

**XXII CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA
CIUDAD GUAYANA, VENEZUELA, OCTUBRE 2006**

**Desarrollo y Validación en el Laboratorio de un Modelo Numérico Híbrido
para Simulación del Golpe de Ariete**

Carlos Fernando Velásquez Hidalgo

Ing. Civil, M.Sc, Colombia, cvelasquez@udem.edu.co

Francisco Mauricio Toro Botero, Ph.D., M.Sc., Ing. Civil,

Profesor Asociado, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Colombia

fmto@unalmed.edu.co

RESUMEN

En el presente artículo se presentan las ecuaciones que representan el fenómeno del golpe de ariete y su transformación a ecuaciones algebraicas utilizando un método numérico híbrido (método de las características y elementos finitos). La solución numérica de las ecuaciones se hace mediante la implementación de un software el cual fue validado con mediciones experimentales realizadas en el laboratorio, específicamente al caso de tubos simples. Las mediciones en el laboratorio se hicieron mediante un sensor de presiones localizado en la válvula y un sistema de adquisición automático de datos. La validación se realizó para el parámetro de Halliwell una vez se completó la etapa de análisis de sensibilidad a parámetros numéricos. El criterio del error cuadrático medio (*rms*) se utilizó para definir la calidad de la validación.

Palabras claves: Golpe de Ariete, Elementos Finitos, Validación de Modelos Numéricos.

ABSTRACT

In this paper, the equations governing the water hammer phenomenon and their numerical solution by an hybrid scheme are presented. The boundary conditions are developed using the Characteristics Method in its algebraic form. A software was developed to compute the numerical solution and its validation was done against laboratory measurements for simple pipes. The measurements were done with a pressure probe located close to the valve connected to an automatic data acquisition system. The software validation was done for the Halliwell parameter after a sensitivity analysis for the numerical parameters was completed. The root mean square error (*rms*) was used as quality parameter in the model validation.

Key Words: Water Hammer, Finite Elements, Validation of Numerical Models.

INTRODUCCIÓN

El Golpe de Ariete, como fenómeno transitorio, ha sido un tema de estudio de la hidráulica clásica, por sus efectos destructores en sistemas de alta presión como los conductos abastecedores de turbinas en centrales hidroeléctricas. Aunque el tema esté muy estudiado y analizado para conductos simples, comienza a aflorar la inquietud de simular este fenómeno en redes cerradas, las cuales cada día son más complejas y por su operación, más propensas a experimentar el Golpe de Ariete en sus instalaciones.

Actualmente, en el ámbito internacional, se comienza un proyecto de estandarización de las presiones provocadas por fenómenos transitorios, prueba de ello es el artículo “European standards for pipelines and pressure transients” publicado en el Journal of Hydraulic Engineering, 1999, vol. 125. Además en el año 2003 se realizó un simposio internacional sobre el Golpe de Ariete, programado por la ASME (American Society Mechanic Engineering).

A nivel Colombiano, el Reglamento Técnico del Sector de Agua Potable y Saneamiento Básico – (MINISTERIO DE DESARROLLO ECONÓMICO, 2000) Revisión 1. RAS 2000 en su artículo B.7.4.9.4., exige el análisis del Golpe de Ariete en redes de distribución. Aunque el reglamento lo estipule, el Golpe de Ariete por lo general no se simula en redes cerradas por parte de las empresas prestadoras de servicios públicos.

El objetivo de esta investigación es diseñar un modelo de computador que simule el Golpe de Ariete en una red cerrada simple y validarlo con un modelo físico de laboratorio (Velásquez, 2006). Particularmente, en este artículo se presentan los resultados de la validación del modelo para tubos simples y tubos en serie. Para lograr este objetivo se inspeccionó el estado del arte en el tema, se analizó cada uno de los métodos numéricos que dan solución a las ecuaciones que describen el fenómeno en tuberías simples para seleccionar uno y adaptarlo a las redes cerradas

CONCEPTOS GENERALES

Celeridad de la Onda de presión. Se define como la velocidad de propagación de la onda de presión en un medio elástico. Para el cálculo de la celeridad en tuberías se tiene:

$$a = \left(\frac{K}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} * \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{K * D}{E * e} \right) \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad [1]$$

donde a : Celeridad; K : Módulo de elasticidad del fluido; E : Módulo de elasticidad de la tubería; D : Diámetro interno de la tubería; e : Espesor de la tubería; ρ : Densidad del fluido; θ : Parámetro adimensional que depende de las propiedades elásticas del conducto (Halliwell, 1963)

Tiempo crítico (t_c)

Es el que emplea la onda de presión en ir desde el punto donde se genera la perturbación y volver al punto inicial.

$$t_c = \frac{2L}{a} \quad [2]$$

donde L : Longitud de la tubería

Máxima sobrepresión

Cuando hay un cierre instantáneo y total de la válvula aguas abajo, se origina la máxima sobrepresión posible, conocida como el pulso de Joukowski y se calcula como:

$$\Delta P = \rho * a * V_0 \quad [3]$$

donde ΔP es la sobrepresión y V_0 la velocidad del fluido en estado estacionario.

Ecuaciones que gobiernan el fenómeno del Golpe de Ariete

Se puede demostrar (Fox, 1977; Abreu y otros, 1995; Chaudry, 1979) que el fenómeno del golpe de ariete está gobernado por las ecuaciones de conservación de masa y de momentum que se presentan a continuación:

$$g \frac{\partial H}{\partial t} + a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad [4]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad [5]$$

donde V es la velocidad del flujo en un instante y una localización dados, H es la presión del fluido en columna de fluido, f es el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach, g es la aceleración de la gravedad, x es la coordenada espacial y t la coordenada temporal.

Formulación de las ecuaciones en Elementos Finitos

Se inicia el estudio con la discretización del dominio (tubería) en elementos finitos lineales de longitud constante, unidos por nodos en sus extremos. En cada elemento, las variables dependientes se interpolan según las ecuaciones siguientes:

$$V(x,t) \approx V^e(x,t) = \sum_{j=1}^n V_j^e(t) \Psi_j^e(x) \quad [6]$$

$$H(x,t) \approx H^e(x,t) = \sum_{j=1}^n H_j^e(t) \Psi_j^e(x) \quad [7]$$

donde $\Psi_j^e(x)$ son las funciones lineales de interpolación.

Aplicando el principio de Galerkin (Reddy, 1993; Jovie, 1995) a las ecuaciones [4] y [5] se obtiene

$$\int_{x_a}^{x_b} \left(g \left(w_1 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + a^2 \left(w_2 \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right) dx = 0 \quad [8]$$

$$\int_{x_a}^{x_b} \left(\left(w_2 \frac{\partial V}{\partial t} \right) + g \left(w_2 \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{f|V|}{2D} (w_2 * V) \right) dx = 0 \quad [9]$$

donde $w_1 = w_2 = \psi_j^e(x)$ son las funciones de peso que en este caso son las mismas funciones de interpolación. Obsérvese que el término de fricción ha sido linealizado, donde V^* es la velocidad conocida en un intervalo de tiempo anterior al considerado.

Expandiendo las variables V y H según las definiciones [6] y [7], la ecuación [8], una vez se ensambla para todos los elementos, toma la forma:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_{x_a}^{x_b} g(\Psi_i \Psi_j) dx \frac{\partial H_j}{\partial t} + a^2 \int_{x_a}^{x_b} \left(\Psi_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \right) V_j dx \right\} = 0 \quad [10]$$

o

$$g^* [K^1]^* \{H_t\} + a^2 * [K^2] \{V\} = 0 \quad [11]$$

donde n representa el número de elementos en que se ha discretizado el dominio, H_t es la derivada temporal de H , y las matrices K^1 y K^2 tienen la forma:

$$K^1 = \sum_{j=1}^n \int_{x_0}^{x_b} \Psi_i \Psi_j dx \quad [12]$$

$$K^2 = \sum_{j=1}^n \int_{x_0}^{x_b} \Psi_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} dx \quad [13]$$

De manera análoga, la ecuación de conservación de momentum, ecuación [9], se transforma a:

$$[K^1]^* \{V_t\} + g^* [K^2] \{H\} + \frac{f |V^*|}{2D} [K^1]^* \{V\} = 0 \quad [14]$$

donde V_t es la derivada temporal de la velocidad.

Integración en el tiempo

Las ecuaciones [11] y [14] son dos ecuaciones diferenciales ordinarias que deben ser integradas en el tiempo. En este trabajo se implementó un esquema semi-implícito de la familia “ α ” en la cual las derivadas temporales se discretizan según un esquema en diferencias finitas de la forma:

$$(1-\alpha)\{V_t\}_s + \alpha\{V_t\}_{s+1} = \frac{\{V\}_{s+1} - \{V\}_s}{\Delta t_{s+1}} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad [15]$$

$$(1-\alpha)\{H_t\}_s + \alpha\{H_t\}_{s+1} = \frac{\{H\}_{s+1} - \{H\}_s}{\Delta t_{s+1}} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad [16]$$

Dependiendo del valor del parámetro α , se llega a diferentes esquemas como:

$\alpha = 0$: Esquema de diferencias delante, condicionalmente estable, orden de precisión = $O(dt)$

$\alpha = 1/2$: Esquema de Crank-Nicolson: Estable, orden de precisión = $O(dt)^2$

$\alpha = 2/3$: El Método de Galerkin: Estable, orden de precisión = $O(dt)^2$

$\alpha = 1$: Esquema de diferencias hacia atrás: Estable, orden de precisión = $O(dt)$.

La forma definitiva de las ecuaciones implementadas en el software desarrollado se obtiene luego de algunas manipulaciones que se describen brevemente a continuación.

Las ecuaciones [11] y [14] son válidas para cualquier instante, en particular para los tiempos s y $s+\Delta t$, y por lo tanto se pueden escribir de la siguiente forma:

$$[K^1]^* \{H_t\}_s = -\frac{a^2}{g} * [K^2] \{V\}_s \quad [17]$$

$$[K^1]^* \{H_t\}_{s+\Delta t} = -\frac{a^2}{g} * [K^2] \{V\}_{s+\Delta t} \quad [18]$$

$$[K^1]^* \{V_t\}_s = -g * [K^2] \{H\}_s - \frac{f|V^*|}{2D} [K^1]^* \{V\}_s \quad [19]$$

$$[K^1]^* \{V_t\}_{s+\Delta t} = -g * [K^2] \{H\}_{s+\Delta t} - \frac{f|V^*|}{2D} [K^1]^* \{V\}_{s+\Delta t} \quad [20]$$

Ahora, pre-multiplicando la ecuación [15] por la matriz $[K^1]$, reemplazando las ecuaciones [19] y [20] en la ecuación obtenida se llega a:

$$\Delta t(1-\alpha) \left[-g[K^2]H_s - \frac{f|V^*|}{2D} [K^1]V_s \right] + \Delta t\alpha \left[-g[K^2]H_{s+\Delta t} - \frac{f|V^*|}{2D} [K^1]V_{s+\Delta t} \right] = [K^1](V_{s+\Delta t} - V_s) \quad [21]$$

De igual manera, pre-multiplicando la ecuación [16] por la matriz $[K^1]$, reemplazando las ecuaciones [17] y [18] en la ecuación obtenida se llega a:

$$\Delta t(1-\alpha) \left[-\frac{a^2}{g} [K^2]V_s \right] + \Delta t\alpha \left[-\frac{a^2}{g} [K^2]V_{s+\Delta t} \right] = [K^1](H_{s+\Delta t} - H_s) \quad [22]$$

Finalmente, asociando términos, las ecuaciones [21] y [22] se escriben como:

$$[M^1] \begin{Bmatrix} H_{s+\Delta t} \\ V_{s+\Delta t} \end{Bmatrix} = [M^2] \begin{Bmatrix} H_s \\ V_s \end{Bmatrix} \quad [23]$$

donde las matrices $[M^1]$ y $[M^2]$ tienen la forma:

$$[M^1] = \begin{bmatrix} \alpha \Delta t g [K^2] & \left(\alpha \Delta t \frac{f|V^*|}{2D} + 1 \right) [K^1] \\ [K^1] & \alpha \Delta t \frac{a^2}{g} [K^2] \end{bmatrix} \quad [24]$$

$$[M^2] = \begin{bmatrix} (\alpha-1)\Delta t g [K^2] & \left((\alpha-1)\Delta t \frac{f|V^*|}{2D} + 1 \right) [K^1] \\ [K^1] & (\alpha-1)\Delta t \frac{a^2}{g} [K^2] \end{bmatrix} \quad [25]$$

Condiciones de Frontera y condiciones iniciales

Las condiciones de borde que se implementaron en el software son: (a) Embalse aguas arriba con cabeza estática constante; (b) Válvula aguas abajo de cierre lineal y brusco; (c) Igualdad de presiones para todos los tubos que entran o salen de un nudo.

En el embalse aguas arriba, se debe tener una ecuación adicional a la de la cabeza constante para determinar completamente las condiciones en dicho nudo. Esta ecuación adicional viene dada para la característica “negativa” obtenida de la transformación de las ecuaciones generales del golpe de ariete por el método de las características. Esta ecuación toma la forma (Barrios y Pineda, 1981):

$$-\frac{g}{a}(H_p - H_s) + (V_p - V_s) + \frac{2fV_s^*|V_s|}{D}\Delta t = 0 \quad [26]$$

donde el subíndice p se refiere al nodo sobre la frontera y el subíndice s se refiere al nodo inmediatamente aguas debajo del nodo sobre la frontera. De manera similar, en el nodo aguas abajo, la válvula en nuestro caso, la característica “positiva” se toma como la condición adicional a la ecuación del cierre de la válvula:

$$\frac{g}{a}(H_p - H_r) + (V_p - V_r) + \frac{2fV_r^*|V_r|}{D}\Delta t = 0 \quad [27]$$

Las condiciones iniciales, en $t = 0$, corresponden a las condiciones (Presión y caudal) que arroja la simulación del estado permanente.

Validación del modelo con datos de laboratorio

El modelo físico fue desarrollado en las instalaciones del Laboratorio de Hidráulica “Jairo Murillo” de la Facultad de Minas de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Este laboratorio cuenta con un sistema de abastecimiento de agua mediante bombeo de un tanque enterrado de 150 m³ de capacidad a un tanque elevado de 30 m³ de capacidad. El punto de toma para el modelo físico de esta investigación se realizó de una tubería de hierro fundido vertical de 10 pulgadas de diámetro y de una longitud de 9 m, que tiene conexión directa con el tanque elevado del laboratorio. La cabeza estática sobre este punto de toma es de 10 m de columna de agua. La salida de la toma se realiza mediante una válvula de compuerta de 1 pulgada de diámetro. Se adquirieron 500 m de tubería para riego en polietileno en diferentes diámetros (1 ½, 1, ½ pulgadas) para realizar calibraciones y validaciones en diferentes escenarios. Las propiedades mecánicas de la tubería se determinaron en pruebas en el laboratorio de resistencia de materiales de la Universidad EAFIT dando como resultado un módulo de elasticidad (E) de 656,57 MPa según informe número 5912-729830.

Los cierres rápidos de válvula (30 milisegundos) fueron realizados con una válvula solenoide con las siguientes especificaciones: Marca Parker Gold Ring Series 22, 23, 24, 26 Two-way, Pilot-opered Valves, Normalmente cerrada (Energizada se mantiene abierta), 1" NPT. El transmisor de presiones que se utilizó es de marca WIKA referencia 891.13.500 de rango 0-100 PSI, de un tiempo de respuesta de un mili-segundo y con salida de 4-20 mili-amperios. Este transmisor fue facilitado por el Centro de Laboratorios de la Universidad EAFIT. Uno de los equipos de mayor exigencia fue el sistema de adquisición de datos dada la resolución temporal requerida para una adecuada medición del fenómeno. Finalmente se pudo contar con un PLC de la marca Siemens referencia CPU 214 S7-200, suministrado en préstamo por la firma Hidromecánica Ltda. Las características de las condiciones geométricas del sistema en estudio (tubo simple) se resumen en la tabla 1.

Tabla 1.- Parámetros Físicos del sistema de Tubería Simple

Módulo de Elasticidad de la Tubería	(GPa)	0,65652
Módulo de Elasticidad del Fluido	(GPa)	2,217
Densidad del Fluido	(Kg m ⁻³)	997,8
Diámetro Interno de la Tubería	(m)	0,025
Aceleración de la Gravedad	(m s ⁻²)	9,8
Altura del nivel del agua en el tanque respecto la Válvula	(m)	10
Coefficiente de fricción (f) de Darcy-Weisback		0,0296
Espesor de pared de Tubería	(m)	0,004
Longitud de Tubería	(m)	100
Tiempo de Cierre de la válvula	(s)	0,0461
Tiempo de Simulación	(s)	10
Celeridad de la Onda de presión Calculada por el modelo	(m s ⁻¹)	217

La calibración y validación del modelo de computador se realizó en dos etapas (Palacio y Toro, 2002). En una primera se completó un análisis de sensibilidad del modelo a parámetros físicos y numéricos y en la segunda etapa se realizó dicha comparación con aquellos obtenidos de las mediciones en el laboratorio. El grado de sensibilidad y la calidad de la validación se midieron con respecto a la presión y a partir del parámetro β , calculado como el cociente entre el error cuadrático medio y la cabeza estática sobre el nodo cercano al tanque de alimentación del sistema.

Variando un parámetro a la vez, y dejando los otros constantes se obtuvieron los siguientes resultados (ver figuras 1, 2) con respecto al tamaño del intervalo de cálculo, el tamaño de la malla espacial.

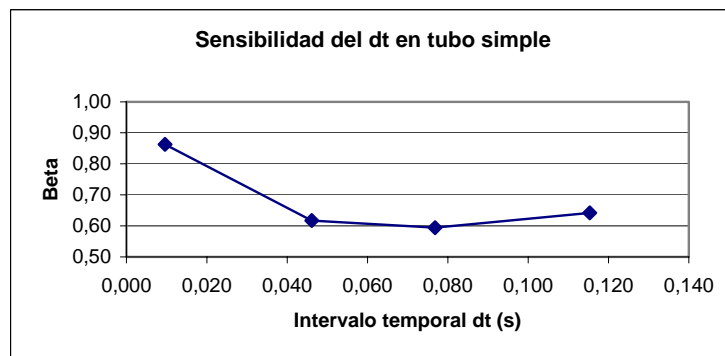


Figura 1.- Variación de β con el intervalo de cálculo

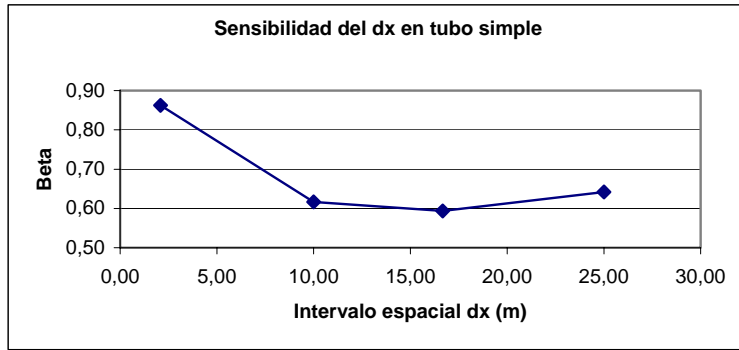


Figura 2.- Variación de β con el tamaño de la malla espacial

De la Figura 1 se puede observar que el intervalo temporal cercano a 0,08 s (exactamente de 0,07681 s) genera el menor valor de β . Por otro lado, de la Figura 2 se observa que intervalo espacial cercano a 17 m (exactamente igual a 16,667 metros) genera el mínimo valor de β . Cabe mencionar en este punto que en todos los casos se buscó garantizar la condición de estabilidad de Courant. Dado que el intervalo espacial es una consecuencia de la celeridad calculada y del intervalo de tiempo elegido, se decidió escoger un intervalo de cálculo de 0,0461 s el cual genera un intervalo espacial de 10 metros y la diferencia, en términos del coeficiente β con el intervalo temporal de 0,07681 no es significativa. Este valor del intervalo de cálculo garantiza cubrir de una mejor manera la resolución temporal de los datos experimentales proporcionados por el transmisor de presiones, resolución que es de 0,1 segundos.

Una vez definidos los tamaños de las mallas espaciales y temporales, se realizó un análisis de sensibilidad al parámetro α . Como se puede apreciar en la Figura 3, a medida que el parámetro α

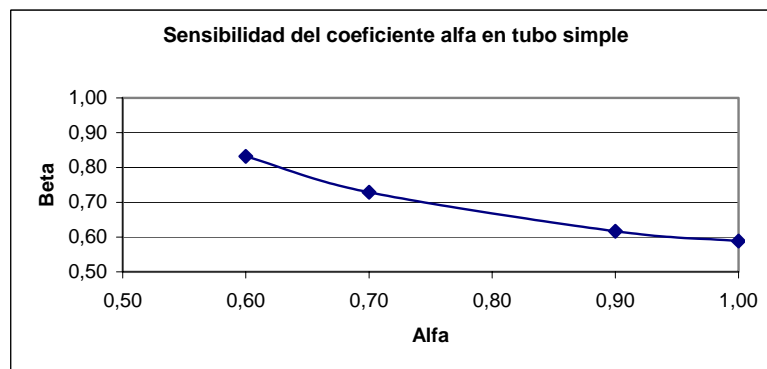


Figura 3.- Variación de β con el parámetro α

se acerca a 0,5, esto es, a medida que el esquema numérico se acerca a uno explícito, el parámetro β disminuye. Para valores de α menores de 0,5 se generan inestabilidades numéricas. En este trabajo se escogió como 0,9 el valor óptimo para este parámetro.

Dadas las condiciones de incertidumbre con respecto a las propiedades mecánicas de la tubería y a las condiciones de anclaje del sistema (100 m de tubería enrollados quedando tramos de ésta sometidos a condiciones de anclaje variables), se decidió realizar un estudio de sensibilidad al parámetro de Halliwell (θ), parámetro que afecta la celeridad de la onda de presión (ver ecuación [1]). Con los parámetros numéricos definidos en el análisis anterior, se obtuvo el comportamiento del parámetro θ que se muestra en la Figura 4. El valor óptimo obtenido es de 2,19. Téngase en

cuenta que al modificar θ , se modifica la celeridad de la onda y por lo tanto la frecuencia en que aparecen los “picos” de presión en los registros calculados.

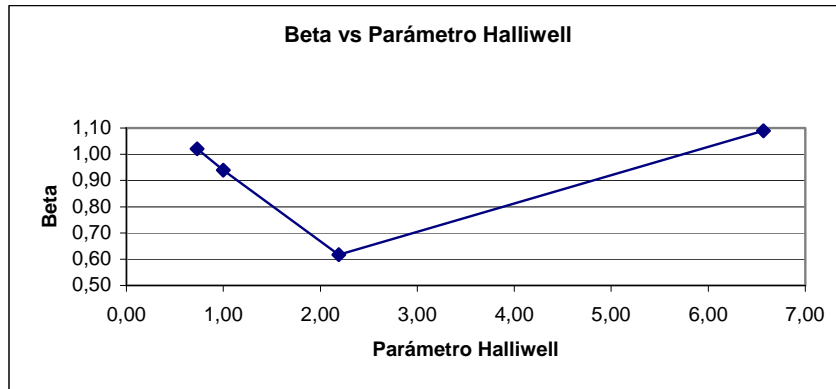


Figura 4.- Comportamiento del parámetro de Haliwell.

Finalmente, se procedió a comparar el registro de presiones calculado con el modelo propuesto con las mediciones realizadas en el laboratorio. En la Figura 5. se presentan los registros de presión calculados mediante el modelo propuesto y los medidos en la válvula, para un cierre brusco de ésta.

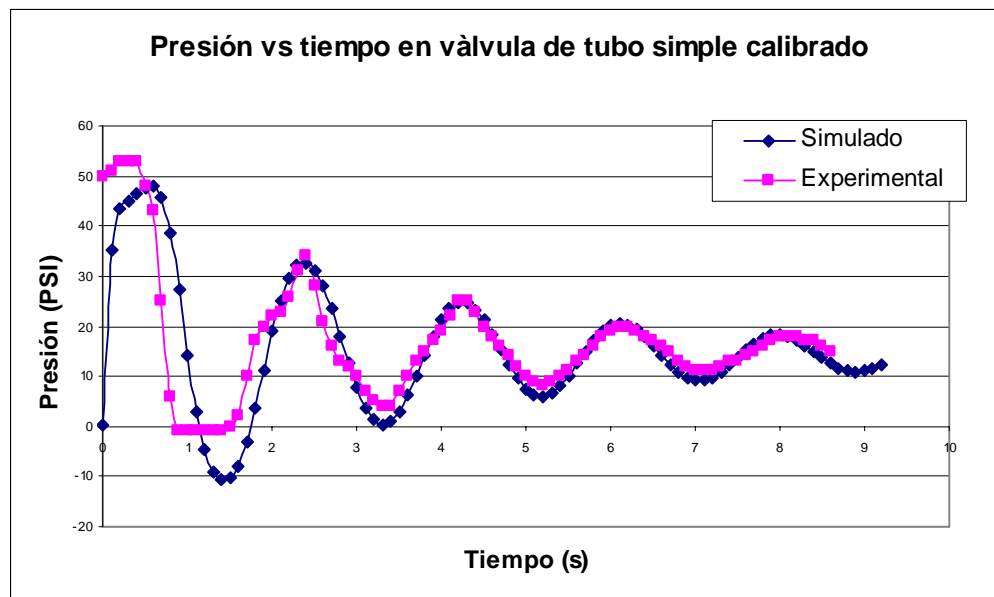


Figura 5.- Variación de la Presión en la válvula según mediciones y según el modelo

Los resultados de la simulación concuerdan muy bien con las mediciones, en términos de la frecuencia de aparición de los valores pico de la presión y de los valores de los picos mismos.

Conclusiones y Recomendaciones

En el presente trabajo se presentó un modelo en elementos finitos para la simulación del fenómeno de golpe de ariete. En las ecuaciones del modelo se observa que el término de la fricción ha

sido linealizado y se ha supuesto que la fricción durante el transitorio hidráulico se comporta de la misma manera que durante el estado permanente. Las ecuaciones utilizadas, y el modelo en computador desarrollado pueden ser utilizados en redes hidráulicas.

Para la validación del modelo se siguió una metodología sistemática que incluyó unos pasos de análisis de sensibilidad de parámetros (numéricos y físicos) y una validación de los resultados del modelo contra datos experimentales. Del análisis de sensibilidad se obtuvo, como resultado importante, la marcada sensibilidad del parámetro de Halliwell. Este parámetro afecta el valor de la celeridad de la onda de presión y su comportamiento se asigna a las condiciones de anclaje utilizadas en la experimentación. Un estudio mas detallado sobre este parámetro se requiere.

Referencias Bibliográficas

Abreu, J. M., GUARGA, R., IZQUIERDO, J., 1995, “Transitorios y Oscilaciones en Sistemas Hidráulicos a Presión”, Unidad Docente Mecánica de Fluidos, Valencia (España), 761 p.

Barrios A., y Pineda, L.F., 1981, “Aplicación del Método de las Características al Estudio del Golpe de Ariete”, Medellín, 147p, Tesis, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas.

Chaudry, M.H., 1979, “Applied Hydraulic Transients”, New York, Van Nostrand Reinhold Company, 503 p.

COLOMBIA, MINISTERIO DE DESARROLLO ECONÓMICO, 2000, “Reglamento Técnico del Sector de Agua Potable y Saneamiento Básico. RAS-2000, Santa fe de Bogotá: 1400 p.

Fox, J.A., 1977, “Hydraulic Analysis of Unsteady Flow in Pipe Networks”, New York, Jhon Wiley & Sons, 217 p.

Halliwell, A.R., 1963, “Velocity of a Water-Hammer Wave in an Elastic Pipe”, Journal of Hydraulics Division. ASCE, Vol. 89 No 4, pp 1-21.

Jovie, V., 1995, “Finite Elements and the Method of Characteristics Applied to Water Hammer Modeling, Engineering Modeling, No 8, p. 51-58.

Palacio, C.A., y Toro, F.M., 2002, “Metodología para la Validación de un Modelo Hidrodinámico Específico en Áreas Intermareales”.Avances en Recursos Hidráulicos. Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Número 9, p 37-46.

Reddy, J.N., 1993, “An Introduction to the Finite Element Method”. New York. McGraw Hill, second edition. 684 p.

Velásquez, C.F., 2006, “Diseño y Validación de un Modelo en Computador para Simular El Golpe de Ariete en Redes Cerradas”, Tesis de Maestría, Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia.

Agradecimientos

Los autores expresan sus agradecimientos al Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Minas, al Laboratorio de Hidráulica de la Universidad EAFIT y a la empresa Hidromecánica Ltda. Por el apoyo a esta investigación.