{S_0}{S} \right)^2 \right] l - \frac{1}{3}\Lambda S^2l. \quad (6.5.3.41)$$

donde  $S = S(\tau)$  y  $\frac{dS}{d\tau}$  es determinado por la ecuación (6.5.3.33).

Si consideramos el modelo Einstein-de-Sitter, donde  $\Lambda = 0$ ,  $k = 0$ ,  $\Omega_{r0} = 0$ ,  $\Omega_{m0} = 1$ . En tiempo conforme adimensional el factor de escala es:

$$S(\tau) = \frac{1}{4}S_0^3H_0^2\tau^2. \quad (6.5.3.42)$$

De esta manera:

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{1}{2}S_0^3H_0^2\tau. \quad (6.5.3.43)$$

Así, la ecuación (6.5.3.41) se transforma en:

$$\frac{d^2l}{d\tau^2} - \frac{2}{\tau} \frac{dl}{d\tau} + \frac{2}{\tau^2}l = 0. \quad (6.5.3.44)$$

La solución general que se propone [16] es de la forma:

$$l(\tau) = C\tau^\alpha. \quad (6.5.3.45)$$

Se obtiene una ecuación indicial de la forma:

$$C\tau^{\alpha-2}[\alpha(\alpha - 1) - 2\alpha + 2] = 0. \quad (6.5.3.46)$$

Solucionando para  $\alpha$  encontramos que los valores posibles que puede tomar solo son 2 y 1, por lo que la solución mas general es de la forma:

$$l(\tau) = C_1\tau + C_2\tau^2, \quad (6.5.3.47)$$

donde las constantes  $C_1$  y  $C_2$  tienen la dimensión de  $l(\tau)$ .

Ahora, analicemos un momento los resultados que acabamos de obtener. Como vemos, la magnitud del vector desviación es lo único que cambia, no la dirección, como ya se obtuvo de la ecuación de Pirani; esto se ve tanto en el universo de de-Sitter (6.5.3.27) como en el universo Einstein-de-Sitter (6.5.3.47). El vector desviación para el observador no-comóvil tiene un comportamiento parecido al del factor de escala. Por ejemplo, en el caso del universo de de-Sitter, (6.5.3.27), caso  $\Lambda > 0$ , el vector desviación tiene un comportamiento exponencial, similar al del factor de escala; en el caso del universo Anti-de-Sitter ( $\Lambda < 0$ , (6.5.3.27)), el vector desviación tiene un comportamiento sinusoidal, por lo que puede darse la ocasión en que las geodésicas se cruzan, ya que el vector desviación puede volverse nulo en un momento determinado. Lo mismo puede pasar con el caso del Universo Einstein-de-Sitter, (6.5.3.47), ya que las constantes  $C_1$  y  $C_2$  pueden determinar un tiempo para el cual este vector desviación se anule. Este comportamiento se puede esperar del universo Anti-de-Sitter, ya que podemos ver que algo similar sucede en un universo con constante de curvatura positiva, pero no sería algo de esperarse del universo Einstein de Sitter. Este universo corresponde a un universo dominado por materia. El factor de escala es creciente, aunque no crece aceleradamente.

Por último, vemos que en el caso del universo de de-Sitter el vector desviación crece exponencialmente y no hay posibilidad de que se anule en algún tiempo posterior, salvo el caso en que sea nulo desde el principio.

## 6.6. Obtención del teorema de reciprocidad a partir de la primera integral

La relación de la primera integral se puede investigar para el caso de rayos nulos. Consideremos geodésicas nulas que divergen de una fuente S y llegan a un observador O, con vector desviación  $\eta_1$  y rayos nulos que divergen de la fuente S y llegan al observador O, con vector desviación  $\eta_2$ . La primera integral está expresada en términos del parámetro afín  $\nu$ , pero expresémosla ahora en términos de la magnitud  $l$  definida por  $dl := Sdr$ . Para encontrar la relación entre  $dr$  y  $d\nu$ , consideremos una geodésica radial de la siguiente manera:

$$V^\alpha := Eu^\alpha + Pe^\alpha \quad (6.6.1)$$

donde  $e^\alpha = S^{-1}(\partial_r)^\alpha = S^{-1}\delta_1^\alpha$ ,  $e_\alpha e^\alpha = 1$ ,  $e_\alpha u^\alpha = 0$ . Para una geodésica radial nula tenemos además:

$$\frac{dt}{d\nu} = V^0 = E = -(V_\alpha u^\alpha) = E_0 \frac{S_0}{S}, \quad (6.6.2)$$

$$\frac{dr}{d\nu} = V^1 = \frac{P(S)}{S} = \frac{E(S)}{S}. \quad (6.6.3)$$

De esta forma:

$$dl = Sdr = E_0 \left( \frac{S_0}{S} \right) d\nu, \quad (6.6.4)$$

Podemos entonces escribir:

$$\frac{d\eta_1}{d\nu} = \frac{dl}{d\nu} \frac{d\eta_1}{dl} = E_0 \frac{S_0}{S} \frac{d\eta_1}{dl} = E_0(1+z) \frac{d\eta_1}{dl}, \quad (6.6.5)$$

$$\frac{d\eta_2}{d\nu} = E_0(1+z) \frac{d\eta_2}{dl}. \quad (6.6.6)$$

Teniendo en cuenta que para el observador  $z = 0$  tenemos:

$$\eta_2|_0 \frac{d\eta_1}{dl}|_0 = \eta_1|_S \frac{d\eta_2}{dl}|_S (1+z), \quad (6.6.7)$$

donde los términos  $\frac{d\eta}{dl}$  son los ángulos subtendidos por los pares de rayos nulos y corresponden a los vectores desviación. Expresado en términos de las distancias área y luminosidad, definidas por:

$$\eta_1|_S := r_0 \frac{d\eta_1}{dl}|_0, \quad (6.6.8)$$

$$\eta_2|_0 := r_S \frac{d\eta_2}{dl}|_S. \quad (6.6.9)$$

encontramos el famoso teorema de reciprocidad nula para los modelos de FLRW:

$$r_S = r_0(1+z). \quad (6.6.10)$$

Esta establece la equivalencia, salvo los factores redshift, de la distancia área y la distancia de luminosidad y el hecho de que la intensidad de radiación medida es independiente de la distancia área, dependiendo solo del redshift. Estas características son fundamentales en los análisis de observaciones de distintas fuentes y medidas de la Radiación Cósmica de Fondo.

Esta relación la obtuvimos para el caso de FLRW, pero es en general válida para cualquier espacio-tiempo en el cual se cumpla la primera integral [42, 4].

## COSMOLOGÍAS DE BIANCHI Y ANOMALÍA DEL CUADRUPOLO

### 7.1. Clasificación de los modelos de Bianchi

La homogeneidad e isotropía de los modelos cosmológicos están directamente relacionados con las simetrías intrínsecas de la variedad, que tienen que ver con la dimensión del espacio vectorial de los vectores de Killing, los cuales cumplen la ecuación de Killing:

$$L_K g = 0, \tag{7.1.1}$$

donde  $L$  significa la derivada de Lie con respecto al vector de Killing  $K$  del tensor métrico  $g$ . El modelo de FLRW tiene la propiedad de que tiene subespacios de dimensión 3 (las hipersuperficies espaciales) con el mayor número de simetrías posibles, es decir, el mayor número de vectores de Killing linealmente independientes. Como el E-T es una variedad de dimensión 4, tiene 6 vectores de Killing asociados. Los modelos cosmológicos de Bianchi por ser homogéneos tienen vectores de Killing asociados a dicha simetría, pero como no son isotrópicos, tienen menos vectores de Killing que el modelo de FLRW. Sin embargo, en cualquier caso, dadas las propiedades de la derivada de Lie, los vectores de Killing cumplen la relación:

$$[K_a, K_b] = C^c_{ab} K_c, \tag{7.1.2}$$

donde las  $C^c_{ab}$  son conocidas como las constantes de estructura. Los modelos de Bianchi se clasifican entonces de acuerdo al tipo de constantes de estructura que los caracterizan. Se puede mostrar que las constantes de estructura dependen en definitiva de 4 parámetros:  $a, n_1, n_2$  y  $n_3$ . La identidad de Jacobi impone la condición  $an_1 = 0$ , por lo que  $a = 0$  o  $n_1 = 0$  o ambos son nulos. Esto se debe a que si definimos las cantidades  $A^{cd}$  como:

$$A^{cd} \equiv \frac{1}{2} C^c_{ab} \bar{\epsilon}^{abd}, \tag{7.1.3}$$

donde  $\bar{\epsilon}^{abc}$  es el tensor del Levi-Civita, entonces  $A^{ab}$  se puede escribir como una descomposición de su parte simétrica  $N^{(ab)}$  y su parte antisimétrica:

$$A^{ab} \equiv N^{(ab)} + \bar{\epsilon}^{abc} A_c. \tag{7.1.4}$$

La identidad de Jacobi se reduce entonces a:

$$N^{(db)} A_b = 0. \tag{7.1.5}$$

La base del espacio vectorial de Killing se puede escoger de tal manera que  $N^{(ab)}$  sea una matriz diagonal,  $N^{(ab)} = \text{diag}(n_1, n_2, n_3)$  y que las componentes de  $A_c$  sean  $A_1 = a, A_2 = A_3 = 0$  [15]. De esta manera,  $an_1 = 0$ , lo cual permite hacer la siguiente clasificación de los modelos de Bianchi:

Clase	Tipo	a	$n_1$	$n_2$	$n_3$
A	I	0	0	0	0
	II	0	1	0	0
	$VI_0$	0	0	1	-1
	$VII_0$	0	0	1	1
	VIII	0	1	1	-1
	IX	0	1	1	1
B	V	1	0	0	0
	IV	1	0	0	1
	III	1	0	1	-1
	$VI_h$	$\sqrt{-h} \neq 0$	0	1	-1
	$VII_h$	$\sqrt{h} \neq 0$	0	1	1

Tabla 1. Clasificación de los modelos de Bianchi.

Como podemos ver, surge la clase A y la clase B de los de Bianchi. Además, los modelos de Bianchi pueden ser ortogonales o no ortogonales (tilted o non-tilted). Los llamados ortogonales son aquellos modelos donde las líneas de mundo de las partículas son ortogonales a las hipersuperficies espaciales del E-T, es decir, la cuadrivelocidad del fluido no tiene una componente espacial. Las componentes no-ortogonales en cambio si cumplen esta propiedad. El ejemplo más sencillo para ilustrar cuando el fluido no es ortogonal es cuando hay vorticidad, es decir, cuando hay cierta componente de rotación en las partículas que conforman el fluido.

En los modelos de clase B uno puede introducir un escalar  $h$  por medio de la siguiente fórmula [3]:

$$A_a A_b = \frac{1}{2} h \bar{\epsilon}_{acd} \bar{\epsilon}_{bef} N^{(ce)} N^{(df)}, \quad (7.1.6)$$

Usando la base que diagonaliza  $N^{(ab)}$  esta identidad se reduce a:

$$a^2 = h n_2 n_3, \quad (7.1.7)$$

por lo que  $h$  está bien definido si y solo si  $n_2 n_3 \neq 0$  en los modelos de clase B. Démonos cuenta que  $h < 0$  en los modelos de tipo  $VI_h$  y  $h > 0$  en los modelos de tipo  $VII_h$ .

Como vemos, los modelos de Bianchi son una generalización del modelo de Robertson-Walker, que hasta el momento es el que mas ha tenido aceptación dentro de la comunidad científica. Solo algunos tipos de cosmologías de Bianchi contienen a la métrica de R-W como un caso especial o caso límite. La tipo  $I$  la tiene para el caso de curvatura nula ( $k = 0$ ), la  $VII_0$  para  $k = 0$ , la  $IX$  para  $k = +1$ , la  $V$  para  $k = -1$  y la  $VII_h$  para  $k = -1$ . El resto no contiene a R-W como un caso particular. Y dado que las observaciones de conteo de galaxias y Radiación Cómica de Fondo sostienen a R-W (hay controversia ultimamente [70], [71], [72]), es importante considerar primero estas cosmologías que contienen a R-W. Las que no contienen a R-W se vuelven altamente anisotrópicas en tiempos posteriores.

Sin embargo, surge la pregunta de por qué el Universo es tan altamente isotrópico, pregunta que se intentan responder Hawking y Collins en [73]. Es posible preguntarse si en el principio el Universo era



anisotrópico y luego las anisotropías decayeron con la evolución temporal del E-T. ¿Bajo que condiciones se cumple esto? Hawking y Collins demuestran que la isotropía de R-W es inestable bajo perturbaciones homogéneas y anisotrópicas. Por lo tanto, solo hay un conjunto pequeño de condiciones iniciales que dan un universo isotrópico hasta los momentos actuales [73]. Por ejemplo, en [6] Misner consideró los efectos de la viscosidad del neutrino en atenuar la anisotropía de un modelo simple de Bianchi tipo I. Sin embargo, otros autores señalaron que esto era posible solo si la anisotropía inicial era pequeña [74], [75].

En [73] se asume la condición de Energía dominante ( $T^{00} \geq |T^{\alpha\beta}|$ ), la cual es satisfecha por todas las formas conocidas de materia en cualquier tétrada ortonormal. También se asume el criterio de presión positiva, que establece que la suma de las presiones principales  $T_{kk}$  es no negativa. Bajo estas suposiciones, el teorema 1 de [73] se demuestra en dicha referencia. Este teorema establece:

**Teorema 1.** Si la condición de Energía dominante y el criterio de presión positiva se satisfacen, el universo puede aproximarse a la isotropía si y solo si el E-T es una cosmología de Bianchi de los tipos  $I$ ,  $V$ ,  $VII_0$  o  $VII_h$ .

## 7.2. Ecuaciones de la dinámica del Modelo Cosmológico de Bianchi I

Consideramos la siguiente métrica que describe la cosmología de Bianchi tipo I [76], [77] [78]:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 + b(t)^2 dy^2 + c(t)^2 dz^2. \quad (7.2.1)$$

Esta cosmología se reduce a la de RW para  $k = 0$  en el caso especial  $a(t) = b(t) = c(t)$ . Si definimos  $\tau(t) = a(t)b(t)c(t)$ , es posible obtener una ecuación de Friedmann generalizada (ver Apéndice E):

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{3}{2}(\mu - p) + 3\Lambda. \quad (7.2.2)$$

Para el caso  $a = b = c$  esta ecuación se reduce a la ya conocida ecuación de Friedmann (Apéndice E):

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}}{a} = \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda. \quad (7.2.3)$$

Las ecuaciones de evolución permiten hallar una primera integral y es posible obtener una expresión para los factores de escala (Apéndice E, [76], [77], [42]):

$$a(t) = D_1 \tau^{\frac{1}{3}} \exp \left[ \Sigma_1 \int \frac{dt}{\tau(t)} \right], \quad (7.2.4)$$

$$b(t) = D_2 \tau^{\frac{1}{3}} \exp \left[ \Sigma_2 \int \frac{dt}{\tau(t)} \right], \quad (7.2.5)$$

$$c(t) = D_3 \tau^{\frac{1}{3}} \exp \left[ \Sigma_3 \int \frac{dt}{\tau(t)} \right], \quad (7.2.6)$$

donde  $D_1, D_2, D_3, \Sigma_1, \Sigma_2$  y  $\Sigma_3$  son constantes que cumplen  $D_1 D_2 D_3 = 1$ ,  $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0$ .

La manipulación de las ECE nos permite obtener la expresión (15.1.8), que dada la ecuación de estado del fluido, nos permite obtener  $\tau(t)$ . Si obtenemos una expresión analítica para  $\tau$  podemos obtener los factores de escala  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $c(t)$ . Es por esta razón que consideramos el caso más simple,  $\Lambda = 0$ . Más adelante veremos la influencia de estos factores de escala en la Ecuación de Desvío Geodésico.

Utilizamos la ley de conservación del tensor momentum-energía para  $\mu = 0$ :

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (7.2.7)$$

Al introducir la métrica de la cosmología de Bianchi I en el programa GRTensor, el cual es de acceso gratuito en la red, obtenemos las siguientes componentes de la conexión que son no nulas:

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{xx} &= a\dot{a}, & \Gamma^x_{xt} &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^t_{yy} &= b\dot{b}, \\ \Gamma^y_{yt} &= \frac{\dot{b}}{b}, & \Gamma^t_{zz} &= c\dot{c}, & \Gamma^z_{zt} &= \frac{\dot{c}}{c}. \end{aligned}$$

De esta manera, la ley de conservación del tensor momentum -energía para  $\mu = 0$  se convierte en:

$$\begin{aligned} T^{0\nu}_{;\nu} &= T^{00}_{;0} + T^{0i}_{;i}, \\ &= T^{00}_{;0} + \Gamma^0_{0\sigma} T^{\sigma 0} + \Gamma^0_{0\sigma} T^{0\sigma} + T^{0i}_{;i} + \Gamma^0_{i\sigma} T^{\sigma i} + \Gamma^i_{i\sigma} T^{0\sigma}, \\ &= \dot{\mu} + \left( a\dot{a} \frac{p}{a^2} + b\dot{b} \frac{p}{b^2} + c\dot{c} \frac{p}{c^2} \right) + \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \mu, \\ &= \dot{\mu} + p \frac{\dot{\tau}}{\tau} + \mu \frac{\dot{\tau}}{\tau} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos la ecuación de Friedmann que representa la conservación de la Energía:

$$\boxed{\dot{\mu} = -\frac{\dot{\tau}}{\tau}(\mu + p)}. \quad (7.2.8)$$

De la anterior ecuación y de (15.1.8) podemos obtener una primera integral (Apéndice E):

$$\dot{\tau}^2 = 3(\mu + \Lambda)\tau^2 + C_1, \quad (7.2.9)$$

donde  $C_1$  es una constante de integración arbitraria. Ahora, en analogía con la constante de Hubble, definamos:

$$3H = \frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}. \quad (7.2.10)$$

Por lo tanto, de la ecuación (15.1.34) del Apéndice E obtenemos:

$$\boxed{\mu = 3H^2 - \Lambda - \frac{C_1}{\tau^2}} \quad (7.2.11)$$

Este es el conjunto de ecuaciones de evolución que obtenemos a partir de las ECE. Examinando con más cuidado, se pueden relacionar estas ecuaciones directamente con las ecuaciones obtenidas a partir del formalismo 1+3 de la Relatividad General. Por ejemplo, la primera ecuación, que tiene segundas derivadas de los factores de escala proviene de la ecuación de Raychaudhuri. La ecuación (15.1.34) del Apéndice E nos da una constante de integración  $C_1$ . El significado físico de esta constante no es claro, pero una comparación con las ecuaciones del formalismo 1+3 nos indica que tiene que ver con la energía asociada al shear [79]. Para ver como relacionamos esta constante con el shear, veamos primero la ecuación de Gauss-Codacci para el modelo de Bianchi I. El tensor y el escalar de Ricci tri-espaciales, escritos en términos de las variables definidas en el capítulo 3 vienen dados por:

$${}^3R_{\alpha\beta} = -\dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \Theta\sigma_{\alpha\beta} + \tilde{\nabla}_{\langle\alpha}\dot{u}_{\beta\rangle} + \dot{u}_{\langle\alpha}\dot{u}_{\beta\rangle} + \pi_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta} \left[ 2\mu - \frac{2}{3}\Theta^2 + 2\sigma^2 + 2\Lambda \right],$$

$${}^3R = 2\mu - \frac{2}{3}\Theta^2 + 2\sigma^2 + 2\Lambda.$$

La última es una ecuación de Friedmann generalizada.

La cuadriaceleración es nula y la curvatura espacial del modelo de Bianchi I es cero, lo que quiere decir que también el tensor de Ricci y el escalar de Ricci espaciales son nulos. Del hecho de que el escalar de Ricci es nulo, la ecuación para el tensor de Ricci se reduce a:

$${}^3R_{\alpha\beta} = -\dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \Theta\sigma_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} = 0. \quad (7.2.12)$$

Esta es una ecuación de evolución para el tensor de Shear. Si se considera un fluido perfecto  $\pi_{\alpha\beta} = 0$ ; a partir de la ecuación resultante, parece que Ellis y van Elst en [42] y Tsagas, Challinor y Maartens en [17] integran esta ecuación para obtener:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\Sigma_{\alpha\beta}}{S^3},$$

donde

$$\dot{\Sigma}_{\alpha\beta} = 0, \quad S = \sqrt[3]{\tau(t)}.$$

Sin embargo, advertimos que la derivada covariante temporal, definida en (3.1.5), no es una derivada parcial ordinaria sino, como su nombre lo indica, una derivada covariante, que incluye términos de la conexión, por lo que no es tan inmediato integrar de ese modo esta ecuación, como también al parecer lo hacen [80]. Dada la definición de derivada covariante y usando los términos obtenidos de la conexión, la ecuación de evolución del tensor shear es en realidad tres ecuaciones de evolución para las componentes diagonales espaciales de dicho tensor [79]:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial t} - 2\frac{\dot{a}}{a}\sigma_{xx} = -3\frac{\dot{S}}{S}\sigma_{xx}, \quad (7.2.13)$$

$$\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial t} - 2\frac{\dot{b}}{b}\sigma_{yy} = -3\frac{\dot{S}}{S}\sigma_{yy}, \quad (7.2.14)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} - 2\frac{\dot{c}}{c}\sigma_{zz} = -3\frac{\dot{S}}{S}\sigma_{zz}. \quad (7.2.15)$$

De estas ecuaciones, no es inmediato obtener la forma funcional del tensor  $\sigma_{\alpha\beta}$  pero si lo podemos obtener a partir de la definición. Dado que estamos suponiendo un modelo ortogonal, la cuadrivelocidad del fluido no tiene componentes espaciales, la cuadrivelocidad la asumimos  $u = (1, 0, 0, 0)$ , y las componentes del shear vienen dadas por:

$$\sigma_{xx} = \Sigma_1 \frac{a^2(t)}{S^3(t)}, \quad (7.2.16)$$

$$\sigma_{yy} = \Sigma_2 \frac{b^2(t)}{S^3(t)}, \quad (7.2.17)$$

$$\sigma_{zz} = \Sigma_3 \frac{c^2(t)}{S^3(t)}, \quad (7.2.18)$$

donde las constantes  $\Sigma_1, \Sigma_2$  y  $\Sigma_3$  son las mismas constantes que mencionamos antes que desempeñan el rol de evolución en los factores de escala. Es fácil comprobar que estos tensores de shear satisfacen la ecuación de evolución [79]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Sigma_1 a^2}{S^3} \right) \\ &= \Sigma_1 \left( \frac{2a\dot{a}}{S^3} \right) - 3\frac{\Sigma_1 a^2}{S^4} \dot{S} \\ &= \left( 2\frac{\dot{a}}{a} - 3\frac{\dot{S}}{S} \right) \sigma_{xx} \\ &= \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c} \right) \sigma_{xx}, \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

por lo que comprobamos que el shear satisface esta ecuación de evolución.

El escalar de shear definido en el capítulo 3, para este caso viene dado por:

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} = \frac{\Sigma^2}{S^6}, \quad (7.2.20)$$

donde:

$$2\Sigma^2 \equiv \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2. \quad (7.2.21)$$

Si asumimos un fluido perfecto con una ecuación de estado de la forma:

$$p = (\gamma - 1)\mu, \quad \dot{\gamma} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{M}{S^{3\gamma}}, \quad \dot{M} = 0, \quad (7.2.22)$$

la ecuación de Gauss-Codacci para el escalar de Ricci queda escrita de la siguiente forma para  $\Lambda = 0$ :

$$3\frac{\dot{S}^2}{S^2} = \frac{\Sigma^2}{S^6} + \frac{M}{S^{3\gamma}}. \quad (7.2.23)$$

Cuando volvemos al caso de FLRW obtenemos que  $S(t) \propto t^{2/3}$  para el caso de dominio de materia y  $S(t) \propto t^{1/3}$  para el caso de dominio de radiación.

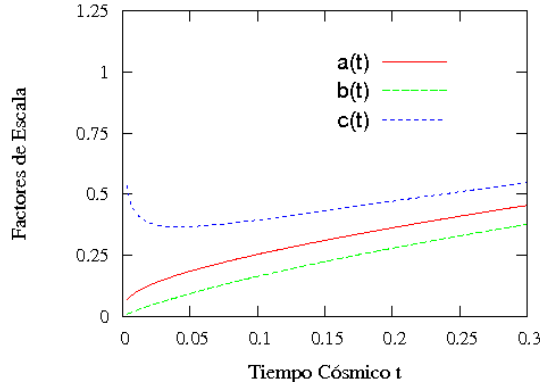


Figura 7.1: Evolución de los factores de escala para el caso  $\Sigma_1 = 0$ ,  $\Sigma_2 = -\Sigma_3 = 0.05$ .

### 7.3. Evolución cosmológica del modelo Bianchi I con dominio de materia

Cuando suponemos un dominio de materia ( $\gamma = 0$ ) el factor de escala en función del tiempo cosmológico viene dado por [79] (Apéndice E):

$$S(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}Mt^2 + \sqrt{3}\Sigma t}. \quad (7.3.1)$$

Como vemos, cuando  $\Sigma = 0$  el factor de escala reproduce el comportamiento de FLRW cuando hay dominio de materia,  $S(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ . Usando esta expresión:

$$W(t) \equiv \int \frac{dt}{S^3(t)} = \frac{1}{\sqrt{3}\Sigma} \ln \left( \frac{t}{t + \frac{4\Sigma}{\sqrt{3}M}} \right). \quad (7.3.2)$$

Así, con estas expresiones analíticas es posible obtener también expresiones analíticas para los factores de escala  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $c(t)$ . Graficamos los factores de escala para tres casos:

1.  $\Sigma_1 = 0$ ,  $\Sigma_2 = -\Sigma_3 = 0.05$ .
2.  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = -0.05$ ,  $\Sigma_3 = 0.1$ .
3.  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0.05$ ,  $\Sigma_3 = -0.1$ .

El comportamiento de los factores de escala en los distintos escenarios cosmológicos se ilustra en las figuras 7.1, 7.2 y 7.3. Como puede apreciarse en estas figuras, cuando consideramos el límite  $t \rightarrow 0$ ,  $S(t) \rightarrow 0$  podemos distinguir dos tipos de singularidad: la singularidad tipo “cigarro”, que es el caso 1 y 2, y la singularidad tipo “pancake”, que es el caso 3. En el primer caso, un factor de escala tiende a infinito, mientras los otros dos tienden a cero. En el segundo caso, solo un factor de escala tiende a cero.

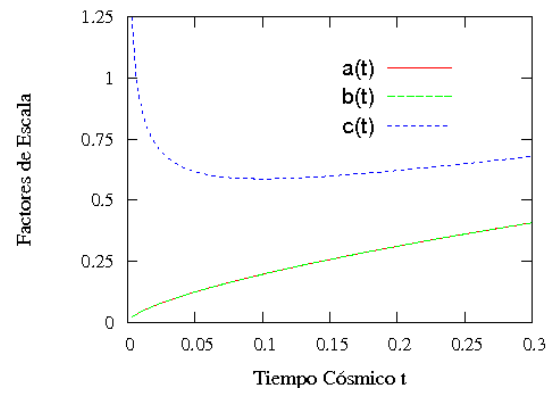


Figura 7.2: Evolución de los factores de escala para el caso  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = -0.05$ ,  $\Sigma_3 = 0.1$ . En este caso  $a(t) = b(t)$ .

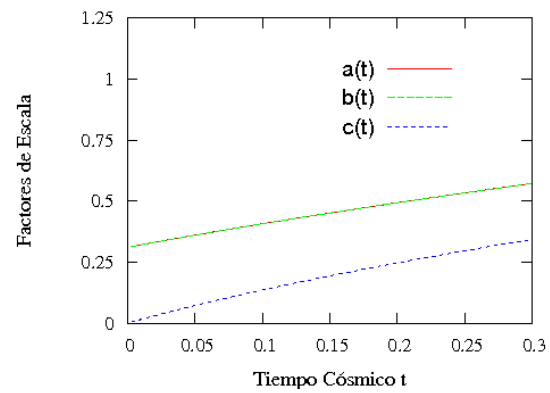


Figura 7.3: Evolución de los factores de escala para el caso  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0.05$ ,  $\Sigma_3 = -0.1$ . En este caso  $a(t) = b(t)$ .

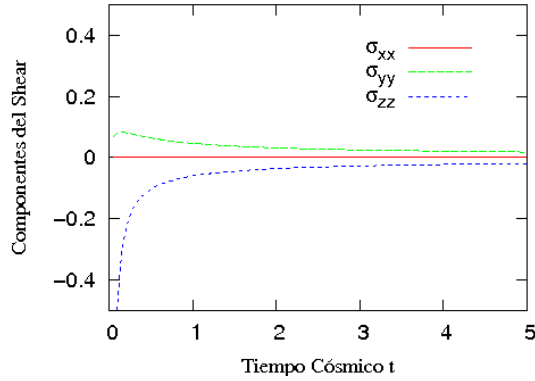


Figura 7.4: Evolución de las componentes del shear para el caso  $\Sigma_1 = 0$ ,  $\Sigma_2 = -\Sigma_3 = 0.05$ .

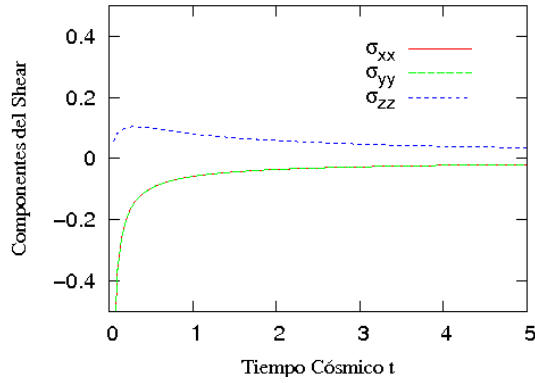


Figura 7.5: Evolución de las componentes del shear para el caso  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = -0.05$ ,  $\Sigma_3 = 0.1$ . En este caso  $a(t) = b(t)$ .

El comportamiento de las componentes del Shear se muestra en las gráficas 7.4, 7.5 y 7.6. Puede verse que el tensor de shear tiende a cero, sin embargo este no es un indicador real de la isotropización del modelo, el shear debe compararse con el parámetro de Hubble  $H$ , para ello definimos el parámetro  $\Sigma^2$ :

$$\Sigma^2 = \frac{\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}{6H^2}. \quad (7.3.3)$$

De todas maneras el shear no es el único tensor que determina el grado de anisotropía del modelo cosmológico. Un tensor de shear pequeño comparado con el parámetro de Hubble no significa que el tensor de Weyl lo sea. Como puede verse de la ecuación de evolución para el shear, el tensor eléctrico de Weyl no solo depende del tensor de shear sino de sus variaciones. Definimos entonces otro factor  $\mathcal{W}$ :

$$\mathcal{W}^2 = \frac{E_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta}}{6H^2} \quad (7.3.4)$$

Se puede hablar entonces cuando un modelo es “casi” FRW, cuando estos dos parámetros son mucho menores que 1 [3], [70]:

$$\Sigma^2 \ll 1, \quad \mathcal{W}^2 \ll 1. \quad (7.3.5)$$

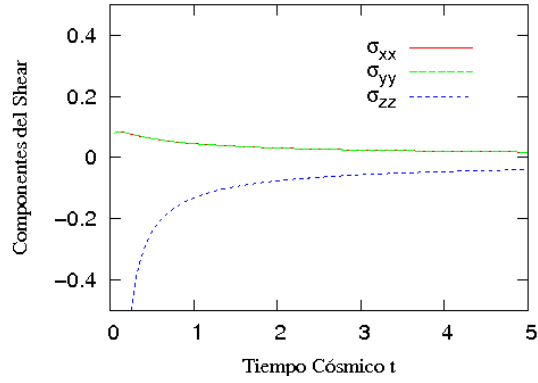


Figura 7.6: Evolución de las componentes del shear para el caso  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0.05$ ,  $\Sigma_3 = -0.1$ . En este caso  $a(t) = b(t)$ .

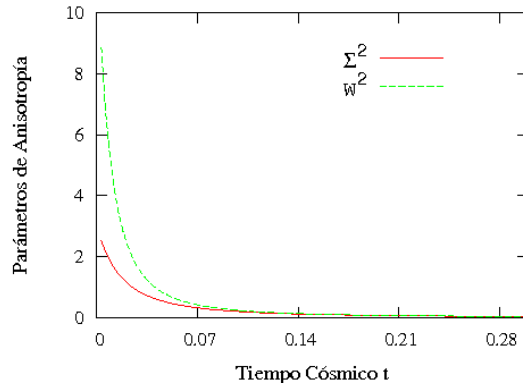


Figura 7.7: Evolución de los parámetros de anisotropía para el caso  $\Sigma_1 = 0$ ,  $\Sigma_2 = -\Sigma_3 = 0.05$ .

Podemos estudiar entonces su tendencia a la isotropía al estudiar el comportamiento de los dos parámetros anteriormente definidos. Por ejemplo, como se señala en [70], se pensaba que el modelo de Bianchi VII<sub>0</sub> no ortogonal con dominio de polvo se isotropizaba en el sentido  $\Sigma \rightarrow 0$ . Sin embargo, el otro parámetro no lo hace,  $\mathcal{W}$  tiende a un valor constante  $\mathcal{W}_0$  que depende de las condiciones iniciales [70].

Podemos ver el comportamiento de estos parámetros para nuestro caso en las figuras 7.7, 7.8 y 7.9.

Vemos que en los tres casos los parámetros tienden a la isotropía, los dos parámetros van disminuyendo de valor a medida que transcurre el tiempo cosmológico. En el primer caso, dado que  $\Sigma_1 = 0$ , la componente  $\sigma_{xx} = 0$ . Sin embargo, la componente  $E_{xx}$  no es cero. De hecho, puede mostrarse que las componentes del



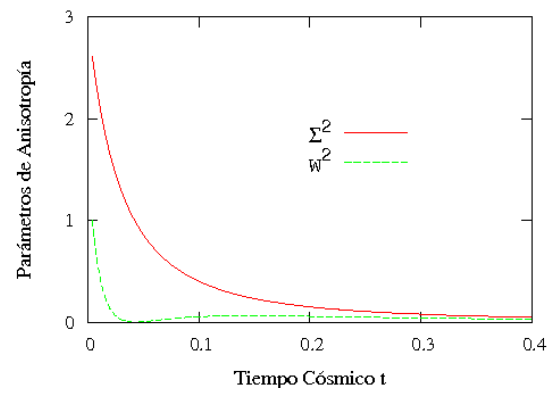


Figura 7.8: Evolución de los parámetros de anisotropía para el caso  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = -0.05$ ,  $\Sigma_3 = 0.1$ . En este caso  $a(t) = b(t)$ .

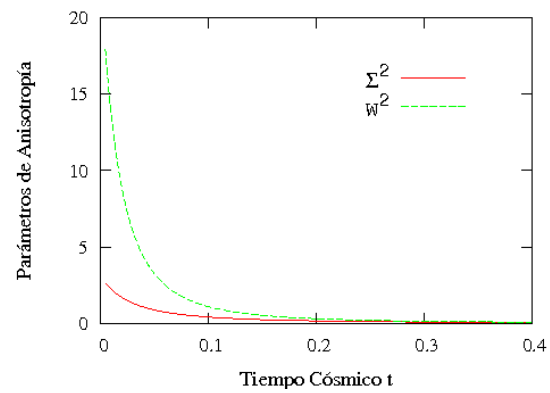


Figura 7.9: Evolución de los parámetros de anisotropía para el caso  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0.05$ ,  $\Sigma_3 = -0.1$ . En este caso  $a(t) = b(t)$ .

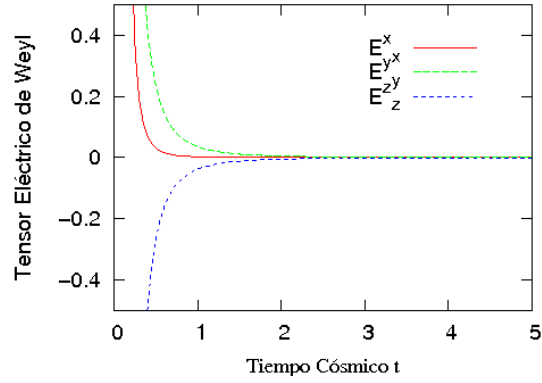


Figura 7.10: Evolución de las componentes del tensor eléctrico de Weyl para el caso  $\Sigma_1 = 0$ ,  $\Sigma_2 = -\Sigma_3 = 0.05$ .

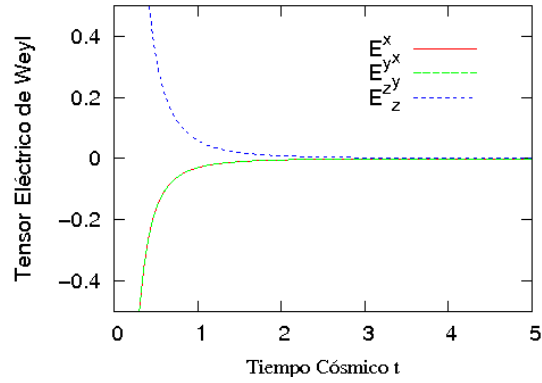


Figura 7.11: Evolución de las componentes del tensor eléctrico de Weyl para el caso  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = -0.05$ ,  $\Sigma_3 = 0.1$ . En este caso  $a(t) = b(t)$ .

tensor eléctrico de Weyl evolucionan de acuerdo con:

$$E_x^x = \Sigma_1 H \dot{W} + \frac{1}{3} [\Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 - 2\Sigma_1^2] W^2, \quad (7.3.6)$$

$$E_y^y = \Sigma_2 H \dot{W} + \frac{1}{3} [\Sigma_1^2 + \Sigma_3^2 - 2\Sigma_2^2] W^2, \quad (7.3.7)$$

$$E_z^z = \Sigma_3 H \dot{W} + \frac{1}{3} [\Sigma_2^2 + \Sigma_1^2 - 2\Sigma_3^2] W^2, \quad (7.3.8)$$

lo cual evidencia claramente que hay una contribución de todas las componentes del tensor del shear a cada componente del tensor eléctrico de Weyl. Mostramos su evolución en las figuras 7.10, 7.11 y 7.12.

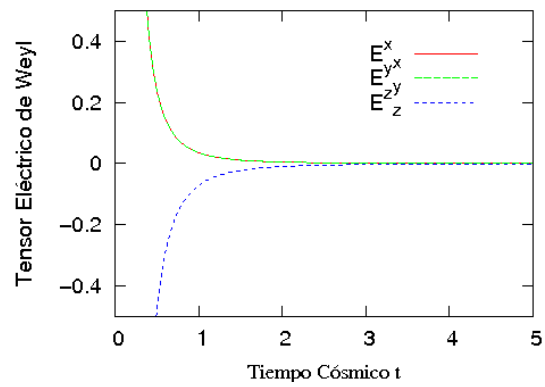


Figura 7.12: Evolución de las componentes del tensor eléctrico de Weyl para el caso  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0.05$ ,  $\Sigma_3 = -0.1$ . En este caso  $a(t) = b(t)$ .

---

## UNIVERSO ELIPSOIDAL Y ANOMALÍA DE LA RADIACIÓN CÓSMICA DE FONDO

Parece improbable que los campos magnéticos a gran escala hubiesen podido sobrevivir a una época de inflación pero en cambio si es concebible que se hubiese podido generar al final de dicha era o en subsecuentes transiciones de fase [81], [82], [83].

Las galaxias espirales típicamente tienen campos magnéticos del orden de unos pocos  $\mu G$  sobre el plano de su disco. Determinar si el origen de los campos magnéticos galácticos y de cúmulos es primordial o de recombinación es una tarea difícil dado que la fuerte amplificación borra cualquier traza de la historia de su pasado. En contraste los efectos magnéticos en la Radiación Cósmica de Fondo (CMB) pueden darnos más información sobre estas fases tempranas. Observaciones directas tales como los mapas de alta resolución de rotación de Faraday y el estudio de rayos cósmicos pueden ayudar al respecto [84]. Se sabe además que las abundancias de los elementos ponen cota a la magnitud de un campo primordial en época de nucleosíntesis [85]. Límites más fuertes sobre el campo magnético primordial provienen de las anisotropías del CMB dado que el campo distorsiona los picos acústicos e induce una rotación de Faraday en la polarización [86], [87].

Las fluctuaciones de temperatura del CMB se observan en el nivel de  $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ . Los datos de alta resolución dados por “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe”(WMAP) confirmaron que los datos de anisotropía del CMB están de acuerdo con las predicciones del modelo inflacionario más simple.

Sin embargo, a grandes escalas angulares aparecen algunas características anómalas. La discrepancia más importante está en el bajo valor del cuadrupolo [9]. Este bajo valor ha sido reportado tanto por los datos de COBE como por los WMAP en el 2003 WMAP [88], [10], [89] y en el 2006 WMAP3 [5], [90]. En los últimos años esta anomalía ha sido sometida a un intenso estudio y varias posibilidades han sido sugeridas para entender este valor tan bajo como la topología no trivial de la geometría del Universo a gran escala [91], [92], [93], entre otras posibilidades [94], [95], [96], [97]. Existen incluso otras anomalías [98], [12], [99], pero nos enfocaremos en la del bajo valor del cuadrupolo.

Universos con simetría axial pueden explicar este fenómeno [13]. El mecanismo más factible físicamente que podría explicar la existencia de un universo con simetría axial es un campo magnético. Estos campos magnéticos afectan la estructura a gran escala y la expansión del universo. Diferentes mecanismos físicos podrían explicar estos campos magnéticos cosmológicos [100], [101], [102].

## 8.1. Caracter cuadrupolar del Modelo de Bianchi I y ley de Redshift

El modelo de Bianchi I, cuando se considera cercano a FRW, se puede tratar como una perturbación del modelo estándar con geometría espacial plana. Esta perturbación tiene una contribución al cuadrupolo de la radiación cósmica de fondo [19], [20], [13], [17]. Esta característica se encuentra también en el modelo de Bianchi VII<sub>0</sub> y IX, mientras que el modelo tipo V tiene un patrón de mancha caliente [19], [20].

La principal dificultad para encontrar la distribución de temperatura en modelos cosmológicos anisotrópicos radica en resolver las ecuaciones de las geodésicas nulas, las cuales solo se pueden integrar analíticamente en el caso de Bianchi I. En los otros casos solo se han podido obtener soluciones excepto por aproximaciones [103] o considerando pequeñas desviaciones del modelo de Friedmann [104].

Para solucionar la ecuación geodésica en el modelo de Bianchi I introducimos un vector nulo  $V = (V^0, V^x, V^y, V^z)$  tangente al rayo de luz en  $x^\mu = (t, x, y, z)$ . Como habíamos supuesto anteriormente,  $V$  está normalizado, de tal manera que en  $x^\mu = (t_0, 0, 0, 0)$ , con  $x^\mu$  la cuadriposición del observador,  $V = (1, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ . Aquí  $\theta$  y  $\phi$  son los ángulos que definen la dirección en la cual un observador en  $(t_0, 0, 0, 0)$  mide la temperatura de la RCF. La radiación proviene de la superficie de última dispersión correspondiente al tiempo cosmológico  $t_{dec}$ . La distribución de temperatura medida por el observador está dada por:

$$T(\theta, \phi, t_0) = \frac{T_{dec}}{V^0(\theta, \phi, t_{dec})}, \quad (8.1.1)$$

con  $T_{dec} = T(t_{dec})$  la temperatura de desacople.  $V^0(\theta, \phi, t_{dec})$  se puede obtener a partir de la solución de las ecuaciones geodésicas [19], [20]. Usando las componentes de la conexión que obtuvimos para el modelo de Bianchi I, las ecuaciones geodésicas son:

$$\frac{dV^x}{dt} + 2V^x \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = 0, \quad (8.1.2)$$

$$\frac{dV^y}{dt} + 2V^y \frac{1}{b} \frac{db}{dt} = 0, \quad (8.1.3)$$

$$\frac{dV^z}{dt} + 2V^z \frac{1}{c} \frac{dc}{dt} = 0, \quad (8.1.4)$$

$$V^{02} - a^2 V^{x2} - b^2 V^{y2} - c^2 V^{z2}. \quad (8.1.5)$$

Al integrar se obtiene:

$$V^x = \frac{\sin \theta \cos \phi}{a^2(t)}, \quad (8.1.6)$$

$$V^y = \frac{\sin \theta \sin \phi}{b^2(t)}, \quad (8.1.7)$$

$$V^z = \frac{\cos \theta}{c^2(t)}, \quad (8.1.8)$$

$$V^0 = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{a^2(t)} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{b^2(t)} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2(t)}} = 0. \quad (8.1.9)$$

Por lo tanto, la distribución de temperatura es [20]:

$$T(\theta, \phi, t_0) = T_{dec} \left[ \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{a^2(t_{dec})} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{b^2(t_{dec})} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2(t_{dec})} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (8.1.10)$$

La ley de redshift generalizada es [20]:

$$1 + z = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{a^2(t)} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{b^2(t)} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2(t)}}. \quad (8.1.11)$$

Considerando desviaciones pequeñas de FRW en el dominio de materia ( $\Sigma \ll \sqrt{M}$  Apéndice E):

$$1 + z \equiv S^{-1} \left[ 1 + \frac{2S^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{3M}} f(\theta, \phi, \Sigma_i) \right], \quad (8.1.12)$$

donde

$$f(\theta, \phi, \Sigma_i) = \Sigma_1 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \Sigma_2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \Sigma_3 \cos^2 \theta. \quad (8.1.13)$$

Podemos interpretar esta ecuación como una generalización del redshift del modelo estándar, cuando  $f = 0$  obtenemos nuevamente:

$$S = \frac{1}{1 + z}. \quad (8.1.14)$$

Démons cuenta que podemos escribir el término  $S^{-\frac{3}{2}}$  en términos del escalar de Hubble:

$$\begin{aligned} S(t) &= \sqrt[3]{\frac{3}{4} M t^2}, \\ \dot{S}(t) &= \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{3M}{4}} t^{-\frac{1}{3}}, \\ H(t) &:= \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \frac{2}{3} t^{-1} = \sqrt{\frac{M}{3}} S^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Dado que  $S_0 = 1$ ,  $H(t) = H_0 S^{\frac{3}{2}}$  con  $H_0 = \sqrt{\frac{M}{3}}$ . Podemos escribir entonces el redshift como:

$$1 + z = S^{-1}(t) \left( 1 + \frac{2}{3H_0} S^{-\frac{3}{2}} f(\theta, \phi, \Sigma_i) \right). \quad (8.1.15)$$

La función de temperatura viene dada por:

$$T(\theta, \phi, \Sigma_i) = T_{dec} S_{dec} \left[ 1 - \frac{2}{3H_0} S_{dec}^{-\frac{3}{2}} f(\theta, \phi, \Sigma_i) \right]. \quad (8.1.16)$$

Dado que la temperatura se comporta como  $T \propto \frac{1}{S}$ ,  $T_{dec} S_{dec} = T_0 S_0 = T_0$ ,

$$T(\theta, \phi, \Sigma_i) = T_0 \left[ 1 - \frac{2}{3H_0} S_{dec}^{-\frac{3}{2}} f(\theta, \phi, \Sigma_i) \right]. \quad (8.1.17)$$

De esta forma:

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{2}{3H_0} S_{dec}^{-\frac{3}{2}} f(\theta, \phi, \Sigma_i), \quad (8.1.18)$$

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{2}{3H_0} S_{dec}^{-\frac{3}{2}} [\Sigma_1 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \Sigma_2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \Sigma_3 \cos^2 \theta]. \quad (8.1.19)$$

Los armónicos esféricos presentes son:

$$\cos^2 \theta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_2^0(\theta, \phi) + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} Y_0^0, \quad (8.1.20)$$

$$\cos^2 \theta \sin^2 \phi = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} Y_0^0 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_2^0 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (Y_2^2 + Y_2^{-2}), \quad (8.1.21)$$

$$\sin^2 \theta \cos^2 \phi = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} Y_0^0 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_2^0 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (Y_2^2 + Y_2^{-2}). \quad (8.1.22)$$

De esta forma:

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{2}{3H_0} \left[ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} (2\Sigma_3 - \Sigma_1 - \Sigma_2) Y_2^0 + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) Y_0^0 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (\Sigma_1 - \Sigma_2) (Y_2^2 + Y_2^{-2}) \right] S_{dec}^{-\frac{3}{2}}.$$

Usando la ecuación de ligadura que cumplen los  $\Sigma_i$ :

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{2}{3H_0} \left[ \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \Sigma_3 Y_2^0 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (\Sigma_1 - \Sigma_2) (Y_2^2 + Y_2^{-2}) \right] S_{dec}^{-\frac{3}{2}}. \quad (8.1.23)$$

En el caso axisimétrico ( $\Sigma_1 = \Sigma_2$ ):

$$\frac{\delta T}{T_0} \pm \frac{16}{9} \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\Sigma}{H_0} P_2(\cos \theta) (1 + z_L)^{-\frac{3}{2}}. \quad (8.1.24)$$

## 8.2. El universo elipsoidal, magnitud y dirección del campo magnético cosmológico y valor de la excentricidad según los datos de la RCF

En la anterior sección vimos que hay una contribución al cuadrupolo de la RCF. Sin embargo, recientemente Campanelli et. al. [13], [17] presentaron un análisis similar, pero considerando la anisotropía como una

pequeña perturbación de FRW plano. Suponiendo un universo con simetría axial, si se define un parámetro de excentricidad  $e$  que mide que tanto se separa el universo del modelo estándar de la cosmología, el cual es totalmente isotrópico, se obtiene que para dar cuenta del bajo valor del cuadrupolo la excentricidad al momento del desacople debe ser del orden de  $10^{-2}$ . De igual manera se obtienen cotas al valor del campo magnético actual  $B_0$ , las cuales están de acuerdo con las cotas obtenidas por nucleosíntesis y por formación de estructura a gran escala [17]. De igual manera es posible obtener un estimativo de la dirección del campo magnético que coincide con el eje de simetría. Presentaremos ahora el análisis dado por Campanelli en [17].

Recordando la métrica de Bianchi I que vimos en la sección anterior, podemos ver que esta métrica puede describir modelos cosmológicos con simetría planar, cuando dos de los tres factores de escala son iguales entre sí. El elemento de línea planarmente simétrico [105] es:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2) - b^2(t)dz^2, \quad (8.2.1)$$

donde  $a(t)$  y  $b(t)$  son los factores de escala.

Ahora, a diferencia del caso anterior donde supusimos un fluido perfecto, en un escenario mas realista debemos incluir un término que explique la anisotropía. Modelamos esta por medio de un tensor momentum-energía anisotrópico con simetría planar:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p_{||}, -p_{||}, p_{\perp}). \quad (8.2.2)$$

Podemos distinguir dos contribuciones, una contribución anisotrópica:

$$(T_A)^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(\rho^A, -p_{||}^A, -p_{||}^A, p_{\perp}^A), \quad (8.2.3)$$

la cual es la responsable de la simetría planar, como por ejemplo un campo magnético, una pared de dominio o una cuerda cósmica [17], y una contribución isotrópica,

$$(T_I)^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(\rho^I, -p^I, -p^I, -p^I), \quad (8.2.4)$$

la cual puede ser energía de vacío, radiación, materia o constante cosmológica.

Teniendo en cuenta los anteriores tensores momentum-energía las ECE se convierten en:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 8\pi G(\rho^I + \rho^A), \quad (8.2.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = -8\pi G(p^I + p_{||}^A), \quad (8.2.6)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -8\pi G(p^I + p_{\perp}^A). \quad (8.2.7)$$

De ahora en adelante se considerará el caso dominado por materia ( $p^I = 0$ ) con una componente anisotrópica dada por un campo magnético uniforme dirigido a lo largo del eje  $z$ . Además, la interpretación de las componentes anisotrópicas con la materia es despreciable, que en el caso de campos magnéticos esto



corresponde a asumir que la conductividad del plasma primordial es muy alta [17].

Despues de introducir la expansión en armónicos esféricos introducimos el espectro de potencias:

$$\frac{\delta T_l}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{l(l+1)}{2l+2}} \sum_m |a_{lm}|^2. \quad (8.2.8)$$

La anisotropía del cuadrupolo se refiere al multipolo  $l = 2$ :

$$Q \equiv \frac{\delta T_2}{T_0}, \quad (8.2.9)$$

con  $T_0 = 2.73K$  la temperatura promedio de la RCF. El cuadrupolo observado es del orden:

$$(\delta T_2)_{obs}^2 \simeq 210 \mu K^2, \quad (8.2.10)$$

mientras que el predicho por el modelo estándar  $\Lambda$ CDM es:

$$(\delta T_2)_I^2 \simeq 1252 \mu K^2. \quad (8.2.11)$$

La RCF tiene dos componentes [13], [22]:

$$\delta T = \delta T_A + \delta T_I, \quad (8.2.12)$$

donde  $\delta T_A$  representa las fluctuaciones de temperatura debida al espacio background anisotrópico mientras que  $\delta T_I$  es la fluctuación isotrópica estándar. Como una consecuencia[17]:

$$a_{lm} = a_{lm}^A + a_{lm}^I. \quad (8.2.13)$$

Este tratamiento, a diferencia del anterior, considera la excentricidad del Universo como una pequeña perturbación al modelo estándar de FRW. En [17] se generaliza el modelo de universo excéntrico con el eje de simetría a lo largo del eje  $z$  a uno donde el eje de simetría está en cualquier dirección arbitraria en un sistema coordenado  $(x_g, y_g, z_g)$  en donde el plano  $x_g - y_g$  es el plano galáctico. Al final, este método permitirá dar un estimativo de la magnitud del campo magnético y de su dirección.

Con estas consideraciones, se usan coordenadas polares  $(\theta, \phi)$  y la dirección del campo magnético está definida por los ángulos  $(\vartheta, \varphi)$ . Cuando la excentricidad es pequeña se puede escribir la métrica de Bianchi I como una perturbación de la métrica FRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j, \quad (8.2.14)$$

donde  $h_{ij}$  es la perturbación métrica que toma la forma:

$$h_{ij} = -e^2 \delta_{i3} \delta_{j3}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \quad (8.2.15)$$

y  $e$  es la excentricidad.

Por medio de la ecuación geodésica nula obtenemos la anisotropía de la temperatura en un Universo FRW (efecto Sachs-Wolfe):

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{-1}{2} \int_{t_{dec}}^{t_0} \frac{\partial H_{ij}}{\partial t} n^i n^j dt, \quad (8.2.16)$$

donde  $n^i$  son los cosenos directores. Usando la condición de que la excentricidad actual es nula,  $e(t_0) = 0$ , obtenemos:

$$\frac{\delta T}{T_0} = -\frac{1}{2} e_{dec}^2 n_3^2, \quad (8.2.17)$$

donde  $e_{dec}$  es la excentricidad en el momento de desacople.

Teniendo en cuenta que el coseno director en el sistema coordenado galáctico viene dado por:

$$n_3 = \cos \theta \cos \vartheta - \sin \theta \sin \vartheta \cos(\phi - \varphi), \quad (8.2.18)$$

$$n_3 = \cos \theta \cos \vartheta - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \vartheta (e^{i(\phi-\varphi)} + e^{-i(\phi-\varphi)}). \quad (8.2.19)$$

Elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned} n_3^2 &= \cos^2 \vartheta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \sin^2 \vartheta (e^{2i(\phi-\varphi)} + e^{-2i(\phi-\varphi)} + 2) \\ &\quad - \cos \theta \sin \theta \cos \vartheta \sin \vartheta (e^{i(\phi-\varphi)} + e^{-i(\phi-\varphi)}), \\ n_3^2 &= \cos^2 \vartheta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta e^{-2i\varphi} (\sin^2 \theta e^{2i\phi}) + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta e^{+2i\varphi} (\sin^2 \theta e^{-2i\phi}) + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \sin^2 \theta \\ &\quad - \cos \vartheta \sin \vartheta e^{-i\varphi} (\cos \theta \sin \theta e^{i\phi}) - \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\varphi} (\cos \theta \sin \theta e^{-i\phi}). \end{aligned}$$

Organizando términos:

$$\begin{aligned} n_3^2 &= \left( \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta e^{-2i\varphi} (\sin^2 \theta e^{2i\phi}) + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta e^{+2i\varphi} (\sin^2 \theta e^{-2i\phi}) \\ &\quad - \cos \vartheta \sin \vartheta e^{-i\varphi} (\cos \theta \sin \theta e^{i\phi}) - \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\varphi} (\cos \theta \sin \theta e^{-i\phi}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $\cos^2 \theta$  en términos de los armónicos esféricos y teniendo en cuenta los demás armónicos esféricos:

$$n_3^2 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left( \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) Y_2^0 + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} Y_0^0,$$

$$Y_2^2(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{2i\phi},$$

$$Y_2^{-2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{-2i\phi},$$

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi},$$

$$Y_2^{-1}(\theta, \phi) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi},$$

los coeficientes de la expansión en armónicos esféricos son los siguientes:

$$a_{20} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left( \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) e_{dec}^2, \quad (8.2.20)$$

$$a_{21} = \frac{-1}{3} \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\varphi} e_{dec}^2, \quad (8.2.21)$$

$$a_{22} = \sqrt{\frac{\pi}{30}} e^{2i\varphi} \sin^2 \vartheta e_{dec}^2. \quad (8.2.22)$$

De esta manera, al elevar al cuadrado y sumar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi e_{dec}^4} \sum_m |a_{lm}|^2 &= \frac{4}{45} (\cos^4 \vartheta - \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + \frac{1}{4} \sin^4 \vartheta) + \frac{1}{15} \sin^4 \vartheta + \frac{12}{45} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta, \\ &= \frac{1}{45} [4 \cos^4 \vartheta - 4 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta + 3 \sin^4 \vartheta + 12 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta], \\ &= \frac{1}{45} [4(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta) + 8 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta], \\ &= \frac{4}{45} (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)^2, \\ &= \frac{4}{45}. \end{aligned}$$

De esta forma, el término de cuadrupolo es:

$$\begin{aligned} Q_A &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{2 \cdot 3}{5} \right)} \frac{4}{45} e_{dec}, \\ &= \frac{2}{5} \sqrt{\frac{1}{3}} e_{dec}^2. \end{aligned} \quad (8.2.23)$$

Observando los coeficientes de la contribución anisotrópica,  $a_{l,-m}^A = (-1)^m (a_{l,m}^A)^*$ . Dado que la temperatura es una función real,  $a_{l,-m} = (-1)^m (a_{l,m})^*$ , de lo que se infiere que los coeficientes isotrópicos también deben cumplir dicha identidad,  $a_{l,-m}^I = (a_{l,m}^I)^*$ . Dado que las fluctuaciones de temperatura producidas por la inflación estándar son estadísticamente isotrópicas se asume que los coeficientes  $a_{lm}^I$  son iguales salvo un factor de fase:

$$a_{20}^I = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{i\phi_1} Q_I, \quad (8.2.24)$$

$$a_{21}^I = -(a_{2,-1}^I)^* = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{i\phi_2} Q_I, \quad (8.2.25)$$

$$a_{22}^I = (a_{2,-2}^I)^* = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{i\phi_3} Q_I, \quad (8.2.26)$$

donde  $0 \leq \phi_i \leq 2\pi$  son fases desconocidas y

$$Q_I \simeq 13 \times 10^{-6}. \quad (8.2.27)$$

Teniendo en cuenta las contribuciones isotrópica y anisotrópica, el valor total del cuadrupolo es:

$$Q^2 = Q_A^2 + Q_I^2 - 2f Q_A Q_I, \quad (8.2.28)$$

donde:

$$f(\vartheta, \varphi; \phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{45} \{ 2\sqrt{6} [\sin \vartheta \cos(2\varphi + \phi_3) - 2 \cos \varphi \cos(\varphi + \phi_2)] \sin \vartheta + [1 + 3 \cos(2\vartheta)] \cos \phi_1 \}. \quad (8.2.29)$$

Es posible escoger  $a_{20}$  real, de tal manera que  $\phi_1 = 0$ . Tenemos 5 parámetros desconocidos:  $e_{dec}$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$ . Para  $l = 2$  tenemos 5 ecuaciones con 5 incógnitas, al resolver la ecuación (8.2.13). Para resolver estas ecuaciones se necesitan los datos de WMAP. Campanelli et. al [13], [17] usan los datos proporcionados por SILC400 [106], WILC3YR [90] y TCM3YR [11].

En conclusión, Campanelli et. al. argumentan que la anomalía del cuadrupolo puede ser resuelta si la última superficie de dispersión de la RCF es un elipsoide. Si la excentricidad en el momento del desacople es del orden:

$$e_{dec} \simeq 0.64 \times 10^{-2}, \quad (8.2.30)$$

entonces la amplitud del cuadrupolo puede ser drásticamente reducida sin afectar multipolos de orden mayor. Se obtiene además una estimación de la magnitud del campo magnético cósmico:

$$B_0 \simeq 4.6 \times 10^{-9} G, \quad (8.2.31)$$

lo cual concuerda con los límites que se obtienen por nucleosíntesis primordial y formación de estructura a gran escala. Además, si consideramos el sistema de coordenadas galácticas,  $b = 90^\circ - \vartheta$ ,  $l = \varphi$ , es posible obtener fuertes cotas a la dirección  $(b, l)$  del eje de simetría:

$$b \simeq 50^\circ - 54^\circ, \quad 40^\circ \leq l \leq 140^\circ, \quad 240^\circ \leq l \leq 310^\circ. \quad (8.2.32)$$

Estas cotas concuerdan con recientes análisis estadísticos de mapas limpiados de la RCF de los datos obtenidos de WMAP3 [17]. Por otro lado hay otros trabajos que indicarían un eje de simetría en la estructura a gran escala del universo, como lo son el análisis de galaxias espirales en el ‘‘Sloan Digital Sky Survey’’ como de análisis de la polarización de la radiación electromagnética propagándose sobre distancias cosmológicas [107].

# CAPÍTULO 9

---

## EDG EN COSMOLOGÍAS DE BIANCHI

Como se había mostrado en el capítulo 3, el tensor de Riemann se puede descomponer en 4 contribuciones: una parte eléctrica, una parte magnética, una parte correspondiente a un fluido perfecto y otra a un fluido imperfecto. Para un modelo de Bianchi I con una fuente de fluido perfecto, la segunda y la cuarta contribución se anulan. Para FLRW solo la tercera sobrevive, así que la EDG para Bianchi I es igual a la obtenida para FLRW, pero con un término adicional, este determinado por el tensor eléctrico de Weyl. La parte eléctrica del tensor de Riemann está dada por:

$$\begin{aligned}
 R_{E\ \gamma\delta}^{\alpha\beta} &= 4u^{[\alpha}u_{[\gamma}E^{\beta]}_{\delta]} + 4h^{[\alpha}_{\ \gamma}E^{\beta]}_{\ \delta]}, \\
 &= 2u^\alpha u_{[\gamma}E^{\beta]}_{\delta]} - 2u^\beta u_{[\gamma}E^{\alpha]}_{\delta]} + 2h^\alpha_{[\gamma}E^{\beta]}_{\delta]} - 2h^\beta_{[\gamma}E^{\alpha]}_{\delta]}, \\
 &= u^\alpha u_\gamma E^\beta_\delta - u^\alpha u_\delta E^\beta_\gamma - u^\beta u_\gamma E^\alpha_\delta + u^\beta u_\delta E^\alpha_\gamma + h^\alpha_\gamma E^\beta_\delta - h^\alpha_\delta E^\beta_\gamma - h^\beta_\gamma E^\alpha_\delta + h^\beta_\delta E^\alpha_\gamma. \quad (9.1)
 \end{aligned}$$

Bajando el índice  $\beta$ :

$$R_{E\ \beta\gamma\delta}^\alpha = u^\alpha u_\gamma E_{\beta\delta} - u^\alpha u_\delta E_{\beta\gamma} - u_\beta u_\gamma E^\alpha_\delta + u_\beta u_\delta E^\alpha_\gamma + h^\alpha_\gamma E_{\beta\delta} - h^\alpha_\delta E_{\beta\gamma} - h_{\beta\gamma} E^\alpha_\delta + h_{\beta\delta} E^\alpha_\gamma. \quad (9.2)$$

De esta forma, multiplicando por  $V^\beta \eta^\gamma V^\delta$ :

$$\begin{aligned}
 R_{E\ \beta\gamma\delta}^\alpha V^\beta \eta^\gamma V^\delta &= u^\alpha (E_{\beta\delta} V^\beta V^\delta) (u_\gamma \eta^\gamma) - u^\alpha (u_\delta V^\delta) (E_{\beta\gamma} V^\beta \eta^\gamma) - (u_\beta V^\beta) (u_\gamma \eta^\gamma) (E^\alpha_\delta V^\delta) \\
 &\quad + (u_\beta V^\beta)^2 (E^\alpha_\gamma \eta^\gamma) + (h^\alpha_\gamma \eta^\gamma) (E_{\beta\delta} V^\beta V^\delta) - (h^\alpha_\delta V^\delta) (E_{\beta\gamma} V^\beta \eta^\gamma) \\
 &\quad - (h_{\beta\gamma} V^\beta \eta^\gamma) (E^\alpha_\delta V^\delta) + (h_{\beta\delta} V^\beta V^\delta) (E^\alpha_\gamma \eta^\gamma). \quad (9.3)
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que gracias al teorema del espacio pantalla,  $\eta^\alpha u_\alpha = 0$ , y por lo tanto también  $h_{\beta\gamma} V^\beta \eta^\gamma = 0$ , y además que  $E = -V_\beta u^\beta$ :

$$\begin{aligned}
 R_{E\ \beta\gamma\delta}^\alpha V^\beta \eta^\gamma V^\delta &= u^\alpha E (E_{\beta\gamma} V^\beta \eta^\gamma) + E^2 (E^\alpha_\gamma \eta^\gamma) + (\delta^\alpha_\gamma + u^\alpha u_\gamma) \eta^\gamma (E_{\beta\delta} V^\beta V^\delta) \\
 &\quad - (\delta^\alpha_\delta + u^\alpha u_\delta) V^\delta (E_{\beta\gamma} V^\beta \eta^\gamma) + (g_{\beta\delta} + u_\beta u_\delta) V^\beta V^\delta (E^\alpha_\gamma \eta^\gamma) \\
 R_{E\ \beta\gamma\delta}^\alpha V^\beta \eta^\gamma V^\delta &= u^\alpha (E_{\beta\gamma} V^\beta \eta^\gamma) E + (E^\alpha_\gamma \eta^\gamma) E^2 + \eta^\alpha (E_{\beta\delta} V^\beta V^\delta) \\
 &\quad - V^\alpha (E_{\beta\gamma} V^\beta \eta^\gamma) + u^\alpha (E_{\beta\gamma} V^\beta \eta^\gamma) E + \epsilon (E^\alpha_\gamma \eta^\gamma) + E^2 E^\alpha_\gamma \eta^\gamma. \quad (9.4)
 \end{aligned}$$

Si definimos  $F = E_{\beta\gamma} V^\beta \eta^\gamma$  podemos escribir:

$$\boxed{R_{E\ \beta\gamma\delta}^\alpha V^\beta \eta^\gamma V^\delta = F(2Eu^\alpha + \eta^\alpha - V^\alpha) + E^\alpha_\gamma \eta^\gamma (\epsilon + 2E^2)} \quad (9.5)$$

Y la Ecuación de Desvío Geodésico para el modelo de bianchi I queda escrita así:

$$\boxed{\frac{\delta^2 \eta^\alpha}{\delta \nu^2} = -\left[\frac{1}{3}(\mu + \Lambda)\epsilon + \frac{1}{2}(\mu + p)E^2\right]\eta^\alpha - F(2Eu^\alpha + \eta^\alpha - V^\alpha) - E^\alpha_\gamma \eta^\gamma (\epsilon + 2E^2)} \quad (9.6)$$

Vemos entonces que el segundo y tercer términos de la EDG inducen un cambio en la dirección del vector desviación. El segundo término se anula para el caso  $V^\alpha = u^\alpha$ , esta ecuación se muestra en la sección de Apéndices de la Tesis de Henk van Elst [45], debido a las propiedades de la parte eléctrica del tensor de Weyl (ver capítulo 3,  $V_{\alpha\beta}u^\beta = 0$ ). Este es un término muy importante, juega el papel de una fuerza de marea, que cambia la dirección del vector desviación. Un shear global induce entonces una rotación de todas las imágenes que se podrían observar. Como vimos en la evolución del tensor eléctrico de Weyl, su efecto se hace importante en épocas más tempranas.

Por otro lado, no es solo este término adicional el que modifica la ecuación, el primer término también se ve modificado pues  $E$ , que está directamente relacionado con el redshift, es diferente del caso de FLRW, pues como vimos en el capítulo 8 la ley de redshift se modifica substancialmente y refleja el carácter anisotrópico del modelo. Este término solo implica un cambio en la magnitud del vector desviación, pero vemos que este factor depende de la dirección, por lo que la magnificación de posibles imágenes es diferente dependiendo de la dirección de observación.

# CAPÍTULO 10

---

## CONCLUSIONES

Últimamente no solo la anomalía de la radiación cósmica de fondo sino otras anomalías ampliamente documentadas en la literatura nos inducen a considerar modelos alternativos al modelo estándar de la cosmología. Vimos que el bajo valor del cuadrupolo tenía una explicación con el modelo de Bianchi I, pero hay objeciones [108], [109].

El teorema de EGS establece que si la temperatura de la RCF es exactamente isotrópica alrededor de cada punto, el universo debe ser un modelo de FRW [110]. Pero el universo no es exactamente isotrópico, pero si altamente isotrópico, por lo que Stoeger, Maartens y Ellis [111] demuestran un teorema EGS generalizado al cambiar “exacto” por “casi”. Sin embargo, recientemente se ha mostrado que algunas de estas hipótesis no son completamente justificables desde el punto de vista físico [70], [71], [72], [112], lo cual lleva a no descartar modelos más generales como los de Bianchi y modelos inhomogéneos que podrían generalizar el modelo estándar. Inclusive ha habido intentos de explicar la aparente expansión acelerada del Universo asumiendo que éste es inhomogéneo y solo es homogéneo e isotrópico estadísticamente [113], [114], [115].

Si consideramos en el tensor momentum-energía una contribución de campos electromagnéticos cosmológicos, los cuales su origen aún está en debate, necesariamente estos introducen una presión anisotrópica que hacen del modelo un fluido imperfecto [116], [40], [117], caso que no corresponde a la cosmología estándar. Esto justifica no descartar modelos que admiten como fuente un fluido imperfecto, modelos cosmológicos más generales, entre los cuales se encuentra la familia de universos de Bianchi.

La cosmología Bianchi tipo I presentada en este trabajo tiende a la isotropía según los términos establecidos por [3], [70], según los cuales los parámetros  $\Sigma^2$  y  $\mathcal{W}^2$  tendían a cero. Esto, aún sin considerar una constante cosmológica, la cual según Wald [118], obliga a la mayoría de modelos de Bianchi a isotropizarse. Por ende, el modelo de Bianchi I puede verse como el primer paso a tomar cuando queremos generalizar al modelo estándar. Hay actualmente investigación referente a la formación de estructura, perturbaciones cosmológicas y ondas gravitacionales en estos modelos [117], [119]. Hay modelos aún más generales, no necesariamente cercanos a la isotropía, que pueden dar una RCF altamente isotrópica [71].

A pesar de que las cotas obtenidas para los parámetros de Shear indican que el modelo debe estar muy cercano a la isotropía, los efectos del Shear no son despreciables en épocas más tempranas, cuando el shear no es despreciable comparado con la expansión de Hubble, tal como lo indican las gráficas de evolución obtenidas. Estos efectos deben tener consecuencias en la EDG y por ende en los observables. La relación

de Mattig se debe generalizar, pues entre otras consecuencias, la ley de Redshift deja de ser válida, como vimos en el capítulo 8, hay una generalización que incluye los efectos del Shear. Por otro lado, el tensor eléctrico de Weyl va creciendo a medida que nos acercamos al origen del Universo, lo cual afectaría la interpretación de un observable tan importante para la cosmología, como lo es la distancia diametral angular.



---



---

**APÉNDICE A. ECUACIÓN DE RAYCHAUDHURI**

En el formalismo 1+3 de la Relatividad General las identidades de Bianchi nos dan las ecuaciones de evolución de las partes eléctrica y magnética del tensor de Weyl, las identidades de Ricci nos dan a nosotros las ecuaciones de evolución del escalar  $\Theta$ , el shear  $\sigma_{\mu\nu}$  y la vorticidad  $\omega_{\mu\nu}$ . En este Apéndice mostraremos como se obtiene la ecuación de evolución para  $\Theta$ , las ecuaciones para las otras cantidades se obtienen por métodos similares, partiendo de las identidades de Ricci [42].

Partimos de las identidades de Ricci que nos relacionan los conmutadores de las segundas derivadas covariantes de algún campo vectorial  $\mathbf{V}$ :

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}V^\rho &= R^\rho{}_{\mu\nu\sigma}V^\sigma \\ 2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}V_\rho &= R^\sigma{}_{\mu\nu\rho}V_\sigma \end{aligned} \tag{11.0.1}$$

Consideremos estas identidades para el campo  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} u_{\rho;\mu;\nu} - u_{\rho;\nu;\mu} &= R_{\mu\nu\sigma\rho}u^\sigma \\ &= -R_{\mu\nu\rho\sigma}u^\sigma \\ &= -R_{\rho\sigma\mu\nu}u^\sigma \end{aligned}$$

Subiendo el índice  $\rho$ :

$$u^\rho{}_{\mu;\nu} - u^\rho{}_{\nu;\mu} = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}u^\sigma \tag{11.0.2}$$

Si hacemos  $\rho = \mu$  y multiplicamos por  $u^\nu$ :

$$u^\mu{}_{\mu;\nu}u^\nu - u^\mu{}_{\nu;\mu}u^\nu = -R^\mu{}_{\sigma\mu\nu}u^\sigma u^\nu \tag{11.0.3}$$

Recordando que:

$$\begin{aligned} \Theta &:= \tilde{\nabla}_\mu u^\mu = u^\mu{}_{;\alpha}h^\alpha{}_\mu = u^\mu{}_{;\alpha}[\delta^\alpha{}_\mu + u^\alpha u_\mu], \\ \Theta &= u^\mu{}_{;\mu} + \dot{u}^\mu \dot{u}_\mu. \end{aligned}$$

Y por otro lado, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} u^\mu{}_{;\nu;\mu}u^\nu &= (u^\mu{}_{;\nu}u^\nu)_{;\mu} - u^\mu{}_{;\nu}u^\nu{}_{;\mu}, \\ &= \dot{u}^\mu{}_{;\mu} - u^\mu{}_{;\nu}u^\nu{}_{;\mu}. \end{aligned}$$

Reemplazando en (11.0.3):

$$\begin{aligned} & [\Theta - \dot{u}^\mu u_\mu]_{;\nu} u^\nu - \dot{u}^\mu_{;\mu} + u^\mu_{;\nu} u^\nu_{;\mu} = -R_{\sigma\nu} u^\sigma u^\nu, \\ & \dot{\Theta} - (\dot{u}^\mu_{;\nu} u^\nu) u_\mu - \dot{u}^\mu (u_{\mu;\nu} u^\nu) - \dot{u}^\mu_{;\mu} + u^\mu_{;\nu} u^\nu_{;\mu} = -R_{\sigma\nu} u^\sigma u^\nu, \\ & \dot{\Theta} - [\dot{u}^\mu_{;\nu} u^\nu u_\mu + \dot{u}^\mu_{;\mu}] - \dot{u}^\mu \dot{u}_\mu - u^\mu_{;\nu} u^\nu_{;\mu} = -R_{\sigma\nu} u^\sigma u^\nu. \end{aligned}$$

El término entre paréntesis corresponde a:

$$\begin{aligned} \dot{u}^\mu_{;\nu} h^\nu_\mu &= \dot{u}^\mu_{;\nu} (\delta^\nu_\mu + u^\nu u_\mu), \\ \dot{u}^\mu_{;\nu} h^\nu_\mu &= \dot{u}^\mu_{;\mu} + (\dot{u}^\mu_{;\nu} u^\nu) u_\mu. \end{aligned} \tag{11.0.4}$$

Así, obtenemos:

$$\dot{\Theta} - \tilde{\nabla}_\mu \dot{u}^\mu = \dot{u}^\mu \dot{u}_\mu - u^\mu_{;\nu} u^\nu_{;\mu} - R_{\sigma\nu} u^\sigma u^\nu. \tag{11.0.5}$$

Consideremos ahora la expresión para  $R_{\mu\nu}$  obtenida gracias a las E.C.E.:

$$R_{\sigma\nu} = (\mu + p) h_{\sigma\nu} + q_\sigma u_\nu + u_\sigma u_\nu + \left[ \Lambda - \frac{(\mu + 3p)}{2} \right] g_{\sigma\nu} + \pi_{\sigma\nu}. \tag{11.0.6}$$

De esta manera, teniendo en cuenta las propiedades de  $h_{\sigma\nu}$ ,  $q_\sigma$  y  $\pi_{\sigma\nu}$ , tenemos:

$$R_{\sigma\nu} u^\sigma u^\nu = \frac{\mu + 3p}{2} - \Lambda. \tag{11.0.7}$$

Por otro lado, calculamos el segundo término de la derecha de (11.0.5):

$$u^\mu_{;\nu} u^\nu_{;\mu} = \left[ \sigma^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu + \frac{1}{3} \Theta h^\mu_\nu + \dot{u}^\mu u_\nu \right] \times \left[ \sigma^\nu_\mu + \omega^\nu_\mu + \frac{1}{3} \Theta h^\nu_\mu + \dot{u}^\nu u_\mu \right]$$

Verifiquemos ahora algunas propiedades. Por definición:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} [u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu}] - \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu}, \\ \sigma^\mu_\nu &= \frac{1}{2} [u^\mu_{;\nu} + u_\nu^{;\mu}] - \frac{1}{3} \Theta h^\mu_\nu - \frac{1}{2} [\dot{u}^\mu u_\nu + u^\mu \dot{u}_\nu]. \end{aligned} \tag{11.0.8}$$

Según [42], una definición alternativa y equivalente del shear  $\sigma_{\alpha\beta}$  es:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left[ h_{\gamma(\alpha} h_{\beta)\delta} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta} \right] \tilde{\nabla}^\delta u^\gamma. \tag{11.0.9}$$

Tenemos por definición:

$$\tilde{\nabla}^\delta u^\gamma = \nabla^\delta u^\gamma + \dot{u}^\gamma u^\delta = u^{\gamma;\delta} + \dot{u}^\gamma u^\delta. \tag{11.0.10}$$

Y dado que  $h_{\gamma\delta} u^\delta = 0$ , entonces:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left[ \frac{1}{2} (h_{\gamma\alpha} h_{\beta\delta} + h_{\gamma\beta} h_{\alpha\delta}) - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta} \right] u^{\gamma;\delta}. \tag{11.0.11}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} h_{\gamma\alpha} u^{\gamma;\delta} &= (g_{\gamma\alpha} + u_\gamma u_\alpha) u^{\gamma;\delta} \\ &= u^{\delta;\alpha} + (u_\gamma u^{\gamma;\delta}) u_\alpha \end{aligned} \tag{11.0.12}$$

El segundo término se anula teniendo en cuenta la ley de Leibnitz y el hecho de que el campo vectorial  $\mathbf{u}$  está normalizado a 1. De esta forma:

$$h_{\gamma\alpha}u^{\gamma;\delta} = u_{\alpha}^{\delta} \quad (11.0.13)$$

De esta manera:

$$h_{\gamma\alpha}u^{\gamma;\delta} = u^{\delta}_{\alpha} \quad (11.0.14)$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} h_{\beta\delta}h_{\gamma\alpha}u^{\gamma;\delta} &= h_{\beta\delta}u^{\delta}_{\alpha} \\ &= (g_{\beta\delta} + u_{\beta}u_{\delta})u^{\delta}_{\alpha} \\ &= u_{\alpha;\beta} + (u^{\delta}_{\alpha}u_{\delta})u_{\beta} \\ &= u_{\alpha;\beta} + \dot{u}_{\alpha}u_{\beta} \\ h_{\gamma\beta}h_{\alpha\delta}u^{\gamma;\delta} &= u_{\beta;\alpha} + \dot{u}_{\beta}u_{\alpha} \end{aligned}$$

Por último, por definición:

$$h_{\gamma\delta}u^{\gamma;\delta} = \Theta$$

Así:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}] + \frac{1}{2} [\dot{u}_{\alpha}u_{\beta} + u_{\alpha}\dot{u}_{\beta}] - \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta}, \\ \sigma_{\alpha\beta} &= u_{(\alpha;\beta)} + \dot{u}_{(\alpha}u_{\beta)} - \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Lo cual prueba que esta definición es equivalente a la usualmente dada en los artículos. Ahora, comprobemos que  $\sigma_{\alpha\beta}u^{\beta} = 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}u^{\beta} &= \frac{1}{2} [u_{\alpha;\beta}u^{\beta} + u_{\beta;\alpha}u^{\beta}] + \frac{1}{2} [\dot{u}_{\alpha}(u_{\beta}u^{\beta}) + u_{\alpha}\dot{u}_{\beta}u^{\beta}] - \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta}u^{\beta}, \\ \sigma_{\alpha\beta}u^{\beta} &= \frac{1}{2} [\dot{u}_{\alpha} - \dot{u}_{\alpha} + u_{\alpha}(u_{\beta;\gamma}u^{\gamma}u^{\beta})], \\ \sigma_{\alpha\beta}u^{\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (11.0.15)$$

Ahora, mostremos que la traza de cualquier tensor  $T^{(\alpha\beta)}$  es nula y por lo tanto también la traza del shear:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}T^{(\alpha\beta)} &= g_{\alpha\beta} \left[ h^{\alpha}_{\gamma}h^{\beta}_{\delta} - \frac{1}{3}h^{\alpha\beta}h_{\gamma\delta} \right] T^{\gamma\delta}, \\ &= g_{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{2}(h^{\alpha}_{\gamma}h^{\beta}_{\delta} + h^{\beta}_{\gamma}h^{\alpha}_{\delta}) - \frac{1}{3}h^{\alpha\beta}h_{\gamma\delta} \right] T^{\gamma\delta}, \\ &= \left[ \frac{1}{2}(h_{\beta\gamma}h^{\beta}_{\delta} + h_{\alpha\gamma}h^{\alpha}_{\delta}) - \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}h_{\gamma\delta} \right] T^{\gamma\delta}, \\ &= \left[ \frac{1}{2}(h_{\gamma\delta} + h_{\delta\gamma}) - \frac{1}{3}h^{\beta}_{\beta}h_{\gamma\delta} \right] T^{\gamma\delta}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora consideremos la vorticidad:

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha\beta} &= \tilde{\nabla}_{[\alpha} u_{\beta]} = u_{[\beta;\alpha]} + \dot{u}_{[\beta} u_{\alpha]} \\ \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [u_{\beta;\alpha} - u_{\alpha;\beta}] + \frac{1}{2} [\dot{u}_{\beta} u_{\alpha} - \dot{u}_{\alpha} u_{\beta}]\end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha\beta} u^{\beta} &= \frac{1}{2} [(u_{\beta;\alpha} u^{\beta}) - (u_{\alpha;\beta} u^{\beta})] + \frac{1}{2} [u_{\alpha} (\dot{u}_{\beta} u^{\beta}) - \dot{u}_{\alpha} (u_{\beta} u^{\beta})], \\ \omega_{\alpha\beta} u^{\beta} &= -\frac{1}{2} \dot{u}_{\alpha} + \frac{1}{2} \dot{u}_{\alpha} = 0.\end{aligned}\tag{11.0.16}$$

Por otro lado, comprobemos otras identidades:

$$\begin{aligned}\Theta &:= \tilde{\nabla}_{\alpha} u^{\alpha} = h^{\delta}_{\alpha} h^{\gamma\alpha} u_{\gamma;\delta}, \\ &= u^{\alpha}_{;\alpha} + (\dot{u}^{\alpha} u_{\alpha}), \\ &= u^{\alpha}_{;\alpha}.\end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned}h^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [h^{\alpha\beta} u_{\beta;\alpha} - h^{\alpha\beta} u_{\alpha;\beta}] + \frac{1}{2} [h^{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta} u_{\alpha} - h^{\alpha\beta} \dot{u}_{\alpha} u_{\beta}] = \frac{1}{2} [\Theta - \Theta], \\ h^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} &= 0.\end{aligned}\tag{11.0.17}$$

De igual manera:

$$\begin{aligned}h^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [h^{\alpha\beta} u_{\alpha;\beta} + h^{\alpha\beta} u_{\beta;\alpha}] + \frac{1}{2} [h^{\alpha\beta} \dot{u}_{\alpha} u_{\beta} + h^{\alpha\beta} u_{\alpha} \dot{u}_{\beta}] - \frac{1}{3} \Theta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \\ h^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} &= 0.\end{aligned}\tag{11.0.18}$$

Por otro lado, definamos:

$$B_{\alpha\beta} = u_{\beta;\alpha} + \dot{u}_{\beta} u_{\alpha}\tag{11.0.19}$$

De esta manera:

$$\omega_{\alpha\beta} = B_{[\alpha\beta]}\tag{11.0.20}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = B_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{3} \Theta h_{\alpha\beta}\tag{11.0.21}$$

Así:

$$\begin{aligned}\sigma^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} &= B^{(\alpha\beta)} \omega_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \Theta h^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}, \\ \sigma^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} &= B^{(\alpha\beta)} B_{[\alpha\beta]}.\end{aligned}\tag{11.0.22}$$

Mostremos que para cualquier tensor  $T_{\alpha\beta}$  de segundo rango tenemos que  $T^{(\alpha\beta)} T_{[\alpha\beta]} = 0$ . Para ello:

$$\begin{aligned}T^{(\alpha\beta)} T_{[\alpha\beta]} &= \frac{1}{2} [T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}] \times \frac{1}{2} [T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}], \\ &= \frac{1}{4} [T^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta} T_{\beta\alpha} + T^{\beta\alpha} T_{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} T_{\beta\alpha}].\end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} T^{(\alpha\beta)}T_{[\alpha\beta]} &= \frac{1}{4} [(T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}T_{\beta\alpha}) + (T^{\beta\alpha}T_{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}T_{\beta\alpha})], \\ T^{(\alpha\beta)}T_{[\alpha\beta]} &= 0. \end{aligned} \tag{11.0.23}$$

De esta forma, llegamos a otra relación útil:

$$\sigma^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} = 0. \tag{11.0.24}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta estos resultados tenemos que:

$$\begin{aligned} w^{\mu}_{;\nu}u^{\nu}_{;\mu} &= \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\Theta^2, \\ w^{\mu}_{;\nu}u^{\nu}_{;\mu} &= 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{1}{3}\Theta^2. \end{aligned} \tag{11.0.25}$$

De esta manera, (11.0.5) se convierte en:

$$\boxed{\dot{\Theta} - \tilde{\nabla}_{\mu}u^{\mu} = \dot{u}^{\mu}\dot{u}_{\mu} - 2(\sigma^2 - \omega^2) - \frac{1}{3}\Theta^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda} \tag{11.0.26}$$

Esta es la famosa ecuación de Raychaudhuri.

# CAPÍTULO 12

---

## APÉNDICE B. IDENTIDADES DE BIANCHI PARA EL TENSOR DE WEYL

A partir de las identidades de Bianchi:

$$R_{\alpha\beta[\gamma\delta;\kappa]} = 0, \quad (12.0.1)$$

y de la expresión del tensor de Riemann en términos del tensor de Weyl:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} - g_{\alpha[\delta}R_{\gamma]\beta} - g_{\beta[\gamma}R_{\delta]\alpha} - \frac{1}{3}Rg_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta}, \quad (12.0.2)$$

se mostrará que estas identidades de Bianchi se pueden reescribir como:

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} = J^{\alpha\beta\gamma}, \quad (12.0.3)$$

donde:

$$J^{\alpha\beta\gamma} = R^{\gamma[\alpha;\beta]} + \frac{1}{6}g^{\gamma[\beta}R^{\alpha]}. \quad (12.0.4)$$

Para ello, primero démonos cuenta que las identidades de Bianchi equivalen a:

$$\frac{1}{6} [R_{\alpha\beta\gamma\delta;\kappa} - R_{\alpha\beta\delta\gamma;\kappa} + R_{\alpha\beta\delta\kappa;\gamma} - R_{\alpha\beta\gamma\kappa;\delta} + R_{\alpha\beta\kappa\gamma;\delta} - R_{\alpha\beta\kappa\delta;\gamma}] = 0. \quad (12.0.5)$$

Dado que  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$ :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\kappa} + R_{\alpha\beta\delta\kappa;\gamma} + R_{\alpha\beta\kappa\gamma;\delta} = 0. \quad (12.0.6)$$

Y por otro lado, podemos escribir:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\delta}R_{\gamma\beta} - g_{\alpha\gamma}R_{\delta\beta}) - \frac{1}{2}(g_{\beta\gamma}R_{\delta\alpha} - g_{\beta\delta}R_{\gamma\alpha}) - \frac{1}{6}R(g_{\alpha\gamma}g_{\delta\beta} - g_{\alpha\delta}g_{\gamma\beta}), \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2}[g_{\alpha\gamma}R_{\delta\beta} - g_{\alpha\delta}R_{\gamma\beta} + g_{\beta\delta}R_{\gamma\alpha} - g_{\beta\gamma}R_{\delta\alpha}] + \frac{1}{3}R(g_{\alpha\delta}g_{\gamma\beta} - g_{\alpha\gamma}g_{\delta\beta}). \end{aligned}$$

Ahora, analizamos los términos de la identidad de Bianchi, por las simetrías del tensor de Riemann:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\kappa} = R_{\gamma\delta\alpha\beta;\kappa}, \quad (12.0.7)$$

$$R_{\alpha\beta\delta\kappa;\gamma} = -R_{\beta\alpha\delta\kappa;\gamma} = R_{\beta\alpha\kappa\delta;\gamma}, \quad (12.0.8)$$

$$R_{\alpha\beta\kappa\gamma;\delta} = -R_{\beta\alpha\kappa\gamma;\delta}. \quad (12.0.9)$$

Por lo tanto, si subimos el índice  $\beta$ , podemos escribir la segunda identidad de Bianchi como:

$$R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\beta}{}_{;\kappa} + R_{\alpha\kappa\delta;\gamma}{}^{\beta} - R_{\alpha\kappa\gamma;\delta}{}^{\beta} = 0. \quad (12.0.10)$$

Si hacemos  $\kappa = \beta$  y sumamos:

$$R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} + R^{\beta}{}_{\alpha\beta\delta;\gamma} - R^{\beta}{}_{\alpha\beta\gamma;\delta} = 0, \quad (12.0.11)$$

$$R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} + R_{\alpha\delta;\gamma} - R_{\alpha\gamma;\delta} = 0. \quad (12.0.12)$$

Si hacemos el cambio de índices  $\gamma \longleftrightarrow \alpha$ ,  $\beta \longleftrightarrow \delta$ :

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{;\delta} + R_{\gamma\beta;\alpha} - R_{\gamma\alpha;\beta} = 0. \quad (12.0.13)$$

Subiendo los índices:

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} + R^{\gamma\beta;\alpha} - R^{\gamma\alpha;\beta} = 0. \quad (12.0.14)$$

Empleando la expresión del tensor de Riemann en términos del tensor de Weyl y del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} + \frac{1}{2} \left[ g^{\alpha\gamma} R^{\beta\delta}{}_{;\delta} - g^{\alpha\delta} R^{\gamma\beta}{}_{;\delta} + g_{\beta\delta} R^{\gamma\alpha}{}_{;\delta} - g^{\beta\gamma} R^{\delta\alpha}{}_{;\delta} \right] \\ + \frac{1}{6} R_{;\delta} \left[ g^{\alpha\delta} g^{\gamma\beta} - g^{\alpha\gamma} g^{\delta\beta} \right] + R_{\gamma\beta;\alpha} - R_{\gamma\alpha;\beta} = 0, \\ C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} + \frac{1}{2} \left[ g^{\alpha\gamma} R^{\beta\delta}{}_{;\delta} - g^{\beta\gamma} R^{\delta\alpha}{}_{;\delta} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[ R^{\gamma\beta;\alpha} - R^{\gamma\alpha;\beta} \right] + \frac{1}{6} \left[ g^{\gamma\beta} R^{;\alpha} - g^{\alpha\gamma} R^{;\beta} \right] = 0. \end{aligned}$$

Por las ECE, dado que  $T^{\beta\delta}{}_{;\delta} = 0$  y  $g^{\beta\delta}{}_{;\delta} = 0$ , tenemos:

$$\begin{aligned} R^{\beta\delta}{}_{;\delta} &= \frac{1}{2} g^{\beta\delta} R_{;\delta} = \frac{1}{2} R^{;\beta}, \\ R^{\delta\alpha}{}_{;\delta} &= \frac{1}{2} g^{\delta\alpha} R_{;\delta} = \frac{1}{2} R^{;\alpha}. \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} R^{;\beta} - \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} R^{;\alpha} \right] + R^{\gamma[\beta;\alpha]} + \frac{1}{6} g^{\beta\gamma} R^{;\alpha} - \frac{1}{6} g^{\alpha\gamma} R^{;\beta} = 0, \\ C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} + \frac{1}{12} \left( g^{\alpha\gamma} R^{;\beta} - g^{\beta\gamma} R^{;\alpha} \right) + R^{\gamma[\beta;\alpha]} = 0, \\ C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} + \frac{1}{6} g^{\gamma[\alpha} R^{;\beta]} + R^{\gamma[\beta;\alpha]} = 0. \end{aligned} \quad (12.0.15)$$

Finalmente:

$$\boxed{C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} = R^{\gamma[\alpha;\beta]} + \frac{1}{6} g^{\gamma[\beta} R^{;\alpha]} = 0} \quad (12.0.16)$$

# CAPÍTULO 13

---

## APÉNDICE C. RELACIÓN DE MATTIG A PARTIR DE LA ECUACIÓN DE DESVÍO GEODÉSICO

Debemos considerar la EDG para campos vectoriales nulos dirigidos al pasado. En este caso  $V^\alpha = k^\alpha$ ,  $k_\alpha k^\alpha = 0$ ,  $k^0 < 0$ . La ecuación de Pirani ((6.4.3)) ahora es:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\beta k^\delta \eta^\gamma k^\alpha = \frac{1}{2}(\mu + p)E^2 \eta_\alpha. \quad (13.0.1)$$

Así, si escribimos  $\eta^\alpha = \eta e^\alpha$ ,  $e_\alpha e^\alpha = 1$ ,  $e_\alpha u^\alpha = e_\alpha k^\alpha = 0$  y usando una base alineada y propagada paralelamente,  $\frac{\delta e^\alpha}{\delta \nu} = k^\beta \nabla_\beta e^\alpha = 0$ , por la EDG encontramos:

$$\frac{d^2 \eta}{d\nu^2} = -\frac{1}{2}(\mu + p)E^2 \eta. \quad (13.0.2)$$

En este caso, todas las geodésicas nulas dirigidas al pasado o al futuro experimentan enfocamiento si  $(\mu + p) > 0$  (mientras que el signo de  $\Lambda$  no tiene importancia).

Se pretende obtener la ecuación (13.0.2) escrita en términos del parámetro no afín redshift  $z$ . Veamos como se transforman los operadores diferenciales:

$$\frac{d}{d\nu} = \frac{dz}{d\nu} \frac{d}{dz}, \quad (13.0.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\nu^2} &= \frac{dz}{d\nu} \frac{d}{dz} \left( \frac{d}{d\nu} \right), \\ &= \frac{dz}{d\nu} \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{dz}{d\nu} \right) \frac{d}{dz} + \frac{dz}{d\nu} \frac{d^2}{dz^2} \right], \\ &= \frac{dz}{d\nu} \left[ \frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{d\nu}{dz} \right)^{-1} \right] \frac{d}{dz} + \left( \frac{d\nu}{dz} \right)^{-1} \frac{d^2}{dz^2} \right], \\ &= \left( \frac{d\nu}{dz} \right)^{-1} \left[ - \left( \frac{d\nu}{dz} \right)^{-2} \frac{d^2 \nu}{dz^2} \frac{d}{dz} + \left( \frac{d\nu}{dz} \right)^{-1} \frac{d^2}{dz^2} \right], \\ &= \left( \frac{d\nu}{dz} \right)^{-2} \left[ - \left( \frac{d\nu}{dz} \right)^{-1} \frac{d^2 \nu}{dz^2} \frac{d}{dz} + \frac{d^2}{dz^2} \right]. \end{aligned} \quad (13.0.4)$$

Sabemos además que:

$$S(1+z) = \frac{S_0}{S} = \frac{E}{E_0} \longrightarrow \frac{dz}{1+z} = \frac{-dS}{S} = \frac{dE}{E}. \quad (13.0.5)$$

Así, para el caso dirigido al pasado:

$$dz = (1+z) \frac{1}{S} \frac{dS}{d\nu} d\nu = (1+z) \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} E d\nu = E_0 H (1+z)^2 d\nu,$$



lo cual lleva a la siguiente relación:

$$\frac{d\nu}{dz} = \frac{1}{E_0 H(1+z)^2}. \quad (13.0.6)$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\nu}{dz^2} &= \frac{-1}{E_0 H^2(1+z)^2} \frac{dH}{dz} - \frac{2}{E_0 H(1+z)^3}, \\ \frac{d^2\nu}{dz^2} &= \frac{-1}{E_0 H(1+z)^3} \left[ \frac{1}{H}(1+z) \frac{dH}{dz} + 2 \right]. \end{aligned} \quad (13.0.7)$$

Veamos como podemos expresar  $\frac{dH}{dz}$  (surge un signo menos dado que al aumentar  $z$  disminuye  $\nu$ , es una geodésica dirigida al pasado):

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dz} &= \left( \frac{d\nu}{dz} \right) \left( \frac{dt}{d\nu} \right) \frac{dH}{dt} = \frac{-1}{E_0 H(1+z)^2} E_0(1+z) \frac{dH}{dt}, \\ \frac{dH}{dz} &= \frac{-1}{H(1+z)} \frac{dH}{dt}. \end{aligned} \quad (13.0.8)$$

Teniendo en cuenta que  $H(t) := \frac{\dot{S}}{S}$ :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\ddot{S}}{S} - \frac{\dot{S}}{S^2} \dot{S} = \frac{\ddot{S}}{S} - \left( \frac{\dot{S}}{S} \right)^2 = \frac{\ddot{S}}{S} - H^2. \quad (13.0.9)$$

De la ecuación de Raychaudhuri (3.4.2):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3} \left[ \Lambda - \frac{1}{2}(\mu + 3p) \right], \quad (13.0.10)$$

se obtiene:

$$\frac{d^2\nu}{dz^2} = \frac{-3}{E_0 H(1+z)^3} \left[ 1 + \frac{1}{18H^2}(\mu + 3p) - \frac{\Lambda}{9H^2} \right]. \quad (13.0.11)$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{d\nu^2} &= [E_0 H(1+z)^2]^2 \times \left[ \frac{d^2\eta}{dz^2} - (E_0 H(1+z)^2) \left( \frac{-3}{E_0 H(1+z)^3} \right) \left( 1 + \frac{1}{18H^2}(\mu + 3p) - \frac{\Lambda}{9H^2} \right) \frac{d\eta}{dz} \right], \\ \frac{d^2\eta}{d\nu^2} &= [EH(1+z)]^2 \left[ \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{3}{1+z} \left( 1 + \frac{1}{18H^2}(\mu + 3p) - \frac{\Lambda}{9H^2} \right) \frac{d\eta}{dz} \right]. \end{aligned}$$

De esta manera, la ecuación (13.0.2) se convierte en:

$$(EH(1+z))^2 \left[ \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{3}{1+z} \left( 1 + \frac{1}{18H^2}(\mu + 3p) - \frac{\Lambda}{9H^2} \right) \frac{d\eta}{dz} \right] = -\frac{1}{2}(\mu + p)E^2\eta.$$

Dividiendo por  $E^2$  y organizando terminos:

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{3}{1+z} \left[ 1 + \frac{1}{18H^2}(\mu + 3p) - \frac{\Lambda}{9H^2} \right] \frac{d\eta}{dz} + \frac{1}{2(1+z)^2} \frac{1}{H^2}(\mu + p)\eta = 0. \quad (13.0.12)$$

Si consideramos de nuevo una mezcla no interactuante de polvo y de radiación:

$$\mu = 3H_0^2\Omega_{m0}(1+z)^3 + 3H_0^2\Omega_{r0}(1+z)^4, \quad (13.0.13)$$

$$p = H_0^2\Omega_{r0}(1+z)^4. \quad (13.0.14)$$

Tengamos en cuenta que el parámetro de Hubble viene dado por la ecuación de Friedmann:

$$H^2 = \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{3}\Lambda + H_0^2(1 - \Omega_0 - \Omega_{\Lambda 0})(1+z)^2. \quad (13.0.15)$$

Para  $\Lambda = 0$  esta ecuación se convierte en:

$$H^2 = H_0^2(1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z))(1+z)^2. \quad (13.0.16)$$

De esta manera la ecuación (13.0.12) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{3}{(1+z)} \left[ 1 + \frac{3H_0^2\Omega_{m0}(1+z)^3 + 3H_0^2\Omega_{r0}(1+z)^4 + 3H_0^2\Omega_{r0}(1+z)^4}{18H_0^2(1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z))(1+z)^2} \right. \\ \left. - \frac{\Lambda}{9H_0^2(1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z))(1+z)^2} \right] \frac{d\eta}{dz} \\ + \left( \frac{1}{2(1+z)^2} \right) \left[ \frac{3H_0^2\Omega_{m0}(1+z)^3 + 3H_0^2\Omega_{r0}(1+z)^4 + H_0^2\Omega_{r0}(1+z)^4}{H_0^2(1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z))(1+z)^2} \right] \eta = 0. \end{aligned}$$

Factorizando  $\frac{1}{H^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{H_0^2}{1+z} \left[ 3((1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z))(1+z)^2) + \frac{1}{2}(1+z)(\Omega_{m0} + 2\Omega_{r0}(1+z)) - \frac{\Lambda}{3} \right] \\ \times (H_0^2(1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z))(1+z)^2)^{-1} \frac{d\eta}{dz} + \frac{2(1+z)^3[3\Omega_{m0} + 4\Omega_{r0}(1+z)]}{[1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z)](1+z)^2} \eta = 0. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que  $\Lambda = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{1}{1+z} \left[ 3(1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z))(1+z)^2 + \frac{1}{2}(1+z)^3(\Omega_{m0} + 2\Omega_{r0}(1+z)) \right] \\ \times [(1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z))(1+z)^2]^{-1} \frac{d\eta}{dz} + \frac{1}{2} \frac{[3\Omega_{m0} + 4\Omega_{r0}(1+z)]}{[1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z)](1+z)} \eta = 0. \end{aligned}$$

Factorizando todos los términos que contienen  $(1+z)$  y organizando los términos del numerador del factor que afecta a  $d\eta/dz$  de tal manera que separamos los términos que multiplican a  $\Omega_{m0}$ , los que multiplican a  $\Omega_{r0}$  y los que no multiplican a ninguno de estos, llegamos al siguiente resultado:

$$\boxed{\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{6 + \Omega_{m0}(1+7z) + 2\Omega_{r0}(1+8z+4z^2)}{2(1+z)(1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z))} \frac{d\eta}{dz} + \frac{3\Omega_{m0} + 4\Omega_{r0}(1+z)}{2(1+z)(1 + \Omega_{m0}z + \Omega_{r0}z(2+z))} \eta = 0}$$

Esta es la conocida relación de Mattig [16].

# CAPÍTULO 14

---

## APÉNDICE D. ECUACIÓN DE DESVÍO GEODÉSICO GENERALIZADA, CON TORSIÓN

El campo vectorial torsión  $\mathbf{T}$  y el operador curvatura  $\mathbf{R}$  son:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}]. \quad (14.1)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}\mathbf{w}. \quad (14.2)$$

De igual manera que antes, consideramos que  $\eta$  es el vector desviación y  $\mathbf{V}$  es el vector tangente a la geodésica. Por la definición del operador de curvatura, (14.2):

$$\mathbf{R}(\eta, \mathbf{V})\mathbf{V} = \nabla_{\eta}\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{V}}\nabla_{\eta}\mathbf{V} - \nabla_{[\eta, \mathbf{V}]}\mathbf{V}. \quad (14.3)$$

De la definición del tensor de torsión, ecuación (14.1)

$$\mathbf{T}(\eta, \mathbf{V}) = \nabla_{\eta}\mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{V}}\eta - [\eta, \mathbf{V}]. \quad (14.4)$$

Despejando  $\nabla_{\eta}\mathbf{V}$ :

$$\nabla_{\eta}\mathbf{V} = \mathbf{T}(\eta, \mathbf{V}) + \nabla_{\mathbf{V}}\eta + [\eta, \mathbf{V}]. \quad (14.5)$$

Reemplazando en la expresión para el operador curvatura  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R}(\eta, \mathbf{V})\mathbf{V} = \nabla_{\eta}\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{V}}\{\nabla_{\mathbf{V}}\eta + \mathbf{T}(\eta, \mathbf{V}) + [\eta, \mathbf{V}]\} - \nabla_{[\eta, \mathbf{V}]}\mathbf{V}. \quad (14.6)$$

Reescribimos esta ecuación:

$$\nabla_{\mathbf{V}}^2\eta + \mathbf{R}(\eta, \mathbf{V})\mathbf{V} = \nabla_{\eta}(\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V}) - \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{T}(\mathbf{V}, \eta) - \nabla_{\mathbf{V}}[\eta, \mathbf{V}] - \nabla_{[\mathbf{V}, \eta]}\mathbf{V}. \quad (14.7)$$

Si  $\mathbf{V}$  es un campo vectorial geodésico:

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V} = 0. \quad (14.8)$$

Además, si  $\eta$  y  $\mathbf{V}$  son ortogonales:

$$[\mathbf{V}, \eta] = 0. \quad (14.9)$$

Y por lo tanto podemos reescribir:

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{V}}^2\eta + \mathbf{R}(\eta, \mathbf{V})\mathbf{V} = -\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{T}(\mathbf{V}, \eta)} \quad (14.10)$$

En componentes, esta ecuación se escribe [53]:

$$\boxed{\frac{\delta^2 \eta^\alpha}{\delta \nu^2} + R^\alpha_{\beta\gamma\delta} V^\beta \eta^\gamma V^\delta = -V^\delta \nabla_\delta (T^\alpha_{\beta\gamma} \eta^\beta V^\gamma)} \quad (14.11)$$

# CAPÍTULO 15

---

## APÉNDICE E. ECUACIONES DINÁMICAS DEL MODELO DE BIANCHI TIPO I

### 15.1. Ecuaciones dinámicas obtenidas a partir de las Ecuaciones de Campo de Einstein

Las ECE en este caso dan el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = T_1^1 + \Lambda, \quad (15.1.1)$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = T_2^2 + \Lambda, \quad (15.1.2)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = T_3^3 + \Lambda, \quad (15.1.3)$$

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = T_0^0 + \Lambda. \quad (15.1.4)$$

Multiplicando (15.1.1) por  $abc$ :

$$ac\ddot{b} + ab\ddot{c} + a\dot{b}\dot{c} = abcT_1^1 + abc\Lambda. \quad (15.1.5)$$

De igual manera con (15.1.2), (15.1.3) y (15.1.4), multiplicando por  $3abc$ :

$$abc\ddot{c} + \ddot{a}bc + \dot{a}\dot{b}\dot{c} = abcT_2^2 + abc\Lambda$$

$$3\ddot{a}bc + 3\dot{a}\dot{b}\dot{c} = abcT_3^3 + abc\Lambda$$

$$3\dot{a}\dot{b}\dot{c} + 3a\dot{b}\dot{c} + 3a\dot{b}\dot{c} = 3abcT_0^0 + 3abc\Lambda.$$

Si definimos  $\tau = abc$  y sumando las cuatro anteriores ecuaciones:

$$2 \left[ \ddot{a}bc + \ddot{b}ac + \ddot{c}ab + 2(\dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c}) \right] = \tau [T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 + 3T_0^0] + 6\Lambda\tau. \quad (15.1.6)$$

Para un fluido perfecto  $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p$ ,  $T_0^0 = \mu$ , por lo tanto:

$$2\ddot{\tau} = 3\tau(\mu - p) + 6\Lambda\tau. \quad (15.1.7)$$

De esta manera:

$$\boxed{\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{3}{2}(\mu - p) + 3\Lambda} \quad (15.1.8)$$

Esta es la generalización de una de las ecuaciones de Friedmann. Para el caso en que  $a = b = c$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \tau = a^3, & \quad \Rightarrow \quad \dot{\tau} = 3a^2\dot{a}, \\ \ddot{\tau} = 6\dot{a}^2 + 3\ddot{a}a^2, & \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} = \frac{6\dot{a}^2 + 3\ddot{a}a^2}{a^3} = \frac{6\dot{a}^2}{a^3} + \frac{3\ddot{a}}{a}. \end{aligned}$$

Así:

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}}{a} = \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda} \quad (15.1.9)$$

Ahora, estudiemos la evolución de cada uno de los factores de escala. Si a (15.1.3) le restamos (15.1.1):

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = 0. \quad (15.1.10)$$

Consideremos ahora la cantidad  $X_1 = \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c}$ . Al derivarla con respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{X}_1 = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}\dot{a} - \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}^2}{c^2}. \quad (15.1.11)$$

De esta manera:

$$\frac{dX_1}{dt} = \frac{\dot{c}^2}{c^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}. \quad (15.1.12)$$

Teniendo en cuenta la siguiente identidad algebraica:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + xz - yz &= (x - y)(x + y) + (x - y)z, \\ &= (x - y)[x + y + z], \end{aligned}$$

tenemos que la derivada de  $X_1$  cumple:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c} \right] + \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c} \right) \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) = 0. \quad (15.1.13)$$

De esta manera:

$$X_1(t) = X_{10} \exp \left( - \int \frac{\dot{\tau}}{\tau} dt \right) = X_{10} \exp \left( - \int \frac{d\tau}{\tau} \right) = X_{10} e^{-\ln \tau} = \frac{X_{10}}{\tau}. \quad (15.1.14)$$

Ahora, démonos cuenta que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{b} \right) &= \frac{\dot{a}}{b} - \frac{a}{b^2} \dot{b}, \\ &= \frac{\dot{a}}{a} \frac{a}{b} - \frac{a}{b} \frac{\dot{b}}{b}, \\ &= \frac{a}{b} \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} \right). \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\frac{a}{b} = D_{10} \exp \left( X_{10} \int \frac{d\tau}{\tau} \right), \quad (15.1.15)$$

$$\frac{a}{c} = D_{20} \exp \left( X_{20} \int \frac{d\tau}{\tau} \right), \quad (15.1.16)$$

$$\frac{b}{c} = D_{30} \exp \left( X_{30} \int \frac{d\tau}{\tau} \right). \quad (15.1.17)$$

Las constantes de integración cumplen las siguientes ecuaciones de ligadura:

$$D_{10}D_{30} = D_{20}, \quad (15.1.18)$$

$$X_{20} = X_{10} + X_{30}. \quad (15.1.19)$$

Ahora despejemos  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $c(t)$ . Primero, multipliquemos (15.1.15) y (15.1.16):

$$\frac{a^2}{bc} = D_{10}D_{20} \exp \left( (X_{10} + X_{20}) \int \frac{d\tau}{\tau} \right). \quad (15.1.20)$$

Multiplicando por  $\tau = abc$ :

$$a^3(t) = D_{10}D_{20}\tau \exp \left( (X_{10} + X_{20}) \int \frac{d\tau}{\tau} \right),$$

$$a(t) = \sqrt[3]{D_{10}D_{20}\tau} \exp \left( \frac{1}{3}(X_{10} + X_{20}) \int \frac{d\tau}{\tau} \right). \quad (15.1.21)$$

De esta forma:

$$b(t) = \frac{1}{D_{10}} \exp \left( -X_{10} \int \frac{dt}{\tau} \right) \times \sqrt[3]{D_{10}D_{20}\tau} \exp \left( \frac{1}{3}(X_{10} + X_{20}) \int \frac{dt}{\tau} \right),$$

$$b(t) = \sqrt[3]{D_{10}^{-2}D_{20}\tau} \exp \left( \frac{1}{3}(X_{20} - 2X_{10}) \int \frac{dt}{\tau} \right), \quad (15.1.22)$$

$$c(t) = \frac{1}{D_{20}} \exp \left( -X_{20} \int \frac{dt}{\tau} \right) \times \sqrt[3]{D_{10}D_{20}\tau} \exp \left( \frac{1}{3}(X_{10} + X_{20}) \int \frac{dt}{\tau} \right),$$

$$c(t) = \sqrt[3]{D_{20}^{-2}D_{10}\tau} \exp \left( \frac{1}{3}(X_{10} - 2X_{20}) \int \frac{dt}{\tau} \right). \quad (15.1.23)$$

Si redefinimos las constantes de integración como:

$$D_1 := \sqrt[3]{D_{10}D_{20}}, \quad D_2 := \sqrt[3]{D_{10}^{-2}D_{20}}, \quad D_3 := \sqrt[3]{D_{20}^{-2}D_{10}}, \quad (15.1.24)$$

$$\Sigma_1 := \frac{1}{3}(X_{10} + X_{20}), \quad \Sigma_2 := \frac{1}{3}(X_{20} - 2X_{10}), \quad \Sigma_3 := \frac{1}{3}(X_{10} - 2X_{20}). \quad (15.1.25)$$

De esta manera, las ecuaciones de ligadura son:

$$D_1D_2D_3 = 1, \quad (15.1.26)$$

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0. \quad (15.1.27)$$

Y los factores de escala vienen entonces dados por las siguientes expresiones [76], [77], [42]:

$$\boxed{a(t) = D_1 \tau^{\frac{1}{3}} \exp \left[ \Sigma_1 \int \frac{dt}{\tau(t)} \right]} \quad (15.1.28)$$

$$\boxed{b(t) = D_2 \tau^{\frac{1}{3}} \exp \left[ \Sigma_2 \int \frac{dt}{\tau(t)} \right]} \quad (15.1.29)$$

$$\boxed{c(t) = D_3 \tau^{\frac{1}{3}} \exp \left[ \Sigma_3 \int \frac{dt}{\tau(t)} \right]} \quad (15.1.30)$$

Ahora consideremos la ecuación (15.1.8):

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \frac{3}{2}(\mu - p) + 3\Lambda.$$

Podemos reescribirla de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\tau}}{dt} &= \frac{3}{2}(\mu - p)\tau + 3\Lambda\tau, \\ \frac{d\dot{\tau}}{dt}d\tau &= d\dot{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \dot{\tau}d\dot{\tau} = \frac{3}{2}\mu\tau d\tau - \frac{3}{2}p\tau d\tau + 3\Lambda\tau d\tau. \end{aligned} \quad (15.1.31)$$

Ahora, de la ecuación de la conservación de la Energía (7.2.8):

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} \mu - \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} p.$$

Multiplicando por  $\tau^2 dt$ :

$$\tau^2 d\mu = -\tau \mu d\tau - p\tau d\tau.$$

Despejando  $p\tau d\tau$ :

$$p\tau d\tau = -\tau^2 d\mu - \mu\tau d\tau. \quad (15.1.32)$$

De esta manera, reemplazando en (15.1.31):

$$\begin{aligned} \dot{\tau}d\dot{\tau} &= \frac{3}{2}\mu\tau d\tau + \frac{3}{2}\tau^2 d\mu + \frac{3}{2}\mu\tau d\tau + 3\Lambda\tau d\tau, \\ \dot{\tau}d\dot{\tau} &= \frac{3}{2} [2\mu\tau d\tau + \tau^2 d\mu] + 3\Lambda\tau d\tau. \end{aligned}$$

El término entre paréntesis de la segunda ecuación corresponde a  $d(\mu\tau^2)$ :

$$\dot{\tau}d\dot{\tau} = \frac{3}{2}d(\mu\tau^2) + 3\Lambda\tau d\tau. \quad (15.1.33)$$

Integrando:

$$\boxed{\dot{\tau}^2 = 3(\mu + \Lambda)\tau^2 + C_1} \quad (15.1.34)$$



donde  $C_1$  es una constante de integración arbitraria. Ahora, en analogía con la constante de Hubble, definamos:

$$3H = \frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}. \quad (15.1.35)$$

Por lo tanto, de (15.1.34) obtenemos:

$$\boxed{\mu = 3H^2 - \Lambda - \frac{C_1}{\tau^2}} \quad (15.1.36)$$

## 15.2. Dinámica del modelo de Bianchi I para el dominio de materia

La ecuación (15.1.36) equivale a la ecuación obtenida a partir de la ecuación de Gauss-Codacci [42]:

$$3\frac{\dot{S}^2}{S^2} = \frac{\Sigma^2}{S^6} + \frac{M}{S^{3\gamma}}. \quad (15.2.1)$$

Para el caso con dominio de materia ( $\gamma = 1$ ):

$$3\frac{\dot{S}^2}{S^2} = \frac{\Sigma^2}{S^6} + \frac{M}{S^3}. \quad (15.2.2)$$

Para integrar, multiplicamos por  $S^2$ :

$$\begin{aligned} 3\dot{S}^2 &= \frac{\Sigma^2}{S^4} + \frac{M}{S} = \frac{1}{S^4}[\Sigma^2 + MS^3], \\ 3\frac{S^4\dot{S}^2}{\Sigma^2 + MS^3} &= 1. \end{aligned}$$

Tomando la raíz cuadrada:

$$3\frac{S^2 dS}{\sqrt{\Sigma^2 + MS^3}} = \sqrt{3} dt.$$

Integrando, imponiendo como condición inicial que  $S(0) = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^S 3\frac{S'^2 dS'}{\sqrt{\Sigma^2 + MS'^3}} &= \frac{2}{M} \left( \sqrt{\Sigma^2 + MS'^3} \Big|_0^S \right) = \sqrt{3} t' \Big|_0^t, \\ &= \frac{2}{M} [\sqrt{\Sigma^2 + MS^3} - \Sigma] = \sqrt{3} t. \end{aligned}$$

Despejando  $S(t)$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{\Sigma^2 + MS^3} - \Sigma &= \frac{\sqrt{3}M}{2} t, \\ \sqrt{\Sigma^2 + MS^3} &= \frac{\sqrt{3}M}{2} t + \Sigma. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned}\Sigma^2 + MS^3 &= \frac{3}{4}Mt^2 + \Sigma^2 + \sqrt{3M}\Sigma t, \\ S^3(t) &= \frac{3}{4}Mt^2 + \sqrt{3}\Sigma t,\end{aligned}$$

$$\boxed{S(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}Mt^2 + \sqrt{3}\Sigma t}} \quad (15.2.3)$$

Ahora obtengamos  $W(t)$ :

$$W(t) := \int \frac{dt}{S^3(t)} \quad (15.2.4)$$

Obtener esta función  $W(t)$  nos permitirá conocer la dinámica de los factores de escala y para el caso de dominio de materia hay solución analítica. Vemos que el termino en la raíz de la función  $S(t)$  puede completar un cuadrado. Si completamos el cuadrado y definimos una nueva variable  $\eta = \frac{\sqrt{3M}}{2}t + \frac{\Sigma}{\sqrt{M}}$ ,  $dt = \frac{2}{\sqrt{3M}}d\eta$ , nuestra función  $W(\eta)$  queda de la forma:

$$W(\eta) = \int_{\frac{\Sigma}{\sqrt{M}}}^{\eta} \left( \eta'^2 - \frac{\Sigma^2}{M} \right)^{-1} \frac{2}{\sqrt{3M}} d\eta'.$$

Si definimos  $k^2 = \frac{\Sigma^2}{M}$ , es posible escribir:

$$\frac{1}{\eta^2 - k^2} = \frac{A}{\eta - k} + \frac{B}{\eta + k},$$

donde  $A = -B = \frac{1}{2k}$ . De esta forma:

$$\begin{aligned}W(\eta) &= \frac{2}{\sqrt{3M}} \frac{1}{2k} \int \left( \frac{d\eta}{\eta - k} - \frac{d\eta}{\eta + k} \right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{3M}} \frac{\sqrt{M}}{\Sigma} \ln \left( \frac{\eta - k}{\eta + k} \right).\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\eta - k &= \frac{\sqrt{3M}}{2}t, \\ \eta + k &= \frac{\sqrt{3M}}{2}t + \frac{2\Sigma}{\sqrt{M}} = \frac{\sqrt{3M}}{2} \left( t + \frac{4\Sigma}{\sqrt{3M}} \right).\end{aligned}$$

Se obtiene finalmente:

$$\boxed{W(t) = \frac{1}{\sqrt{3}\Sigma} \ln \left( \frac{t}{t + \frac{4\Sigma}{\sqrt{3M}}} \right)} \quad (15.2.5)$$

### 15.3. Ley de Redshift

La ley de Redshift más general es de la forma:

$$1 + z = \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \phi X^{-2}(t) + \sin^2 \theta \sin^2 \phi Y^{-2}(t) + \cos^2 \theta Z^{-2}(t)}. \quad (15.3.1)$$

Ahora recordemos que:

$$X(t) = S(t) \exp[\Sigma_1 W(t)],$$

$$Y(t) = S(t) \exp[\Sigma_2 W(t)],$$

$$Z(t) = S(t) \exp[\Sigma_3 W(t)].$$

Para tiempos muy grandes podemos aproximar:

$$\begin{aligned} \frac{t}{t + \frac{4\Sigma}{\sqrt{3M}}} &= \frac{1}{1 + \frac{4\Sigma}{\sqrt{3Mt}}} \approx 1 - \frac{4\Sigma}{\sqrt{3Mt}}, \\ \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{4\Sigma}{\sqrt{3Mt}}}\right) &\approx \ln\left(1 - \frac{4\Sigma}{\sqrt{3Mt}}\right) \approx \frac{-4\Sigma}{\sqrt{3Mt}}. \end{aligned}$$

Escribamos  $t$  en función de  $S(t)$ . Para tiempos grandes y con  $\Sigma \ll M^2$ :

$$S(t) \approx \sqrt[3]{\frac{3}{4}Mt^2} \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{3M}}S^{\frac{3}{2}}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{-4\Sigma}{\sqrt{3Mt}} = \frac{-4\Sigma}{\sqrt{3M}} \frac{\sqrt{3M}}{2} S^{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\Sigma}{\sqrt{M}} S^{-\frac{3}{2}}.$$

De esta manera, teniendo en cuenta la expansión de los exponenciales de los factores de escala:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\Sigma_i}{\sqrt{3\Sigma}} \ln\left(\frac{t}{t + \frac{4\Sigma}{\sqrt{3M}}}\right)\right) &\approx 1 - \frac{2}{\sqrt{3M}}\Sigma_i S^{-\frac{3}{2}}, \\ X_i(t) &= S(t) \left[1 - \frac{2}{\sqrt{3M}}\Sigma_i S^{-\frac{3}{2}}\right], \\ X_i(t)^{-2} &= S^{-2} \left[1 + \frac{4}{\sqrt{3M}}\Sigma_i S^{-\frac{3}{2}}\right]. \end{aligned}$$

La expresión se puede entonces escribir así:

$$1 + z = S^{-1} \left[1 + \left(\frac{4\Sigma_1}{\sqrt{3M}} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{4\Sigma_2}{\sqrt{3M}} \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{4\Sigma_3}{\sqrt{3M}} \cos^2 \theta\right) S^{-\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (15.3.2)$$

Finalmente, si expandimos nuevamente:

$$\boxed{1 + z = S^{-1} \left[1 + \frac{2S^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{3M}} (\Sigma_1 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \Sigma_2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \Sigma_3 \cos^2 \theta)\right]} \quad (15.3.3)$$

Podemos escribir de manera más compacta:

$$\boxed{1 + z = S^{-1}(t) \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3M}} S^{-\frac{3}{2}} f(\theta, \phi, \Sigma_i) \right)} \quad (15.3.4)$$

donde:

$$f(\theta, \phi, \Sigma_i) = \Sigma_1 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \Sigma_2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \Sigma_3 \cos^2 \theta. \quad (15.3.5)$$

---

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.
- [2] I. Ciufolini and J.A. Wheeler. *Gravitation and Inertia*. Princeton University Press, Cambridge, 1995.
- [3] J. Wainwright and G.F.R. Ellis. *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [4] G. F. R. Ellis. The Bianchi Model: Then and Now. *Gen. Rel. Grav.* **38(6)** (2006):1003–1015.
- [5] D. N. Spergel et. al. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology. *Astrophys. J. Suppl.* **170** (2007):377–408. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0603449](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0603449)].
- [6] C. W. Misner. The Isotropy of the Universe. *Ap. J.* **151** (1968):431–457.
- [7] D.C. Rodrigues. Anisotropic Cosmological Constant and the CMB Quadrupole Anomaly. *Phys.Rev.D.* **77** (2008):023534.
- [8] M. Tegmark et.al. A high resolution foreground cleaned CMB map from WMAP. *astro-ph* **0302496** (2003).
- [9] G.F. Smoot et.al. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. *Ap. J.* **396L** (1992):1S.
- [10] G. Hinshaw et. al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: The Angular Power Spectrum. *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003):135–159. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0302217](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0302217)].
- [11] A. de Oliveira Costa and M. Tegmark. CMB multipole measurements in the presence of foregrounds. *Phys. Rev. D* **74** (2006):023005. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0603369](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0603369)].
- [12] K. Land and J. Magueijo. Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy. *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005):071301. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0502237](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0502237)].
- [13] L. Tedesco L. Campanelli, P. Cea. Ellipsoidal Universe Can Solve the Cosmic Microwave Background Quadrupole. *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006):131302.
- [14] A. Challinor C. G. Tsagas and R. Maartens. Relativistic Cosmology and Large Scale Structure. *Phys. Rep.* **465** (2008):61–147. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0705.4397](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0705.4397)].
- [15] R.M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [16] G. F. R. Ellis and H. v. Elst. Deviation of Geodesics in FLRW Spacetime Geometries. *arxiv* **gr-qc** (2006):9709060.
- [17] L. Tedesco L. Campanelli, P. Cea. Ellipsoidal Universe Can Solve the Cosmic Microwave Background Quadrupole. *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006):131302.

- [18] R. Maartens. Nonlinear gravito-electromagnetism. *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008):1203–1217.
- [19] R. Juszkiewicz J. D. Barrow and D. H. Sonoda. Structure of the Cosmic Microwave Background. *Nature* **305** (1983):397–402.
- [20] M. Prószyński S. Bajtlik, R. Juszkiewicz and p. Amsterdamski. 2-7 K Radiation and The Isotropy of the Universe. *Ap. J.* **300** (1986):463–473.
- [21] G. Hinshaw A. Kogut and A. J. Banday. Limits to global rotation and shear from the COBE DMR four-year sky maps. *Phys. Rev. D* **55** (1997):1901–1905. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/9701090](#)].
- [22] P. G. Ferreira E. F. Bunn and J. Silk. How Anisotropic is Our Universe? *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996):2883–2886. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/9605123](#)].
- [23] A. A. Coley and W. C. Lim. Cosmic microwave background limits on spatially homogeneous cosmological models with a cosmological constant. *Class. Quant. Grav.* **24** (2007):889–895. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0610498](#)].
- [24] J. Short R. Sung and P. Coles. Statistical Characterization of Temperature Patterns in Anisotropic Cosmologies. submitted to MNRAS. Preprint disponible en [arXiv: [arXiv:1004.1925](#)].
- [25] A. Pontzen. Bianchi Model CMB Polarization and its Implications for CMB Anomalies. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **380** (2007):1387–1398. Preprint disponible en [arXiv: [arXiv:0706.2075](#)].
- [26] R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffer. *Introduction to general relativity*, 1st edition. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [27] G. Arfken and H. Weber. *Mathematical methods for physicists*, 5th edition. Academic Press, San Diego, California, 2001.
- [28] K. S. Thorne C. W. Misner and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, New York, 1973.
- [29] H. Stephani. *An introduction to general relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [30] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Addison-Wesley, Massachusetts, 1962.
- [31] J. M. Tejeiro. *Principios de Relatividad General*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, 2005.
- [32] R. Feynman. *Feynman lectures on gravitation*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1995.
- [33] S. Carroll. The cosmological constant. *Living Rev. Rel.* **4** (2001):1. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0004075](#)].
- [34] T. Padmanabhan. Cosmological constant—the weight of the vacuum. *Phys. Rep.* **380** (2003):235–320. Preprint disponible en [arXiv: [hep-th/0212290](#)].
- [35] L. Castañeda A. Guarnizo and J. M. Tejeiro. Variational Principles in Modified Gravity: Field Equations in f(R) Gravity. submitted to Class. Quant. Grav. Preprint disponible en [arXiv: [arXiv:1002.0617](#)].
- [36] P. Peebles and B. Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003):559. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0207347](#)].
- [37] E. Poisson. *A Relativist's Toolkit, The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

- [38] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. MacCallum. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [39] R. Maartens and B. A. Bassett. Gravitoelectromagnetism. *Class. Quant. Grav.* **15** (1998):705–717. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/9704059](#)].
- [40] C. G. Tsagas. Electromagnetic fields in curved spacetimes. *Class. Quant. Grav.* **22** (2005):393–407. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0407080](#)].
- [41] P. Schneider. *Notes of a lecture course held at the Observatorio Astronómico Nacional, Universidad Nacional de Colombia, March 3-14, 2008*. Argelander-Institut für Astronomie, Universität Bonn, 2008.
- [42] G. F. R. Ellis and H. v. Elst. *Cosmological Models* (1998). Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/9812046](#)].
- [43] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [44] L. F. Costa and C. A. R. Herdeiro. Gravitoelectromagnetic Analogy Based on Tidal Tensors. *Phys. Rev. D* **78** (2008):024021.
- [45] H. v. Elst. *Extensions and Applications of 1+3 Decomposition Methods in General Relativistic Cosmological Modelling*. PhD thesis, Queen Mary & Westfield College, London, United Kingdom, 1996.
- [46] H. v. Elst and G. F. R. Ellis. *Class. Quant. Grav.* **15** (1998):3545–3573.
- [47] J. Kristian and R. K. Sachs. Observations in Cosmology. *Ap. J.* **143** (1966):379.
- [48] P. T. Saunders. Observations in Homogeneous Model Universes. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **141** (1968):427–434.
- [49] P. T. Saunders. Observations in some simple cosmological models with shear. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **142** (1969):213–227.
- [50] A. Sandage. The Ability of the 200-INCH Telescope to Discriminate Between Selected World Models. *Ap. J.* **133** (1961):355.
- [51] G. F. R. Ellis and T. Rothman. Lost Horizons. *Am. J. Phys.* **61** (1993):883–893.
- [52] I. M. H. Etherington. Republication of: LX. On the definition of distance in general relativity. *Gen. Rel. Grav.* **39** (2007):1055–1067.
- [53] L. Castañeda D. L. Cáceres and J. M. Tejeiro. Ecuación de Desvío Geodésico con Torsión. Enviado a Revista Colombiana de Física, Memorias del XXIII Congreso Nacional de Física, 2005.
- [54] G. R. R. Ellis and J. J. Perry. Towards a 'correctionless' observational cosmology. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **187** (1979):357.
- [55] T. Levi Civita. *The Absolute Differential Calculus*. Dover, New York, 1977.
- [56] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, 2 ed. Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [57] L. Castañeda. *Efecto de la constante cosmológica en la probabilidad de lentes gravitacionales*. Master thesis, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, 2002.
- [58] J. Ehlers P. Schneider and E. Falco. *Gravitational Lenses*. Springer-Verlag, New York, 1992.

- [59] F. A. E. Pirani. Republication of: On the physical significance of the Riemann tensor. *Gen. Rel. Grav.* **41** (2009):1215–1232.
- [60] A. H. Guth Y. Mao, M. Tegmark and S. Cabi. Constraining Torsion with Gravity Probe B. *Phys. Rev. D.* **76** (2007):104029.
- [61] M. J. Hayashi T. Watanabe. General Relativity with Torsion (2004). Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0409029](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0409029)].
- [62] G. D. Kerlick F. W. Hehl, P. von der Heyde and J. M. Nester. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.* **48** (1976):393.
- [63] J. G. Pereira R. Aldrovandi and K. H. Vu. Gravitation Without the Equivalence Principle. *Gen. Rel. Grav.* **36** (2004):101–110. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0304106](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0304106)].
- [64] L. C. Guillen V. C. de Andrade and J. G. Pereira. Teleparallel Gravity: An Overview (2000). Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0011087](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0011087)].
- [65] A. Kleyn. Tidal Force in Metric-Affine Gravity (2008). Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0407092](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0407092)].
- [66] I. L. Shapiro. Physical aspects of the space-time torsion. *Phys. Rep.* **357** (2002):113–213. Preprint disponible en [arXiv: [hep-th/0103093](https://arxiv.org/abs/hep-th/0103093)].
- [67] G. Lambiase S. Capozziello and C. Stornaiolo. Geometric classification of the torsion tensor of space-time. *Ann. Phys.* **10** (2001):713–727. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0101038](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0101038)].
- [68] R. Hammond C. Gruver and P. F. Kelly. Tensor-Scalar Torsion. *Mod. Phys. Lett. A* **16** (2001):113–119. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0103050](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0103050)].
- [69] S. M. Carroll and G. B. Field. Consequences of propagating torsion in connection-dynamic theories of gravity. *Phys. Rev. D* **50** (1994):3867–3873. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/9403058](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9403058)].
- [70] J. Wainwright U. S. Nilsson, C. Ugglå and W. C. Lim. An Almost Isotropic Cosmic Microwave Temperature Does Not Imply an Almost Isotropic Universe. *Ap. J.* **521** (1999):1–3. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/9904252](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9904252)].
- [71] U. S. Nilsson W. C. Lim and J. Wainwright. Anisotropic universes with isotropic cosmic microwave background radiation. *Class. Quant. Grav.* **18** (2001):5583–5590. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/9912001](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9912001)].
- [72] R. K. Barrett and C. A. Clarkson. Undermining the cosmological principle: almost isotropic observations in inhomogeneous cosmologies. *Class. Quant. Grav.* **17** (2000):5047–5078. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/9911235](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9911235)].
- [73] C. B. Collins and S. W. Hawking. Why is the Universe Isotropic? *Ap. J.* **180** (1973):317–334.
- [74] S. Hawking. On the rotation of the Universe. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **142** (1969):129.
- [75] J. M. Stewart. Non-equilibrium processes in the early universe. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **145** (1969):347.
- [76] B. Saha. Anisotropic Cosmological Models with Perfect Fluid and Dark Energy. *Chin. J. Phys.* **43** (2005):1035. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0412078](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0412078)].
- [77] B. Saha. Anisotropic Cosmological Models with a Perfect Fluid and  $\Lambda$  term. *Astrophys. and Space Sci.* **302** (2006):83. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0411080](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0411080)].



- [78] Ö. Akarsu and C. B. Kiling. LRS Bianchi type I models with anisotropic dark energy and constant deceleration parameter. *Gen. Rel. Grav.* **42** (2010):119–140. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0807.4867](#)].
- [79] L. Castaneda D. L. Cáceres and J. M. Tejeiro. Shear Dynamics in Bianchi I Cosmology. Submitted to Journal of Cosmology and Astroparticle physics. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/1003.3491](#)].
- [80] S. Carloni J. A. Leach and P. K. S. Dunsby. Shear dynamics in Bianchi I cosmologies with  $R^n$  gravity. *Class. Quant. Grav.* **23** (2006):4915. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/0603012](#)].
- [81] E. R. Harrison. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.* **165** (1973):185.
- [82] M. S. Turner and L. M. Widrow. *Phys. Rev. D.* **37** (1988):2743.
- [83] A. D. Goldov and J. Silk. *Phys. Rev. D.* **47** (1993):3144.
- [84] A. V. Olinto. *astro-ph* **9807051** (1993).
- [85] D. Grasso and H. R. Rubinstein. Revisiting Nucleosynthesis Constraints on Primordial Magnetic Fields. *Phys. Lett. B* **379** (1996):73–79. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/9602055](#)].
- [86] D. Grasso J. Adams, U. H. Danielsson and H. R. Rubinstein. *Phys. Lett. B.* **388** (1996):253.
- [87] T. Kahniashvili R. D. Durrer and A. Yates. *Phys. Rev. D.* **58** (1998):123004.
- [88] C. L. Bennett et. al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results. *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003):1–27. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0302207](#)].
- [89] D. N. Spergel et. al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003):175–194. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0302209](#)].
- [90] G. Hinshaw et. al. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Temperature Analysis. *Astrophys. J. Suppl.* **170** (2007):288–334. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0603451](#)].
- [91] G. D. Starkman N. J. Cornish, D. N. Spergel and E. Komatsu. Constraining the Topology of the Universe. *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004):201302. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0310233](#)].
- [92] M. Cechowska A. Marecki B. F. Roukema, B. Lew and S. Bajtlic. A hint of Poincaré dodecahedral topology in the WMAP first year sky map. *Astron. Astrophys.* **423** (2004):821–831. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0402608](#)].
- [93] H. K. Eriksen G. M. Górski T. R. Jaffe, A. J. Banday and F. K. Hansen. Evidence of Vorticity and Shear at Large Angular Scales in the WMAP Data: A Violation of Cosmological Isotropy? *Ap. J.* **629** (2005):L1–L4. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0503213](#)].
- [94] G. Efstathiou. Is the low cosmic microwave background quadrupole a signature of spatial curvature. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.* **343** (2003):95. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0303127](#)].
- [95] C. Gordon and W. Hu. *Phys. Rev. D.* **70** (2004):083003.
- [96] M. Demianski and A.G. Doroshkevich. Extensions of the standard cosmological model: Anisotropy, rotation, and the magnetic field. *Phys. Rev. D* **75** (2007):123517. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0702381](#)].
- [97] R. Maartens S. Tsujikawa and R. Brandenberger. Non-commutative inflation and the CMB. *Phys. Lett. B* **574** (2003):141–148. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0308169](#)].

- [98] M. Zaldarriaga A. de Oliveira Costa, M. Tegmark and A. Hamilton. Significance of the largest scale CMB fluctuations in WMAP. *Phys. Rev. D* **69** (2004):063516. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0307282](#)].
- [99] S. M. Carroll L. Ackerman and M. B. Wise. Imprints of a primordial preferred direction on the microwave background. *Phys. Rev. D* **75** (2007):083502. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0701357](#)].
- [100] C. G. Tsagas. Resonant amplification of magnetic seed fields by gravitational waves in the early universe. *Phys. Rev. D* **72** (2005):123509. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0508556](#)].
- [101] K. Bamba. Large-scale magnetic fields in the inflationary universe. *JCAP* **0702** (2007):030. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0611701](#)].
- [102] A. V. Olinto G. Sigl and K. Jedamzik. Primordial magnetic fields from cosmological first order phase transitions. *Phys. Rev. D* **55** (1997):4582–4590. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/9610201](#)].
- [103] J. H. M. M. Schmitt. *Astr. Ap.* **87** (1980):236.
- [104] C. B. Collins and S. W. Hawking. The Rotation and Distortion of the Universe. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **162** (1973):307.
- [105] A. H. Taub. Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motions. *Ann. Math.* **53** (1951):472–490.
- [106] C. Park Ch. G. Park and J. R. Gott. Cleaned 3 Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Cosmic Microwave Background Map: Magnitude of the Quadrupole and Alignment of Large-Scale Modes. *Ap. J.* **660** (2007):959–975. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0608129](#)].
- [107] B. Nodlang and J. P. Ralston. Indication of Anisotropy in Electromagnetic Propagation over Cosmological Distances. *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997):3043–3046. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/9704196](#)].
- [108] M. Demiansky and A. G. Doroshkevich. Extensions of the standard cosmological model: Anisotropy, rotation, and the magnetic field. *Phys. Rev. D* **75** (2007):123517. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0702381](#)].
- [109] P. D. Naselsky and O. V. Verkhodanov. Peculiarities of Phases of the Wmap Quadrupole. *Int. J. Mod. Phys. D* **17** (2008):179–194. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0609409](#)].
- [110] P. Geren J. Ehlers and R. K. Sachs. Isotropic Solutions of the Einstein-Liouville Equations. *J. Math. Phys.* **9** (1968):1344–1349.
- [111] R. Maartens W. R. Stoeger and G. F. R. Ellis. Proving almost-homogeneity of the universe: an almost Ehlers-Geren-Sachs theorem. *Ap. J.* **443** (1995):1–5.
- [112] C. A. Clarkson and R. K. Barrett. Does the isotropy of the CMB imply a homogeneous universe? Some generalized EGS theorems. *Class. Quant. Grav.* **16** (1999):3781–3794. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/9906097](#)].
- [113] S. Räsänen. Accelerated expansion from structure formation. *JCAP* **11** (2006):003. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0607626](#)].
- [114] S. Räsänen. Relation between the isotropy of the CMB and the geometry of the universe. *Phys. Rev. D* **79** (2009):123522. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0903.3013](#)].
- [115] S. Räsänen. Light propagation in statistically homogeneous and isotropic dust universes. *JCAP* **02** (2009):011. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0812.2872](#)].

- [116] C. G. Tsagas and J. D. Barrow. A Gauge-Invariant Analysis of Magnetic Fields in General Relativistic Cosmology. *Class. Quant. Grav.* **14** (1997):2539–2562. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/9704015](#)].
- [117] C. G. Tsagas and R. Maartens. Cosmological perturbations on a magnetized Bianchi I background. *Class. Quant. Grav.* **17** (2000):2215–2241. Preprint disponible en [arXiv: [gr-qc/9912044](#)].
- [118] R. M. Wald. Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant. *Phys. Rev. D* **28** (1983):2118–2120.
- [119] T. S. Pereira. Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe. *JCAP* **09** (2007):006. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0707.0736](#)].
- [120] J. Synge. *Relativity: the general theory*. North-Holland publishing company, Amsterdam, 1966.
- [121] L. P. Eisenhart. *Continuous Groups of Transformations*. Dover Publications, New York, 1961.
- [122] K. Land and J. Magueijo. The axis of evil revisited. *Mon. Roy. Astr. Roy. Soc.* **378** (2007):153–158. Preprint disponible en [arXiv: [astro-ph/0611518](#)].
- [123] R. Sung and P. Coles. Temperature and Polarization Patterns in Anisotropic Cosmologies. submitted to JCAP. Preprint disponible en [arXiv: [arXiv:1004.0957](#)].
- [124] A. Pontzen. Rogues' gallery: The full freedom of the Bianchi CMB anomalies. *Phys. Rev. D* **79** (2009):103518. Preprint disponible en [arXiv: [arXiv:0901.2122](#)].