NOCIONES FUERTES DE COMPACIDAD

RONALD GENTIL RODRÍGUEZ GIRALDO

Trabajo final presentado como requisito
parcial para optar al título de Magister en Ciencias Matemáticas.

Directora
CLARA MARINA NEIRA URIBE

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
BOGOTÁ

7 de diciembre de 2010

Índice general

Introducción

La compacidad es una de las nociones más importantes en topología y en otras áreas de la matemática. Con la introducción de nociones débiles de conjuntos abiertos en un espacio topológico, aparecen nuevas generalizaciones de la noción de compacidad en términos de cubrimientos con conjuntos débilmente abiertos que pueden reducirse a un subcubrimiento finito.

Durante las últimas décadas se han investigado diferentes generalizaciones de conjuntos abiertos y de funciones continuas y se han estudiado las respectivas propiedades estructurales.

N. Levine [15] en 1963, empieza el estudio de la generalización de los conjuntos abiertos con la introducción de los conjuntos semi-abiertos. En 1965, O. Njastad define una α-topología [18] sobre un espacio topológico como la colección de todos los conjuntos α-abiertos en dicho espacio. En 1982 el término pre-abierto fue usado por primera vez por A. S. Mashhour, M. E. Abd El-Monsef y S. N. El-Deeb [6] y en 1983 los mismos autores presentan los conjuntos β-abiertos [11] como una generalización de los conjuntos pre-abiertos. Los conjuntos sg-abiertos son introducidos por Bhattacharyya y Lahirri en 1987 [14] como una extensión de los conjuntos semi-abiertos. Muchas nociones topológicas clásicas tales como la de compacidad tienen una extensión con el uso de estas nociones débiles de conjuntos abiertos.

La definición de semi-compacidad es presentada en 1980 por Dorsett [8] en base a cubrimientos semi-abiertos que admiten subcubrimientos finitos. En 1989 Abd El-Aziz y Ahmed Abo-Khadra [10] presentaron el concepto de un espacio pre-compacto. En 1995, los espacios sg-compactos son introducidos independientemente por Caldas [3], Devi, Bal-achandran y Maki [5].

Cada una de estas nociones presenta interesantes caracterizaciones como el uso de la densidad, espacios maximales, etc., y las respectivas relaciones que se tienen entre ellas, sin embargo sobre la base de la teoría de los filtros no se encuentra ninguna caracterización y tampoco ningún estudio respecto al producto de espacios topológicos con estas nociones fuertes de compacidad.

En este trabajo se presentan algunas caracterizaciones de los espacios fuertemente compactos por medio de extenciones en las nociones de adherencia y convergencia de un filtro con los conjuntos debilmente abiertos, además se muestra que el producto de espacios fuertemente compacto no es necesariamente fuertemente compacto.

Capítulo 1

PRELIMINARES

El propósito de este capitulo es presentar definiciones y propiedades básicas para el desarrollo de nuestro trabajo. Se muestran algunas propiedades y se referencian las conocidas.

Definición 1. *En un espacio topológico* $(X.\tau)$ *un subconjunto* A *de* X *se llama:*

(i) Semi-abierto si existe un abierto O *de* X *tal que* $O \subseteq A \subseteq cl(O)$ (cf[15]),

(ii) α*-abierto si* $A \subseteq int(cl(int(A)))$ (cf[18]),

(iii) Pre-abierto si $A \subseteq int(cl(A))$ (cf[6]),

(iv) β*-abierto si* $A \subseteq cl(int(cl(A)))$ (cf[11]),

(v) sg-abierto si para todo semi-cerrado C *tal que* $C \subseteq A$ *se tiene que* $C \subseteq int_s(A)$. (cf[14]),

donde $cl(.), int(.)$ y $cl_s(.)$ denotan el operador clausura, interior y semi-clausura respectivamente, que estudiaremos en detalle más adelante.

Las colecciones de todos los conjuntos semi-abiertos [15], pre-abiertos [6], α-abiertos [18], β-abiertos [11], sg-abiertos [14] en un espacio topológico (X, τ) se denotan por colecciones $SO(\tau), PO(\tau), \alpha(\tau), \beta(\tau)$, y $SG(\tau)$, respectivamente. Estas colecciones satisfacen las inclusiones $\tau \subseteq \alpha(\tau) \subseteq SO(\tau) \subseteq SG(\tau)$, $\tau \subseteq \alpha(\tau) \subseteq PO(\tau) \subseteq \beta(\tau)$ y $\tau \subseteq SG(\tau) \subseteq \beta(\tau)$.

Los siguientes ejemplos muestran que las contenencias entre las colecciones $SO(\tau)$, $PO(\tau)$, $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, y $SG(\tau)$ son estrictas.

En primer lugar presentamos un conjunto que es α-abierto y no abierto.

Ejemplo 1. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología generada por la base $\{(-a, a) : a \in \mathbb{R}^+\}$. Sea $A = (-\frac{1}{2}, 1)$, vemos que A no es abierto. Ahora, $int(cl(int(A))) = int(cl(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = int(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, Luego A es α-abierto.*

El siguiente ejemplo presenta un conjunto que es semi-abierto pero no α-abierto.

Ejemplo 2. *Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $A = [0, 1)$. El conjunto A es semi-abierto y tenemos que A no es α-abierto, ya que:*

$$\begin{aligned} int(cl(int(A))) &= int(cl(int[0, 1))) \\ &= int(cl(0, 1)) \\ &= int[0, 1] \\ &= (0, 1). \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo presenta un conjunto que es sg-abierto pero no semi-abierto.

Ejemplo 3. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología grosera. Los únicos semi-abiertos son $\emptyset$ y $\mathbb{R}$. Luego los únicos semi-cerrados son $\emptyset$ y $\mathbb{R}$. Entonces cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$ es sg-abierto ya que $\emptyset \subseteq int_s A$.*

El siguente ejemplo muestra que existen conjuntos pre-abiertos que no son α-abiertos.

Ejemplo 4. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es pre-abierto, ya que $\mathbb{Q} \subseteq int(cl(\mathbb{Q})) = \mathbb{R}$, sin embargo $\mathbb{Q}$ no es α-abierto ya que $int(cl(int(\mathbb{Q}))) = \emptyset$.*

El siguiente ejemplo muestra un conjunto que es β-abierto pero no pre-abierto.

Ejemplo 5. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y $A = [0, 1]$. Se tiene que A no es pre-abierto ya que $int(cl(A)) = (0, 1)$, sin embargo $cl(int(cl(A))) = [0, 1]$, por tanto A es β-abierto.*

Ejemplo 6. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología de colas a derecha y $A = \mathbb{I}$, el conjunto de los números irracionales. $\mathbb{I}$ es β-abierto ya que $cl(int(cl(\mathbb{I}))) = \mathbb{R}$. Ahora $C = \{\sqrt{2}\}$ es semi-cerrado y $C \subseteq \mathbb{I}$, pero $C \nsubseteq int_s(\mathbb{I}) = \emptyset$.*

Para cada una de estas nociones débiles de conjuntos abiertos se introduce la correspondiente generalización de la noción de compacidad.

El siguiente diagrama muestra las implicaciones estrictas que se tienen entre estas nociones fuertes de compacidad:

$$\begin{array}{ccccc} \beta - compacto & \longrightarrow & pre - compacto & & \\ & & \downarrow & & \\ \downarrow & & \alpha - compacto & \longrightarrow & compacto \\ & & \uparrow & & \\ sg - compacto & \longrightarrow & semi - compacto & & \end{array}$$

1.1. Nociones básicas de Topología

Esta sección contiene resultados fundamentales de la topología general necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo.

Definición 2. *Sea X un conjunto y $A = \{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que A tiene la propiedad PIF (Propiedad de intersección finita) si la intersección de cualquier subfamilia finita de A es no vacía.*

Proposición 1. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. f es continua.

2. $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$, para cada $A \subseteq X$.

3. $f^{-1}(int(B)) \subseteq int(f^{-1}(B))$*, para cada* $B \subseteq Y$ (cf[17], [19], [20]).

Proposición 2. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos Si* $f : X \to Y$ *es abierta y* $A \subseteq Y$*, entonces* $f^{-1}(cl(A)) \subseteq cl(f^{-1}(A))$.

Demostración. Sea $x \in f^{-1}(cl(A))$, se tiene que $f(x) \in cl(A)$. Sea $\mathcal{V}(x)$ el conjunto de las vecindades de x y $V \in \mathcal{V}(x)$, entonces $f(V) \in \mathcal{V}(f(x))$, ya que f es abierta. Existe $a \in A$ tal que $a \in f(V)$. Sea $x_1 \in V$, tal que $f(x_1) = a$. Se tiene que $V \bigcap f^{-1}(A) \neq \emptyset$, luego $x \in cl(f^{-1}(A))$. □

Proposición 3. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos. Si* $f : X \to Y$ *es abierta y* $A \subseteq X$*, entonces* $f(int(A)) \subseteq int(f(A))$.

Demostración. Sea $y \in f(int(A))$, entonces existen $x \in int(A)$ tal que $f(x) = y$ y un abierto V en X tal que $x \in V \subseteq A$. Se tiene que $f(x) = y \in f(V) \subseteq f(A)$ y como f es abierta entonces $f(V)$ es abierto en Y. Por tanto $y \in int(f(A))$. □

Proposición 4. *Sea* $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ *una colección de espacios topológicos y* $A_i \subseteq X_i$, $A_i \neq \emptyset$*, para cada* $i \in I$*. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $cl(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} cl(A_i)$.

2. $int(\prod_{i\in I} A_i) \subseteq \prod_{i\in I} int(A_i)$ (cf[17], [19], [20]).

1.2. Conjuntos α-abiertos

Recordemos que un conjunto A de un espacio topológico X es α-abierto si $A \subseteq int(cl(int(A)))$. Las siguientes son algunas definiciones y propiedades que satisfacen los conjuntos α-abiertos.

Definición 3. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces:*

1. $A \subseteq X$ *es* α*-cerrado si* A^C *es* α*-abierto.*

2. La α*-clausura de* A *es:*

$$cl_\alpha(A) = \{x \in X \mid V \cap A \neq \emptyset,\ \forall\ \alpha - abierto\ V\ con\ x \in V\}.$$

3. Decimos que $V \subseteq X$ es una α-vecindad de un punto $x \in X$ si existe un α-abierto A tal que $x \in A \subseteq V$.

La α-clausura de A, $cl_\alpha(A)$ es el menor α-cerrado que contiene a A (cf[18]).

Proposición 5. *En un espacio topológico (X, τ) se cumple:*

1. Todo conjunto abierto es α-abierto.

2. Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, tal que $A_i \subseteq X$ para cada $i \in I$. Entonces $cl_\alpha(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} cl_\alpha(A_i)$. En otras palabras, la α-clausura es cerrada para intersecciones arbitrarias.

Demostración.
1. Sea S cualquier conjunto abierto. Se tiene que $S = int(S)$. Entonces:

$$\begin{aligned} S &\subseteq cl(S) \\ int(S) &\subseteq int(cl(S)) \\ S &\subseteq int(cl(int(S))). \end{aligned}$$

2. Sea $x \in cl_\alpha(\bigcap_{i\in I} A_i)$. Para cada α-abierto V, con $x \in V$ se cumple que $V \cap (\bigcap_{i \in I} A_i) \neq \emptyset$, por tanto $V \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Se tiene que $x \in cl_\alpha(A_i)$. Entonces $x \in \bigcap_{i\in I} cl_\alpha(A_i)$. $\square$

Proposición 6. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y A un α-abierto en Y entonces $f^{-1}(A)$ es α-abierto en X.*

Demostración. Como A es α-abierto en Y, entonces $A \subseteq int(cl(int(A)))$, luego por las proposiciones 1 y 2 se tiene:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &\subseteq f^{-1}(int(cl(int(A)))) \\ &\subseteq int(f^{-1}(cl(int(A)))) \\ &\subseteq int(cl(f^{-1}(int(A)))) \\ &\subseteq int(cl(int(f^{-1}(A)))). \end{aligned}$$

Por tanto $f^{-1}(A)$ es α-abierto. $\square$

Proposición 7. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y V una α-vecindad de en $y \in f(X)$, entonces $f^{-1}(V)$ es α-vecindad de cada $x \in X$ con $f(x) = y$.*

Demostración. Sean V una α-vecindad de y y $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Existe un α-abierto A tal que $y \in A \subseteq V$, entonces $x \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(V)$. Por la proposición anterior tenemos que $f^{-1}(A)$ es α-abierto, luego $f^{-1}(V)$ es una α-vecindad de x. $\square$

Proposición 8. *Toda vecindad es una α-vecindad.*

Demostración. Sea V una vecindad de $x \in X$. Existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$. Como U es abierto tambien es α-abierto. Así V es α-vecindad.

$\square$

Proposición 9. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y V una α-vecindad de $x \in X$, entonces $f(V)$ es α-vecindad de $f(x)$.*

Demostración. Sea V una α-vecindad de x. Existe un α-abierto A tal que $x \in A \subseteq V$, entonces $f(x) \in f(A) \subseteq f(V)$. Por la proposiciones 1 y 3 tenemos que $f(A)$ es α-abierto, luego $f(V)$ es una α-vecindad de $f(x)$. $\square$

Corolario 1. *Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Sea $x = (x_i)$ un punto en X. Si V es una α-vecindad de x en X entonces $\pi_i(V)$ es una α-vecindad de x_i en X_i.*

Demostración. Como las proyecciones son funciones continuas y abiertas entonces por la proposición anterior, $\pi_i(V)$ es una α-vecindad de x_i en X_i. $\square$

1.3. Conjuntos semi-abiertos

Un conjunto A de un espacio topológico X es semi-abierto si existe un abierto O tal que $O \subseteq A \subseteq cl(O)$. Esta sección presenta algunas definiciones y propiedades que satisfacen los conjuntos semi-abiertos.

Definición 4. *Sean (X, τ) un espacio topológico. Entonces:*

1. Un subconjunto A de X es semi-cerrado si A^C es semi-abierto.

2. La semi-clausura de A es el conjunto:

$$cl_s(A) = \{x \in X \mid V \cap A \neq \emptyset, \ \forall \ semi-abierto \ V \ con \ x \in V\}.$$

3. $V \subseteq X$ es una semi-vecindad de un punto $x \in X$ si existe un semi-abierto A tal que $x \in A \subseteq V$.

4. El semi-interior de A, $int_s(A)$ es la unión de todos los semi-abiertos contenidos en A.

La semi-clausura de un conjunto A es el menor semi-cerrado que contiene a A (cf[15]).

La siguiente proposición resume propiedades de los operadores semi-interior y semi-clausura, (cf[15]).

Proposición 10. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces:*

1. $int_s(A) = A \cap cl(int(A))$.

2. $cl_s(A) = A \cup int(cl(A))$.

3. $int_s(A^c) = (cl_s(A))^c$.

4. A es semi-abierto si y solo si $A \subseteq cl(int(A))$.

5. A es semi-cerrado si y solo si $int(cl(A)) \subseteq A$.

Proposición 11. *En un espacio topológico (X, τ) se cumple:*

1. Todo conjunto α-abierto es semi-abierto.

2. Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, tal que $A_i \subseteq X$ para cada $i \in I$. Entonces $cl_s(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} cl_s(A_i)$. La semi-clausura es cerrada para intersecciones arbitrarias.

Demostración. 1. Sea A un α-abierto en X. Como $A \subseteq int(cl(int(A)))$, entonces $A \subseteq cl(int(A))$.

2. Sea $x \in cl_s(\bigcap_{i\in I} A_i)$. Para cada semi-abierto V, con $x \in V$ se cumple que $V \cap (\bigcap_{i\in I} A_i) \neq \emptyset$, por tanto $V \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Se tiene que $x \in cl_s(A_i)$. Entonces $x \in \bigcap_{i\in I} cl_s(A_i)$. □

Proposición 12. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y A un semi-abierto en Y entonces $f^{-1}(A)$ es semi-abierto en X.*

Demostración. Como A es semi-abierto en Y, entonces $A \subseteq cl(int(A))$, (Proposición 10) luego por las Proposiciones 1 y 2 se tiene:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &\subseteq f^{-1}(cl(int(A))) \\ &\subseteq cl(f^{-1}(int(A))) \\ &\subseteq cl(int(f^{-1}(A))). \end{aligned}$$

Por tanto $f^{-1}(A)$ es semi-abierto. □

Proposición 13. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y $A \subseteq Y$. Entonces $f^{-1}(int_s(A)) \subseteq int_s(f^{-1}(A))$.*

Demostración. Sea $A \subseteq Y$. Como $int_s(A) = A \cap cl(int(A))$, entonces:

$$\begin{aligned} f^{-1}(int_s(A)) &= f^{-1}(A \cap cl(int(A))) \\ &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(cl(int(A))) \\ &\subseteq f^{-1}(A) \cap (cl(int(f^{-1}(A))) \\ &\subseteq int_s(f^{-1}(A)). \end{aligned}$$

□

Proposición 14. *Toda vecindad es una semi-vecindad.*

Demostración. Sea V una vecindad de $x \in X$, entonces existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$. Como U es abierto tambien es semi-abierto. Así V es semi-vecindad de x.

□

Proposición 15. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y A un semi-abierto en X entonces $f(A)$ es semi-abierto en Y.*

Demostración. Como A es semi-abierto en X, entonces $A \subseteq cl(int(A))$, luego por las proposiciones 1 y 3 se tiene:

$$\begin{aligned} f(A) &\subseteq f(cl(int(A))) \\ &\subseteq cl(f(int(A))) \\ &\subseteq cl(int(f(A))). \end{aligned}$$

Por tanto $f(A)$ es semi-abierto. □

Proposición 16. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y B un semi-cerrado en X entonces $f(B)$ es semi-cerrado en Y.*

Demostración. Como B es semi-cerrado en X, entonces $int(cl(B)) \subseteq B$, (Proposición 10) luego por las proposiciones 1 y 3 se tiene:

$$\begin{aligned} f(int(cl(B))) &\subseteq f(B) \\ int(f(cl(B))) &\subseteq f(B) \\ int(cl(f(B))) &\subseteq f(B). \end{aligned}$$

Por tanto $f(B)$ es semi-cerrado. □

Proposición 17. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y V una semi-vecindad de en $y \in f(X)$, entonces $f^{-1}(V)$ es semi-vecindad de todo $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Demostración. Sean V una semi-vecindad de y y $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Existe un semi-abierto A tal que $y \in A \subseteq V$, entonces $x \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(V)$. Por la proposición 12 tenemos que $f^{-1}(A)$ es semi-abierto, luego $f^{-1}(V)$ es una semi-vecindad de x. □

Proposición 18. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y V una semi-vecindad de $x \in X$, entonces $f(V)$ es semi-vecindad de $f(x)$.*

Demostración. Sea V una semi-vecindad de x. Existe un semi-abierto A tal que $x \in A \subseteq V$, entonces $f(x) \in f(A) \subseteq f(V)$. Por la proposición 15 tenemos que $f(A)$ es semi-abierto, luego $f(V)$ es una semi-vecindad de $f(x)$. □

Corolario 2. *Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Sea $x = (x_i)$ un punto en X. Si V es una semi-vecindad de x en X, entonces $\pi_i(V)$ es una semi-vecindad de x_i en X_i.*

Demostración. Ya que las proyecciones son abiertas y continuas tenemos por la proposición anterior que $\pi_i(V)$ es una α-vecindad de x_i en X_i. □

1.4. Conjuntos sg-abiertos

Recordemos que un conjunto A es sg-abierto si para todo semi-cerrado C tal que $C \subseteq A$ se tiene que $C \subseteq int_s(A)$. Para los conjuntos sg-abiertos se presentan las siguientes definiciones y propiedades.

Definición 5. *Sean (X, τ) un espacio topológico. Entonces:*

1. A es sg-cerrado si A^C es sg-abierto.

2. La sg-clausura de A es:

$$cl_{sg}(A) = \{x \in X \mid V \cap A \neq \emptyset,\ \forall\ sg - abierto\ V\ con\ x \in V\}.$$

3. Decimos que $V \subseteq X$ es una sg-vecindad de un punto $x \in X$ si existe un sg-abierto A tal que $x \in A \subseteq V$.

La sg-clausura de A, $cl_{sg}(A)$ es el menor sg-cerrado que contiene a A (cf[14]).

Proposición 19. *En un espacio topológico (X, τ) se cumple:*

1. Todo conjunto semi-abierto es sg-abierto.

2. Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, tal que $A_i \subseteq X$ para cada $i \in I$. Entonces $cl_{sg}(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} cl_{sg}(A_i)$. Es decir, la sg-clausura es cerrada para intersecciones arbitrarias.

Demostración.
1. Sea A un conjunto semi-abierto en X, luego $A = int_s(A)$. Como para todo semi-cerrado $C \subseteq A$ se tiene que $C \subseteq int_s(A)$. Entonces A es sg-abierto.

2. Sea $x \in cl_{sg}(\bigcap_{i\in I} A_i)$. Para cada sg-abierto V, con $x \in V$ se cumple que $V \cap (\bigcap_{i\in I} A_i) \neq \emptyset$, por tanto $V \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Se tiene que $x \in cl_{sg}(A_i)$. Entonces $x \in \bigcap_{i\in I} cl_{sg}(A_i)$. □

Proposición 20. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y B un sg-abierto en Y entonces $f^{-1}(B)$ es sg-abierto en X.*

Demostración. Sea C un semi-cerrado en X tal que $C \subseteq f^{-1}(B)$, luego $f(C) \subseteq B$. Ahora por la Proposición 16, $f(C)$ es un semi-cerrado en Y y como B es sg-abierto entonces $f(C) \subseteq int_s(B)$. Luego por la Proposición 13:

$$\begin{aligned} f(C) &\subseteq int_s(B)\\ C &\subseteq f^{-1}(int_s(B))\\ C &\subseteq int_s(f^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Por tanto $f^{-1}(B)$ es sg-abierto.

□

Nótese que gracias a las proposiciones 1, 3 y 10 se tiene que si A es sg-abierto, entonces $f(A)$ es sg-abierto.

Proposición 21. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y V una sg-vecindad de $y \in f(X)$, entonces $f^{-1}(V)$ es α-vecindad de todo $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Demostración. Sean V una sg-vecindad de y y $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Existe un sg-abierto A tal que $y \in A \subseteq V$, entonces $x \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(V)$. Por la proposición anterior tenemos que $f^{-1}(A)$ es sg-abierto, luego $f^{-1}(V)$ es una α-vecindad de x. □

Proposición 22. *Toda vecindad es una sg-vecindad.*

Demostración. Sea V una vecindad de $x \in X$. Existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$. Como U es abierto tambien es sg-abierto. Así V es sg-vecindad.

□

1.5. Conjuntos pre-abiertos

Un conjunto A de un espacio topológico X es pre-abierto si $A \subseteq int(cl(A))$. En esta sección presentamos definiciones y propiedades de los conjuntos pre-abiertos.

Definición 6. *Sean (X, τ) un espacio topológico. Entonces:*

1. Un subconjunto A de X es pre-cerrado si A^C es pre-abierto.

2. La pre-clausura de A es el conjunto:

$$cl_p(A) = \{x \in X \mid A \neq \emptyset, \forall\ pre - abierto\ V\ con\ x \in V\}.$$

3. $V \subseteq X$ es una pre-vecindad de un punto $x \in X$ si existe un pre-abierto A tal que $x \in A \subseteq V$.

La pre-clausura de A, $cl_p(A)$ es el menor pre-cerrado que contiene a A. (cf[6]).

Proposición 23. *En un espacio topológico (X, τ) se cumple:*

1. Todo conjunto α-abierto es pre-abierto.

2. Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, tal que $A_i \subseteq X$ para cada $i \in I$. Entonces $cl_p(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} cl_p(A_i)$. La pre-clausura es cerrada para intersecciones arbitrarias.

Demostración. 1. Sea A un α-abierto en X, luego $A \subseteq int(cl(int(A)))$, por tanto $A \subseteq int(cl(A))$.

2. Sea $x \in cl_p(\bigcap_{i \in I} A_i)$. Para cada pre-abierto V, con $x \in V$ se cumple que $V \cap (\bigcap_{i \in I} A_i) \neq \emptyset$, por tanto $V \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Se tiene que $x \in cl_p(A_i)$. Entonces $x \in \bigcap_{i \in I} cl_p(A_i)$. $\square$

Proposición 24. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y abierta y A un pre-abierto en Y. Entonces $f^{-1}(A)$ es pre-abierto en X.*

Demostración. Como A es pre-abierto en Y, entonces $A \subseteq int(cl(A))$, luego por las Proposiciones 1 y 2 se tiene:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &\subseteq f^{-1}(int(cl(A))) \\ &\subseteq int(f^{-1}(cl(A))) \\ &\subseteq int(cl(f^{-1}(A))). \end{aligned}$$

Por tanto $f^{-1}(A)$ es pre-abierto. □

Proposición 25. *Toda vecindad es una pre-vecindad.*

Demostración. Sea V una vecindad de $x \in X$. Existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$. Como U es abierto tambien es pre-abierto. Así V es pre-vecindad de x.

□

Proposición 26. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y A un pre-abierto en X entonces $f(A)$ es pre-abierto en Y.*

Demostración. Como A es pre-abierto en X, entonces $A \subseteq int(cl(A))$, luego por las proposiciones 1 y 3 se tiene:

$$\begin{aligned} f(A) &\subseteq f(int(cl(A))) \\ &\subseteq int(f(cl(A))) \\ &\subseteq int(cl(f(A))) \\ &\subseteq int(cl(f(A))). \end{aligned}$$

Por tanto $f(A)$ es pre-abierto. □

Proposición 27. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y V una pre-vecindad de $x \in X$, entonces $f(V)$ es pre-vecindad de $f(x)$.*

Demostración. Sea V una pre-vecindad de x. Existe un pre-abierto A tal que $x \in A \subseteq V$, entonces $f(x) \in f(A) \subseteq f(V)$. Por la proposición anterior tenemos que $f(A)$ es pre-abierto, luego $f(V)$ es una pre-vecindad de $f(x)$. □

Corolario 3. *Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i\in I} X_i$. Sea $x = (x_i)$ un punto en X. Si V es una pre-vecindad de x en X, entonces $\pi_i(V)$ es una pre-vecindad de x_i en X_i.*

Demostración. Por la proposición anterior tenemos que $\pi_i(V)$ es una pre-vecindad de x_i en X_i ya que las proyecciones son abiertas y continuas. □

1.6. Conjuntos β-abiertos

Recordemos que un conjunto A es β-abierto si $A \subseteq cl(int(cl(A)))$. Se presentan algunas definiciones y propiedades satisfechas por los conjuntos β-abiertos.

Definición 7. *Sean (X, τ) un espacio topológico. Entonces:*

1. A es β-cerrado si A^C es β-abierto.

2. La β-clausura de A es:

$$cl_\beta(A) = \{x \in X \mid V \cap A \neq \emptyset,\ \forall\ \beta - abierto\ V\ con\ x \in V\}.$$

3. $V \subseteq X$ es una β-vecindad de un punto $x \in X$ si existe un β-abierto A tal que $x \in A \subseteq V$.

La β-clausura de un conjunto A es el menor β-cerrado que contiene a A. (cf[11]).

Proposición 28. *En un espacio topológico (X, τ) se cumple:*

1. Todo conjunto pre-abierto es β-abierto.

2. Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, tal que $A_i \subseteq X$ para cada $i \in I$. Entonces $cl_\beta(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} cl_\beta(A_i)$. En otras palabras, la β-clausura es cerrada para intersecciones arbitrarias.

Demostración. 1. Sea A un pre-abierto en X. Se tienen que:

$$A \subseteq int(cl(A)) \subseteq cl(int(cl(A))).$$

2. Sea $x \in cl_\beta(\bigcap_{i\in I} A_i)$. Para cada β-abierto V, con $x \in V$ se cumple que $V \cap (\bigcap_{i\in I} A_i) \neq \emptyset$, por tanto $V \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Se tiene que $x \in cl_\beta(A_i)$. Entonces $x \in \bigcap_{i\in I} cl_\beta(A_i)$. $\square$

Proposición 29. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y A un β-abierto en Y entonces $f^{-1}(A)$ es β-abierto en X.*

Demostración. Como A es β-abierto en Y, entonces $A \subseteq cl(int(cl(A)))$, luego por las proposiciones 1 y 2 se tiene:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &\subseteq f^{-1}(cl(int(cl(A)))) \\ &\subseteq cl(f^{-1}(int(cl(A)))) \\ &\subseteq cl(int(f^{-1}(cl(A)))) \\ &\subseteq cl(int(cl(f^{-1}(A)))). \end{aligned}$$

Por tanto $f^{-1}(A)$ es β-abierto. □

Proposición 30. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y V una β-vecindad de en $y \in f(X)$, entonces $f^{-1}(V)$ es β-vecindad para todo $x \in X$ con $f(x) = y$.*

Demostración. Sean V una β-vecindad de y y $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Luego existe un β-abierto A tal que $y \in A \subseteq V$, entonces $x \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(V)$. Por la proposición anterior tenemos que $f^{-1}(A)$ es β-abierto, luego $f^{-1}(V)$ es una β-vecindad de x. □

Proposición 31. *Toda vecindad es una β-vecindad.*

Demostración. Sea V una vecindad de $x \in X$. Existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$. Como U es abierto tambien es α-abierto. Así V es β-vecindad.

□

Proposición 32. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y A un β-abierto en X entonces $f(A)$ es β-abierto en Y.*

Demostración. Como A es β-abierto en X, entonces $A \subseteq cl(int(cl(A)))$, luego por las proposiciones 1 y 3 se tiene:

$$\begin{aligned} f(A) &\subseteq f(cl(int(cl(A)))) \\ &\subseteq cl(f(int(cl(A)))) \\ &\subseteq cl(int(f(cl(A)))) \\ &\subseteq cl(int(cl(f(A)))). \end{aligned}$$

Por tanto $f(A)$ es β-abierto. □

Proposición 33. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y V una β-vecindad de $x \in X$, entonces $f(V)$ es β-vecindad de $f(x)$.*

Demostración. Sea V una β-vecindad de x. Existe un β-abierto A tal que $x \in A \subseteq V$, entonces $f(x) \in f(A) \subseteq f(V)$. Por la proposición anterior tenemos que $f(A)$ es β-abierto, luego $f(V)$ es una β-vecindad de $f(x)$. □

Corolario 4. *Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Sea $x = (x_i)$ un punto en X. Si V es una β-vecindad de x en X, entonces $\pi_i(V)$ es una β-vecindad de x_i en X_i.*

Demostración. La demostración es inmediata por la proposición anterior ya que las proyecciones son abiertas y continuas. □

Observación 1. *Un espacio topológico X es β-compacto si todo cubrimiento β-abierto de X admite un subcubrimiento finito. Como todo conjunto pre-abierto es β-abierto (cf[5] y [11]), entonces todo espacio que satisface ser β-compacto es pre-compacto. Además como todo conjunto sg-abierto es β-abierto* (cf, [7])*, se tiene que todo espacio β-compacto es sg-compacto.*
En [12], M. Ganster prueba que los únicos espacios β-compactos son espacios finitos. Por esta razón no nos referiremos más a los espacios β-compactos en este trabajo.

Capítulo 2

ESPACIOS α-COMPACTOS

En este capítulo estudiamos los espacios α-compactos y encontramos algunas caracterizaciones para éstos usando filtros. Además se muestra que el producto de espacios α-compactos no necesariamente es α-compacto.

Definición 8. *Un espacio topológico es α-compacto si satisface que todo cubrimiento α-abierto admite un subcubrimiento finito.*

Observación 2. *Como todo conjunto abierto es α-abierto (Proposición 5, Capítulo 1), entonces todo espacio que satisface ser α-compacto es compacto. La colección $\alpha(\tau)$ de todos los conjuntos α-abiertos es una topología sobre X, (cf[18]). Obsérvese que $(X, \alpha(\tau))$ es compacto si y solo si (X, τ) es α-compacto.*

El siguiente ejemplo presenta un espacio topológico que es compacto pero no α-compacto.

Ejemplo 7. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología generada por la base $\{(-a, a), a \in \mathbb{R}^+\}$. El conjunto $[-1, 1]$ es compacto por que la topología generada por esta base es menos fina que la topología usual. Consideremos el cubrimiento α-abierto de $[-1, 1]$ $\mathfrak{A} = \left\{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \bigcup \{x\} \mid x \in [-1, -\frac{1}{2}] \bigcup [\frac{1}{2}, 1]\right\}$. Para cada elemento de la colección se cumple $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \bigcup \{x\} \subseteq int(cl(int((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \bigcup \{x\}))) = \mathbb{R}$ y este cubrimiento no admite un subcubrimiento finito, por tanto $[-1, 1]$ no es α-compacto.*

A continuación se presentan algunas definiciones necesarias para caracterizar los espacios α-compactos utilizando filtros.

Definición 9. *Dado un filtro $\mathfrak{F}$ en un espacio topológico (X,τ) se define la α-adherencia $cl_\alpha(\mathfrak{F})$ del filtro $\mathfrak{F}$ como el conjunto de puntos que son α-adherentes a cada elemento del filtro, es decir: $cl_\alpha(\mathfrak{F}) = \bigcap\{cl_\alpha F | F \in \mathfrak{F}\}$.*

Definición 10. *Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X. Decimos que $\mathfrak{F}$ α-converge al punto $x \in X$ si toda α-vecindad de x esta en $\mathfrak{F}$. La α-convergencia de $\mathfrak{F}$ a un punto x se denota $\mathfrak{F} \to_\alpha x$.*

Proposición 34. *En un espacio topológico (X,τ) las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. X es α-compacto.

2. Cada colección $C = \{C_i\}_{i\in I}$ de α-cerrados en X que posee la PIF cumple $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.

3. Para cada filtro $\mathfrak{F}$ en X se tiene que $cl_\alpha\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

4. Cada ultrafiltro en X es α-convergente.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Es inmediato gracias a la Observación 2.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X. Mostraremos que la colección de α-cerrados $C = \{cl_\alpha(F) \mid F \in \mathfrak{F}\}$ posee la PIF. Sea $\{cl_\alpha(F_1), cl_\alpha(F_2), ..., cl_\alpha(F_n)\}$ una subfamilia finita de C. Se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \subseteq cl_\alpha(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} cl_\alpha(F_i)$$

Como $\mathfrak{F}$ es un filtro, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$, luego se tiene que $\bigcap_{i=1}^{n} cl_\alpha(F_i) \neq \emptyset$, asi C posee la PIF. Por nuestra hipótesis tenemos que $cl_\alpha\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X y $x \in cl_\alpha(\mathcal{U})$, entonces $x \in cl_\alpha(U)$, para cada $U \in \mathcal{U}$. Sea V cualquier α-vecindad de x. Ahora supongamos que $V \notin \mathcal{U}$, como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro $V^C \in \mathcal{U}$, lo que implica que $x \in cl_\alpha(V^C)$, entonces $V \bigcap V^C \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así $V \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \to_\alpha x$.

4) $\Rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento α-abierto de X. Si $\mathcal{A}$ no posee subcubrimientos finitos, para cada $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ se tiene que $X\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$. La colección $\{X\setminus\bigcup\mathcal{C} \mid \mathcal{C}$ es una subfamilia finita de $A\}$ es una base para un filtro sobre X contenido en un ultrafiltro $\mathcal{U}$. Sea $x \in X$ tal que $\mathcal{U} \rightarrow_\alpha x$. Se tiene que $x \in A_i$ para algún $i \in I$, luego $A_i \in \mathcal{U}$, pero $X\setminus A_i \in \mathcal{U}$ porque $\{A_i\}$ es una subfamilia finita de $\mathcal{A}$, lo cual es una contradicción, luego $\mathcal{A}$ posee al menos un subcubrimiento finito, de donde X es α-compacto. $\square$

El siguiente ejemplo muestra un espacio que no es α-compacto, via los filtros.

Ejemplo 8. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología generada por la base $\{(-a,a), a \in \mathbb{R}^+\}$. Consideremos el subespacio $[0,1]$. Sea $\mathfrak{F}$ el filtro generado por la base $\mathfrak{B} = \{F_n \mid F_n = \{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}, ...\}$. Ahora si $x \notin F_n$ existe el α-abierto $[0,\frac{1}{3}]\cup\{x\}$, en efecto ya que:*

$$int(cl(int([0,\frac{1}{3}] \cup \{x\}))) = int(cl([0,\frac{1}{3}])) = int([0,1]) = [0,1].$$

Para este α-abierto se tiene que $([0,\frac{1}{3}] \cup \{x\}) \cap F_n = \emptyset$, asi $cl_\alpha(\mathfrak{F}) = \bigcap F_n = \emptyset$. Por la Proposición anterior se tiene que $[0,1]$ no es α-compacto.

Proposición 35. *Si X es α-compacto y $f : X \rightarrow Y$ es continua, abierta y sobreyectiva entonces Y es α-compacto.*

Demostración. Sea $U = \{U_i\}_{i\in I}$, un cubrimiento α-abierto de Y entonces $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento α-abierto de X por la Proposición 6 en el capitulo 1. Como X es α-compacto admite un subcubrimiento finito $\{f^{-1}(U_{i_1})$, $f^{-1}(U_{i_2})$,..., $f^{-1}(U_{i_n})\}$. Como f es sobreyectiva $U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}$ es un subcubrimiento α-abierto finito de Y, luego Y es α-compacto. $\square$

Proposición 36. *Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i\in I} X_i$. Consideremos a $x = (x_i) \in X$. Si un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X α-converge a x entonces cada filtro $\pi_i(\mathfrak{F})$ inducido por la proyección π_i α-converge a x_i. (Recuérdese que $\pi_i(\mathfrak{F})$ es el filtro generado por la base$\{\pi_i(F) : F \in \mathfrak{F}\}$).*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X tal que $\mathfrak{F} \rightarrow_\alpha x$. Sea $\mathcal{V}_i$ la colección de α-vecindades de x_i y $V \in \mathcal{V}_i$. Se tiene que $\pi_i^{-1}(V)$ es una α-vecindad de x (cf,proposición 7, capítulo 1), luego $\pi_i^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$, entonces $\pi_i(\pi_i^{-1}(V)) \in \pi_i(\mathfrak{F})$, $V \in \pi_i(\mathfrak{F})$, entonces $\pi_i(\mathfrak{F}) \rightarrow_\alpha x_i$. $\square$

Teorema 1. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i\in I} X_i$. Si X es α-compacto entonces cada espacio coordenado X_i es α-compacto.*

Demostración. $\pi_i(\prod_{i\in I} X_i) = X_i$ es α-compacto por la Proposición 35 en el Capitulo 2, ya que la proyección π_i es continua, abierta y sobreyectiva. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el producto de espacios α-compactos no preserva la α-compacidad.

Ejemplo 9. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología de los complementarios finitos. Si A^c es finito entonces A es abierto y por tanto α-abierto. Si A^c no es finito, entonces $int(cl(int(A))) = \emptyset$, luego A no es α-abierto. Entonces los abiertos son los mismos α-abiertos y se tiene que $\mathbb{R}$ es α-compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definido por $A_n = \{(0,n),(0,n+1),(0,n+2),...\}$. La colección $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base para un filtro $\mathfrak{F}$ sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $cl_\alpha(A_n) = A_n$. Si $(x,y) \notin A_n$, el conjunto $((\mathbb{R}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{R})\cup\{(x,y)\}$ es α-abierto. En efecto,*

$$int(cl(int(((\mathbb{R}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{R})\cup\{(x,y)\}))) = int(cl((\mathbb{R}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{R})) = \\ int(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

que contiene a $((\mathbb{R}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{R})\cup\{(x,y)\}$. Como $(((\mathbb{R}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{R})\cup\{(x,y)\})\cap A_n = \emptyset$, tenemos que $cl_\alpha(\mathfrak{F}) = \cap cl_\alpha(A_n) = \cap A_n = \emptyset$. Por la Proposición 35 tenemos que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ no es α-compacto.

Capítulo 3

ESPACIOS SEMI-COMPACTOS

Este capítulo presenta algunos ejemplos y caracterizaciones de los espacios semi-compactos. Estas caracterizaciones nos brindan herramientas que permiten asegurar que el producto de espacios semi-compatos no necesariamente es semi-compacto.

Definición 11. *Un espacio topológico es semi-compacto si satisface que todo cubrimiento semi-abierto admite un subcubrimiento finito.*

Observación 3. *Como todo conjunto α-abierto es semi-abierto, entonces todo espacio semi-compacto es α-compacto. Nótese que si τ^s es la topología sobre X generada por la colección $SO(\tau)$ de todos los conjuntos semi-abiertos (cf[15]), Entonces (X, τ^s) es compacto si y solo si (X, τ) es semi-compacto.*

El siguiente ejemplo presenta un espacio topológico que es α-compacto pero no semi-compacto.

Ejemplo 10. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología punto excluido p. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $p \notin A$, entonces A es abierto, por tanto es α-abierto. Ahora si $p \in A$ entonces $int(cl(int(A))) = int(cl(A - \{p\})) = int(A) = A - \{p\}$, luego A no es α-abierto. Tenemos entonces que los conjuntos abiertos coinciden con los α-abiertos, así que $\mathbb{R}$ es α-compacto ya que cualquier cubrimiento α-abierto contiene entre sus elementos a $\mathbb{R}$, que es el único α-abierto que contiene a p. Ahora consideremos el cubrimiento semi-abierto $\{\{x, p\} : x \in \mathbb{R}\}$, ya que $cl(int\{x, p\}) = cl(\{x\}) = \{x, p\}$, entonces $\{x, p\}$ es semi-abierto y este cubrimiento no admite un subcubrimiento finito.*

A continuación se presentan algunas caracterizaciones de los espacios semi-compactos utilizando filtros.

Proposición 37. *Un espacio topológico* (X, τ) *es semi-compacto si y solo si cada colección* $C = \{C_i\}_{i \in I}$ *de semi-cerrados en* X *que posee la PIF satisface* $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Es inmediato por la Observación 3.

$\Leftarrow$) Supongamos que X no es semi-compacto. Existe un cubrimiento semi-abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ que no admite un subcubrimiento finito. Para cada $i \in I$, sea $C_i = U_i^c$ entonces $C = \{C_i\}_{i \in I}$ es una colección de conjuntos semi-cerrados en X que satisface la PIF, pero $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$, lo que produce una contradicción.

□

Definición 12. *Dado un filtro* $\mathfrak{F}$ *en un espacio topológico* (X, τ) *se define la semi-adherencia* $cl_s(\mathfrak{F})$ *del filtro* $\mathfrak{F}$ *como el conjunto de puntos que son semi-adherentes a cada elemento del filtro, es decir:* $cl_s(\mathfrak{F}) = \bigcap \{cl_s(F) | F \in \mathfrak{F}\}$.

A continuación se dan algunos ejemplos que muestran algunas diferencias entre las nociones de adherencia y semi-adherencia de un filtro.

Ejemplo 11. *Consideremos a* $\mathbb{R}$ *con la topología usual y sea* $\mathfrak{F}$ *el filtro de los superconjuntos del intervalo* $[0, 1)$, $\mathfrak{F} = \{F \subseteq X : [0, 1) \subseteq F\}$. *Tenemos que* $cl(\mathfrak{F}) = [0, 1]$ *y* $cl_s(\mathfrak{F}) = [0, 1)$ *ya que* $cl_s[0, 1) = [0, 1)$ *por ser semi-cerrado.*

Ejemplo 12. *Sea* $\mathbb{R}$ *con la topología generada por la base* $\{(-a, a) : a \in \mathbb{R}^+\}$. *Sea* $\mathfrak{F}$ *el filtro de los superconjuntos de* $\{1\}$. *Tenemos que* $cl(\{1\}) = (-\infty, -1] \bigcup [1, \infty)$, *entonces* $cl(\mathfrak{F}) = cl(\{1\}) = (-\infty, -1] \bigcup [1, \infty)$ *ya que para cualquier superconjunto* A *de* $\{1\}$ *se tiene que* $cl(\{1\}) \subseteq cl(A)$. *Para la semi-adherencia del filtro,* $cl_s(\mathfrak{F}) = cl_s(\{1\}) = \{1\}$ *por que* $\{1\}$ *es semi-cerrado. Aquí se tiene que* $\{1\}^C = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *es semi-abierto ya que existe el abierto* $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *tal que* $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1\} \subseteq cl(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \mathbb{R}$.

Proposición 38. *Un espacio topológico* X *es semi-compacto si y solo si para cada filtro* $\mathfrak{F}$ *en* X *se tiene que* $cl_s(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es semi-compacto y sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X. Por la Proposición 37 es suficiente mostrar que la colección de semi-cerrados $C = \{cl_s(F) \mid F \in \mathfrak{F}\}$ posee la PIF. Sea $cl_s(F_1), cl_s(F_2), ..., cl_s(F_n)$ una subfamilia finita de C, luego

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \subseteq cl_s(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} cl_s(F_i)$$

Como $\mathfrak{F}$ es un filtro entonces $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$, por lo tanto se tiene que $\bigcap_{i=1}^{n} cl_s(F_i) \neq \emptyset$, asi C posee la PIF.

$\Leftarrow$) Sea ζ una familia de semi-cerrados con la PIF. La colección $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de elementos de ζ es una base para un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X.
Se tiene que $\mathfrak{F} = \{F \subseteq X : M \subseteq F, \text{ algún } M \in \mathcal{B}\}$. Sabemos que $cl_s(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$ y como $\zeta \subseteq \mathfrak{F}$, entonces $\bigcap \zeta \neq \emptyset$, luego por la Proposición 37 se tiene que X es semi-compacto.

$\square$

Ejemplo 13. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología punto excluido p y sea $\mathfrak{F}$ el filtro de Fréchet generado por la base $\mathfrak{B} := \{S_n | S_n = \{n, n+1, ...\}, \text{ para } n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene $cl(\mathfrak{F}) = \{p\}$. y $cl_s(\mathfrak{F}) = \emptyset$, ya que para todo n, $cl(S_n) = S_n \cup \{p\}$. Por otra parte, para cada $S_n = \{n, n+1, ...\}$ se cumple que $cl_s(S_n) = S_n$, y como $\bigcap_{n \in N} S_n = \emptyset$ se tiene que $cl_s(\mathfrak{F}) = \emptyset$. Por la proposición anterior se tiene que $\mathbb{R}$ no es semi-compacto.*

Definición 13. *Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X. Decimos que $\mathfrak{F}$ semi-converge al punto $x \in X$ si cada semi-vecindad de x pertenece a $\mathfrak{F}$. La semi-convergencia de $\mathfrak{F}$ a un punto x se denota $\mathfrak{F} \to_s x$.*

El siguiente ejemplo muestra la diferencia entre la convergencia y la semi-convergencia de un filtro sobre un espacio topológico.

Ejemplo 14. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología generada por la base $\{(-a, a) : a \in \mathbb{R}^+\}$. El conjunto $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2})$ es una semi-vecindad de 1 sin embargo no es una vecindad de dicho punto. Además para el filtro $\mathfrak{F}$ de todos los superconjuntos de $(-1, 1)$, tenemos que $\mathfrak{F} \to 1$, pero $\mathfrak{F} \nrightarrow_s 1$ ya que $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2})$ es una semi-vecindad de 1 que no está en $\mathfrak{F}$.*

Proposición 39. *Si $\mathfrak{F} \to_s x$, entonces $x \in cl_s(\mathfrak{F})$.*

Demostración. Como $\mathfrak{F} \rightarrow_s x$, se tiene que la colección de todas las semi-vecindades de x, $\mathcal{V} = \{V \mid V\ es\ semi - vecindad\ de\ x\}$ esta en $\mathfrak{F}$. Esto implica que cada semi-vecindad de x intersecta a cada elemento de $\mathfrak{F}$, por tanto $x \in cl_s(\mathfrak{F})$.

□

Proposición 40. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y $x \in cl_s(\mathcal{U})$, entonces $\mathcal{U} \rightarrow_s x$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X y $x \in cl_s(\mathcal{U})$. Entonces $x \in cl_s(\ U)$, para cada $U \in \mathcal{U}$. Sea V cualquier semi-vecindad de x y supongamos que $V \notin \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro $V^C \in \mathcal{U}$, lo que implica que $x \in cl_s(V^C)$, entonces $V \bigcap V^C \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así $V \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \rightarrow_s x$. □

A continuación se presenta una caracterización de la semi-compacidad en términos de ultrafiltros.

Proposición 41. *Un espacio topológico (X, τ) es semi-compacto si y solo si cada ultrafiltro en X es semi-convergente.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea X semi-compacto. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en X. Por las Proposiciones 38 y 40 tenemos que $\mathcal{U}$ semi-converge.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{U}$ cualquier ultrafiltro en X y $\mathcal{U} \rightarrow_s x$. Por las Proposición 39 $x \in cl_s(\mathcal{U})$, entonces $cl_s(\mathcal{U}) \neq \emptyset$, por la Proposición 38 X es semi-compacto.

□

Proposición 42. *Si X es semi-compacto y $f : X \rightarrow Y$ continua, abierta y sobreyectiva entonces Y es semi-compacto.*

Demostración. Sea $U = \{U_i\}_{i\in I}$, un cubrimiento semi-abierto de Y. Entonces $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento semi-abierto de X, que es semi-compacto, por tanto admite un subcubrimiento finito $\{f^{-1}(U_{i_1}), f^{-1}(U_{i_2}), ..., f^{-1}(U_{i_n})\}$, así $U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}$ es un subcubrimiento semi-abierto finito de Y. □

Corolario 5. *Sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ y $x = (x_i) \in X$. Un filtro $\mathfrak{F}$ semi-converge a x entonces cada filtro $\pi_i(\mathfrak{F})$ dado por la proyección π_i semi-converge a x_i.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X y $\mathfrak{F} \to_s x$. Sea $\mathfrak{V}_i$ la colección de semi-vecindades de x_i y $V \in \mathfrak{V}_i$. $\pi_i^{-1}(V)$ es una semi-vecindad de x luego $\pi_i^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$, $\pi_i(\pi_i^{-1}(V)) \in \pi_i(\mathfrak{F})$, como π_i es sobreyectiva $V \in \pi_i(\mathfrak{F})$. $\pi_i(\mathfrak{F}) \to_s x_i$. $\square$

Proposición 43. *Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$. Si X es semi-compacto entonces cada espacio coordenado X_i es semi-compacto.*

Demostración. Se tiene que $\pi_i(\prod_{i \in I} X_i) = X_i$ es semi-compacto por la Proposición 42, ya que la proyección π_i es continua y abierta. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el producto de espacios semi-compactos no necesariamente es semi-compacto.

Ejemplo 15. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología de los complementarios finitos. Si A^c es finito entonces A es abierto y por tanto semi-abierto. Si A^c no es finito, entonces $cl(int(A)) = \emptyset$, luego A no es semi-abierto. Por tanto los abiertos son los mismos semi-abiertos, asi que $\mathbb{R}$ es semi-compacto. Por el Ejemplo 9 en el Capítulo 2 tenemos que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no es α-compacto y por la observación 2, Capítulo 3, se tiene que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no es semi-compacto.*

Capítulo 4

ESPACIOS SG-COMPACTOS

Los conjuntos sg-abiertos aparecen como una generalización de los conjuntos semi-abiertos. Decimos que un subconjunto A de un espacio topológico X es sg-abierto si para todo semi-cerrado $C \subseteq A$ se cumple que $C \subseteq int_s(A)$, donde $int_s(\cdot)$ denota el semi-interior. Todo conjunto semi-abierto es sg-abierto.

Definición 14. *Un espacio topológico es sg-compacto si satisface que todo cubrimiento sg-abierto admite un subcubrimiento finito.*

Observación 4. *Todo espacio sg-compacto es semi-compacto. La colección* $SG(\tau)$ *de todos los conjuntos sg-abiertos genera una topología* τ^{sg} *sobre* X*. Obsérvese que* (X, τ^{sg}) *es compacto si y solo si* (X, τ) *es sg-compacto.*

El siguiente ejemplo presenta un espacio topológico que es semi-compacto pero no sg-compacto.

Ejemplo 16. *Sea* $\mathbb{R}$ *con la topología grosera. Los únicos semi-abiertos son* $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}$*. Entonces* $\mathbb{R}$ *es semi-compacto. Como los únicos semi-cerrados son* $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}$*, se tiene que la colección de conjuntos sg-abiertos sobre* $\mathbb{R}$ *coincide con las partes de* $\mathbb{R}$*, es decir* $SG(\tau) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *ya que si un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$ *contiene un semi-cerrado, éste debe ser* $\emptyset$ *o* $\mathbb{R}$*. En el primer caso* $\emptyset \subseteq int_s(A)$*. En el segundo caso,* $A = \mathbb{R}$*, luego* $\mathbb{R} \subseteq int_s(A) = \mathbb{R}$*.*

Las siguientes propiedades caracterizan a los espacios sg-compactos en términos de la sg-adherencia y la sg-convergencia de un filtro.

Definición 15. *Definimos la sg-adherencia de un filtro $\mathfrak{F}$ sobre un espacio topológico (X,τ) como el conjunto:* $cl_{sg}(\mathfrak{F}) = \bigcap\{cl_{sg}(F)|F \in \mathfrak{F}\}$.

Definición 16. *Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X. Decimos que $\mathfrak{F}$ sg-converge al punto $x \in X$, $\mathfrak{F} \rightarrow_{sg} x$, si toda sg-vecindad de x esta en $\mathfrak{F}$.*

Proposición 44. *En un espacio topológico (X,τ) las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. X es sg-compacto.

2. Cada colección $C = \{C_i\}_{i\in I}$ de sg-cerrados en X que posee la PIF cumple $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.

3. Para cada filtro $\mathfrak{F}$ en X se tiene que $cl_{sg}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$.

4. Cada ultrafiltro en X es sg-convergente.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Es inmediato debido a la Observación 4.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X. Mostraremos que $C = \{cl_{sg}(F) \mid F \in \mathfrak{F}\}$ posee la PIF. Sea $\{cl_{sg}(F_1), cl_{sg}(F_2), ..., cl_{sg}(F_n)\}$ una subfamilia finita de C. Se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \subseteq cl_{sg}(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} cl_{sg}(F_i)$$

Como $\mathfrak{F}$ es un filtro, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$, luego se tiene que $\bigcap_{i=1}^{n} cl_{sg}(F_i) \neq \emptyset$, asi C posee la PIF. Por nuestra hipótesis tenemos que $cl_{sg}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X y $x \in cl_{sg}(\mathcal{U})$, entonces $x \in cl_{sg}(U)$, para cada $U \in \mathcal{U}$. Sea V cualquier sg-vecindad de x. Supongamos que $V \notin \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro $V^C \in \mathcal{U}$, lo que implica que $x \in cl_{sg}(V^C)$, entonces $V \bigcap V^C \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así $V \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \rightarrow_{sg} x$.

4) $\Rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento sg-abierto de X. Si $\mathcal{A}$ no posee subcubrimientos finitos, para cada $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ se tiene que $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$. La colección $\{X \setminus \bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C}$ es una subfamilia finita de $A\}$ es una base para

un filtro sobre X contenido en un ultrafiltro $\mathcal{U}$. Sea $x \in X$ tal que $\mathcal{U} \to_{sg} x$. Se tiene que $x \in A_i$ para algún $i \in I$, luego $A_i \in \mathcal{U}$, pero $X \backslash A_i \in \mathcal{U}$ porque $\{A_i\}$ es una subfamilia finita de $\mathcal{A}$, lo cual es una contradicción, luego $\mathcal{A}$ posee al menos un subcubrimiento finito, de donde X es sg-compacto. $\square$

Veamos un espacio que es sg-compacto via los filtros.

Ejemplo 17. *Consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología de los complementarios finitos. Los sg-abiertos coinciden con los abiertos ya que $int_s(A) = A \cap cl(int(A))$ es vacio si A no es un abierto. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{R}$. Si $\mathcal{U}$ es principal, es decir es generado por un elemento x, entonces toda sg-vecindad de x está en $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}$ no es principal, todos sus elementos son infinitos, entonces si V es una sg-vecindad de x, $V \in \mathcal{U}$ ya que V^C es finita. Se tiene que $\mathcal{U}$ es sg-convergente.*

Proposición 45. *Si X es sg-compacto y $f : X \to Y$ es continua, abierta y sobreyectiva entonces Y es sg-compacto.*

Demostración. Sea $U = \{U_i\}_{i \in I}$, un cubrimiento sg-abierto de Y. Entonces $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ es un cubrimiento sg-abierto de X, por la Proposición 20 en el capitulo 1. Como X es sg-compacto admite un subcubrimiento finito $\{f^{-1}(U_{i_1}),\ f^{-1}(U_{i_2})\ ,...,\ f^{-1}(U_{i_n})\}$. Como f es sobreyectiva $U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}$ es un subcubrimiento sg-abierto finito de Y, luego Y es sg-compacto. $\square$

Proposición 46. *Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Consideremos a $x = (x_i) \in X$. Si un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X sg-converge a x, entonces cada filtro $\pi_i(\mathfrak{F})$ inducido por la proyección π_i sg-converge a x_i.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X tal que $\mathfrak{F} \to_{sg} x$. Sea $\mathcal{V}_i$ la colección de sg-vecindades de x_i y $V \in \mathcal{V}_i$. Se tiene que $\pi_i^{-1}(V)$ es una sg-vecindad de x (cf, Proposición 21, Capítulo 1), luego $\pi_i^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$, entonces $\pi_i(\pi_i^{-1}(V)) \in \pi_i(\mathfrak{F})$, $V \in \pi_i(\mathfrak{F})$, entonces $\pi_i(\mathfrak{F}) \to_{sg} x_i$. $\square$

Proposición 47. *Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$. Si X es sg-compacto entonces cada espacio coordenado X_i es sg-compacto.*

Demostración. $\pi_i(\prod_{i \in I} X_i) = X_i$ es sg-compacto por la Proposición 45 en el Capitulo 3, ya que la proyección π_i es continua, abierta y sobreyectiva. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el producto de espacios sg-compactos no necesariamente es sg-compacto.

Ejemplo 18. *Sea* $\mathbb{R}$ *con la topología de los complementarios finitos. En el Ejemplo 17, vemos que los sg-abiertos son los mismos abiertos por tanto* $\mathbb{R}$ *es sg-compacto. Por el Ejemplo 15, Capítulo 3, se tiene que* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *no es semi-compacto y por la Observación 3* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *no es sg-compacto.*

Capítulo 5

ESPACIOS PRE-COMPACTOS

En este capítulo se presentan algunos ejemplos y caracterizaciones de la pre-compacidad en términos de la pre-adherencia y la pre-convergencia de un filtro. Además se muestra que el producto de espacios pre-compacto no necesariamete es pre-compacto.

Definición 17. *Un espacio topológico (X, τ) es pre-compacto si se tiene que todo cubrimiento pre-abierto de X admite un subcubrimiento finito.*

Observación 5. *Por la Proposición 23, como todo α-abierto es pre-abierto se tiene que todo espacio pre-compacto es α-compacto. Nótese que si τ^p es la topología sobre X generada por la colección $PO(\tau)$ de todos los conjuntos pre-abiertos(cf[6]), Entonces (X, τ^p) es compacto si y solo si (X, τ) es pre-compacto.*

El siguiente ejemplo muestra un espacio que es α-compacto pero no pre-compacto.

Ejemplo 19. *Consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología de los complementarios finitos. $\mathbb{R}$ es α-compacto ya que los abiertos coinciden con los α-abiertos (cf, Ejemplo 9, Capítulo 2). Para cada $a \in \mathbb{N}$, $(-a, a)$ es pre-abierto porque $int(cl((-a, a))) = int(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, Entonces $\{(-a, a) \mid a \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ es un cubrimiento pre-abierto que no admite un subcubrimiento finito. Luego $\mathbb{R}$ no es pre-compacto.*

A continuación se presentan algunas caracterizaciones de los espacios pre-compactos por medio de la pre-adherencia de filtros y la pre-convergencia de ultrafiltros.

Proposición 48. *Un espacio topológico* (X, τ) *es pre-compacto si y solo si cada colección* $C = \{C_i\}_{i \in I}$ *de conjuntos pre-cerrados en* X *que posee la PIF satisface* $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Es inmediato por la Observación 5.

$\Leftarrow$) Supongamos que X no es pre-compacto. Existe un cubrimiento pre-abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ que no admite un subcubrimiento finito. Para cada $i \in I$ sea $C_i = U_i^C$ entonces $C = \{C_i\}_{i \in I}$ es una colección de conjuntos pre-cerrados en X que satisface la PIF, pero $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$, lo que produce una contradicción.

□

Definición 18. *Dado un filtro* $\mathfrak{F}$ *en un espacio topológico* (X, τ) *se define la pre-adherencia* $cl_p(\mathfrak{F})$ *del filtro* $\mathfrak{F}$ *como el conjunto de puntos que son pre-adherentes a cada elemento del filtro, es decir,* $cl_p(\mathfrak{F}) = \bigcap\{cl_p(F) | F \in \mathfrak{F}\}$.

A continuación se dan algunos ejemplos que muestran algunas diferencias entre las nociones de adherencia y pre-adherencia de un filtro.

Ejemplo 20. *Consideremos a* $\mathbb{R}$ *con la topología de los complementarios finitos y sea* $\mathfrak{F}$ *el filtro de Fréchet generado por la base* $\mathfrak{B} := \{S_n | S_n = \{n, n+1, ...\},$ *para* $n \in \mathbb{N}\}$. *Se tiene* $cl(\mathfrak{F}) = \mathbb{R}$, *ya que para cualquier elemento del filtro* $\mathfrak{F}$, *por ser un conjunto infinito, tiene como clausura a* $\mathbb{R}$. *Por otro lado,* $cl_p(\mathfrak{F}) = \emptyset$, *puesto que cada elemento de la base del filtro es pre-cerrado, ya que para* $S_n = \{n, n+1, ...\}$, S_n^C *es un conjunto infinito, por tanto pre-abierto. Entonces* $cl_p(S_n) = S_n$, *y como* $\bigcap_{n \in N} S_n = \emptyset$ *se tiene que* $cl_p(\mathfrak{F}) = \emptyset$.

Proposición 49. *Un espacio topológico* X *es pre-compacto si y solo si para cada filtro* $\mathfrak{F}$ *en* X *se tiene que* $cl_p(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es pre-compacto y sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X. Por la Proposición 48, mostraremos que la colección de conjuntos pre-abiertos $C = \{cl_p(F) |$

$F \in \mathfrak{F}\}$ posee la PIF. Sea $cl_p(F_1), cl_p(F_2), ..., cl_p(F_n)$ una subfamilia finita de C. Entonces por la Proposición 23, Capítulo 1, se tiene que,

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \subseteq cl_p(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} cl_p(F_i)$$

Como $\mathfrak{F}$ es un filtro entonces $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$, por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{n} cl_p(F_i) \neq \emptyset$, asi C posee la PIF.

$\Leftarrow$) Sea ζ una familia de pre-cerrados con la PIF. La colección $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de elementos de ζ es una base para un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X. Sea $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{B} \rangle = \{F \subseteq X : M \subseteq F; \;\; \text{algún} \;\; M \in \mathcal{B}\}$. Sabemos que $cl_p(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$, por tanto existe $x \in \bigcap\{cl_p(F) | F \in \mathfrak{F}\}$ y como $cl_p(M) = M$ para todo $M \in \zeta$, $\zeta \subseteq \mathfrak{F}$, entonces por la Proposición 48, se tiene que X es pre-compacto.

□

A continuación se presenta una caracterización de la pre-compacidad en términos de ultrafiltros.

Definición 19. *Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X. Decimos que $\mathfrak{F}$ pre-converge al punto $x \in X$ si toda pre-vecindad de x está en $\mathfrak{F}$. La pre-convergencia de $\mathfrak{F}$ a un punto x se denota $\mathfrak{F} \rightarrow_p x$.*

El siguiente ejemplo muestra la diferencia entre la convergencia y la pre-convergencia de un filtro sobre un espacio topológico.

Ejemplo 21. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología de los complementarios finitos. El conjunto (a, b) es una pre-vecindad de cualquier punto x en ese intervalo, Por otra parte (a, b) no es una vecindad de dicho punto, ya que no existe un complementario finito que esté contenido en (a, b). Sea $\mathfrak{F}$ el filtro sobre $\mathbb{R}$ generado por los complementarios finitos que generaliza el filtro de Fréchet. Sea $x \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{F} \rightarrow x$, ya que el filtro de las vecindades de x es la colección de complementarios finitos que tienen a x, pero $\mathfrak{F} \nrightarrow_p x$ ya que si $x \in (a, b)$, (a, b) es una pre-vecindad de x que no está en $\mathfrak{F}$.*

Proposición 50. *Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X. Si $\mathfrak{F} \rightarrow_p x$ entonces $x \in cl_p(\mathfrak{F})$.*

Demostración. Como $\mathfrak{F} \rightarrow_p x$, tenemos que $\mathfrak{F}$ contiene todas las pre-vecindades de x, esto es, si $\mathcal{V} = \{V : V \text{ es pre-vecindad de } x\}$, entonces $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{F}$. Como para todo pre-abierto P con $x \in P$ se tiene que $P \bigcap F_i \neq \emptyset$, para cada $F_i \in \mathfrak{F}$, ya que $P \in \mathfrak{F}$, se tiene que $x \in cl_p(\mathfrak{F})$.

□

Proposición 51. *Si* $\mathcal{U}$ *es un ultrafiltro y* $x \in cl_p(\mathcal{U})$*, entonces* $\mathcal{U} \to_p x$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X y $x \in cl_p(\mathcal{U})$, entonces $x \in cl_p(U_i)$ para cada $U_i \in \mathcal{U}$. Sea V cualquier pre-vecindad de x. Supongamos que $V \notin \mathcal{U}$, como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro $V^C \in \mathcal{U}$ lo cual implica que $x \in cl_p(V^C)$, entonces $P \bigcap V^C \neq \emptyset$ para todo pre-abierto P con $x \in P$, lo cual es una contradicción ya que existe un pre-abierto P tal que $x \in P \subseteq V$, porque V es una pre-vecindad de x. Así $V \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \to_p x$.

□

Proposición 52. *Un espacio topológico* (X, τ) *es pre-compacto si y solo si cada ultrafiltro en* X *es pre-convergente.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea X pre-compacto y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Por la Proposición 49, se tiene que $cl_p(\mathcal{U}) \neq \emptyset$, luego existe $x \in cl_p(\mathfrak{U})$ y por la Proposición 51, $\mathcal{U} \to_p x$.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{F}$ cualquier filtro sobre X y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$. Como cada ultrafiltro es pre-convergente existe $x \in X$ tal que $\mathcal{U} \to_p x$ entonces, por la Proposición 50, $x \in cl_p(\mathcal{U})$, por tanto $cl_p(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ y por la Proposición 49, tenemos que X es pre-compacto.

□

Proposición 53. *Si* X *es pre-compacto y* $f : X \to Y$ *continua, abierta y sobreyectiva entonces* Y *es pre-compacto.*

Demostración. Sea $U = \{U_i\}_{i \in I}$, un cubrimiento pre-abierto de Y. Entonces por la Proposición 24, Capítulo 1, $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ es un cubrimiento pre-abierto de X. Como X es pre-compacto este cubrimiento admite un subcubrimiento finito $f^{-1}(U_{i_1}), f^{-1}(U_{i_2})$,..., $f^{-1}(U_{i_n})$ y como f es sobreyectiva, $U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}$ es un subcubrimiento pre-abierto finito de Y. □

Proposición 54. *Sea* $(X_i)_{i \in I}$ *una familia de espacios topológicos,* $X = \prod_{i \in I} X_i$ *y* $x = (x_i) \in X$*. Si un filtro* $\mathfrak{F}$ *sobre* X *pre-converge a* x *entonces cada filtro* $\pi_i(\mathfrak{F})$ *dado por la proyección* π_i *pre-converge a* x_i*.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X y $\mathfrak{F} \to_p x$. Sean $i \in I$ y V una pre-vecindad de x_i. Por la Proposición 24, Capítulo 1, $\pi_i^{-1}(V)$ es una pre-vecindad de x luego $\pi_i^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$, $\pi_(\pi_i^{-1}(V)) \in \pi_i(\mathfrak{F})$ y como π_i es sobreyectiva, $V \in \pi_i(\mathfrak{F})$. Entonces $\pi_i(\mathfrak{F}) \to_p x_i$.

□

Proposición 55. *Sea* $(X_i)_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos y sea* $X = \prod_{i\in I} X_i$. *Si* X *es pre-compacto entonces cada espacio coordenado* X_i *es pre-compacto.*

Demostración. Para cada $i \in I$ $\pi_i(\prod_{i\in I} X_i) = X_i$ es pre-compacto por la Proposición 53, ya que la proyección π_i es continua, abierta y sobreyectiva. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el producto arbitrario de espacios topológicos pre-compactos no necesariamente es pre-compacto.

Ejemplo 22. *Sea* $X = \{a,\ b,\ c\}$ *dotado de la topología grosera. Tenemos que* X *es pre-compacto ya que es finito. Consideremos a* $X^{\mathbb{N}}$ *con la topología producto. Cada conjunto unitario* $\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$ *es pre-abierto porque se tiene que* $int(cl(\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\})) = int(X^{\mathbb{N}})) = X^{\mathbb{N}}$ *que contiene a* $\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$, *entonces el cubri-miento* $\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$ *no admite un subcubrimiento finito. Luego* $X^{\mathbb{N}}$ *no es pre-compacto.*

Referencias

[1] Ávila J., Rodríguez R.G. *Boletín de Matemáticas*, Nueva serie, Volumen XV No. 1 (2008), 42-55.

[2] Battacharyya P. and Lahiri, B. K. *Semi-generalized closed sets in topology*, Indian J. Math. 29(3) (1987), 375-382.

[3] Caldas, M. C. *Semi-generalized continuous maps in topological spaces*, portg. Math. 52(4) (1995), 399-407.

[4] Csaszar A., *Generalized open sets*, Acta Math. Hungar. 75 (1997), no 1-2, 65-87. MR. 98e: 54001. zb1 924.54003.

[5] Devi R., Balachandran, K. and Maki, H. *Semi-generalized homeomorphisms and generalized semi-homeomorphisms in topological spaces*, Indian J. Pure Appl. Math., 26(3) (1995), 271-284.

[6] Dontchev J., *Survey on preopen sets*, Departament of Mathematics, University of Heisinki, Finland. arXiv:math. GN/9810177 v1 30 Oct 1998.

[7] Dontchev J. and Ganster M., *More on sg-compact spaces*, Portugaliae Mathematica, Vol. 55 Fasc. 4. 1998.

[8] Dorsett CH. *Semicompact R1 and product spaces*, Bull. Malaysian Math. Soc. 3 (2)(1980), 15-19.

[9] Dorsett CH. *Semicompactness, axioms, and product spaces*, Bull. Malaysian Math. Soc. 4 (1)(1981), 21-28.

[10] El-Aziz A. and Abo-Khadra A. *On generalized forms of compactness*, Masters Thesis, Faculty of science, Tanta University, Egypt, 1989.

[11] El-Monsef A. and El-Deeb S. and Mahmoud R. *β-open sets and β-continous mapping*, Bull. Fac. Sci. Assiur Univ. A 12 (1983), no. 1, 77-90.

[12] Ganster M. *Every β-compact space is finite*, Bull Calcutta Math Soc. 84(1992),287-288.

[13] Hanna F. and Dorsett CH. *Semicompactness, Questions Answers Gen. Topology*, 2(1) (1984), 38-47.

[14] Jancovik D. S. and Relly I. L. *On semi-separation properties*, Indian J. Pure Appl. Math 16(1985), 957-964.

[15] Levine N., *semi-open sets and semi-continuity in topological spaces.* Amer. Math. Monthly 70(1963), 36-41.

[16] Mashhour A., El-Monsef A. and El-Deeb S. *On pre-continuous and weak pre-continuous mappings*, Proc. Math. Phys. soc. Egypt, 53(1982), 47-53.

[17] Munkres J. *Topología*, Massachusetts institute of Technology, New jersey, segunda edición, Prentice-Hall (2002).

[18] Njastad O., *On some classes of nearly open sets*, Pacific J. Math. 15 (1965) 961-970.

[19] Rubiano G., *Topología general*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, segunda edición, 2002.

[20] Willard S., *General topology*, Addison-Wesley Publishing Co. Reading, Mass, London, Don mills, Ont, 1976.