

ANÁLISIS DE MAREAS POR EL MÉTODO DE LA DESCOMPOSICIÓN EN ARMÓNICOS

Yuley M. Cardona Orozco, José Manuel Fernández, Mauricio Toro Botero,
Miguel Monsalve Gómez.
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

RESUMEN

En este artículo se presenta la aplicación del software Gnotide desarrollado para la descomposición de señales de marea en sus constituyentes armónicos, se presenta de manera condensada las ecuaciones que gobiernan dicho fenómeno. Del software desarrollado se presentan los módulos que componen la herramienta de análisis: Módulo de análisis de calidad de la información (“open”), el módulo de graficar la serie (“plot”), el módulo de la transformada de Fourier (“Fourier”), el módulo de la transformada de onditas (“wavelet”), el módulo de ajuste mínimo cuadrático (“fit”), y el módulo de predicción (“predict”). Se presenta una aplicación a una señal de mareas medida en Cartagena de Indias.

ABSTRACT

The application of the software Gnotide, developed for the decomposition of a tidal signal into its astronomical constituents is presented. The governing equations are briefly described. The different modules are described and they are: Analysis of signal quality (“open”), plot module (“plot”), Fourier transform (“Fourier”), wavelet transform (“wavelet”), least square fitting (“fit”) and prediction (“predict”). As an example, a tidal signal measured for cartagena is analysed.

Palabras clave: Análisis de armónicos, Marea, Fourier, Onditas, Linux

Keywords: Armonic Analysis, Tide, Fourier, Wavelets, Linux

1. INTRODUCCIÓN

El estudio y caracterización de las mareas es útil para todas aquellas aplicaciones que requieran determinar la variación en el nivel del mar, tales como modelos hidrodinámicos en estudios de sistemas costeros. Se presenta en este artículo una herramienta que permite el análisis de mareas con base en sus fuerzas generadoras. La herramienta consiste en la descomposición de una señal de niveles de agua, medida en una estación dada, en sus armónicos constitutivos correspondientes a eventos astronómicos generadores de marea.

Se desarrolló un software para el análisis de señales de marea llamado "Gnotide", el cual funciona en el sistema operativo Linux y es distribuido como software libre (licencia GPL). *Gnotide* consta de varios módulos que permiten la aplicación de las diferentes ideas previamente planteadas.

2. METODOLOGÍA

2.1. FUERZAS GENERADORAS DE MAREA

La teoría de las mareas se ha estudiado matemáticamente desde los tiempos de Isaac Newton quien desarrolló la teoría del equilibrio de mareas. Como complemento a esta teoría, Laplace desarrolló la teoría dinámica de mareas.

Para la deducción de las ecuaciones que representan las fuerzas generadoras de marea desde la teoría de equilibrio, debidas al Sol y la Luna, se emplean dos métodos: uno de ellos representa estas fuerzas a partir del concepto de balance de fuerzas en el plano, siguiendo el procedimiento planteado en el libro de Herbich, [Herbich, 1994]; el otro, utiliza el concepto del potencial gravitatorio (ver detalles en [Elmore, 1969]). Este último método tiene la ventaja de presentar las ecuaciones y su deducción de una manera compacta, por lo cual es el presentado en este artículo. La expresión para la fuerza generadora de marea, se utilizará para la descomposición de una señal de mediciones de nivel de la superficie del océano, en los armónicos astronómicos que la componen (ver [Shureman, 1958], [Cardona, Fernández. 2001]).

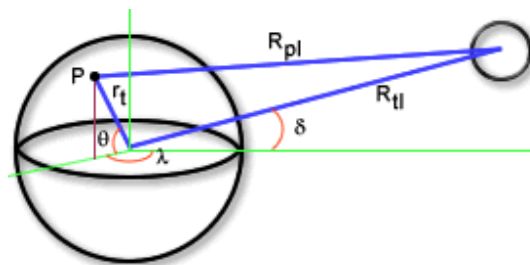


FIGURA 1. Sistema Tierra-Luna.

En la Figura 1. se muestra el sistema Tierra-Luna, en donde se toma el centro de coordenadas esféricas (λ, θ, r) en el centro del planeta Tierra y se asume que la Tierra es una esfera de radio r_t , y la distancia centro a centro entre la Tierra y la Luna, es R_{tl} .

Cualquier punto P que se encuentre sobre la superficie de la Tierra está sujeto a un potencial gravitacional debido a la presencia de la Luna igual a (ver detalles en Cardona y Fernández, 2001):

$$\Phi_t = \frac{G \cdot M_l \cdot r_t}{2 \cdot R_{il}^3} \left(1 - 3 \cdot \cos^2(\delta) \cdot \cos^2(\theta) \cdot \cos^2(\lambda) - 3 \cdot \sin^2(\delta) \cdot \sin^2(\theta) - \frac{3}{2} \sin(2\delta) \cdot \sin(2\theta) \cdot \cos(\lambda) \right) \quad (1)$$

Donde θ es la latitud del punto donde se evalúa el potencial y λ el ángulo horario de la Luna, que es el ángulo medido sobre el plano que contiene el ecuador terrestre, desde el meridiano de la Luna, hasta el meridiano del observador.

Para una partícula de agua de masa unitaria, la energía potencial gravitacional debida a la Tierra es:

$$\Phi_t = g \cdot \eta \quad (2)$$

Con η la altura con respecto al nivel medio del océano.

La altura de la marea obtenida a partir de las consideraciones sobre la energía potencial a la que está sujeta una masa de agua en la superficie del océano se muestra en la ecuación (3), válida para cualquier latitud y ángulo horario de la Luna, teniendo en cuenta la declinación de la órbita Lunar:

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_l}{M_t} \cdot \left(\frac{r_t}{R_{il}} \right)^3 \cdot r_t \cdot \left(3 \cos^2(\delta) \cos^2(\kappa) \cos^2(\lambda) + \frac{3}{2} \sin(2\delta) \sin(2\kappa) \cos(\lambda) + 3 \sin^2(\delta) \sin^2(\kappa) - 1 \right) \quad (3)$$

Para encontrar el valor de la fuerza generadora de marea en dirección radial y tangencial debida a la Luna en el punto P, se emplea el concepto de derivada direccional como se muestra, donde u es el vector unitario en la dirección requerida:

$$D_u f(x, y, z) = u \cdot \nabla f(x, y, z) \quad (4)$$

Se obtiene para la dirección normal:

$$F_n = g \cdot \frac{M_l}{M_t} \cdot \left(\frac{r_t}{R_{il}} \right)^3 \cdot \left(3 \cos^2(\delta) \cos^2(\theta) \cos^2(\lambda) + \frac{3}{2} \sin(2\delta) \sin(2\theta) \cos(\lambda) + 3 \sin^2(\delta) \sin^2(\theta) - 1 \right) \quad (5)$$

Como se puede apreciar, la altura de marea, ecuación (3) y la fuerza normal, ecuación (5), poseen la misma relación entre declinación, latitud y ángulo horario de la Luna. Este hecho se utiliza para la representación de la señal de marea en sus armónicos astronómicos. Las frecuencias de dichos armónicos se obtienen a partir de la descomposición de la ecuación de fuerza generadora de marea.

Para apreciar de manera más clara las componentes de largo período, las componentes diurnas y las componentes semidiurnas de marea, la

ecuación (5) se escribe en forma expandida como sigue, [Shureman, 1958]:

$$\begin{aligned}
 F_n = & \frac{3}{2} \cdot g \cdot \frac{M_l}{M_t} \cdot \left(\frac{r_t}{R_{tl}} \right)^3 \cdot \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \text{sen}^2(\theta) \right) \left(\frac{2}{3} - 2 \cdot \text{sen}^2(\delta) \right) \right) \\
 & + \frac{3}{2} \cdot g \cdot \frac{M_l}{M_t} \cdot \left(\frac{r_t}{R_{tl}} \right)^3 \cdot \text{sen}(2\delta) \text{sen}(2\theta) \cos(\lambda) + \\
 & + \frac{3}{2} \cdot g \cdot \frac{M_l}{M_t} \cdot \left(\frac{r_t}{R_{tl}} \right)^3 \cdot \cos^2(\delta) \cos^2(\theta) \cos(2\lambda)
 \end{aligned} \tag{6}$$

El primer término de la ecuación (6) no depende de la rotación de la Tierra; las variaciones son debidas únicamente a la declinación y la distancia de la Luna, las cuales varían lentamente. Los armónicos que se extraen de este término se conocen como constituyentes de largo período. El segundo término, incluye el coseno del ángulo horario de la Luna, por lo cual la variación de este término se da en períodos de un día Lunar. Los armónicos que se extraen de este término se conocen como constituyentes diurnas de la marea. El último término, involucra el coseno del doble ángulo horario de la Luna, con lo cual el período de variación de estas será de medio día lunar y los armónicos que se extraen de este término se conocen como constituyentes semidiurnas.

2.2. SATÉLITES ARTIFICIALES Y DESCOMPOSICIÓN DE LA FUERZA GENERADORA.

El análisis del movimiento complejo realizado por el sistema Sol-Tierra-Luna, se puede representar mediante una superposición de satélites artificiales (aplicando la linealidad del sistema) que orbitan sobre el plano del ecuador celeste describiendo círculos; cada uno de estos satélites tiene una velocidad angular constante asociada a periodos de eventos astronómicos (día solar, día lunar, mes sinódico, entre otros). Adicionalmente, cada uno de éstos tiene masa y distancia específicos al centro de la Tierra, permitiendo de esta manera determinar su aporte a la fuerza generadora de marea. Schureman en 1924, planteo esta descomposición, que se realiza a partir de la fuerza generadora como la mostrada en la ecuación (6).

Luego de realizar la descomposición y de tener en cuenta las correcciones por la órbita elíptica, se llega a la ecuación (7), después de un laborioso trabajo de álgebra:

$$\begin{aligned}
F_n = & \frac{3}{2} \cdot g \cdot \frac{M_l}{M_t} \cdot \left(\frac{r_t}{R_{tl}} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \text{sen}^2(\theta) \right) \left(\frac{2}{3} - \text{sen}^2(I) \right) \cdot \\
& \left(1 + \frac{3}{2} e^2 + 3e \cdot \cos(s-p) + \frac{9}{2} e^2 \cdot \cos 2(s-p) \right) + \\
& \left(+ \frac{45}{8} \cdot m \cdot e \cdot \cos(s-2h+p) + 3m^2 \cdot \cos 2(s-h) \right) + \\
& \frac{3}{2} \cdot g \cdot \frac{M_l}{M_t} \cdot \left(\frac{r_t}{R_{tl}} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \text{sen}^2(\theta) \right) \left(\frac{2}{3} - \text{sen}^2(I) \right) \cdot \text{sen}^2(I) \quad (7) \\
& \left(\left(1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \cos(2s-2\varepsilon) + \frac{7}{2} e \cdot \cos(3s-p-2\varepsilon) \right. \\
& + \frac{1}{2} e \cdot \cos(s+p+180^\circ-2\varepsilon) + \frac{17}{2} e^2 \cdot \cos(4s-2p-2\varepsilon) \\
& + \frac{105}{16} \cdot m \cdot e \cdot \cos(3s-2h+p-2\varepsilon) + \frac{15}{16} \cdot m \cdot e \cdot \cos(s+2h-p+180^\circ-2\varepsilon) \\
& \left. + \frac{23}{8} m^2 \cdot \cos(4s-2h-2\varepsilon) + \frac{1}{8} m^2 \cdot \cos(2h-2\varepsilon) \right)
\end{aligned}$$

Donde:

s : Longitud media de la Luna referida al equinoccio sobre la órbita circular.

h : Longitud media del Sol.

I : Oblicuidad de la órbita de la Luna.

e : Excentricidad de la órbita de la Luna.

m : Relación entre el movimiento medio del Sol y el lunar.

p : Rotación eje del plano de la órbita de la Luna.

2.3. AJUSTE DE PARÁMETROS MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS.

Los registros de marea medidos en campo se deben ajustar al modelo teórico obtenido. Este ajuste se realiza mediante una regresión lineal a un polinomio trigonométrico con frecuencias preseleccionadas. Este procedimiento se usa en la práctica para tipificar las mareas en un sitio determinado y así poder superponer otros efectos no lineales como los del viento.

En el caso particular de las mareas, debido a su naturaleza periódica, la función de ajuste tiene la forma:

$$h(t_j) = \sum_{i=0}^l a_i b_{ij} \cos(\omega_i t_j + (V_0 + u)_{ij} - \kappa_i) \quad (8)$$

donde l es el número de frecuencias diferentes de cero presentes en el ajuste; ω_i es la frecuencia astronómica previamente determinada (ω_0 es cero por lo tanto a_0 representa el valor medio de los registros); a_i es el factor de amplitud asociado a la frecuencia ω_i para un sitio específico; b_{ij} es la amplitud astronómica asociada a la frecuencia ω_i en el tiempo t_j ; κ_i es la edad del puerto o desfase asociado con la frecuencia ω_i el cual

considera el retraso de la marea con respecto al paso del constituyente por el meridiano del observador, debido a la forma de la Bahía y a otros efectos locales; y $(V_0+u)_{ij}$ es la fase del argumento de la constituyente en el tiempo t_j con respecto a Greenwich.

En el caso del estudio de mareas, resulta de interés conocer los coeficientes a_i y κ_i por medio de un ajuste de mínimos cuadrados, mientras que la frecuencia ω_j y la fase del argumento $(V_0+u)_{ij}$ se obtienen por medio de un estudio astronómico que asocia el comportamiento del movimiento del Sol, la Luna y la Tierra.

La deducción de las ecuaciones para resolver el sistema de mínimos cuadrados para el caso particular de las mareas puede ser consultado en [Cardona, Fernández 2001].

2.4. IDENTIFICACIÓN DE FRECUENCIAS PRESENTES EN LA SEÑAL

Para seleccionar las frecuencias presentes en la señal de niveles de agua se recurre la Transformada Discreta de Fourier (TDF). La TDF es una herramienta matemática que permite descomponer una función periódica cualquiera, cuya primera derivada es continua, en una serie de funciones seno y coseno. Las amplitudes de cada uno de estos términos se determinan por medio de integrales en el intervalo de la función. De esta forma se obtienen las frecuencias de origen matemático con las cuales se identifican las de origen astronómico que se emplean en el ajuste por mínimos cuadrados.

La TDF retorna un gran número de frecuencias que hacen difícil discernir cuales son las realmente representativas. Por ello se recurre, generalmente, a una representación gráfica del espectro que permite visualizar donde se encuentran las frecuencias más importantes. En la aplicación desarrollada, Gnotide, se incluye adicionalmente un parámetro estadístico (F) que permite clasificar las frecuencias según su representatividad dentro de la señal, siguiendo la exposición de Wei [Wei,1994].

El análisis estándar de Fourier descompone una señal en las componentes de frecuencias y determina la potencia relativa de cada una de ellas. Este procedimiento no brinda información acerca de cuando la señal exhibe una característica particular y por lo tanto en aquellos casos donde la señal no es estacionaria se pierde información valiosa al ignorar las anomalías locales. En el caso del estudio de las mareas, debido a su origen astronómico, la señal es estacionaria, con algunas perturbaciones producidas por eventos no estacionales o atmosféricos tales como la acción del viento. Al permitirse un análisis que pueda distinguir en el dominio del tiempo las anomalías en las frecuencias de la señal, se evita incluir en el modelo las componentes no astronómicas. Es aquí donde la Transformada de Onditas tiene aplicabilidad.

Ésta transformada, se representa mediante una gráfica (ver Figura 5) que tiene el tiempo en el eje de las abscisas y las frecuencias en las ordenadas. La escala de colores, indica el porcentaje de representatividad que tiene una frecuencia en cada tiempo; los valores más altos muestran que la frecuencia tiene mayor relevancia en la serie. Existe una zona en la parte inferior, denominada cono de influencia en la cual la TO no brinda información fiable.

2.5. APLICACIÓN PARA ANÁLISIS (GNOTIDE)

Con los conceptos descritos anteriormente, se desarrolló una aplicación de computadora denominada Gnotide, empleando para tal fin el lenguaje de programación C y el sistema operativo Linux. La elección de esta plataforma de trabajo, está fundamentada en la calidad de las herramientas de desarrollo computacional disponibles bajo libre distribución en este entorno (bibliotecas de programación, compiladores, etc.), con lo cual, las instituciones pueden obtener grandes ahorros en licenciamiento, adicional a la disponibilidad del código fuente, que permite en centros académicos, su empleo en la formación profesional.

Gnotide fue validado en dos etapas, en la primera de ellas se considera el caso trivial, para una serie sintética, con la cual se pretende validar la consistencia en los cálculos realizados por el programa, generando, mediante el módulo de predicción, una serie sintética para ser usada como entrada al programa. La verificación consiste en que el resultado de la descomposición en armónicos astronómicos de esta serie debe ser exactamente igual a la serie original.

En un segundo caso, se tiene una serie de datos reales, registros de marea en Linnenplate, en la costa del Mar del Norte, en Alemania (gentilmente cedidos por el COASTAL RESEARCH LABORATORY de la Universidad de Kiel, Alemania) y los resultados del análisis de la misma, realizado con el programa GETIJSYS/ANALYSIS V3.00 (desarrollado a partir de la misma metodología de descomposición en armónicos, por el instituto de hidráulica de DELFT, DELFT HYDRAULICS, en Holanda); se compararon estos resultados con los obtenidos mediante el programa "Gnotide".

En estas dos pruebas se obtuvieron buenos resultados, permitiendo concluir que la aplicación es coherente con los cálculos matemáticos y con la metodología descrita, por lo tanto puede ser empleada para el análisis de mareas.

A continuación se muestra la aplicación Gnotide mediante el uso de una serie de alturas de marea con registro horario para la estación Cartagena, serie que fue obtenida en la dirección electrónica: <http://uhs1c.soest.hawaii.edu/uhs1c/data1.html>.

La aplicación tiene diferentes módulos que permiten realizar el análisis de la serie. En la Figura 2a se muestra la ventana principal del programa

desde la cual se puede acceder a los módulos disponibles (Abrir archivo, Graficar serie de datos, Transformada Discreta de Fourier, Transformada de Onditas, Ajuste de mínimos cuadrados y Predicción). A partir de la apertura del archivo, el programa genera un reporte sobre la calidad de los datos, detectando tramos con y sin información. En la Figura 2b, se muestra el reporte de los datos para la estación Cartagena en el año 1998.



FIGURA 2a. Ventana principal

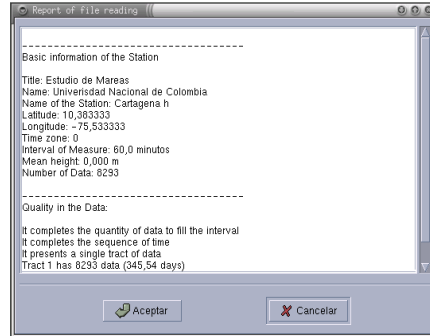


FIGURA 2b. Reporte de datos.

En la Figura 3 se muestra la gráfica de los datos, donde se observan las mareas vivas que coinciden con la ocurrencia de las lunas llena y nueva (como se puede apreciar en la parte superior del gráfico) y las mareas muertas que ocurren durante los cuartos creciente y menguante. Este módulo del programa, además, permite visualizar los tramos de datos faltantes con franjas verticales (de color verde).

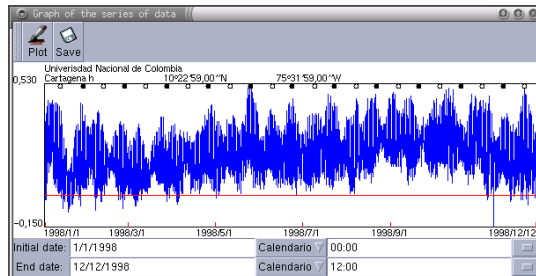


FIGURA 3. Gráfica de la serie.

Para detectar las frecuencias presentes en la señal, se usan los módulos de la transformada de Fourier y de Onditas. En la Figura 4 se muestra, en la parte superior, el espectro de Fourier de la serie en escala normal. En la parte central se tiene el espectro en escala logarítmica, el cual se representa para lograr una fácil visualización. Finalmente, en la parte inferior se tiene el listado con los valores del espectro y de la prueba de significancia F para cada una de las frecuencias. En el espectro para los datos de Cartagena, se observan subgrupos alrededor de las frecuencias de largo periodo, diurnas y semidiurnas.

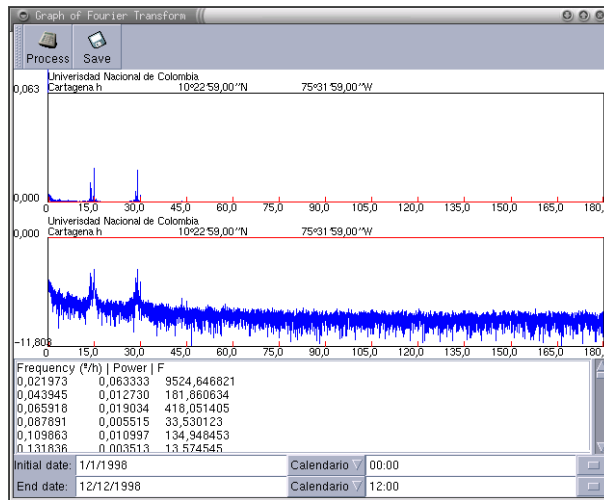


FIGURA 4. Espectro de Fourier.

La Transformada de Onditas, muestra claramente, que esta serie es estacionaria y que las frecuencias cercanas a 15 °/h y a 30 °/h, presentan abatimientos por ser frecuencias cercanas en estos rangos. Los resultados de la Transformada de Onditas se observan en la Figura 5.

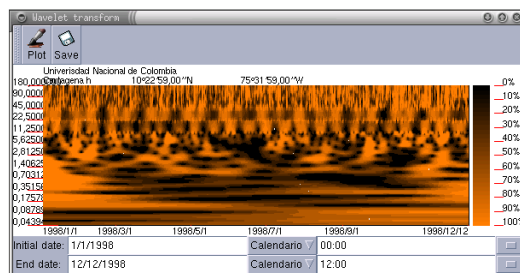


FIGURA 5. Transformada de Onditas.

Las constituyentes incluidas en el ajuste de mínimos cuadrados, se seleccionan de aquellas que se encuentran en las cercanías de las frecuencias que poseen un valor de F superior a 4,96 que corresponde a nivel de significancia del 99% (esta significancia puede ser elegida a criterio del analista). En la Figura 6b se muestra la ventana donde se seleccionan las frecuencias identificadas. El ajuste de mínimos cuadrados se muestra en la Figura 6^a. En esta figura se puede apreciar, en la parte superior, la superposición de las series originales y ajustadas, donde se observa un buen ajuste durante todo el intervalo de tiempo. En la parte media del grafico se muestra el error que no presenta ninguna tendencia y se considera aleatorio; en la parte inferior, se tiene un reporte de los estadísticos del ajuste y de la amplitud y fase obtenidas para cada constituyente astronómica elegida para el cálculo del ajuste.

Los Estadísticos del ajuste obtenidos en el ejemplo de Cartagena son los siguientes: Sse = 15,1212, Mse = 0,0018, SSr = 81,1447, Syy = 96,2659, $R^2 = 0,842923$.

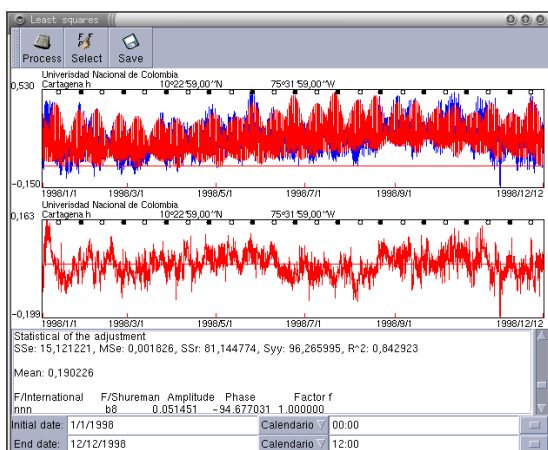


FIGURA 6a Ajuste de la serie

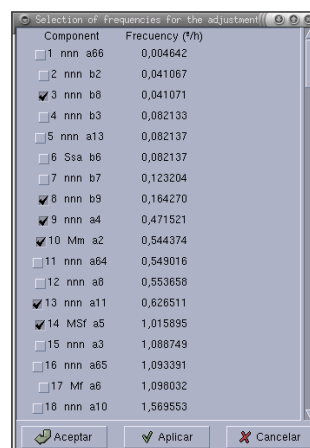


FIGURA 6b Selección de frecuencias

Los parámetros del ajuste que caracterizan la marea para la estación Cartagena se muestran en la Tabla 1 (Según la nomenclatura de Shureman, las constituyentes que están nominadas con la letra a, representan constituyentes de origen lunar, las que están con la letra b, representan constituyentes solares).

TABLA 1. Parámetros del ajuste.

F/internacional	F/shureman	Amplitud (m)	Fase (°)
nnn	b8	0,051451	-94,677
nnn	b9	0,001138	-19,395
nnn	a4	0,006455	-113,238
Mm	a2	0,015336	13,654
nnn	a11	0,009503	28,391
MSf	a5	0,003799	-61,143
O1	a14	0,048840	-122,621
P1	b14	0,026462	-116,948
(K1)	b22	0,084900	-113,672
N2	a40	0,025298	109,741
M2	a39	0,074094	138,593
nnn	a54	0,002275	49,499
S2	b39	0,018328	52,109

A partir de los parámetros obtenidos del ajuste, se predicen niveles de agua debidos a la marea para cualquier periodo de tiempo requerido, pudiendose emplear en modelos hidrodinámicos. En las Figuras 8a y 8b se muestra la predicción para los meses de Mayo y Junio de 1998 y la ventana de selección de frecuencias que pueden ser modificadas en su amplitud y fase, según las necesidades del analista.

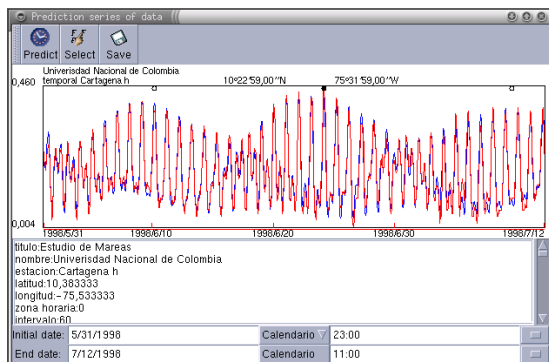


FIGURA 8^a. Predicción.

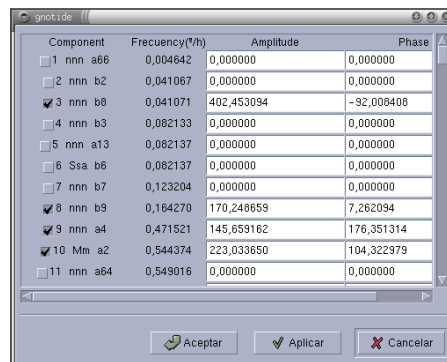


FIGURA 8b. Selección de frecuencias.

4. CONCLUSIONES

Las mareas son generadas por factores astronómicos y por ello es posible determinar su comportamiento a partir de estos factores, únicamente obteniendo altos índices de correlación.

Gnotide permite realizar análisis de señales de marea de una manera sencilla. Con las herramientas disponibles actualmente, se superan las dificultades de principios del siglo XX, cuando la concepción del problema era clara y coherente, pero su principal dificultad radicaba en la ausencia de herramientas computacionales eficientes.

El programa tiene un gran potencial para desarrollar; tal como está implementado actualmente, permite el análisis de una sola serie de datos. Se recomienda incluir la posibilidad de realizar el análisis de varias series simultáneamente, y de analizar otras series de tiempo que pueden afectar una señal de marea. Estos nuevos procedimientos permitirán al usuario comparar diferentes registros y de esta forma identificar relaciones o interferencias de una serie en otra.

El software libre, por su costo y calidad, permite cumplir el compromiso que tienen las instituciones públicas con la comunidad, de socializar los conocimientos desarrollados dentro de ellas.

BIBLIOGRAFÍA

CARDONA, Yuley y FERNÁNDEZ, José. Análisis de Mareas por el Método de la Descomposición en Armónicos. Medellín. Facultad de minas, Universidad Nacional de Colombia. 2001. 172p.

ELMORE, William y HEAL, Marrk. *Physics of waves*. Mc Graw Hill. 1969

GODFRAY, Hugh. An Elementary Treatise on the Lunar Theory. Macmillan, London. 1871.

HERBICH, John (Editor). *Handbook of Coastal and Ocean Engineering*, Gulf publishing company, 1992.

SHUREMAN, Paul. *Manual of Harmonic Analysis and Prediction of Tides*. Washington, EE.UU., Government printing office, Publicación especial N° 98, 1958. 317 p.

WEI, William. *Time Series Analysis*. EE.UU., Addison-Wesley Publishing Company, 1994. 478 p.