Topologías de Alexandroff: tres puntos de vista diferentes

JOSE EDILBERTO ROBLES CASTRO
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS
CÓDIGO: 830263

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
AGOSTO DE 2010

Topologías de Alexandroff: tres puntos de vista diferentes

Jose Edilberto Robles Castro

Licenciado en Matemáticas

Código: 830263

Trabajo de tesis para optar al título de

Magister en Ciencias Matemáticas

Director

Gustavo Nevardo Rubiano Ortegón

Profesor titular

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Bogotá, D.C.

Agosto de 2010

Índice general

Índice general **I**

Introducción **II**

1. Preliminares **1**

1.1. Topologías de Alexandroff 1

1.2. Bases minimales 2

1.3. Topologías versus pre-ordenes 3

1.4. Retículos 4

1.5. Continuidad en espacios de Alexandroff 6

2. Topologías de Alexandroff, un enfoque por filtros **8**

2.1. Topologías principales 8

2.2. El retículo $\boldsymbol{\mathcal{A}(X)}$ 11

3. Topologías de Alexandroff, un enfoque por cubos **13**

3.1. El Cubo $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ 13

3.2. Conjuntos dirigidos y redes 14

3.3. Topologías cerradas, compactas y abiertas 15

3.4. Convergencia de preordenes y topologías de Alexandroff 20

4. Topologías de Alexandroff, un enfoque por Monoides **24**

4.1. Semigrupos y Monoides 24

4.2. Acción de semigrupos sobre conjuntos 25

4.3. Topologías de Alexandroff versus semigrupos saturados 27

4.4. El retículo $\boldsymbol{\mathcal{C}(X)}$ 29

Bibliografía **32**

Introducción

En este trabajo se presentan algunos resultados de las topologías de Alexandroff, es decir, aquellas cuya intersección de abiertos es abierto. Se hace un estudio de los espacios de Alexandroff desde tres puntos de vista: Por filtros, cubos y Monoides.

En el capítulo 1 se dan definiciones y teoremas básicos que se utilizan a lo largo del trabajo.

En el capítulo 2, se hace una construcción de las topologías de Alexandroff vía filtros. Se prueba que las topologías principales y las de Alexandroff sobre un conjunto X, coinciden, y que además estas colecciones son anti-isomorfas a la colección de los pre-ordenes sobre un conjunto X.

En el capítulo 3, se considera un conjunto infinito X. Puesto $\wp(X)$ (partes de X) se puede identificar con 2^X (*e.d.*, la colección de todas las funciones características), y si dotamos a 2^X con la topología producto (llamado el cubo 2^X), esto permite dotar a $\wp(X)$ de una topología, de tal forma que las colecciones 2^X y $\wp(X)$ resultan ser homeomorfas. Con esta identificación, una topología se puede ver como un subconjunto del cubo 2^X y por ende podemos hablar de topologías abiertas, cerradas, compactas, etc. Dos resultados importantes en este capítulo, es que las topologías de Alexandroff quedan caracterizadas como subconjuntos cerrados del cubo 2^X, y las colecciones $\mathcal{A}(X)$ (la colección de las topologías de Alexandroff sobre X) y $Pre(X)$ (la colección de los pre-ordenes sobre X), son homeomorfas cuando $\mathcal{A}(X)$ tiene la topología de Vietoris y $Pre(X)$ hereda la topología del cubo $2^{X\times X}$.

Si $(S, +, \boldsymbol{e})$ es un monoide y X un conjunto no vacío, una acción de S sobre X es una función $* : S \times X \longrightarrow X$ definida como $(s, x) \mapsto s * x$ que satisface: Para cada $s, t \in S$ y para todo $x \in X$, $s * (t * x) = (s + t) * x$ y $\boldsymbol{e} * x = x$. Para cada $x \in X$ el conjunto $O_x = \{s*x : s \in S\}$ es llamado la órbita de x. En el capítulo 4, se muestra que la colección de estas órbitas es base para una topología de Alexandroff sobre X. En particular, cuando S es el monoide $(Hom(X), \circ, 1_X)$ donde $Hom(X)$ es la colección de todas las funciones de X en X, se establece una correspondencia biunívoca entre $\mathcal{C}(X)$ (la colección de los semigrupos saturados [1] sobre X) y $\mathcal{A}(X)$, además se muestra que $(\mathcal{C}(X), \subseteq)$ es un retículo completo y anti-isomorfo a $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$.

[1]Sea $X \neq \varnothing$. Un sub-semigrupo T de $Hom(X)$ es **saturado** si:

(i) $1_X \in T$, donde $1_X(x) = x$ para todo $x \in X$.

(ii) Si T actúa sobre X via la función evaluación, y para cada $x \in X$, $O_x^T = \{f(x) : f \in T\}$ es la órbita de x de esta acción, entonces $T = \{f \in Hom(X) : f(x) \in O_x^T, \forall x \in X\}$.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Topologías de Alexandroff

En este sección se definen conceptos y resultados básicos que utilizamos a lo largo de este trabajo.

1.1.1 Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es de **Alexandroff**, si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

1.1.2 Definición. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Una vecindad N_x de x es **minimal** si dada cualquier otra vecindad V de x, $N_x \subseteq V$.

Es evidente en la definición anterior, que N_x es un subconjunto abierto de X. Los espacios de Alexandroff poseen vecindades minimales para cada punto del espacio y quedan completamente caracterizados por sus vecindades abiertas minimales como lo establece la siguiente proposición.

1.1.3 Proposición. *Un espacio topológico X es de Alexandroff si y solo si para todo $x \in X$ existe una vecindad minimal N_x.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $x \in X$ y $\mathcal{B} = \{U \subseteq X : U$ es vecindad abierta de $x\}$. Consideremos $N_x = \bigcap\{U : U \in \mathcal{B}\}$, entonces N_x es una vecindad abierta de x por ser X de Alexandroff, y por la construcción, es vecindad minimal.

$\Leftarrow$) Sean $V = \bigcap_{i \in I} U_i$ con U_i un subconjunto abierto de X y $x \in V$, entonces $x \in U_i$ para todo $i \in I$. Existe N_x vecindad minimal de x tal que $N_x \subseteq U_i$ para cada $i \in I$. Por tanto $N_x \subseteq V$ y V es vecindad de cada uno de sus puntos. En consecuencia V es abierto y así X es de Alexandroff. $\square$

Nota. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico de Alexandroff, notamos la vecindad minimal de un punto x de X como N_x, si se requiere resaltar el papel de la topología $\mathcal{T}$ notaremos $N_x^{\mathcal{T}}$. Tenemos que

$$N_x = \bigcap\{U : x \in U \text{ y } U \in \mathcal{T}\}.$$

Además, si $y \in N_x$ entonces $N_y \subseteq N_x$. $\square$

Si X es de Alexandroff, para cada $x \in X$, N_x es una vecindad minimal compacta, pues para cada cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de N_x tenemos que existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $N_x \subseteq U_j$. Por tanto tenemos que todo espacio de Alexandroff es *localmente compacto.* □

Ejemplos

1. Todo espacio topológico finito es de Alexandroff.
2. Los espacios topológicos discretos e indiscretos son de Alexandroff.
3. En el estudio de espacios de Alexandroff no son relevantes los espacios T_1, si se considera un axioma de separación, este debe ser T_0. En efecto, si X es un espacio topológico T_1, X es de Alexandroff si y solo si X es discreto.
4. Si X y Y son espacios de Alexandroff, $X \times Y$ es de Alexandroff. En este caso para cada $(x, y) \in X \times Y$, su vecindad minimal esta dada por $N_{(x,y)} = N_x \times N_y$.

1.2. Bases minimales

1.2.1 Definición. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X. $B_x \in \mathcal{B}$ es un conjunto minimal conteniendo a x (o mas brevemente, **un conjunto minimal de** x), si dado $G \in \mathcal{B}$ con $x \in G$, se tiene $B_x \subseteq G$, es decir, B_x está contenido en cualquier superconjunto de $\{x\}$ que pertenece a $\mathcal{B}$.

Note que los conjuntos minimales son únicos. Decimos que $\mathcal{B}$ es una **base minimal** de X si para cada $x \in X$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que B_x es un conjunto minimal de x. La razón de llamarle así es por lo siguiente:

1.2.2 Teorema. *Si $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ es una base minimal de X, $\mathcal{B}$ es base de una topología $\mathcal{T}$ sobre X. $\mathcal{T}$ es de Alexandroff y $N_x = B_x$ donde B_x es un conjunto minimal de x.*

Demostración.

1. Para cada $x \in X$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ conjunto minimal de x, es decir $X = \bigcup_{x\in X} B_x$.
2. Sean $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ y $z \in B_i \cap B_j$. Por hipótesis existe $B_z \in \mathcal{B}$ conjunto minimal de z tal que $B_z \subseteq B_i$ y $B_z \subseteq B_j$, es decir $B_z \subseteq B_i \cap B_j$.

De 1 y 2, $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre X.

Puesto que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ y para cada $x \in X$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ vecindad minimal de x, por la proposición 1.1.3, X es de Alexandroff. Claramente tenemos que $B_x = N_x$. □

Veamos dos aplicaciones del teorema anterior.

Ejemplos

1. Si X es de Alexandroff y $\mathcal{B} = \{N_x : x \in X\}$ es la colección de sus vecindades minimales, $\mathcal{B}$ es una base minimal de X.

2. En $X = \mathbb{R}^n$ consideremos la topología inducida por la métrica euclidiana, sea $\mathcal{B}$ la colección de las bolas cerradas de centro en 0. Para cada $x \in X$, $B_x = \overline{\mathbf{B}(0, \| x \|)}$ es un conjunto minimal de x, por 1.2.2, $\mathcal{B}$ es una base minimal de X que genera una topología de Alexandroff en $\mathbb{R}^n$. Note que este espacio no es T_1 y tampoco compacto, aunque si localmente compacto.

1.3. Topologías versus pre-ordenes

Un subconjunto R de $X \times X$ es una relación de **preorden** sobre X, o simplemente un preorden sobre X, si R es reflexiva y transitiva:

1. $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$.
2. Si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ implica $(x, z) \in R$, donde $x, y, z \in X$.

1.3.1 Definición. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, definimos la relación binaria $\leq_{\mathcal{T}}$ en X como:

$$x \leq_{\mathcal{T}} y \iff x \in \overline{\{y\}}$$

Es decir,

$$x \leq_{\mathcal{T}} y \iff y \in V_x \text{ para toda vecindad } V_x \text{ de } x.$$

1.3.2 Proposición. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. La relación $\leq_{\mathcal{T}}$ define un preorden en X.*

Demostración. Es reflexiva puesto que $x \in \overline{\{x\}}$. Sean $x \leq_{\mathcal{T}} y$ y $y \leq_{\mathcal{T}} z$, entonces $x \in \overline{\{y\}}$ y $y \in \overline{\{z\}}$, por tanto $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ y $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{z\}}$ ya que $\overline{\{x\}}$ es el menor cerrado que contiene a x y $\overline{\{y\}}$ es el menor cerrado que contiene a y, luego $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{z\}}$ y así $x \in \overline{\{z\}}$. Esto muestra que $\leq_{\mathcal{T}}$ es transitiva. □

En particular, si $(X, \mathcal{T})$ es de Alexandroff, 1.3.1 es equivalente a:

$$x \leq_{\mathcal{T}} y \iff N_y \subseteq N_x \iff y \in N_x,$$

e.d., el preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ puede ser descrito en términos de las vecindades minimales.

El preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ recibe el nombre de **preorden de especialización** (o el preorden asociado a $\mathcal{T}$). Los pre-ordenes y las topologías de Alexandroff están estrechamente relacionados, pues dada una topología esta induce un preorden como se definió en 1.3.1, y recíprocamente, dado un preorden $\leq$, este induce una topología de Alexandroff como lo muestra la siguiente proposición.

1.3.3 Proposición. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto preordenado y $\mathcal{B} = \{\uparrow x : x \in X\}$ (la colección de filtros principales) donde $\uparrow x = \{y \in X : x \leq y\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base minimal de X; la topología generada por $\mathcal{B}$ es de Alexandroff y notada $\mathcal{T}(\leq)$.*

Demostración. Veamos que para cada $x \in X$, $\uparrow x$ es un conjunto minimal de x respecto de la colección $\mathcal{B}$. Sean $y \in X$ con $x \in \uparrow y$ y $p \in \uparrow x$, entonces $y \leq x$ y $x \leq p$; por la transitividad de $\leq$, $y \leq p$, luego $p \in \uparrow y$. Por tanto $\uparrow x \subseteq \uparrow y$ y así $\uparrow x$ es un conjunto minimal de x. En consecuencia $\mathcal{B}$ es una base minimal de X. Por 1.2.2, $\mathcal{T}(\leq)$ es de Alexandroff. □

Obviamente tenemos que $\uparrow x$ son las vecindades minimales en $\mathcal{T}(\leq)$. Si $(X, \leq)$ es un conjunto preordenado, la topología $\mathcal{T}(\leq)$ se denomina **topología asociada** al preorden $\leq$, (o **topología inducida** por el preorden $\leq$).

Ejemplos

1. Sea $\leq$ una relación de equivalencia. La base minimal para $\mathcal{T}(\leq)$ es la colección de las clases de equivalencia, es decir $\mathcal{B} = \{[x] : x \in X\}$.

2. Sea el conjunto ordenado $(\wp(X), \subseteq)$ partes de X. Entonces

$$\mathcal{B} = \{\uparrow A \colon A \in \wp(X)\} \text{ donde } \uparrow A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\},$$

   es una base para $\mathcal{T}(\subseteq)$.

   Si $A = \varnothing$, $\uparrow\varnothing = \wp(X)$. Para $A \neq \varnothing$, la vecindad minimal de A es el filtro principal generado por A. En particular para cada $x \in X$, el ultrafiltro $\uparrow\{x\}$ principal es vecindad minimal del conjunto unitario $\{x\}$, y si $A = X$, $\uparrow X = \{X\}$.

1.3.4 Proposición. *Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ topologías en X. Si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, $\leq_{\mathcal{T}_1} \supseteq \leq_{\mathcal{T}_2}$.*

Demostración. Veamos que si $x \nleq_{\mathcal{T}_1} y$ entonces $x \nleq_{\mathcal{T}_2} y$. Si $x \nleq_{\mathcal{T}_1} y$, existe $G \in \mathcal{T}_1$ conteniendo a x tal que $y \notin G$; como $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, $G \in \mathcal{T}_2$, por tanto $x \nleq_{\mathcal{T}_2} y$. Así $\leq_{\mathcal{T}_1} \supseteq \leq_{\mathcal{T}_2}$. □

El recíproco de la proposición anterior se tiene, si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son topologías de Alexandroff, como lo veremos posteriormente.

1.4. Retículos

1.4.1 Definición. Sea P un conjunto. Un orden parcial (o simplemente **orden**) sobre P es un pre-orden $\leq$ sobre P que es antisimétrica. Un conjunto dotado con una relación de orden se llama un **conjunto ordenado**. Cuando es necesario especificar el orden se nota $(P, \leq)$.

Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \leq)$ conjuntos ordenados; una función $\varphi : P \to Q$ se dice que es **creciente** o que *preserva el orden*, si $x \leq y$ en P implica $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ en Q. La función φ es una *inmersión de orden* si

$$x \leq y \text{ en } P \iff \varphi(x) \leq \varphi(y) \text{ en } Q.$$

Un *isomorfismo de orden* es una inmersión de orden sobreyectiva (y por tanto, biyectiva). Si existe una inmersión de orden de P sobre Q, se dice que P y Q son orden-isomorfos y se escribe $P \cong Q$.

Dado un conjunto ordenado P, el *dual* de P, denotado P^∂, se obtiene definiendo $x \leq y$ en P^∂ si y solo si $y \leq x$ en P. Se dice que $(P, \leq)$ es **anti-isomorfo** a $(Q, \leq)$ si existe un isomorfismo de orden φ entre P y Q^∂; es decir, si

$$x \leq y \text{ en } P \iff \varphi(x) \geq \varphi(y) \text{ en } Q.$$

Un elemento $x \in P$ es un elemento **maximal(minimal)** si para cada $z \in P$, $x \leq z(z \leq x)$ implica $x = z$.

Dado $A \subseteq P$, decimos que $x \in P$ es una **cota superior** para A si $a \leq x$ para todo $a \in A$. Dualmente, $x \in P$ es una **cota inferior** para A si $x \leq a$ para cada $a \in A$. Con $A^{\uparrow}$—léase **superior** de A— denotamos el conjunto de todas las cotas superiores de A, y con $A^{\downarrow}$ el conjunto de todas las cotas inferiores de A. El elemento mínimo de $A^{\uparrow}$ si existe, es el **supremo** de A, denotado por $\bigvee A$ o sup$A$. De manera dual se define el **ínfimo** de A, denotado $\bigwedge A$ o inf$A$. En el caso en que $A = \{x, y\}$ simplemente notamos

$$x \vee y := sup\{x, y\} \text{ y } x \wedge y := inf\{x, y\}$$

Si para todo par de elementos x, y existe $x \vee y$ y $x \wedge y$ se dice que $(P, \leq)$ es un **retículo**. $(P, \leq)$ es un **retículo completo**(o reticulado completo) si para todo subconjunto S de P existen $\bigvee S =$sup$S$ y $\bigwedge S =$inf$S$. Nótese que en un retículo completo $(P, \leq)$ se tiene

$$\begin{aligned} \inf \varnothing = \sup P = &\text{ máximo de } P = \top, \\ \sup \varnothing = \inf P = &\text{ mínimo de } P = \bot. \end{aligned}$$

Un subconjunto $S \subseteq P$ es un **sub-retículo** de P si S con el orden inducido de P, es un retículo.

Si $\mathcal{U}$ es una colección de subconjuntos de X y consideramos el conjunto ordenado $(\mathcal{U}, \subseteq)$, el siguiente lema nos da condiciones suficientes para que $\mathcal{U}$ sea un retículo completo y nos ilustra como son exactamente $\bigvee$ y $\bigwedge$.

1.4.2 Lema. *Sean X un conjunto y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de X ordenada por la inclusión usual $\subseteq$ tal que*

(a) $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{U}$ *para cualquier colección no vacía* $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{U}$ *y*

(b) $X \in \mathcal{U}$.

Entonces $(\mathcal{U}, \subseteq)$ es un retículo completo donde

$$\bigvee\{A_i : i \in I\} = \bigcap\{A \in \mathcal{U} : \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A\},$$

$$\bigwedge\{A_i : i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i,$$

Ejemplo El Retículo de los pre-órdenes $\boldsymbol{Pre(X)}$.
Denotamos con $Pre(X)$ la colección de todos los pre-órdenes sobre X. $X \times X$ es un preorden y es el elemento máximo en $Pre(X)$; como la intersección de pre-órdenes es un preorden, por el Lema 1.4.2, $(Pre(X), \subseteq)$ es retículo completo donde

$$\bigvee\{R_i : i \in I\} = \bigcap\{R \in Pre(X) : \bigcup_{i \in I} R_i \subseteq R\},$$

$$\bigwedge\{R_i : i \in I\} = \bigcap_{i \in I} R_i,$$

La diagonal,

$$\Delta(X) := \{(x, x) : x \in X\}$$

es el elemento mínimo de $(Pre(X), \subseteq)$. □

1.5. Continuidad en espacios de Alexandroff

Es natural preguntarse si ser de Alexandroff es un invariante topológico, es decir si $h : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo y X es de Alexandroff, entonces ¿$h(X) = Y$ es de Alexandroff?. En realidad no es necesario que h sea una biyección, es suficiente con que h sea abierta y continua como lo establece la siguiente proposición.

1.5.1 Teorema. *Sean X de Alexandroff, $h : X \longrightarrow Y$ abierta y continua. Entonces $h(X)$ es de Alexandroff y $h(N_x) = N_{h(x)}$.*

Demostración. Sean $y \in h(X)$, $x \in X$ tal que $y = h(x)$ y N_x la vecindad minimal de x. Como h es abierta $h(N_x)$ es abierto en $h(X)$. Sea $y \in U$ donde U es un abierto en $h(X)$, entonces $x \in h^{-1}(U)$ y como h es continua, $h^{-1}(U)$ es abierto en X, en consecuencia $N_x \subseteq h^{-1}(U)$, es decir $h(N_x) \subseteq U$. Por consiguiente $h(N_x)$ es una vecindad minimal de y. Por 1.1.3, $h(X)$ es de Alexandroff y $h(N_x) = N_{h(x)}$. □

En particular tenemos que si X y Y son homeomorfos y X es de Alexandroff, Y es de Alexandroff. Es importante anotar que en la proposición anterior la condición de ser abierta no se puede omitir, es decir si $h : X \longrightarrow Y$ es continua y X es de Alexandroff, entonces no necesariamente $h(X)$ es de Alexandroff, por ejemplo, sean $X = \mathbb{N}$ y $Y = \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ es enumerable, existe una biyección $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$; dotemos a $\mathbb{N}$ con la topología discreta y a $\mathbb{Q}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ tiene la topología usual, entonces h es continua pero $h(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$ no es de Alexandroff. □

A continuación veremos que la continuidad entre espacios de Alexandroff, se puede caracterizar en términos de sus vecindades minimales.

1.5.2 Proposición. *Sean X, Y espacios de Alexandroff. $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y solo si $f(N_x) \subseteq N_{f(x)}$, donde N_x y $N_{f(x)}$ son las vecindades minimales de x y $f(x)$ respectivamente.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $x \in X$ y $N_{f(x)}$ la vecindad minimal de $f(x)$. Como f es continua, $f^{-1}(N_{f(x)})$ es un abierto en X conteniendo a x, por tanto $N_x \subseteq f^{-1}(N_{f(x)})$, es decir $f(N_x) \subseteq N_{f(x)}$.

$\Leftarrow$) Sean $f(N_x) \subseteq N_{f(x)}$, $x \in X$ y U una vecindad de $f(x)$. Por ser Y de Alexandroff, $N_{f(x)} \subseteq U$, por consiguiente $f(N_x) \subseteq U$ y así f es continua. □

Como las topologías de Alexandroff y los pre-ordenes están estrechamente relacionados, las funciones crecientes entre conjuntos preordenados, se caracterizan mediante la continuidad entre los espacios topológicos inducidos por sus pre-ordenes, como lo muestra el siguiente teorema.

1.5.3 Teorema. *Sean $(X, \leq_1)$ y $(Y, \leq_2)$ conjuntos preordenados.*
$f : (X, \leq_1) \longrightarrow (Y, \leq_2)$ es creciente si y solo si $f : (X, \mathcal{T}(\leq_1)) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}(\leq_2))$ es continua.

Demostración. $\Rightarrow$) Veamos que $f(\uparrow x) \subseteq \uparrow f(x)$. Sea $y \in f(\uparrow x)$, existe $a \in \uparrow x$ tal que $f(a) = y$ y $x \leq_1 a$. Como f es creciente $f(x) \leq_2 f(a)$, es decir $y \in \uparrow f(x)$. Por tanto $f(\uparrow x) \subseteq \uparrow f(x)$ y por 1.5.2, f es continua.

$\Leftarrow$) Si f es continua, por 1.5.2 $f(\uparrow x) \subseteq \uparrow f(x)$ para cada $x \in X$. Si $x \leq_1 a$, $a \in \uparrow x$ lo cual implica que $f(a) \in \uparrow f(x)$, es decir $f(x) \leq_2 f(a)$. Por tanto f es creciente. $\square$

Consideremos los conjuntos pre-ordenados $(X \leq_1)$ y $(Y, \leq_2)$ y definamos en $X \times Y$ la relación $\preceq$ como

$$(x, y) \preceq (a, b) \iff x \leq_1 a \quad \text{y} \quad y \leq_2 b.$$

$\preceq$ define un preorden en $X \times Y$ y por tanto induce una topología de Alexandroff $\mathcal{T}(\preceq)$ en $X \times Y$. Para cada $(x, y) \in X \times Y$ tenemos que $\uparrow(x, y) = \uparrow x \times \uparrow y$, es decir $\mathcal{T}(\preceq)$ coincide con la topología producto en $X \times Y$ generada por

$$\mathcal{B} = \{\uparrow x \times \uparrow y : x \in X \text{ y } y \in Y\}.$$

Como un caso particular tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo Sean $X \neq \varnothing$, el conjunto ordenado $(\wp(X), \subseteq)$ y

$$f, g : (\wp(X) \times \wp(X), \preceq) \longrightarrow (\wp(X), \subseteq)$$

definidas respectivamente como

$$f(A, B) = A \cup B \quad \text{y} \quad g(A, B) = A \cap B.$$

f y g son crecientes, luego por 1.5.3 continuas de

$$(\wp(X) \times \wp(X), \mathcal{T}(\preceq)) \quad \text{a} \quad (\wp(X), \mathcal{T}(\subseteq)).$$

Ejemplo Sea $f : (\wp(X), \subseteq) \longrightarrow (\wp(X), \subseteq)$ definida como $f(A) = A^c$. f no es creciente, en realidad tenemos que si $A, B \subseteq X$,

$$A \subseteq B \iff f(A) \supseteq f(B).$$

Como f es una biyección, $(\wp(X), \subseteq)$ es anti-isomorfo a si mismo.

f no es continua con respecto a $(\wp(X), \mathcal{T}(\subseteq))$, pues $\uparrow X$ es abierto en $(\wp(X), \mathcal{T}(\subseteq))$ y $f^{-1}(\uparrow X) = \{\varnothing\}$ no es un abierto en $(\wp(X), \mathcal{T}(\subseteq))$, ya que las vecindades minimales en $(\wp(X), \mathcal{T}(\subseteq))$ son filtros principales.

CAPÍTULO 2

Topologías de Alexandroff, un enfoque por filtros

2.1. Topologías principales

2.1.1 Definición. Sea $(L, \leq)$ un retículo con mínimo $\perp$ y máximo $\top$ (no necesariamente completo). Un elemento $a \in L$, $a \neq \perp$ es un **infra-elemento** si ningún elemento precede a a, excepto $\perp$. De manera dual, a es un **ultra-elemento** si $a \neq \top$ y ningún elemento es mayor que a, excepto $\top$.

Ejemplo Sea $Top(X)$ la colección de todas las topologías sobre X. Es conocido que $(Top(X), \subseteq)$ es un retículo completo. Las topologías de la forma $\{\varnothing, X, G\}$ donde $G \subseteq X$, $G \neq \varnothing$, $G \neq X$ son infra-elementos en $Top(X)$, o mejor, **infra-topologías** en $Top(X)$. Note que estas infra-topologías son de Alexandroff.

Como lo muestra el ejemplo anterior, encontrar infra-topologías es sencillo, pero cuando se trata de ultra-elementos en $(Top(X), \subseteq)$, es decir **ultra-topologías**, no es tan fácil. Como un primer intento, construyamos una topología cercana a $\wp(X)$ en la que todo conjunto unitario, excepto uno, sea abierto.

2.1.2 Definición. Para cada filtro $\mathcal{F}$ sobre X y cada elemento fijo $p \in X$ definimos la siguiente topología sobre X:

$$\mathcal{G}(p, \mathcal{F}) := \wp(X - \{p\}) \cup \mathcal{F}.$$

En esta topología los conjuntos unitarios $\{x\}$, $(x \in X)$ son abiertos siempre que $x \neq p$. También son abiertos todos los subconjuntos de X que no contienen al punto p, lo mismo todos los subconjuntos de X que son elementos de filtro $\mathcal{F}$. Así pues, las vecindades de p son los elementos de $\mathcal{F}$ a los cuales el punto p pertenece; de modo que si queremos construir una topología lo mas grande posible, el filtro $\mathcal{F}$ debe ser lo mas grande posible, o sea un ultra-filtro.

2.1.3 Proposición. *Una topología de la forma $\mathcal{G}(a, \mathcal{U})$, donde $a \in X$ y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X tal que $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}_a$ donde $\mathcal{U}_a = \{F \subseteq X : a \in F\}$ (es decir el filtro principal generado por $\{a\}$, el cual es un ultrafiltro), es una ultra-topología.*

Demostración. En efecto, sea $\mathcal{T}$ una topología sobre X tal que $\mathcal{G}(a, \mathcal{U}) \subsetneqq \mathcal{T}$; veamos que $\mathcal{T}$ coincide con $\wp(X)$. Sea $A \in \mathcal{T}$ con $a \in A$ y $A \notin \mathcal{U}$. Por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, $A^c \in \mathcal{U}$,

$A^c \cup \{a\} \in \mathcal{U}$, lo cual implica $A^c \cup \{a\} \in \mathcal{T}$. Como la intersección de abiertos es abierto, $A \cap (A^c \cup \{a\})$ es abierto y así $\{a\} \in \mathcal{T}$. Como $\wp(X - \{a\}) \subseteq \mathcal{T}$, tenemos $\mathcal{T} = \wp(X)$. □

De hecho, todas la ultra-topologías son exactamente de la forma anterior.

2.1.4 Proposición. *Si $\mathcal{T}$ es una ultra-topología sobre X, entonces $\mathcal{T}$ es de la forma $\mathcal{G}(a,\mathcal{U})$ para algún ultra-filtro $\mathcal{U}$ sobre X con $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}_a$.*

Demostración. Si $\mathcal{T}$ es una ultra-topología sobre X, existe $a \in X$ tal que $\{a\} \notin \mathcal{T}$. El conjunto $\mathcal{V}(a)$ de las vecindades del punto a es un filtro distinto de $\mathcal{U}_a$, pues $\{a\} \notin \mathcal{V}(a)$, mientras que $\{a\} \in \mathcal{U}_a$. Además, para toda V_a vecindad de a se cumple que $V_a \cap \{a\}^c \neq \varnothing$, luego el el conjunto

$$\mathcal{B} = \{V_a \cap \{a\}^c : V_a \text{ es vecindad de } a\}$$

es base de filtro y, por tanto, el filtro $\mathcal{F}$ generado por esta base satisface que $\{a\}^c \in \mathcal{F}$. Existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, de donde $\{a\}^c \in \mathcal{U}$ y así $\{a\} \notin \mathcal{U}$, es decir $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}_a$; además, como $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathcal{U}$. Por otra parte, dado que cualquier abierto en $\mathcal{T}$ tiene o no al punto a, entonces

$$\mathcal{T} \subseteq \wp(X - \{a\}) \cup \mathcal{V}(a) \subseteq \wp(X - \{a\}) \cup \mathcal{U} = \mathcal{G}(a,\mathcal{U}),$$

y como $\mathcal{T}$ es ultra-topología tenemos $\mathcal{T} = \mathcal{G}(a,\mathcal{U})$. □

2.1.5 Definición. Una ultra-topología generada por un ultrafiltro principal es llamada una **ultra-topología principal**. Es decir, una ultra-topología es principal si es de la forma $\mathcal{G}(x,\mathcal{U}_y)$, con $x, y \in X$, $x \neq y$, y $\mathcal{U}_y$ es el ultrafiltro principal generado por $\{y\}$, *e.d.*, $\mathcal{U}_y = \{F \subseteq X : y \in F\}$.

2.1.6 Definición. Una topología sobre X es **principal** si es intersección de ultra-topologías principales, es decir, intersección de topologías de la forma $\mathcal{G}(x,\mathcal{U}_y)$, con $x, y \in X$. Denotamos por $\Pi(X)$ el conjunto de las topologías principales sobre X.

En particular tenemos que cada ultra-topología principal $\mathcal{G}(p,\mathcal{U}_q), p \neq q$, es una topología principal; en este caso cada abierto que contiene a p también contiene a q pues las únicas vecindades de p están en $\mathcal{U}_q$, ósea que $\mathcal{V}(p) \subseteq \mathcal{V}(q)$. Esto significa que las topologías principales no pueden ser T_1. Tampoco satisfacen los axiomas de separación $T_i (i = 2, 3, 4)$ ya que cuando son T_1 automáticamente se convierten en la discreta.

A continuación mostraremos que las topologías principales y las de Alexandroff, coinciden.

2.1.7 Lema. *Sea la topología principal $\mathcal{T} = \mathcal{G}(p,\mathcal{U}_q) \cap \mathcal{G}(q,\mathcal{U}_r)$. Entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(p,\mathcal{U}_r)$.*

Demostración. Sea $G \in \mathcal{T}$, entonces si $p \notin G$, $G \in \mathcal{G}(p,\mathcal{U}_r)$. Si $p \in G$, $q \in G$ y por tanto $G \in \mathcal{G}(p,\mathcal{U}_r)$. Por consiguiente $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(p,\mathcal{U}_r)$. □

2.1.8 Lema. *Si $\mathcal{T}$ es una topología principal sobre X, el conjunto*

$$B_x = \{y \in X : \mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U}_y)\}$$

es abierto para cada $x \in X$, e.d., $B_x \in \mathcal{T}$.

Demostración. Sea $\mathcal{T}$ una ultra-topología principal, entonces $\mathcal{T}$ es intersección de topologías de la forma $\mathcal{G}(p,\mathcal{U}_q)$, con $p,q \in X$.

Si $\{x\} \in \mathcal{T}$, $B_x = \{x\}$, pues de lo contrario existe $y \in X$ con $y \neq x$ tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U}_y)$, *e.d.*, $\{x\} \notin \mathcal{T}$ lo cual no es posible.

Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(p,\mathcal{U}_q)$. Si $p \notin B_x$, B_x es abierto en $\mathcal{G}(p,\mathcal{U}_q)$. Si $p \in B_x$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U}_p)$, así $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U}_p) \cap \mathcal{G}(p,\mathcal{U}_q)$ y por 2.1.7, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U}_q)$. Por tanto $q \in B_x$ y B_x es abierto en $\mathcal{G}(p,\mathcal{U}_q)$.
De lo anterior se deduce que B_x es abierto en cada $\mathcal{G}(p,\mathcal{U}_q)$, en consecuencia $B_x \in \mathcal{T}$. □

2.1.9 Lema. *Si $\mathcal{T}$ es una topología en X, $\mathcal{T} = \bigcap\{\mathcal{G}(x,\mathcal{U}) : \mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U})\}$, donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X.*

Demostración. Asumamos que $\mathcal{T} \neq \wp(X)$. Claramente

$$\mathcal{T} \subseteq \bigcap\{\mathcal{G}(x,\mathcal{U}) : \mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U})\}.$$

Para la contenencia,

$$\bigcap\{\mathcal{G}(x,\mathcal{U}) : \mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U})\} \subseteq \mathcal{T},$$

tomemos $A \notin \mathcal{T}$ y veamos que $A \notin \bigcap\{\mathcal{G}(x,\mathcal{U}) : \mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U})\}$. Para ello verifiquemos que existe al menos un elemento de la colección que no contiene a A. Como $A \notin \mathcal{T}$, existe $a \in A$ que no es punto interior de A. Por tanto, toda vecindad V_a de a satisface $V_a \cap A^c \neq \varnothing$. Así el conjunto

$$\mathcal{B} = \{V_a \cap A^c : V_a \text{ es vecindad de } a\},$$

es una base para filtro y por tanto el filtro $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$ generado por esta base satisface que $A^c \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro mas fino que $\mathcal{F}$, esto es, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ contiene todas las vecindades de a, $\mathcal{T} \subseteq \wp(X - \{a\}) \bigcup \mathcal{U} = \mathcal{G}(a,\mathcal{U})$. Como $A^c \in \mathcal{U}$, entonces $A \notin \mathcal{U}$ con lo cual

$$A \notin \bigcap\{\mathcal{G}(x,\mathcal{U}) : \mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U})\}.$$

□

2.1.10 Teorema. *Una topología $\mathcal{T}$ sobre X es principal si y solo si $\mathcal{T}$ es de Alexandroff.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\mathcal{T}$ una topología principal. Veamos que

$$\mathcal{B} = \{B_x : x \in X\} \text{ donde } B_x = \{y \in X : \mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U}_y)\},$$

es una base minimal de X y una base para $\mathcal{T}$.

(i) Sean $x, y \in X$ tal que $x \in B_y$. Mostremos que $B_x \subseteq B_y$. En efecto, si $p \in B_x$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x,\mathcal{U}_p)$. Como $x \in B_y$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(y,\mathcal{U}_x)$ así,

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(y,\mathcal{U}_x) \cap \mathcal{G}(x,\mathcal{U}_p).$$

Luego $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(y,\mathcal{U}_p)$ (Lema 2.1.7) y por tanto $p \in B_y$. Por consiguiente, $B_x \subseteq B_y$ y B_x es un conjunto minimal de x.

(*ii*) Por el Lema 2.1.8, B_x es abierto en $\mathcal{T}$, es decir $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Sea $G \in \mathcal{T}$ tal que $x \in G$, mostremos que $B_x \subseteq G$. Razonemos por contradicción, *e.d.*, supongamos que existe $p \in B_x$ tal que $p \notin G$, esto implica que $G \notin \mathcal{G}(x, \mathcal{U}_p)$, puesto que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \mathcal{U}_p)$, $G \notin \mathcal{T}$, lo cual no puede ser.

De (*i*) y (*ii*), $\mathcal{B}$ es una base minimal de X y una base para $\mathcal{T}$, luego por 1.2.2, $\mathcal{T}$ es de Alexandroff.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{T}$ un topología de Alexandroff donde para cada $x \in X$, N_x es su vecindad minimal. Por el Lema 2.1.9,

$$\mathcal{T} = \bigcap \{\mathcal{G}(x, \mathcal{U}) : \mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \mathcal{U})\}$$

Sea $y \in N_x$, entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y)$ ya que cualquier abierto que contiene a x, contiene a y, por tanto

$$\mathcal{T} \subseteq \bigcap \{\mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y) : y \in N_x\}.$$

Como $x \in N_x$ y $N_x \in \mathcal{T}$, $N_x \in \mathcal{U}$. Sea $G \in \bigcap\{\mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y) : y \in N_x\}$, entonces $x \notin G$ o $x \in G$; si $x \notin G$, $G \in \mathcal{G}(x, \mathcal{U})$, y si $x \in G$, $N_x \subseteq G$, por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro, $G \in \mathcal{U}$. En consecuencia tenemos

$$\bigcap \{\mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y) : y \in N_x\} \subseteq \mathcal{G}(x, \mathcal{U})$$

Así, para cada $x \in X$ y su respectiva vecindad minimal N_x, existe una topología principal $\mathcal{J}_x = \bigcap\{\mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y) : y \in N_x\}$ tal que $\mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{G}(x, \mathcal{U})$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}_x$, luego

$$\bigcap_{x \in X} \mathcal{J}_x \subseteq \bigcap \{\mathcal{G}(x, \mathcal{U}) : \mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \mathcal{U})\} = \mathcal{T}.$$

Por ende $\bigcap_{x \in X} \mathcal{J}_x = \mathcal{T}$, es decir $\mathcal{T}$ es principal. $\square$

2.2. El retículo $\mathcal{A}(X)$

Sea el conjunto ordenado $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$ donde $\mathcal{A}(X)$ es la colección de todas las topologías de Alexandroff sobre X. $\mathcal{A}(X)$ tiene como elemento máximo a $\wp(X)$ y a $\{\varnothing, X\}$ como elemento mínimo. Si $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}(X)$, entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i \in \mathcal{A}(X)$, es decir la intersección de topologías de Alexandroff, es de Alexandroff. Por el Lema 1.4.2, $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$ es un retículo completo donde

$$\bigvee \{\mathcal{T}_i : i \in I\} = \bigcap \{\mathcal{T} \in \mathcal{A}(X) : \bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}\},$$

$$\bigwedge \{\mathcal{T}_i : i \in I\} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i.$$

En particular tenemos que la colección $\Pi(X)$ de las topologías principales sobre X, es un retículo completo.

Ahora, si $\mathcal{A}_0(X)$ es la colección de las topologías de Alexandroff sobre X que son T_0, $\mathcal{A}_0(X)$ tiene a $\wp(X)$ como elemento máximo, sin embargo, intersección de topologías de Alexandroff T_0 no necesariamente es T_0, por ejemplo, sean $X = \{0, 1\}$ y las topologías

$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X, \{0\}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{1\}\}$, entonces $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son T_0 pero $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ no es T_0, en consecuencia $(\mathcal{A}_0(X), \subseteq)$ no es un sub-retículo de $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$.

A continuación mostraremos que el retículo $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$ de las topologías de Alexandroff es anti-isomorfo al retículo de los pre-órdenes $(Pre(X), \subseteq)$. Una forma de hacerlo es mostrando que $(\Pi(X), \subseteq)$ es anti-isomorfo a $(Pre(X), \subseteq)$.

2.2.1 Proposición. *Dada una topología principal* $\mathcal{T}$ *la relación* $R_{\mathcal{T}} \subseteq X \times X$ *definida por*

$$xR_{\mathcal{T}}y \quad \textit{si y solo si} \quad \mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y),$$

es un preorden sobre X*.*

El preorden definido en esta proposición coincide con el preorden definido en 1.3.1. Ahora, si R es un preorden entonces tenemos que R induce una topología principal la cual se define como: $\mathcal{T}_R = \bigcap\{\mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y) : xRy\}$, que es por definición una topología principal. Esta topología coincide con la topología de 1.3.3, es decir $\mathcal{T}_R = \mathcal{T}(R)$ ya que la aplicación

$$\psi : Pre(X) \longrightarrow \Pi(X) \quad \text{definida} \quad \psi(R) = \mathcal{T}(R)$$

es una biyección.

2.2.2 Teorema. *El retículo* $(\Pi(X), \subseteq)$ *de las topologías principales sobre* X *es anti-isomorfo al retículo* $(Pre(X), \subseteq)$ *de los pre-órdenes en* X*.*

Demostración. Las funciones

$$\eta : \Pi(X) \longrightarrow Pre(X) \quad \text{y} \quad \psi : Pre(X) \longrightarrow \Pi(X)$$

definidas por $\eta(\mathcal{T}) = R_{\mathcal{T}}$ y $\psi(R) = \mathcal{T}(R)$ son mutuamente inversas en el sentido que $\eta(\psi(R)) = R$ para todo $R \in Pre(X)$ y $\psi(\eta(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$ para toda $\mathcal{T} \in \Pi(X)$.

Como $xR_{\mathcal{T}}y$ si y solo si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y)$ tenemos que, si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ entonces $(x, y) \in R_{\mathcal{T}_2}$ lo que implica $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y)$ y así $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y)$, con lo cual $(x, y) \in R_{\mathcal{T}_1}$, luego $R_{\mathcal{T}_1} \supseteq R_{\mathcal{T}_2}$.

Por otra parte, $R_1 \subseteq R_2$ implica $\mathcal{T}_{R_1} \supseteq \mathcal{T}_{R_2}$ ya que

$$\bigcap\{\mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y) : xR_1y\} \supseteq \bigcap\{\mathcal{G}(x, \mathcal{U}_y) : xR_2y\}$$

Esto comprueba que la correspondencia es un anti-isomorfismo. $\square$

Por la proposición anterior tenemos que $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$ es anti-isomorfo a $(Pre(X), \subseteq)$. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Alexandroff T_0, $R_{\mathcal{T}}$ define un orden, de forma inversa, si R es un orden, $\mathcal{T}(R)$ es T_0, así las funciones

$$\phi : \mathcal{A}_0(X) \longrightarrow Pos(X) \quad \text{y} \quad \mu : Pos(X) \longrightarrow \mathcal{A}_0(X)$$

definidas respectivamente como $\phi(\mathcal{T}) = R_{\mathcal{T}}$ y $\mu(R) = \mathcal{T}(R)$ son inversas la una de la otra. Por tanto, el conjunto ordenado $(\mathcal{A}_0(X), \subseteq)$ de las topologías de Alexandroff que son T_0, es anti-isomorfo al conjunto $(Pos(X), \subseteq)$ de los órdenes.

CAPÍTULO 3

Topologías de Alexandroff, un enfoque por cubos

3.1. El Cubo 2^X

Sean X un conjunto infinito y $2^X = \{0,1\}^X$ la colección de todas las funciones características. El conjunto $\wp(X)$ de partes de X se puede identificar con 2^X puesto que la función

$$\varphi : \prod_{i \in X} X_i \longrightarrow \wp(X)$$

$$\chi_A \longmapsto A \qquad \text{donde} \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases},$$

es una biyección. Ahora bien, dotemos a 2^X con la topología producto, es decir $2^X = \prod_{i \in X} X_i$ (conocido como el cubo de Cantor, o simplemente el **cubo 2^X**) donde $X_i = \{0,1\}$ es el espacio topológico discreto; si a $\wp(X)$ lo dotamos de la topología final con respecto a φ, esto es, $\mathcal{U}$ es abierto en $\wp(X)$ si y solo si $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en 2^X, entonces φ es un homeomorfismo, ya que por definición de topología final es continua, y por ser inyectiva es abierta. Con esta identificación, una topología sobre X se puede ver como un subconjunto del cubo 2^X y por ende podemos hablar de topologías abiertas, cerradas, compactas, etc.

Con la topología producto en 2^X, tenemos que el cubo 2^X es compacto (teorema de Tychonoff), también es T_2 puesto que $X_i = \{0,1\}$ es T_2 para cada $i \in X$, en particular $\wp(X)$ es compacto y T_2 con la topología final. En realidad tenemos mucho mas, 2^X es es regular ya que cada X_i lo es y en consecuencia $\wp(X)$ es regular.

Comenzaremos por demostrar un resultado básico que utilizaremos en este capítulo. En el retículo $(\wp(X), \subseteq)$ consideremos el intervalo

$$[K,F] = \{A \in \wp(X) : K \subseteq A \subseteq F\}.$$

3.1.1 Proposición. *La colección $\mathcal{B} = \{[K,F] : K$ es finito y F cofinito$\}$ es base para la topología producto definida en 2^X.*

Demostración. Mostremos que $\mathcal{B}$ es una base para la topología final $\mathcal{T}$ en $\wp(X)$, esto es:

(i) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$

(ii) Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{U}$, existe $[K, F] \in \mathcal{B}$ tal que $A \in [K, F] \subseteq \mathcal{U}$

(i) Sea $[K, F] \in \mathcal{B}$ y definamos los conjuntos $G_i = \{1\}$ si $i \in K$, $G_i = \{0\}$ si $i \in F^c$ y $G_i = \{0, 1\}$ si $i \in F - K$. Entonces $\varphi^{-1}([K, F]) = \prod\limits_{i \in X} G_i$ que es un abierto básico en 2^X. Por tanto $[K, F] \in \mathcal{T}$ y así $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

(ii) Sean $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{U}$; existe $J \subseteq X$ finito tal que

$$\varphi^{-1}(A) \in \prod_{i \in X} G_i \subseteq \varphi^{-1}(\mathcal{U})$$

donde $G_i = \{1\}$ o $G_i = \{0\}$ si $i \in J$, y $G_i = \{0, 1\}$ si $i \in X - J$. Sean

$$K = \{i \in J : \; G_i = \{1\}\} \quad \text{y} \quad L = \{i \in J : \; G_i = \{0\}\}.$$

K y L son finitos y disjuntos y $\varphi^{-1}([K, F]) = \prod_{i \in X} G_i$ donde $F = L^c$. Por tanto $A \in [K, F] \subseteq \mathcal{U}$.

Por último tenemos que como φ es un homeomorfismo, $\mathcal{B}$ se puede ver como una base para la topología producto en 2^X.

$\square$

Los intervalos en la proposición anterior se pueden escribir como

$$[K, F] = \{A \in 2^X : \; K \subseteq A \;\&\; A \cap F^c = \varnothing\}$$

donde K es finito, F es cofinito. Son abiertos-cerrados (*e.d.*, abierto y cerrado a la vez) en 2^X puesto que

$$[K, F]^c = \left[\bigcup_{l \in F^c} [\{l\}, X]\right] \bigcup \left[\bigcup_{k \in K} [\varnothing, \{k\}^c]\right].$$

3.2. Conjuntos dirigidos y redes

Un conjunto D es **dirigido** si existe un preorden $\succeq$ sobre D que satisface: Para cada $i, j \in D$, existe $l \in D$ tal que $l \succeq i$ y $l \succeq j$.

Si D junto con $\succeq$ es un conjunto dirigido, es frecuente decir que D es dirigido por $\succeq$. Note en particular, que todo conjunto totalmente ordenado es un conjunto dirigido.

3.2.1 Definición. Sea D un conjunto dirigido. Una **Red** sobre un conjunto X es una función $S : D \longrightarrow X$. Para cada $i \in D$, la expresión $S(i)$ se denota usualmente por S_i, y la red por $\{S_i\}_{i \in D}$.

En particular, toda sucesión en un conjunto X, es una red.

Si X es un espacio topológico, una red $\{S_i\}_{i\in D}$ en X **converge** a x, si dada una vecindad V_x de x, existe $j \in D$ tal que para todo $i \succeq j$, $S_i \in V_x$. Es usual notar que una red converge a x como $S_i \to x$. También se suele decir que $\{S_i\}_{i\in D}$ converge a x si S_i esta eventualmente en cualquier vecindad de x.

La propiedad establecida en el siguiente lema, es útil para caracterizar conjuntos cerrados utilizando redes.

3.2.2 Lema. *Sea X un espacio topológico. $F \subseteq X$ es cerrado si y solo si dada una red $\{S_i\}_{i\in D}$ en F que converge a x, entonces $x \in F$.*

3.2.3 Proposición. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una red $\{S_i\}_{i\in D}$ en A tal que $\{S_i\}_{i\in D}$ converge a x.*

Así como en espacios métricos existe una caracterización de la continuidad mediante sucesiones, en espacios topológicos generales esta caracterización se hace mediante redes como lo pone de manifiesto la siguiente proposición.

3.2.4 Proposición. *Sean X y Y espacios topológicos. $f : X \to Y$ es continua si y solo si dada una red $\{S_i\}_{i\in D}$ en X tal que $\{S_i\}_{i\in D}$ converge a x, entonces $\{f(S_i)\}_{i\in D}$ converge a $f(x)$.*

Para la demostración de 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4, véanse [5] y [13].

3.3. Topologías cerradas, compactas y abiertas

Iniciamos esta sección mostrando que las topologías de Alexandroff, se pueden caracterizar como subconjuntos cerrados del cubo 2^X.

3.3.1 Teorema. *Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{T}$ es de Alexandroff.

(ii) $\mathcal{T}$ es cerrada en el cubo 2^X.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sean $\{A_i\}_{i\in D}$ una red de conjuntos abiertos de $\mathcal{T}$ tal que $\{A_i\}_{i\in D}$ converge a A (en 2^X), $x \in A$ y N_x la vecindad minimal de x. Veamos que $A \in \mathcal{T}$. Es suficiente mostrar que $N_x \subseteq A$.

$[\{x\}, X]$ es vecindad de A, como $\{A_i\}_{i\in D}$ converge a A, existe $j_0 \in D$ tal que si $i \succeq j_0$, $A_i \in [\{x\}, X]$, por tanto $x \in A_i$. Así para todo $i \succeq j_0$, $N_x \subseteq A_i$ (pues $A_i \in \mathcal{T}$).

Para establecer la contenencia $N_x \subseteq A$, tomemos $p \notin A$ y mostremos que $p \notin N_x$. Sean $[K, F]$ una vecindad de A y $p \notin A$, entonces $K \subseteq A \subseteq \{p\}^c$, *e.d.*, $[K, \{p\}^c]$ es vecindad de A. Por la convergencia de $\{A_i\}_{i\in D}$, existe $j_1 \in D$ tal que si $i \succeq j_1$, $A_i \in [K, \{p\}^c]$. Por tanto para todo $i \succeq j_1$, $p \notin A_i$. Por ser D dirigido, existe $l \in D$ tal que $l \succeq j_0$ y $l \succeq j_1$, así para todo $i \succeq l$, $N_x \subseteq A_i$ y $p \notin A_i$, es decir $p \notin N_x$ que es lo que queríamos probar. En consecuencia, $N_x \subseteq A$ y A es vecindad de cada uno de sus puntos, es decir $A \in \mathcal{T}$. Por el lema 3.2.2, $\mathcal{T}$ es cerrada en 2^X.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sean $x \in X$ y $\vartheta(x)$ la colección de vecindades abiertas de x. Definamos en $\vartheta(x)$ la relación $\succeq$ como

$$V \succeq W \quad \text{si y solo si} \quad V \subseteq W.$$

Entonces $\vartheta(x)$ es dirigido por $\succeq$. Sean la red

$$S : \vartheta(x) \longrightarrow \mathcal{T} \quad \text{definida} \quad W \mapsto S_w = W$$

y $N_x = \bigcap\{W : W \in \vartheta(x)\}$. Probemos que $\{S_w\}_{w\in\vartheta(x)}$ converge a N_x.

Sea $[K, F]$ una vecindad de N_x, entonces $F^c \subseteq N_x^c \subseteq K^c$. Como F^c es finito, existen $W_1, W_2, ..., W_n \in \vartheta(x)$ tal que $F^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_i^c$. Consideremos $W_0 = \bigcap_{i=1}^n W_i$ y veamos que para cada $W \succeq W_0$, $S_w \in [K, F]$. La contenencia $K \subseteq S_w$ se tiene puesto que $K \subseteq N_x \subseteq W$. Para establecer la contenencia $S_w \subseteq F$, tomemos $p \notin F$ y mostremos que $p \notin S_w$. Si $p \notin F$, $p \in F^c$, por tanto $p \in W_0^c$, como $W_0^c \subseteq W^c$, $p \notin W$ es decir $p \notin S_w$, que es lo que se quería mostrar.

De lo anterior se deduce que $\{S_w\}_{w\in\vartheta(x)}$ converge a N_x y como $\mathcal{T}$ es cerrada, por 3.2.2, $N_x \in \mathcal{T}$. Es decir que cada $x \in X$ tiene una vecindad minimal N_x; por 1.1.3, $\mathcal{T}$ es de Alexandroff. □

Por el teorema anterior, si $\mathcal{T}$ es una topología de Alexandroff sobre X, $\mathcal{T}$ es compacta en 2^X, pues 2^X es compacto. Además $\mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{K}(2^X)$ donde $\mathcal{K}(2^X)$ es la colección de todos los subconjuntos compactos de 2^X.

Ejemplo 1 Sea $(X, \leq)$ un conjunto preordenado. Entonces la topología $\mathcal{T}(\leq)$ inducida por $\leq$ es de Alexandroff y en consecuencia es un subconjunto cerrado y por tanto compacto del cubo 2^X.

Ejemplo 2 Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}$ la topología usual en X. Entonces $\mathcal{T}$ no es de Alexandroff y por tanto no es un subconjunto cerrado de 2^X. Ahora bien, $\overline{\mathcal{T}}$ es un subconjunto cerrado de 2^X, en realidad $\overline{\mathcal{T}} = 2^X$. En efecto, la contenencia $\overline{\mathcal{T}} \subseteq 2^X$es obvia. Para la otra contenencia, sean $G \subseteq X$ y $[K, F]$ una vecindad de G con K finito y F cofinito, entonces $F^c = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $y_1 < y_2 < ... < y_m$, entonces $F = (\leftarrow, y_1) \cup (y_1, y_2) \cup (y_2, y_3) \cup ... \cup (y_{m-1}, y_m) \cup (y_m, \rightarrow)$ y por tanto $F \in \mathcal{T}$. En consecuencia $G \in \overline{\mathcal{T}}$. Así, la topología usual en $\mathbb{R}$, es un subconjunto denso en $2^{\mathbb{R}}$.

A continuación probaremos que si $\mathcal{T}$ es una topología en X, la clausura de $\mathcal{T}$ (*e.d.* $\overline{\mathcal{T}}$) en 2^X, es una topología en X, la cual es de Alexandroff por el teorema 3.3.1. Antes probaremos 2 lemas que utilizaremos.

3.3.2 Lema. *Sean $f, g : 2^X \times 2^X \to 2^X$ definidas como:*

$$f(A, B) = A \cap B, \quad y \quad g(A, B) = A \cup B.$$

Consideremos el cubo 2^X y $2^X \times 2^X$ con la topología producto. f y g son continuas.

Demostración. Para mostrar la continuidad de f, sea $(A, B) \in 2^X \times 2^X$ y $[K, F]$ una vecindad de $A \cap B$, entonces $K \subseteq A \cap B \subseteq F$, luego $K \subseteq A$ y $K \subseteq B$. Sean

$$K \subseteq A \subseteq G \quad \text{y} \quad K \subseteq B \subseteq H$$

donde $G = F \cup A$ y $H = F \cup B$. Afirmamos que $f([K, G] \times [K, H]) \subseteq [K, F]$.

En efecto, sea $C \in f([K,G] \times [K,H])$, existe $(D,E) \in 2^X \times 2^X$ tal que $D \cap E = C$ con $K \subseteq D \subseteq G$ y $K \subseteq E \subseteq H$, luego

$$K \subseteq D \cap E = C \subseteq G \cap H = F \cup (A \cap B) \subseteq F \cup F = F$$

es decir $K \subseteq C \subseteq F$, así $f([K,G] \times [K,H]) \subseteq [K,F]$. Esto comprueba que f es continua.

Para ver que g es continua, sean $(A,B) \in 2^X \times 2^X$ y $[K,F]$ una vecindad de $A \cup B$, entonces $K \subseteq A \cup B \subseteq F$. Sean

$$G \subseteq A \subseteq F \quad \text{y} \quad H \subseteq B \subseteq F$$

donde $G = A \cap K$ y $H = B \cap K$. Afirmamos que $g([G,F] \times [H,F]) \subseteq [K,F]$. En efecto, sea $C \in g([G,F] \times [H,F])$, existe $(D,E) \in 2^X \times 2^X$ tal que $g(D,E) = D \cup E = C$ con $G \subseteq D \subseteq F$ y $H \subseteq E \subseteq F$, así $G \cup H \subseteq C \subseteq F \cup F = F$ y como $K \subseteq A \cup B$,

$$K \cap K = K \subseteq K \cap (A \cup B) = G \cup H \subseteq C \subseteq F,$$

es decir $C \in [K,F]$. En consecuencia $g([G,F] \times [H,F]) \subseteq [K,F]$ y así g es continua. □

3.3.3 Lema. *Sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de X tal que $\mathcal{F}$ es un subconjunto cerrado de 2^X, entonces:*

(*i*) *Si $\mathcal{F}$ es cerrada para intersecciones finitas, $\mathcal{F}$ es cerrada para intersecciones arbitrarias.*

(*ii*) *Si $\mathcal{F}$ es cerrada para uniones finitas, $\mathcal{F}$ es cerrada para uniones arbitrarias.*

Demostración. (*i*) Sean $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{K} = \{S \subseteq I : S \text{ es finito}\}$, $\mathcal{K}$ es dirigido por $\supseteq$. La función

$$B : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{F} \;\; \text{definida como} \;\; S \mapsto B_s = \bigcap_{i \in S} A_i \;,$$

es una red en $\mathcal{F}$. Veamos que $\{B_s\}_{S \in \mathcal{K}}$ converge a $\bigcap_{i \in I} A_i$.

Sea $[K,F]$ una vecindad de $\bigcap_{i \in I} A_i$, entonces $F^c \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i^c \subseteq K^c$. Como F^c es finito, existe $S_0 = \{s_1, s_2, ..., s_n\} \subseteq I$ tal que $A_{s_1}, A_{s_2}, ..., A_{s_n} \in \mathcal{F}$ y $F^c \subseteq \bigcup_{r=1}^n A_{s_r}^c$. Veamos que para todo $S \supseteq S_0$, $B_s \in [K,F]$. La contenencia $K \subseteq B_s$ se tiene puesto que

$$K \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in S} A_i = B_s.$$

Para establecer la contenencia $B_s \subseteq F$, tomemos $p \notin F$ y mostremos que $p \notin B_s$. Si $p \notin F$, $p \in F^c$, por tanto $p \in \bigcup_{r=1}^n A_{s_r}^c$, luego $p \notin A_{s_r}$ para algún $s_r \in S_0$, es decir $p \notin B_{s_0}$; como $S \supseteq S_0$, $B_s \subseteq B_{s_0}$, en consecuencia $p \notin B_s$, que es lo que se quería mostrar.

Lo anterior prueba que $\{B_s\}_{s \in \mathcal{K}}$ converge a $\bigcap_{i \in I} A_i$. Por el lema 3.2.2, $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$, es decir $\mathcal{F}$ es cerrada para intersecciones arbitrarias.

(*ii*) Sean $\mathcal{K}$ como en (*i*) y la red

$$C : \mathcal{K} \to \mathcal{F} \;\; \text{definida como} \;\; S \mapsto C_s = \bigcup_{i \in S} A_i.$$

Veamos que $\{C_s\}_{S\in\mathcal{K}}$ converge a $\bigcup_{i\in I} A_i$. Sea $[K,F]$ una vecindad básica de $\bigcup_{i\in I} A_i$, entonces $K \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq F$. Como K es finito, existe $S_0 = \{i_1, i_2, ..., i_m\} \subseteq I$ tal que $K \subseteq \bigcup_{r=1}^{m} A_{i_r}$. Para todo $S \supseteq S_0$, mostremos que $C_s \in [K,F]$. La contenencia $K \subseteq C_s$ se cumple ya que si $S \supseteq S_0$, $K \subseteq \bigcup_{r=1}^{m} A_{i_r} \subseteq \bigcup_{i\in S} A_i = C_s$; la contenencia $C_s \subseteq F$ se tiene puesto que $C_s \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq F$.

Lo anterior comprueba que $\{C_s\}_{s\in\mathcal{K}}$ converge a $\bigcup_{i\in I} A_i$, luego $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$ (lema 3.2.2), esto es, $\mathcal{F}$ es cerrada para uniones arbitrarias.

□

3.3.4 Teorema. *Sea $\mathfrak{T}$ una topología sobre X. La clausura de $\mathfrak{T}$ (i.e $\overline{\mathfrak{T}}$) en 2^X es una topología en X.*

Demostración. Por el Lema 3.3.3, es suficiente mostrar que $\overline{\mathfrak{T}}$ es cerrada sobre intersecciones finitas y uniones finitas.

Sean $A, B \in \overline{\mathfrak{T}}$, por la proposición 3.2.3, existen $\{A_i\}_{i\in D}$ y $\{B_i\}_{i\in D}$ redes de abiertos en $\mathfrak{T}$ convergiendo a A y B respectivamente. Veamos que la red $\{(A_i, B_i)\}_{i\in D}$ en $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}$ converge a (A,B). Sean $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ vecindades de A y B respectivamente; existen $k, j \in D$ tal que para $i \in D$, si $i \succeq j$, $A_i \in \mathcal{V}$, y si $i \succeq k$, $B_i \in \mathcal{W}$. Como D es dirigido, existe $l \in D$ tal que $l \succeq j$ y $l \succeq k$; así para todo $i \succeq l$ se tiene $(A_i, B_i) \in \mathcal{V}\times\mathcal{W}$, es decir $\{(A_i, B_i)\}_{i\in D}$ converge a (A,B).

Obsérvese que $\{A_i \cap B_i\}_{i\in D}$ y $\{A_i \cup B_i\}_{i\in D}$ son redes en $\mathfrak{T}$. Por 3.2.4 y 3.3.2, $\{f(A_i,B_i)\}_{i\in D}$ converge a $f(A,B)$ y $\{g(A_i,B_i)\}_{i\in D}$ converge a $g(A,B)$, esto es, $\{A_i \cap B_i\}_{i\in D}$ converge a $A\cap B$ y $\{A_i \cup B_i\}_{i\in D}$ converge a $A\cup B$. Por tanto por el lema 3.2.2, $A\cap B, A\cup B \in \overline{\mathfrak{T}}$, así $\overline{\mathfrak{T}}$ es cerrada para intersecciones finitas y uniones finitas, que era lo que queríamos mostrar. □

Por el teorema anterior tenemos que $\overline{\mathfrak{T}}$ es la topología de Alexandroff mas pequeña conteniendo a $\mathfrak{T}$, es decir cualquier otra topología de Alexandroff mas fina que $\mathfrak{T}$, contiene a $\overline{\mathfrak{T}}$. $\mathfrak{T}$ y $\overline{\mathfrak{T}}$ inducen el mismo preorden como lo establece la siguiente proposición.

3.3.5 Proposición. *Sea $\mathfrak{T}$ una topología sobre X, entonces $\leq_{\mathfrak{T}} = \leq_{\overline{\mathfrak{T}}}$, donde $\overline{\mathfrak{T}}$ es la clausura de $\mathfrak{T}$ en el cubo 2^X.*

Demostración. Como $\mathfrak{T} \subseteq \overline{\mathfrak{T}}$, por 1.3.4 $\leq_{\overline{\mathfrak{T}}} \subseteq \leq_{\mathfrak{T}}$. Para la otra contenencia, si $x \nleq_{\overline{\mathfrak{T}}} y$ existe $V \in \overline{\mathfrak{T}}$ tal que $x \in V$ y $y \notin V$. $[\{x\}, \{y\}^c]$ es una vecindad de V; como $V \in \overline{\mathfrak{T}}$, $[\{x\}, \{y\}^c] \cap \mathfrak{T} \neq \varnothing$, luego existe $G \in [\{x\}, \{y\}^c] \cap \mathfrak{T}$ tal que $x \in G$ y $y \notin G$. Por tanto $x \nleq_{\mathfrak{T}} y$. Esto muestra que $\leq_{\mathfrak{T}} \subseteq \leq_{\overline{\mathfrak{T}}}$.

De lo anterior se deduce $\leq_{\mathfrak{T}} = \leq_{\overline{\mathfrak{T}}}$. □

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos el siguiente corolario.

3.3.6 Corolario. *Sea $\mathfrak{T}$ una topología sobre X. Entonces*

(*i*) *$\mathfrak{T}$ es T_0 sii $\overline{\mathfrak{T}}$ en el cubo 2^X es T_0*

(*ii*) *$\mathfrak{T}$ es T_1 sii $\mathfrak{T}$ es un subconjunto denso en 2^X.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$) Sean $\mathcal{T}$ una topología T_0 y $x, y \in X$ tal que $x \neq y$; existe $U_x \in \mathcal{T}$ tal que $y \notin U_x$ o existe $V_y \in \mathcal{T}$ tal que $x \notin V_y$. Puesto que $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathcal{T}}$, en cualquiera de los dos casos $U_x \in \overline{\mathcal{T}}$ o $V_y \in \overline{\mathcal{T}}$. Lo anterior comprueba que $\overline{\mathcal{T}}$ es T_0.

$\Leftarrow$) Sean $\overline{\mathcal{T}}$ una topología T_0, $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Existe $U_x \in \overline{\mathcal{T}}$ tal que $y \notin U_x$ o existe $V_y \in \overline{\mathcal{T}}$ tal que $x \notin V_y$. En el caso en que $y \notin U_x$, $x \nleq_{\overline{\mathcal{T}}} y$ y por 3.3.5 $x \nleq_{\mathcal{T}} y$, luego existe $W_x \in \mathcal{T}$ conteniendo a x tal que $y \notin W_x$. Para el otro caso el argumento es análogo. Por lo anterior se tiene $\mathcal{T}$ es T_0.

(ii) $\Rightarrow$) Sean $\mathcal{T}$ una topología T_1, $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Existen $U_x, V_y \in \mathcal{T}$ conteniendo a x y y respectivamente tal que $y \notin U_x$ y $x \notin V_y$. Como $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathcal{T}}$ entonces $U_x, V_y \in \overline{\mathcal{T}}$. Por tanto $\overline{\mathcal{T}}$ es T_1. Por 3.3.1, $\overline{\mathcal{T}}$ es de Alexandroff, en consecuencia $\overline{\mathcal{T}} = 2^X$.

$\Leftarrow$) Sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Como $\overline{\mathcal{T}} = 2^X$ entonces $\overline{\mathcal{T}}$ es T_1. Existen $U_x, V_y \in \overline{\mathcal{T}}$ tal que $y \notin U_x$ y $x \notin V_y$, es decir $x \nleq_{\overline{\mathcal{T}}} y$ y $y \nleq_{\overline{\mathcal{T}}} x$. Por 3.3.5, $x \nleq_{\mathcal{T}} y$ y $y \nleq_{\mathcal{T}} x$, luego existen $W_1, W_2 \in \mathcal{T}$ conteniendo a x y y respectivamente tal que $y \notin W_1$ y $x \notin W_2$. Lo anterior prueba que $\mathcal{T}$ es T_1. $\square$

Note que la afirmación (ii) es una generalización del ejemplo 2 de esta sección, ya que $\mathbb{R}$ con la topología usual es T_2 y por tanto T_1. En general, si (X, d) es un espacio métrico, la topología $\mathcal{T}_d$ inducida por la métrica, es un subconjunto denso en el cubo 2^X.

A continuación veremos que las topologías abiertas en 2^X, son de Alexandroff y contienen abiertos finitos.

3.3.7 Teorema. *Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *$\mathcal{T}$ es abierta en 2^X.*

(ii) *$\mathcal{T}$ es abierta-cerrada en 2^X.*

(iii) *$\varnothing$ y X son puntos interiores de $\mathcal{T}$ en 2^X.*

(iv) *Existe un conjunto finito G tal que G es abierto-cerrado en X y $X - G$ es un subespacio discreto de X.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (iii)$. Si $\mathcal{T}$ es abierta en 2^X, $\mathcal{T}$ es vecindad de $\varnothing$ y X, por tanto son puntos interiores de $\mathcal{T}$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sean $\varnothing$ y X puntos interiores de $\mathcal{T}$ en 2^X; existen K finito y F cofinito tal que $[\varnothing, F] \subseteq \mathcal{T}$ y $[K, X] \subseteq \mathcal{T}$. Sea $G = L \cup K$ donde $L = F^c$. Entonces $G, G^c \in \mathcal{T}$ puesto que $L \cup K \in [K, X]$ y $G^c \in [\varnothing, F]$, así G es $\mathcal{T}$-abierto-cerrado.

Sean $\mathcal{T}(G^c)$ la topología de subespacio de G^c y $y \in G^c$, entonces $y \in F$ y $y \in K^c$; $\{y\} \subseteq F$, por tanto $\{y\} \in [\emptyset, F] \subseteq \mathcal{T}$. Así $\{y\} \in \mathcal{T}$ y en consecuencia es abierto en $\mathcal{T}(G^c)$, es decir $X - G$ es discreto.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ Sean $G, G^c \in \mathcal{T}$ con G finito tal que G^c es un subespacio discreto de X, entonces $\mathcal{T}(G^c) \subseteq \mathcal{T}$ donde $\mathcal{T}(G^c)$ es la topología discreta en G^c. Para cualquier $K \subseteq G$ con $K \in \mathcal{T}$, sea el abierto-cerrado básico

$$V_K = [K, F] = \{A \in 2^X : K \subseteq A \ \& \ A \cap (G - K) = \varnothing\}$$

donde $F = (G - K)^c$. Veamos que

$$\mathcal{T} = \bigcup\{V_K : K \subseteq G \ \& \ K \in \mathcal{T}\} \qquad (1)$$

Sea $A \in V_K$ entonces $\varnothing = A \cap (G - K) = G \cap (A - K)$. Luego $A - K \subseteq G^c$ y por tanto $A - K \in \mathcal{T}$. Así $(A - K) \cup K = A \in \mathcal{T}$. Por consiguiente $V_K \subseteq \mathcal{T}$. Para la otra contenencia, sean $A \in \mathcal{T}$ y $K = A \cap G$. Claramente $K \subseteq A$, y $A \cap (G - K) = \varnothing$, por tanto $A \in V_K$ y así $\mathcal{T} \subseteq V_K$. Así tenemos que (1) se cumple. Puesto que G es finito, $\mathcal{T}$ es unión finita de los abiertos-cerrados V_K, por consiguiente $\mathcal{T}$ es abierto-cerrado en 2^X.

Evidentemente $(ii) \Rightarrow (i)$. □

3.4. Convergencia de preordenes y topologías de Alexandroff

La colección $Pre(X)$ de todos los pre-órdenes sobre X, se puede considerar como un subespacio topológico del cubo $2^{X\times X}$ ya que $Pre(X) \subseteq 2^{X\times X}$. Como $2^{X\times X}$ es T_2, $Pre(X)$ es T_2; además, $Pre(X)$ es un subconjunto compacto de $2^{X\times X}$ como lo mostraremos a continuación.

3.4.1 Proposición. *La colección $Pre(X)$ es un subconjunto compacto de $2^{X\times X}$.*

Demostración. Puesto que $2^{X\times X}$ es compacto, basta mostrar que $Pre(X)$ es un subconjunto cerrado de $2^{X\times X}$.

Sea $\{R_n\}_{n\in D}$ una red en $Pre(X)$ tal que $\{R_n\}_{n\in D}$ converge a R. Veamos que $R \in Pre(X)$, es decir mostremos que R es reflexiva y transitiva.

Sean $x \in X$ y S un subconjunto de R finito. Si $(x, x) \notin R$, $S \subseteq R \subseteq \{(x, x)\}^c$, *e.d.*, $[S, \{(x, x)\}^c]$ es vecindad de R. Por la convergencia de $\{R_n\}_{n\in D}$, existe $m \in D$ tal que para todo $n \succeq m$, $R_n \in [S, \{(x, x)\}^c]$, es decir $(x, x) \notin R_n$ lo cual no es posible ya que R_n es reflexiva para todo $n \in D$. En consecuencia tenemos que R es reflexiva.

Sean $(x, y), (y, z) \in R$ y supongamos que $(x, z) \notin R$. Consideremos $U = \{(x, y), (y, z)\}$ y $[U, \{(x, z)\}^c]$, entonces $[U, \{(x, z)\}^c]$ es vecindad de R. Existe $m_0 \in D$ tal que para todo $n \succeq m_0$, $R_n \in [U, \{(x, z)\}^c]$, es decir $(x, z) \notin R_n$ lo cual no puede ser puesto que R_n es transitiva. Por consiguiente, R es transitiva.

De lo anterior se deduce que $R \in Pre(X)$ y por el Lema 3.2.2, $Pre(X)$ es cerrado en $2^{X\times X}$ que es lo que queríamos probar. □

3.4.2 Proposición. *Sean $Pre(X)$ con la topología heredada del cubo $2^{X\times X}$ y $\{R_n\}_{n\in D}$ una red en $Pre(X)$ que converge al preorden R. Entonces, para cada subconjunto $A \subseteq X$ finito, existe $m \in D$ tal que si $n \succeq m$, se tiene*

$$\{(x, y) \in A^2 : \ (x, y) \in R_n\} = \{(x, y) \in A^2 : \ (x, y) \in R\}, \quad (2)$$

es decir $(A \times A) \cap R_n = (A \times A) \cap R$ para todo $n \succeq m$.

Demostración. Sea $A \subseteq X$ finito y consideremos los siguientes subconjuntos finitos de $X \times X$:

$$M = \{(x,y) \in A^2 : \ (x,y) \in R\} \ \text{ y } \ N = \{(x,y) \in A^2 : \ (x,y) \notin R\} = A^2 \setminus M$$

Sea la vecindad básica en $2^{X \times X}$ dada por

$$\mathcal{W} = [M, N^c] = \{S \subseteq X \times X : \ M \subseteq S \ \ \& \ \ S \cap N = \varnothing\}.$$

$\mathcal{V} = Pre(X) \cap \mathcal{W}$ es una vecindad básica en $Pre(X)$. Veamos que $\mathcal{V}$ es vecindad de R. Basta mostrar que $R \in \mathcal{W}$. Si $(x,y) \in M$, $(x,y) \in R$ y por tanto $M \subseteq R$. La contenencia $R \subseteq N^c$ se puede establecer mostrando que si $(x,y) \notin N^c$, entonces $(x,y) \notin R$. Sea $(x,y) \notin N^c$, luego $(x,y) \in N$ y por tanto $(x,y) \notin R$. Así $R \subseteq N^c$ y en consecuencia $\mathcal{V}$ es vecindad de R. Como $\{R_n\}_{n \in D}$ converge a R, existe $m \in D$ tal que para todo $n \succeq m$, $R_n \in \mathcal{V}$.

Para probar (2) sea $(x,y) \in A^2$ tal que $(x,y) \in R_n$; por ser $\mathcal{V}$ vecindad de R_n para todo $n \succeq m$, $(x,y) \in N^c$ es decir $(x,y) \notin N$, luego $(x,y) \in M$ y por ende $(x,y) \in R$. Para la otra contenencia, sea $(x,y) \in A^2$ tal que $(x,y) \in R$, luego $(x,y) \in M$ y como $\mathcal{V}$ es vecindad de R_n para todo $n \succeq m$, $(x,y) \in R_n$. Lo anterior comprueba (2). $\square$

La topología de Vietoris

Sean X un espacio topológico y $\mathbb{F}(X)$ la familia de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X. Consideremos la colección

$$\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle = \{F \in \mathbb{F}(X) : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \ \ \& \ \ F \cap U_i \neq \varnothing\},$$

donde U_i es un subconjunto abierto de X para $i = 1, 2, ..., n$. A continuación mostraremos que la colección de todos los conjuntos de la forma $\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle$, es base para una topología en $\mathbb{F}(X)$. Esta topología es conocida como **topología de Vietoris** en $\mathbb{F}(X)$ (ver [4]).

3.4.3 Proposición. *La colección*

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle : U_i \textit{ es abierto en } X\},$$

es base para una topología en $\mathbb{F}(X)$.

Demostración. (1) $\mathbb{F}(X) = \langle X \rangle$, así $\mathbb{F}(X) \in \mathcal{B}$.

(2) Veamos que la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$, está en $\mathcal{B}$. Sean $\mathcal{U} = \langle A_1, ..., A_n \rangle$, $\mathcal{V} = \langle B_1, ..., B_m \rangle$, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$. Afirmamos que

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \langle A_1 \cap B, ..., A_n \cap B, B_1 \cap A, ..., B_m \cap A \rangle. (*)$$

En efecto, sea $F \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, entonces $F \subseteq A$, $F \cap A_i \neq \varnothing$, $F \subseteq B$ y $F \cap B_j \neq \varnothing$. Como $F \cap A = F \cap B = F$, $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$ y $F \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (B_j \cap A)$. Note que $\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap .B) = \bigcup_{j=1}^{m} (B_j \cap A)$. De otra parte tenemos que

$$F \cap (A_i \cap B) = F \cap A_i \neq \varnothing \quad \text{y} \quad F \cap (B_j \cap B) = F \cap B_j \neq \varnothing.$$

En consecuencia,

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subseteq \langle A_1 \cap B, ..., A_n \cap B, B_1 \cap A, ..., B_m \cap A \rangle.$$

Sea

$$F \in \langle A_1 \cap B, ..., A_n \cap B, B_1 \cap A, ..., B_m \cap A \rangle.$$

Como $\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B) = \bigcup_{j=1}^{m}(B_j \cap A)$,

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{y} \quad F \subseteq \bigcup_{j=1}^{m}(B_j \cap A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_j.$$

También

$$F \cap A_i = F \cap (A_i \cap B) \neq \varnothing \quad \text{y} \quad F \cap B_j = F \cap (B_j \cap A) \neq \varnothing.$$

Por consiguiente,

$$\langle A_1 \cap B, ..., A_n \cap B, B_1 \cap A, ..., B_m \cap A \rangle \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}.$$

Lo anterior comprueba $(*)$. De (1) y (2), $\mathcal{B}$ es base para una topología en $\mathbb{F}(X)$. □

Como un caso particular si consideramos el cubo 2^X con la topología producto, $\mathbb{F}(2^X)$ la colección de todos los subconjuntos cerrados de 2^X y el conjunto

$$\mathcal{U} := \{\mathcal{C} \in \mathbb{F}(2^X) : \mathcal{C} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}[K_i, F_i] \ \ \& \ \ \mathcal{C} \cap [K_i, F_i] \neq \varnothing \text{ para } i = 1, ..., n\} \quad (3)$$

donde $K_i \subseteq X$ es finito, $F_i \subseteq X$ cofinito, la familia $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ donde cada $\mathcal{U}_j$ esta definido como en (3), es base para una topología en $\mathbb{F}(2^X)$ (proposición 3.4.3). Note que los elementos de $\mathcal{U}$ son colecciones de subconjuntos de X que son cerradas en el cubo 2^X.

También se tiene que $\mathcal{A}(X) \subseteq \mathbb{F}(2^X) \subseteq \mathcal{K}(2^X)$ donde $\mathcal{K}(2^X)$ es la colección de todos los subconjuntos compactos de 2^X. Como 2^X es regular, $\mathbb{F}(2^X)$ es T_2 (ver [4] pág. 121). En particular tenemos, que $\mathcal{A}(X)$ es T_2 con la topología heredada de $\mathbb{F}(2^X)$.

En el capítulo 2 se mostró que la función $\psi : Pre(X) \longrightarrow \mathcal{A}(X)$ definida como $\leq \mapsto \mathcal{T}(\leq)$ es un anti-isomorfismo de retículos completos. A continuación mostraremos, que ψ es un homeomorfismo cuando $Pre(X)$ tiene la topología heredada del cubo $2^{X \times X}$ y $\mathcal{A}(X)$ hereda la topología de $\mathbb{F}(2^X)$ (aquí $\mathbb{F}(2^X)$ con la topología de Vietoris).

3.4.4 Teorema. $\Phi : Pre(X) \longrightarrow \mathbb{F}(2^X)$ *definida como* $\leq \mapsto \mathcal{T}(\leq)$, *es inyectiva y continua.* ψ *es un homeomorfismo y* $\mathcal{A}(X)$ *es compacto con la topología de Vietoris.*

Demostración. Claramente Φ es inyectiva y sobre $\mathcal{A}(X)$ puesto que ψ es una biyección. Veamos que que Φ es continua.

Sean $\{\leq_n\}_{n \in D}$ una red en $Pre(X)$ tal que $\{\leq_n\}_{n \in D}$ converge al preorden $\leq$, $\Phi(\leq_n) = \mathcal{T}_n$ y $\Phi(\leq) = \mathcal{T}$. Veamos que la red de topologías de Alexandroff $\{\mathcal{T}_n\}_{n \in D}$ converge a la topología de Alexandroff $\mathcal{T}$, es decir, si $\mathcal{U}$ definida como en (3) es una vecindad básica de $\mathcal{T}$ en $\mathbb{F}(2^X)$, mostremos que existe $l \in D$, tal que para todo $n \succeq l$, $\mathcal{T}_n \in \mathcal{U}$. Debemos considerar 2 casos:

(i) $\mathcal{T} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}[K_i, F_i]$ donde $K_i \subseteq X$ finito y $F_i \subseteq X$ cofinito para $i = 1, 2, ..., n$. Sea $A = \bigcup_i (K_i \bigcup (X \setminus F_i))$. Como A es finito, por 3.4.2 existe $m \in D$, tal que para todo $n \succeq m$, (2) se cumple. Mostremos que $\mathcal{T}_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}[K_i, F_i]$.

Sean $V \in \mathcal{T}_n$, $T = V \cap A$ y $N_T = \bigcup_{x \in T} N_x^{\mathcal{T}}$. Puesto que $N_T \in \mathcal{T}$, existe i tal que $K_i \subseteq N_T \subseteq F_i$. Mostremos que $K_i \subseteq V \subseteq F_i$. Sea $y \in K_i$ entonces $y \in N_T$; existe $x \in T$ tal que $y \in N_x^{\mathcal{T}}$, luego $x \leq y$. Es claro que $(x, y) \in A^2$, por (2) para todo $n \succeq m$, $x \leq_n y$, es decir $y \in N_x^{\mathcal{T}_n}$, como $V \in \mathcal{T}_n$ y $x \in V$, $N_x^{\mathcal{T}_n} \subseteq V$. Así $y \in V$ y por tanto $K_i \subseteq V$. Mostremos ahora la contenencia $V \subseteq F_i$, razonemos por contradicción; supongamos que existe $p \in V$ tal que $p \notin F_i$, entonces $p \in F_i^c$, luego $p \in A$. Por tanto $p \in T$ lo cual es una contradicción puesto que $T \subseteq N_T \subseteq F_i$. En consecuencia, $V \in [K_i, F_i]$ para algún $i = 1, 2, ..., n$.

Así pues, tenemos que $\mathcal{T}_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}[K_i, F_i]$ para todo $n \succeq m$.

(ii) Supongamos ahora que $\mathcal{T} \bigcap [K_i, F_i] \neq \varnothing$ para algún $i = 1, 2, ..., n$. Existe $G \in \mathcal{T}$ tal que $K_i \subseteq G \subseteq F_i$. Sea el conjunto finito $A = K_i \cup F_i^c$. De nuevo por 3.4.2, existe $m_0 \in D$ tal que para cada $n \succeq m_0$, (2) se tiene. Veamos que $\mathcal{T}_n \bigcap [K_i, F_i] \neq \varnothing$.

Sea $V = \bigcup_{x \in K_i} N_x^{\mathcal{T}_n}$, es evidente que $V \in \mathcal{T}_n$. Mostremos que $V \in [K_i, F_i]$. Por la forma en que está construido V, se tiene que $K_i \subseteq V$. Sea $y \in V$, veamos que $y \in F_i$. Si $y \notin F_i$ entonces $y \in A$; existe $x \in K_i$ tal que $y \in N_x^{\mathcal{T}_n}$ es decir $x \leq_n y$. $(x, y) \in A^2$ entonces por (2), $x \leq y$, luego $y \in N_x^{\mathcal{T}}$, y como $G \in \mathcal{T}$ y $x \in G$, $N_x^{\mathcal{T}} \subseteq G \subseteq F_i$, luego $y \in F_i$, lo cual es una contradicción. Por tanto $V \subseteq F_i$ y así $V \in [K_i, F_i]$.

Por ende, $\mathcal{T}_n \bigcap [K_i, F_i] \neq \varnothing$ para todo $n \succeq m_0$.

Por ser D dirigido, existe $l \in D$ tal que $l \succeq m$ y $l \succeq m_0$, así pues, para todo $n \succeq l$, $\mathcal{T}_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}[K_i, F_i]$ y $\mathcal{T}_n \bigcap [K_i, F_i] \neq \varnothing$, es decir $\mathcal{T}_n \in \mathcal{U}$.

Por tanto, la red de topologías de Alexandroff $\{\mathcal{T}_n\}_{n \in D}$, converge a $\mathcal{T}$, y por la proposición 3.2.4, Φ es continua. Puesto que ψ es la función obtenida al restringir el conjunto de llegada de Φ, ψ es continua; ya que $Pre(X)$ es compacto y $\mathcal{A}(X)$ es T_2, ψ es un homeomorfismo. En particular $\mathcal{A}(X)$ es compacto con la topología de Vietoris. $\square$

CAPÍTULO 4

Topologías de Alexandroff, un enfoque por Monoides

4.1. Semigrupos y Monoides

4.1.1 Definición. Un **semigrupo** es una estructura algebraica $(S, +)$ donde S es un conjunto no vacío, y $+ : S \times S \longrightarrow S$ una operación binaria en S que es asociativa, es decir:

1. Para todo $s, t \in S$, $s + t \in S$
2. Para todo $s, t, u \in S$: $(s + t) + u = s + (t + u)$

Si además, el semigrupo cumple que $s + t = t + s$ para cada $s, t \in S$, decimos que el semigrupo S es abeliano.

Un subconjunto T de un semigrupo $(S, +)$, es un **sub-semigrupo** de S, si $(T, +)$ es un semigrupo.

4.1.2 Proposición. *Si $\{T_i\}_{i\in I}$ es una colección de sub-semigrupos de un semigrupo $(S, +)$ tal que $\bigcap_{i\in I} T_i \neq \varnothing$, $\bigcap_{i\in I} T_i$ es un semigrupo, es decir la intersección de semigrupos, es un semigrupo.*

Demostración. En efecto, si $s, t, u \in \bigcap_{i\in I} T_i$ entonces $s, t, u \in T_i$ para todo $i \in I$, en consecuencia $s + t \in T_i$ y $(s + t) + u = s + (t + u)$ se cumple en T_i para todo $i \in I$. Por tanto $s + t \in \bigcap_{i\in I} T_i$ y $(s + t) + u = s + (t + u)$ se cumple en $\bigcap_{i\in I} T_i$. □

Un **Monoide** es un semigrupo S para el cual existe $\boldsymbol{e} \in S$ (llamado elemento neutro) único, tal que $s + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} + s = s$ para todo $s \in S$. Si S es un monoide notamos $(S, +, \boldsymbol{e})$.

4.2. Acción de semigrupos sobre conjuntos

4.2.1 Definición. Sea $(S,+)$ un semigrupo y $X \neq \varnothing$. S actúa sobre el conjunto X si existe una función

$$* : S \times X \longrightarrow X \quad \text{definida como} \quad (s,x) \mapsto s * x,$$

tal que para todo $s,t \in S$ y para todo $x \in X$, $s * (t * x) = (s+t) * x$. Si $(S,+,\boldsymbol{e})$ es un monoide, $\boldsymbol{e} * x = x$ para todo $x \in X$.

Si un semigrupo S actúa sobre un conjunto X, para todo $x \in X$ el conjunto $\{s * x : s \in S\}$ es llamado la **órbita** de x notada O_x. Es decir O_x es un subconjunto de X y está formado por los $y \in X$ tal que $y = s*x$, para algún $s \in S$. Cuando se requiere resaltar el papel de S notaremos O_x^S. En particular si $(S,+,\boldsymbol{e})$ es un monoide, para todo $x \in X$, $x \in O_x$

Para un semigrupo $(S,+)$, la operación binaria $+ : S \times S \longrightarrow S$ es una acción de S sobre S, en este caso para cada $t \in S$, $O_t = S + t = \{s + t : s \in S\}$.

A continuación mostraremos que si $(S,+,\boldsymbol{e})$ es un monoide actuando sobre X, la colección de órbitas $\mathcal{B}(S) = \{O_x : x \in X\}$ (que claramente es una colección de subconjuntos de X), es base para una topología de Alexandroff sobre X.

4.2.2 Proposición. *Sea $(S,+,\boldsymbol{e})$ un monoide actuando sobre un conjunto X. Entonces $\mathcal{B}(S)$ es una base minimal de X.*

Demostración. Sean $x,y \in X$ tal que $x \in O_y$, veamos que $O_x \subseteq O_y$. Sea $p \in O_x$, entonces $p = s*x$ para algún $s \in S$; como $x \in O_y$, $x = t*y$ para algún $t \in S$, luego, $p = s*(t*y) = (s+t)*y$ y por tanto $p \in O_y$. En consecuencia, O_x es un conjunto minimal de x y así $\mathcal{B}(S)$ es una base minimal de X. □

Es evidente por la proposición anterior y el teorema 1.2.2, que $\mathcal{B}(S)$ es base de una topología de Alexandroff sobre X, donde las vecindades minimales son las órbitas O_x.

4.2.3 Definición. Si $(S,+,\boldsymbol{e})$ un monoide actuando sobre X, definimos la topología sobre X asociada a S notada $\mathcal{T}(S)$, como la topología generada por la colección de órbitas $\mathcal{B}(S)$.

Ejemplos

1. Sea el monoide $(\mathbb{Z}_3, \bullet, 1)$ y consideremos $\mathbb{Z}_3$ actuando sobre si mismo bajo $\bullet$. Aquí $\bullet$ está definida como en la tabla. Obsérvese que $\mathbb{Z}_3$ no es un grupo bajo $\bullet$.

$\bullet$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Entonces $O_0 = \{0\}$, $O_1 = \mathbb{Z}_3$ y $O_2 = \mathbb{Z}_3$. Así $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_3) = \{\varnothing, \mathbb{Z}_3, \{0\}\}$. Además si en $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ se pone la topología producto, $\bullet : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ es continua, pues $\bullet^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $\bullet^{-1}(\mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ y $\bullet^{-1}(\{0\}) = (\{0\} \times \mathbb{Z}_3) \cup (\mathbb{Z}_3 \times \{0\})$

2. Sea $(S, +, e)$ un monoide y $* : S \times X \longrightarrow X$ la acción idéntica de S sobre X definida como $(s, x) \mapsto x$. Entonces $\mathcal{T}(S)$ es la topología discreta ya que $O_x = \{x\}$ para cada $x \in X$. Además $*^{-1}(\{x\}) = S \times \{x\}$, es decir $*$ es continua.

3. Sea $X \neq \varnothing$. Consideremos $\wp(X)$, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y el monoide $S = (\wp(X), \cup, \varnothing)$, donde
$$\cup : \wp(X) \times \wp(X) \longrightarrow \wp(X) \quad \text{se define} \quad (A, B) \mapsto A \cup B.$$
Sea la acción
$$* : \wp(X) \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \text{ definida como } (A, F) \mapsto A * F = A \cup F.$$
Entonces para cada $F \in \mathcal{F}$, $O_F = \{A \cup F : A \subseteq X\}$ es un filtro. Así, $\mathcal{T}(\wp(X))$ es una topología sobre $\mathcal{F}$ y es generada por la colección de filtros de la forma $\{A \cup F : A \subseteq X\}$. Como $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es ordenado, $\subseteq$ induce una topología $\mathcal{T}(\subseteq)$ sobre $\mathcal{F}$ donde las vecindades minimales son $\uparrow F$ (*i.e.*, la colección de todos los superconjuntos de F). Es fácil mostrar que para cada $F \in \mathcal{F}$, $O_F = \uparrow F$, en consecuencia tenemos que $\mathcal{T}(\wp(X)) = \mathcal{T}(\subseteq)$.

   En particular, si X es infinito y $\mathcal{F}$ es el filtro de los complementarios finitos, entonces para cada $F \in \mathcal{F}$, O_F es también complementario finito. Ahora, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, no necesariamente O_F es un ultrafiltro. En efecto, sea $X = \{0, 1, 2\}$ y el ultrafiltro principal
$$\mathcal{F} = \uparrow 0 = \{X, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}\},$$
entonces $O_{\{0,1\}} = \{X, \{0, 1\}\}$ no es ultrafiltro.

4. Sea el monoide $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los naturales con el producto usual (el cual no es un grupo). Definamos el orden $\preceq$ sobre $\mathbb{N}$ como:
$$m \preceq n \iff m | n \quad (\text{i.e.} \quad n = m \cdot k \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbb{N}).$$
Entonces la topología $\mathcal{T}(\preceq)$ asociada a este preorden es la generada por la colección de los filtros principales $\uparrow m = \{k \cdot m : k \in \mathbb{N}\}$. Ahora consideremos $\mathbb{N}$ actuando sobre si mismo bajo la operación binaria $\cdot$, entonces tenemos que para todo $m \in \mathbb{N}$, $O_m = \uparrow m$, es decir $\mathcal{T}(\mathbb{N}) = \mathcal{T}(\preceq)$; mas aún, $\mathbb{N}$ con esta topología es T_0.

En general tenemos que si $(S, +, \boldsymbol{e})$ es un monoide, la relación binaria $\preceq$ sobre S definida como
$$s \preceq t \iff t = u + s \quad \text{para algún} \quad u \in S,$$
define un preorden en S, y por tanto, induce una topología de Alexandroff $\mathcal{T}(\preceq)$ sobre S. Además, si S actúa sobre si mismo bajo $+$, $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\preceq)$ como lo establece el siguiente teorema.

4.2.4 Teorema. *Si $(S, +, \boldsymbol{e})$ un monoide que actúa sobre sí mismo bajo $+$, $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\preceq)$.*

Demostración. Por 1.3.3, $\mathcal{B} = \{N_s : s \in S\}$ donde $N_s = \uparrow s = \{t \in S : s \preceq t\}$, es una base para $\mathcal{T}(\preceq)$, y por 4.2.2, $\mathcal{B}(S) = \{O_s : s \in S\}$ es una base para $\mathcal{T}(S)$. Mostremos que $O_s = N_s$ para todo $s \in S$. Sea $t \in N_s$, entonces $s \preceq t$. Existe $u \in S$ tal que $t = u + s$, es decir $t \in O_s$. Por tanto $N_s \subseteq O_s$. Ahora, sea $t \in O_s$, existe $u \in S$ tal que $t = u + s$, luego $s \preceq t$ y por tanto $t \in N_s$. En consecuencia $O_s \subseteq N_s$. Por consiguiente $O_t = N_s$. Es decir que $\mathcal{B}(S) = \mathcal{B}$ y de ahí $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\preceq)$. $\square$

4.2.5 Teorema. *Sea* $* : S \times X \longrightarrow X$ *la acción del monoide conmutativo* S *sobre el conjunto* X. *Supongamos que la topología definida sobre* X *es* $\mathcal{T}(S)$ *y que* S *tiene la topología* $\mathcal{T}(\preceq)$. *Si* $S \times X$ *tiene la topología producto,* $*$ *es continua.*

Demostración. Como X y S son de Alexandroff, $S \times X$ es de Alexandroff, para cada $(s, x) \in S \times X$, $N_{(s,x)} = \uparrow s \times O_x$ es su vecindad minimal. Sean $p = s * x$ y O_p su órbita respectiva (que es una vecindad minimal de p). Veamos que $*(N_{(s,x)}) \subseteq O_p$. Sea $y \in *(N_{(s,x)})$, existen $t \in \uparrow s$ y $z \in O_x$ tal que $y = t * z$. Dado que $t \in \uparrow s$ y $z \in O_x$, existen $u, v \in S$ tal que $t = u + s$ y $z = v * x$. Utilizando la asociatividad y conmutatividad en S tenemos

$$\begin{aligned} y = t * z &= (u + s) * (v * x) \\ &= ((u + s) + v) * x \\ &= (u + v) * (s * x) \\ &= (u + v) * p \end{aligned}$$

Es decir $y \in O_p$ y por tanto $*(N_{(s,x)}) \subseteq O_p$.

Esto muestra la continuidad de $*$. □

En particular, si $(G, +, \boldsymbol{e})$ es un grupo abeliano (*e.d.*, un monoide conmutativo donde para todo $g \in G$ existe $-g \in G$ tal que $g + (-g) = \boldsymbol{e}$) y si consideramos $X = S = G$, G actuando sobre si mismo bajo $+$, y en G ponemos la topología $\mathcal{T}(G)$, por 4.2.4, $\mathcal{T}(\preceq) = \mathcal{T}(G)$, y por 4.2.5, $+ : G \times G \longrightarrow G$ es continua. Sea $i : G \longrightarrow G$ definida como $i(g) = -g$; para todo $g \in G$, $i(\uparrow g) \subseteq \uparrow i(g)$, luego por 1.5.2, i es continua. En consecuencia, $(G, +, \boldsymbol{e})$ con la topología $\mathcal{T}(G)$, es un *grupo topológico*.

4.3. Topologías de Alexandroff versus semigrupos saturados

Sean $X \neq \varnothing$ y $Hom(X)$ el conjunto de las funciones de X en X. $(Hom(X), \circ, 1_X)$ es un monoide donde $\circ$ es la composición usual de funciones y $1_X(x) = x$ para todo $x \in X$. Si S un sub-semigrupo de $Hom(X)$ donde $1_X \in S$ y es tal que S actúa sobre X via la función evaluación, esto es, $* : S \times X \longrightarrow X$ está definida como $(f, x) \mapsto f(x)$, entonces la topología $\mathcal{T}(S)$ sobre X es la generada por la colección de órbitas $O_x = \{f(x) : f \in S\}$ para todo $x \in X$.

4.3.1 Definición. Sea $X \neq \varnothing$. Un sub-semigrupo T de $Hom(X)$ es **saturado** si:

1. $1_X \in T$, donde $1_X(x) = x$ para todo $x \in X$.
2. Si T actúa sobre X via la función evaluación, y para cada $x \in X$, $O_x^T = \{f(x) : f \in T\}$ es la órbita de x de esta acción, entonces

$$T = \{f \in Hom(X) : f(x) \in O_x^T, \forall x \in X\}.$$

Es decir $T = \{f \in Hom(X) : \forall x \in X,\ f(x) = g(x) \text{ para alguna } g \in T\}$. Note que si S es un sub-semigrupo de $Hom(X)$ actuando sobre X,

$$S \subseteq \{f \in Hom(X) : f(x) \in O_x^S, \forall x \in X\},$$

e.d., no necesariamente se tiene la otra contenencia.

Ejemplos

1. Claramente $Hom(X)$ es saturado.

2. Sean $X \neq \varnothing$ y $S = \{1_X\}$. Consideremos S actuando sobre X y
$$T = \{f \in Hom(X) : f(x) \in O_x^S, \forall x \in X\}.$$
Como $O_x^S = \{x\}$ para todo $x \in X$, entonces $f = 1_X$, por tanto $S = T$ y así $\{1_X\}$ es saturado.

3. Sean $X = \{0, 1\}$ y $Hom(X) = \{1_X, f_1, f_2, f_3\}$ donde
$$f_1 = \{(0, 0), (1, 0)\},\ \ f_2 = \{(0, 1), (1, 1)\} \text{ y } f_3 = \{(0, 1), (1, 0)\}.$$
Los posibles sub-semigrupos de $Hom(X)$ con unidad son: $S_0 = \{1_X\}$, $S_1 = \{1_X, f_1\}$, $S_2 = \{1_X, f_2\}$, $S_3 = \{1_X, f_3\}$, $S_4 = \{1_X, f_1, f_2\}$ y $Hom(X)$. Es fácil ver que S_1 y S_2 son saturados; sin embargo S_3 y S_4 no son saturados. Por ejemplo, para S_3 tenemos que para todo $x \in X$, $O_x^{S_3} = X$ y
$$S_3 \subsetneqq \{f \in Hom(X) : f(x) \in O_x^{S_3}, \forall x \in X\} = Hom(X).$$
Las topologías asociadas a los sub-semigrupos de $Hom(X)$ son: $\mathcal{T}(S_0) = \wp(X)$, $\mathcal{T}(S_1) = \{\varnothing, X, \{0\}\}$, $\mathcal{T}(S_2) = \{\varnothing, X, \{1\}\}$, $\mathcal{T}(S_3) = \mathcal{T}(S_4) = \mathcal{T}(Hom(X)) = \{\varnothing, X\}$.

Obsérvese que en este caso se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los semigrupos saturados y sus correspondientes topologías. Este hecho no es una casualidad como lo mostraremos a continuación.

4.3.2 Proposición. *Sean S, T sub-monoides de $Hom(X)$ actuando sobre X. Si T es saturado y $\mathcal{T}(T) = \mathcal{T}(S)$, entonces $S \subseteq T$.*

Demostración. Sea $f \in S$, entonces $f(x) \in O_x^S$ para todo $x \in X$. Puesto que $\mathcal{T}(T) = \mathcal{T}(S)$, $O_x^S = O_x^T$, en consecuencia $f \in T$ y así $S \subseteq T$. $\square$

Así por la proposición anterior tenemos que si S y T son semigrupos saturados generando la misma topología, entonces $S = T$. Por tanto tenemos que la aplicación
$$\varphi : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(X) \text{ definida como } \varphi(S) = \mathcal{T}(S),$$
donde $\mathcal{C}(X)$ es la colección de todos los semigrupos saturados de $Hom(X)$, es inyectiva. Veamos ahora que φ es sobre.

4.3.3 Proposición. *Sea $\mathcal{T}$ una topología de Alexandroff sobre un conjunto X donde para cada x en X, $N_x^{\mathcal{T}}$ es su vecindad minimal. Entonces*
$$S(\mathcal{T}) = \{f \in Hom(X) : f(x) \in N_x^{\mathcal{T}}\ \forall x \in X\}$$
es un sub-semigrupo saturado de $Hom(X)$. $N_x^{\mathcal{T}} = O_x$ donde $O_x = \{f(x) : f \in S(\mathcal{T})\}$.

Demostración. Veamos que $S(\mathcal{T})$ es un sub-semigrupo de $Hom(X)$. Como $x \in N_x^{\mathcal{T}}$ para todo $x \in X$, $1_X \in S(\mathcal{T})$ y $S_\tau \neq \varnothing$. Sean $f, g \in S(\mathcal{T})$, para todo $x \in X$, $g(x) \in N_x^{\mathcal{T}}$ y $f(g(x)) \in N_{g(x)}^{\mathcal{T}}$. Puesto que $g(x) \in N_x^{\mathcal{T}}$, $N_{g(x)}^{\mathcal{T}} \subseteq N_x^{\mathcal{T}}$ y $f(g(x)) \in N_{g(x)}^{\mathcal{T}} \subseteq N_x^{\mathcal{T}}$. Es decir $f \circ g \in S(\mathcal{T})$ y por tanto $S(\mathcal{T})$ es un sub-semigrupo de $Hom(X)$.

Sea $S(\mathcal{T})$ actuando sobre X via la función evaluación. Si $p \in O_x$, $p = f(x)$ para alguna $f \in S(\mathcal{T})$, luego $p \in N_x^{\mathcal{T}}$ y por tanto $O_x \subseteq N_x^{\mathcal{T}}$ para todo $x \in X$. Veamos ahora que $N_x^{\mathcal{T}} \subseteq O_x$ para todo $x \in X$. Supongamos que existe $b \in X$ tal que $N_b^{\mathcal{T}} \nsubseteq O_b$. Existe $p \in N_b^{\mathcal{T}}$ tal que $p \notin O_b$. Sea $f : X \to X$ definida como:

$$f(x) = x \quad \text{si} \quad x \in X - \{b\} \quad \text{y} \quad f(x) = p \quad \text{si} \quad x = b.$$

Entonces $f \in S(\mathcal{T})$ (pues $f(b) = p \in N_b^{\mathcal{T}}$ y si $x \neq b$, $f(x) = x \in N_x^{\mathcal{T}}$). Por definición de O_b, $f(b) \in O_b$, es decir $p \in O_b$ lo cual no puede ser. Luego $N_x^{\mathcal{T}} \subseteq O_x$ y por tanto $N_x^{\mathcal{T}} = O_x$. Así $S(\mathcal{T})$ es un sub-semigrupo saturado de $Hom(X)$. □

4.3.4 Definición. Sea $\mathcal{T}$ una topología de Alexandroff sobre X. Definimos el sub-semigrupo saturado de $Hom(X)$ asociado a $\mathcal{T}$ como $S(\mathcal{T})$, donde $S(\mathcal{T})$ fue definido en la proposición 4.3.3.

Por la proposición anterior tenemos que si $\mathcal{T} \in \mathcal{A}(X)$, $\varphi(S(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$, es decir φ es sobre y por tanto una biyección. Así pues, tenemos que las funciones

$$\varphi : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(X) \quad \text{y} \quad \lambda : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$$

definidas por $\varphi(S) = \mathcal{T}(S)$ y $\lambda(\mathcal{T}) = S(\mathcal{T})$ son inversas la una de la otra en el sentido que $\varphi(\lambda(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$ para todo $\mathcal{T} \in \mathcal{A}(X)$ y $\lambda(\varphi(S)) = S$ para todo $S \in \mathcal{C}(X)$.

Ejemplos

1. Sea $X \neq \varnothing$. $(X, \mathcal{T})$ es discreto si y solo si $S(\mathcal{T}) = \{1_X\}$. Pues $O_x = N_x = \{x\}$ para cada $x \in X$.

2. $(X, \mathcal{T})$ es indiscreto si y solo si $S(\mathcal{T}) = Hom(X)$ ya que para todo $x \in X$, $O_x = N_x = X$.

3. Sea $(X, \leq)$ un conjunto preordenado y $\mathcal{T}(\leq)$ la topología principal inducida. Para todo $x \in X$ sea $f(x) \in \uparrow x$, entonces tenemos que

$$S(\mathcal{T}) = \{f \in Hom(X) : x \leq f(x), \forall x \in X\}.$$

4.4. El retículo $\mathcal{C}(X)$

La colección $(\mathcal{C}(X), \subseteq)$ es un conjunto ordenado que tiene como elemento máximo a $Hom(X)$ y como elemento mínimo a $\{1_X\}$. En esta sección mostraremos que además es un retículo completo. Para ello necesitamos mostrar que $\mathcal{C}(X)$ es cerrada para intersecciones.

4.4.1 Proposición. *Dada una colección de semigrupos saturados $\{T_i\}_{i \in I}$ de $Hom(X)$, entonces $\bigcap_{i \in I} T_i$ es un sub-semigrupo saturado de $Hom(X)$. Es decir, $\mathcal{C}(X)$ es cerrada para intersecciones.*

Demostración. Sea $S = \bigcap_{i\in I} T_i$. Entonces S es un sub-semigrupo de $Hom(X)$ ya que T_i lo es para todo $i \in I$, además $1_X \in S$ puesto que $1_X \in T_i$ para todo $i \in I$.

Sea $T = \{f \in Hom(X) : f(x) \in O_x^S, \forall x \in X\}$. Veamos que $S = T$. La contenencia $S \subseteq T$ es inmediata. Para la otra contenencia, sea $f \in T$, entonces $f(x) \in O_x^S$ para todo $x \in X$. Existe $h \in S$ tal que $f(x) = h(x)$ para todo $x \in X$, luego $h \in T_i$ para todo $i \in I$. Como T_i es saturado para todo $i \in I$, $h(x) = f(x) \in O_x^{T_i}$ para todo $x \in X$ y para todo $i \in I$, es decir $f \in T_i$ para todo $i \in I$. Por tanto $f \in S$ y así $T \subseteq S$. Luego $S = T$ y por tanto S es saturado. $\square$

Así pues, por el Lema 1.4.2 tenemos que $(\mathcal{C}(X), \subseteq)$ es un retículo completo donde

$$\bigvee\{T_i : i \in I\} = \bigcap\{T \in \mathcal{C}(X) : \bigcup_{i\in I} T_i \subseteq T\},$$

$$\bigwedge\{T_i : i \in I\} = \bigcap_{i\in I} T_i,$$

Mostremos ahora que $(\mathcal{C}(X), \subseteq)$ es anti-isomorfo a $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$.

4.4.2 Proposición. *El retículo $(\mathcal{C}(X), \subseteq)$ de los semigrupos saturados de $Hom(X)$ es anti-isomorfo al retículo $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$ de las topologías de Alexandroff sobre X.*

Demostración. Por una parte tenemos que las funciones

$$\varphi : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(X) \quad \text{y} \quad \lambda : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$$

definidas por $\varphi(S) = \mathfrak{T}(S)$ y $\lambda(\mathfrak{T}) = S(\mathfrak{T})$ son inversas la una de la otra en el sentido que $\varphi(\lambda(\mathfrak{T})) = \mathfrak{T}$ para todo $\mathfrak{T} \in \mathcal{A}(X)$ y $\lambda(\varphi(S)) = S$ para todo $S \in \mathcal{C}(X)$.

Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(X)$ tal que $T_1 \subseteq T_2$, $G \in \mathfrak{T}(T_2)$ y $x \in G$. Entonces $G = \bigcup_{x\in G} O_x^{T_2}$. Veamos que $O_x^{T_1} \subseteq O_x^{T_2}$. Sea $p \in O_x^{T_1}$, entonces $p = f(x)$ para alguna $f \in T_1$. Como $T_1 \subseteq T_2$, $p \in O_x^{T_2}$. Esto muestra que $O_x^{T_1} \subseteq O_x^{T_2}$, es decir que para todo $x \in G$, $O_x^{T_1} \subseteq G$, en consecuencia $G \in \mathfrak{T}(T_1)$ y así $\mathfrak{T}(T_1) \supseteq \mathfrak{T}(T_2)$.

De otro lado, sean $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \in \mathcal{A}(X)$ tal que $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$ y $f \in S(\mathfrak{T}_2)$, entonces $f(x) \in O_x^{S(\mathfrak{T}_2)}$ para todo $x \in X$; por 4.3.3, $O_x^{S(\mathfrak{T}_2)} = N_x^2$ donde N_x^2 es la vecindad minimal de x en $\mathfrak{T}_2$, luego si N_x^1 es la vecindad minimal de x en $\mathfrak{T}_1$, $N_x^1 \in \mathfrak{T}_2$ y así $N_x^2 \subseteq N_x^1$, es decir $O_x^{S(\mathfrak{T}_2)} \subseteq O_x^{S(\mathfrak{T}_1)}$, luego $f(x) \in O_x^{S(\mathfrak{T}_1)}$ para todo $x \in X$, es decir $f \in S(\mathfrak{T}_1)$ y por tanto $S(\mathfrak{T}_1) \supseteq \mathcal{S}(\mathfrak{T}_2)$.

Esto comprueba que la correspondencia es un anti-isomorfismo. $\square$

Los infra-elementos en $\mathcal{C}(X)$ son de la forma $T = \{1_X, g_k\}$ donde $g_k(x) = k$ para todo $x \in X$, es decir g_k es constante. T es saturado puesto que si $f \in Hom(X)$ y es tal que $f(x) \in O_x^T = \{x, k\}$ para todo $x \in X$, tenemos:

$$\forall x \in X (f(x) \neq x \Longrightarrow f(x) = k) \quad \text{o} \quad \forall x \in X (f(x) \neq k \Longrightarrow f(x) = x)$$

es decir $f \in T$.

Los ultra-elementos en $\mathcal{C}(X)$ se pueden obtener calculando la imagen directa de la infra-topología $\mathcal{T} = \{\varnothing, X, A\}$, esto es

$$\lambda(\mathcal{T}) = S(\mathcal{T}) = \{f \in Hom(X) : f(x) \in N_x^{\mathcal{T}},\ \forall x \in X\}$$

donde

$$N_x^{\mathcal{T}} = X \quad \text{si} \quad x \in A^c \quad \text{o} \quad N_x^{\mathcal{T}} = A \quad \text{si} \quad x \in A.$$

Bibliografía

[1] Arenas,F.G., *Alexandroff spaces*, Acta Math. Univ. Comenianae, 68(1)(1999), 17-25.

[2] Davey, B.A. & Priestley, H.A.,*Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1990.

[3] De Castro, R. & Rubiano, G, *Esqueletos de Retículos completos*, boletín de matemáticas, Volumen XI No.2(2004), pp.109-131

[4] Engelking, R. *General Toplogy*, PWN, Warzawa, 1997.

[5] Gemignani, Michael. *Elementary Topology*, Addison-wesley company, 1967.

[6] Lorrain, H. *Notes on topological spaces with minimum neighborhoods*, Amer. Math. Monthly, 76(1969),616-627.

[7] Munkres, J.R., *Topology*, Prentice Hall, Englewood Clifss,N.J., 1975.

[8] Richmond, Betina. *Principal topologies and tranformation semigrups*,Topology and its Applications 155(2008) pág.1644-1649.

[9] Rubiano, G.,*Topología General*. Segunda edición, Universidad Nacional de Colombia 2002.

[10] Speer,T.,*A Short Study of Alexandroff Spaces*. Department of Mathemathics, New York University, July 2007.

[11] Steiner, A.K., *The Lattice of topologies: Structure and complementación*, Trans.Amer.Math.Soc., 122(2):379-398, 1996.

[12] Uzcátegui, C. *Alexandroff Topologies viewed as Closed Sets in the Cantor Cube*. Divulgaciones Matemáticas Vol.13 No. 1 (2005), pág. 45-53.

[13] Willard, S., *General Topology*, Addisson Wesley Publishing Co., 1970.