Polos de diferenciales regulares sobre curvas singulares

Facultad de Ciencias

Trabajo presentado como requisito de grado para lograr el título de
Magister en Matemáticas

Johny Alejandro Madrid Marín

Director: John Jader Mira A.

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Maestría en Ciencias-Matemáticas

2011

Resumen

En geometría algebraica, una curva algebraica es una variedad algebraica de dimensión uno. La teoría de éstas curvas en general fue bastante desarrollada en el siglo XIX. Las diferenciales regulares de una curva algebraica proyectiva puede tener polos en su modelo no singular. En éste trabajo se analizan los polos de una diferencial regular de una curva algebraica completa e irreducible en términos de invariantes discretos de sus anillos locales. También se aborda el operador de Cartier y la función zeta, la cual codifica propiedades importantes de la curva. Lo anterior como consecuencia del Teorema de Riemann-Roch, dualidad local y la ley de reciprocidad para curvas singulares.

Índice general

AGRADECIMIENTOS

Durante estos tres años y medio, mi estancia en la Escuela de Matemáticas ha sido muy satisfactoria y enrequisidora, en lo académico como en lo profesional, por tanto, quisiera agradecerle a la escuela por brindarme la oportunidad de tener mis primeros pasos hacia la docencia universitaria.
Al profesor John Jader Mira A., por su dedicación, paciencia y orientación en este trabajo de grado, ya que sin él, esta tesis no hubiera sido posible.
Por último, quisiera agradecer a mi esposa e hijo, por la comprensión y el tiempo que me han prestado para poder terminar esta tesis. Les agradezco infinitamente.

Capítulo 1

Introducción

Ya es bien sabido que en muchas aplicaciones, problemas aritméticos y teoría de códigos se presentan sistemas lineales y surge la necesidad de plantear el problema en términos geométricos, llegando en definitiva y en muchos casos a pensar en una curva no-singular. Estas situaciones, son algunas de las razones para tener que considerar el conocido Teorema de Riemann-Roch para curvas no-singulares. En algunos textos se pueden encontrar varias pruebas de este teorema, difiriendo unas de otras en cambios apropiados y útiles. Por ejemplo cuando el campo constante k es de característica p, o cuando es algebraicamente cerrado. Tener una versión de este teorema, para curvas singulares es el propósito del segundo capítulo. Primero reseñamos la noción de curva algebraica completa geométricamente irreducible definida sobre un campo, después algunas nociones como: divisores, género, adeles y algunas diferenciales. Sin embargo, para llegar a probar el Teorema de Reiman-Roch para curvas singulares, se necesitan conceptos más generales como: completación de anillos en sentido topológico. Con estos términos y con ayuda de la teoría ya conocida para el caso no-singular probamos la relación, válida para cada divisor $\mathbf{a}$ de la curva $\mathcal{X}$

$$\ell(\mathbf{a}) = deg(\mathbf{a}) + 1 - g + i(\mathbf{a})$$

conocida como, Teorema de Riemann-Roch. El entero $g := i(\mathcal{O})$ es llamado el *género aritmético* de $\mathcal{X}$.

Una de las muchas consecuencias que tiene este teorema, es la fórmula de Hironaka [13] o conocida como fórmula genus dada por

$$g = \widetilde{g} + \sum_{P \in \mathcal{X}} \delta_P$$

donde $\widetilde{g}$ es el género geométrico de $\mathcal{X}$, definido como el género del modelo no-singular $\widetilde{\mathcal{X}}$, y $\delta_P := dim_k \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P}$, queriendo decir por $\widetilde{\mathcal{O}}_P$, la clausura algebraica de $\mathcal{O}_P$ en el campo K.

Por una diferencial λ de $\mathcal{X}$ se entenderá como un funcional k-lineal, definido sobre las adeles $A_{K|k}$ en k, con la condición que λ se anule en un conjunto de la forma

$\Lambda(\mathbf{a}) + K$ para algún divisor $\mathbf{a}$ de $\mathcal{X}$. Una consecuencia fundamental del teorema 2.3.2 para nuestro propósito, es la existencia de un divisor $\mathcal{C}$ maximal (ver 2.4.4), para el cual λ se anula sobre $\Lambda(\mathbf{a}) + K$. Este divisor $\mathcal{C}$ se llama *divisor de la diferencial* λ.

Con el divisor $\mathcal{C}$, se construye la **ley de reciprocidad**

$$\mathcal{C} : (\mathcal{C} : \mathbf{a}) = \mathbf{a}$$

válida para cualquier divisor $\mathbf{a}$ de $\mathcal{X}$. Con todos estos resultados importantes, se aborda el análisis de los polos de las diferenciales regulares. En el último capítulo, se considerará el operador de Cartier, definido sobre el espacio de las formas diferenciales definida por

$$C(zdx) := (\frac{d^{p-1}z}{dx^{p-1}})^{1/p}dx$$

para cada $z \in K$ y cada variable separante x de $K|k$, donde k es de característica positiva p. Seguidamente, analizaremos su acción sobre el conjunto

$$\frac{\Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}$$

del cual se desprende información importante. De hecho, si $\sigma(\mathcal{X})$ y $\sigma(\widetilde{\mathcal{X}})$ denota los rangos de este operador en los conjuntos $\Omega(\mathcal{O})$ y $\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})$ respectivamente ([12]), mostramos que para cada r se tiene el estimativo 4.0.1

$$|N_r - \widetilde{N}_r| \leq \sigma(\mathcal{X}) - \sigma(\widetilde{\mathcal{X}})$$

donde $N_r := card\mathcal{X}(k_r)$ y $\widetilde{N}_r := card\widetilde{\mathcal{X}}(k_r)$ son el número de puntos racionales de $\mathcal{X}$ y $\widetilde{\mathcal{X}}$ en k_r, el cual es una extensión de k de grado r, respectivamente.

Capítulo 2

Teorema de Riemann-Roch

El objetivo de este capítulo es demostrar el Teorema de Riemann-Roch para curvas singulares y algunas de sus consecuencias, como la ley de reciprocidad. También, estudiaremos dualidad local, teorema que utilizaremos en el desarrollo de esta tesis. Para este fin, reseñamos las notaciones sugerida por [14], que seguiremos durante todo el texto. En efecto, daremos definiciones precisas a los conceptos como divisores de la curva $\mathcal{X}$, paraleletope de un divisor $\mathbf{a}$ y adeles. En esta parte , necesitaremos algunas definiciones y propiedades de álgebra conmutativa, por ejemplo la noción de completación de anillos.

2.1. Curvas singulares

Sea $\mathcal{X}$ una curva algebraica completa e irreducible con campo constante k y sea K el campo de funciones racionales sobre $\mathcal{X}$. Es decir, K es un campo de funciones en una variable con campo constante k y $\mathcal{X}$ es el índice de una familia $\{\mathcal{O}_P\}_{P\in\mathcal{X}}$ de k-álgebras locales, propiamente contenidas en K con campo cociente K y que satisfacen las siguientes propiedades:

- Para casi todo $P \in \mathcal{X}$, el anillo local $\mathcal{O}_P$ es un anillo de valoración discreta de K.

- Para cada anillo de valoración discreta B de $K|k$ existe un único $P \in \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{O}_P \subseteq B$.

Observación.
Cualquier curva proyectiva se puede ver como una curva algebraica completa e irreducible. Recíprocamente, cualquier curva $\mathcal{X}$ se puede realizar como una curva proyectiva de la siguiente forma: Sea $\mathcal{X}$ una curva algebraica completa e irreducible sobre un campo k algebraicamente cerrado. Sean $x_0, x_1, ..., x_m$ elementos k-linealmente independientes del campo K. Si $m \geq 1$, existe un morfismo definido sobre el modelo no singular

$$(x_0 : ... : x_m) : \ \widetilde{\mathcal{X}} \ \rightarrow \ \mathbb{P}^n(k)$$

cuya imagen por Teorema de extensión de la teoría de valoración, es una curva algebraica proyectiva no degenerada e irreducible en $\mathbb{P}^n(k)$ ([20] , §1.)
A continuación introduciremos alguna de las definiciones necesarias para desarrollar este capítulo y utilizaremos en todo el texto.

Definición 2.1.1. *(**Punto singular**) Se dice que un punto $P \in \mathcal{X}$ es singular si el anillo $\mathcal{O}_P$ no es un anillo de valoración discreta.*

Definición 2.1.2. *(**Modelo no-singular**) Se define el modelo no-singular de la curva $\mathcal{X}$, y lo denotamos por $\widetilde{\mathcal{X}}$, como el conjunto de todos los anillos de valoración discreta de $K\,|k$.*

Con estas definiciones, es claro que el número de singularidades de $\mathcal{X}$ es finito. Además, se tiene una aplicación $\pi : \widetilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$.

Definición 2.1.3. *(**Ramas de $\mathcal{X}$ centradas en P**) Para cada $P \in \mathcal{X}$, los elementos de la fibra $\pi^{-1}(P)$, son llamados las ramas de $\mathcal{X}$ centradas en P.*

Notacion: Para indicar que una rama $v \in \widetilde{\mathcal{X}}$ esta centrada en un punto P de $\mathcal{X}$, pondremos $v|P$.
Por Teorema de extensión de la teoría de valoración, existe al menos una rama centrada en P. De otro lado, las ramas centradas en P son una cantidad finita (ver [10]).

Definición 2.1.4. *(**Divisor**) Un divisor de $\mathcal{X}$ es un producto formal*

$$\mathbf{a} = \prod_{P \in \mathcal{X}} \mathfrak{a}_P$$

donde para cada $P \in \mathcal{X}$, $\mathfrak{a}_P$ es un ideal fraccionario de $\mathcal{O}_P$ distinto de cero y $\mathfrak{a}_P = \mathcal{O}_P$ para casí todo P.

Definición 2.1.5. *(**Divisor localmente principal**) Un divisor $\mathbf{a}$ se llama localmente principal si cada componente $\mathfrak{a}_P$ es un ideal principal.*

A un divisor localmente principal, también se le conoce como *divisor de Cartier.*

Definición 2.1.6. *(**Producto y cociente de divisores**) Para dos divisores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de $\mathcal{X}$, se define el producto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y el cociente $\mathbf{a} : \mathbf{b}$ de la siguiente forma:*
$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})_P := \mathfrak{a}_P \cdot \mathfrak{b}_P = \mathcal{O}_P$-ideal generado por los producto ab donde $a \in \mathfrak{a}_P$ y $b \in b_P$.
$(\mathbf{a} : \mathbf{b})_P = a_P : \mathfrak{b}_P = \{z \in K | z \cdot \mathfrak{b}_P \subseteq \mathfrak{a}_P\}$.

Note que los divisores localmente principales forman un grupo multiplicativo cuyo elemento neutro es el *Divisor estructural*

$$\mathcal{O} := \prod_{P \in \mathcal{X}} \mathcal{O}_P.$$

Ahora, estableceremos un orden parcial entre los divisores según la siguiente definición.

Definición 2.1.7. ***(Orden parcial)*** *Para dos divisores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$*, decimos que* $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ *si y sólo si* $\mathbf{a}_P \supseteq \mathbf{b}_P$ *para cada punto* $P \in \mathcal{X}$.

Con estas definiciones, decimos que un divisor $\mathbf{a}$ es *positivo* si $\mathbf{a} \geq \mathcal{O}$.

2.2. Anillos semilocales

En esta sección, se presenta los hechos básicos sobre subanillos locales de un campo de funciones. Esto lo necesitaremos para establecer una biyección entre los divisores del modelo no singular $\widetilde{\mathcal{X}}$ y la curva $\mathcal{X}$. Usaremos como referencia [6]. Un anillo Noetheriano se dice que es un *anillo semilocal* si contiene sólo un número finito de ideales maximales. Sea $K \mid k$ un campo de funciones en una variable con campo constante k y sea R un subanillo de K. El anillo R se dice que es *un subanillo de* $K \mid k$ si R contiene el campo k y el campo cociente de R es K. Decimos que $\mathfrak{a}$ es un *R-ideal de* $K \mid k$ si $\mathfrak{a}$ es un ideal fraccionario diferente de cero de R.

Teorema 2.2.1. *Sea $K \mid k$ un campo de funciones en una variable con campo constante k y sea S un subanillo de $K \mid k$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *S es un anillo semilocal.*

2. *Existen $x, y_1, \cdots, y_r$ en S tal que x no es constante. S es el conjunto de los elementos de la forma $F(x, y_1, \cdots, y_r)/G(x)$ donde F y G son polinomios en $k[T_0, T_1, \cdots, T_r]$ y $k[T_0]$, respectivamente, con coeficientes en k y tal que $G(0) \neq 0$.*

3. *Existen valoraciones $v_1, \cdots, v_m$ del campo de funciones $K \mid k$ y un entero N tales que S contiene $\{z \in K : v_i(z) \geq N, 1 \leq i \leq m\}$.*

4. *Existen valoraciones $v_1, \cdots, v_m$ del campo de funciones $K \mid k$ y enteros $n_1, \cdots, n_m$ tales que S contiene $\{z \in K : v_i(z) \geq n_i, 1 \leq i \leq m\}$.*

5. *Existen valoraciones $v_1, \cdots, v_m$ del campo de funciones $K \mid k$ y enteros $f_1, \cdots, f_m$ tales que*
$$(S : \widetilde{S}) = \{z \in K : v_i(z) \geq f_i, 1 \leq i \leq m\},$$
donde $(S : \widetilde{S})$ es el ideal conductor de S en su clausura entera $\widetilde{S}$.

6. *S está contenido sólo en un número finito de anillos de valoración del campo de funciones $K \mid k$.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Dado que el número de ideales maximales de S es finito existe un elemento diferente de cero x en la intersección de todos los ideales maximales de S, así x no es constante. Si $G(T_0) \in k[T_0]$ es un polinomio en una variable con coeficientes en k tal que $G(0) \neq 0$, entonces $G(x)$ no está contenido en cualquier ideal de S, y por tanto es una unidad de S. Existen funciones racionales $\frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_t}{b_t}$ en K tal que $K = k\left(x, \frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_t}{b_t}\right)$. Dado que K es el campo cociente de S, podemos escoger a_i y $b_i \neq 0$ elementos de S para cada i, así $K = k(x, a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_s)$. Por Lema 1 en [6], se sigue que S puede ser expresado como una extensión finita de anillo de un anillo S_0, digamos $S = S_0[t_1, \cdots, t_l]$, donde S_0 es un anillo en el cual contiene sólo un número finito de elementos de la forma $F(x, a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_s)/G(x)$, donde F y G son polinomios con coeficientes en k, y $G(0) \neq 0$. Dado que el anillo $k[x, a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_s, t_1, \cdots, t_l]$ está contenido en S, y $G(x)$ es una unidad de S para cada $G(T_0)$ en $k[T_0]$ tal que $G(0) \neq 0$, se sigue que S es la totalidad de los elementos de la forma $F(x, a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_s, t_1, \cdots, t_l)/G(x)$, donde F y G son polinomios con coeficientes en k, y $G(0) \neq 0$.
(2) $\Longrightarrow$ (3) De (2) se sigue que K es el campo cociente de S y $K = k(x, y_1, \cdots, y_r)$ para algunos $x, y_1, \cdots, y_r$ en S tal que x no es constante, y así cada y_i es entero sobre el campo $k(x)$. Entonces $K = k(x)[y_1, \cdots, y_r]$, y cada elemento en K es el cociente de algún elemento de S para una potencia adecuada de x. Dado que la clausura entera $\widetilde{k[x]}$ de $k[x]$ en K es un módulo finitamente generado sobre $k[x]$, existe un entero no negativo n_0 tal que $x^{n_0}\widetilde{k[x]} \subseteq S$. Sea $v_1, \cdots, v_m$ las valoraciones del campo de funciones $K \mid k$ cuyos lugares son precisamente los ceros de la función racional x. así, $v_i(x) > 0$ para cada $i = 1, \cdots, m$. Sea $N := \max\{n_0 v_1(x), \cdots, n_0 v_m(x)\}$. Así, si $z \in K$ y $v_i(z) \geq N$ para cada $i = 1, \cdots, m$, entonces $zG(x)/x^{n_0} \in \widetilde{k[x]}$ para algún polinomio $G(T_0)$ en $k[T_0]$ tal que $G(0) \neq 0$, y así $zG(x) \in x^{n_0}\widetilde{k[x]} \subseteq S$. Dado que $G(x)$ es una unidad de S se sigue que $z \in S$.
(3) $\Longrightarrow$ (4) Sea $n_i = N$ para cada $i = 1, \cdots, m$. Entonces , por (3) , el anillo S debe contener el conjunto dado por $\{z \in K : v_i(z) \geq n_i, 1 \leq i \leq m\}$.
(4) $\Longrightarrow$ (5) Observe que, si v es una valoración de $K \mid k$ diferente de $v_1, \cdots, v_m$ entonces, por el Teorema de aproximación, existe $z \in K$ tal que $v(z) < 0$ y además $v_i(z) \geq n_i$ para cada $i = 1, \cdots, m$, y así $z \notin \mathcal{O}_v$ y $z \in S$. así cualquier valoración de $K \mid k$ cuyos anillo de valoración contiene el anillo S está contenido $v_1, \cdots, v_m$. De otro lado, si el anillo S no está contenido en el anillo valoración $\mathcal{O}_{v_m}$ entonces existen $z_1 \in S$ con $v_m(z_1) < 0$. Por el Teorema de aproximación existe $z_2 \in K$ tal que $v_m(z_2) = n_m$ y $v_i(z_2)$ es muy grande para cada $i = 1, \cdots, m-1$, así que $z_2 \in S$ y $v_i(z_1^{n_m} z_2) > 0$ para cada $i = 1, \cdots, m-1$. Definiendo $y := z_1^{n_m} z_2 + 1$ se tiene $y \in S$, $v_i(y) = 0$ para cada $i = 1, \cdots, m-1$ y $v_m(y) \leq -n_m$. Entonces , si $z \in K$ y $v_i(z) \geq n_i$ para cada $i = 1, \cdots, m-1$, tenemos $zy^{-n} \in S$ para cada entero n suficientemente grande talque $v_m(zy^{-n}) \geq n_m$. De esta manera, $z \in S$. Ahora,

si el anillo de valoración $\mathcal{O}_{v_m}$ no contiene el anillo S, entonces S debe contener el conjunto de la forma $\{z \in K : v_i(z) \geq n_i, 1 \leq i \leq m-1\}$. Además podemos asumir que las valoraciones $v_1, \cdots, v_m$ son precisamente aquellas cuyos anillos de valoración contiene el anillo S. Y así $\widetilde{S} = \cap_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{v_i}$. Ahora, pongamos $(f_1, \cdots, f_m)$ como el vector más pequeño con respecto al orden parcial de $\mathbb{Z}^m$ tal que S contiene el conjunto $\{z \in K : v_i(z) \geq f_i, 1 \leq i \leq m\}$. Ahora, en vista de que se tiene la igualdad, $z\widetilde{S} = \{y \in K : v_i(y) \geq v_i(z), 1 \leq i \leq m\}$ para cualquier $z \in K \backslash \{0\}$, se puede concluir que $z \in (S : \widetilde{S})$, es decir, $z\widetilde{S} \subseteq S$ si y sólo si $v_i(z) \geq f_i, 1 \leq i \leq m$, mostrando (5).

$(5) \Longrightarrow (6)$ Si v es una valoración de $K \mid k$ diferente de $v_1, \cdots, v_m$ Entonces, por Teorema de aproximación existe $z \in K$ tal que $v(z) < 0$ y $v_i(z) \geq f_i$ para cada $i = 1, \cdots, m$, esto es , $z \in (S : \widetilde{S}) \subseteq S$ y $z \notin \mathcal{O}_v$. así, el anillo S está contenido en los anillos de valoración correspondiente a las valoraciones $v_1, \cdots, v_m$.

$(6) \Longrightarrow (1)$ Si $\mathfrak{m}$ es cualquier ideal maximal de S, entonces es posible encontrar una valoración v de $K \mid k$ tal que el anillo de valoración $\mathcal{O}_v$ contiene a S y $\mathfrak{m}_v \cap S = \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m}_v$ es el ideal maximal del anillo $\mathcal{O}_v$. Dado que sólo hay finitas posibilidades para v, hay entonces sólo finitos ideales maximales $\mathfrak{m}$. ■

Sea S un subanillo semilocal de un campo de funciones $K \mid k$. De (5), en el teorema 2.2.1, se sigue que existen valoraciones $v_1, \cdots, v_m$ del campo de funciones $K \mid k$ y enteros $f_1, \cdots, f_m$ tal que

$$(S : \widetilde{S}) = \{z \in K : v_i(z) \geq f_i, 1 \leq i \leq m\}.$$

Las valoraciones $v_1, \cdots, v_m$ son precisamente aquellas valoraciones de $K \mid k$ cuyos anillos de valoraciones contienen a S.

Lema 2.2.1. *Sea $K|k$ un campo de funciones y sean $O_1, O_2, \cdots, O_m$ anillos locales tal que $k \subset O_j \subset K$ y $Fr(O_j) = K$ para $j = 1, 2, \cdots m$. Supongamos que ningún par de anillos O_i, O_j $(i \neq j)$ tienen anillos de valoración en común y que $O \subset K$ es un anillo local para el cual $O_1 \cap O_2 \cdots \cap O_m \subset O$. Entonces existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $O_i \subset O$.*

Demostración. Realizamos la demostración por inducción sobre m. Para $m = 1$ el resultado es claro. Dado que $O_1, O_2, \cdots, O_m$ no tienen anillos de valoración en común, por el Teorema de aproximación; existe $x \in K$ tal que todas las valoraciones arriba de $O_1, O_2, \cdots, O_{m-1}$ son suficientemente grandes en x y todas las valoraciones de O_m son suficientemente grandes en $1 - x$. por Teorema 2.2.1 ,se tiene entonces que $x \in O_1 \cap O_2 \cdots \cap O_m \subset O$. Ahora, si $x \in O$ es una unidad de O y $\alpha \in O_1 \cap O_2 \cdots \cap O_{m-1}$, entonces para n suficientemente grande se tiene que $\alpha x^n \in O$. Como x es invertible en O se sigue que $\alpha \in O$, es decir; $O_1 \cap O_2 \cdots \cap O_{m-1} \subset O$, luego por inducción existe $i \in \{1, 2, ..., m-1\}$ tal que $O_i \subset O$. Si $x \in O$ no es una unidad en O, entonces $1 - x$ si es una unidad en O y de manera similar se muestra en este caso que $O_m \subset O$ completando así la demostración. ■

Lema 2.2.2. *Sean $K|k$ un campo de funciones y S un subanillo semilocal de K con $Fr(S) = K$ tal que $k \subset S \subset K$. Sea $M = \{\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_k\}$ el conjunto de todos los ideales maximales de S, entonces*

$$S = \bigcap_{\mathfrak{m} \in M} S_{\mathfrak{m}}$$

donde $S_{\mathfrak{m}}$ es la localización de S en $\mathfrak{m}$.

Demostración. Es claro que $S \subset \bigcap S_{\mathfrak{m}}$. Sea $x \in \bigcap S_{\mathfrak{m}}$ entonces $x = \frac{a_{\mathfrak{m}}}{b_{\mathfrak{m}}}$ donde $a_{\mathfrak{m}} \in S, b_{\mathfrak{m}} \in S$ pero $b_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$. Ahora $x = \frac{a_{\mathfrak{m}}}{b_{\mathfrak{m}}} = \frac{a}{b}$ con $a, b \in S$ $(b \neq 0)$. Consideremos el ideal $I = S \cdot b$ de S. así, $ab_{\mathfrak{m}} \in I$. Dado que $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ con cada $\mathfrak{q}_i$ ideal primario de S, se tiene que $ab_{\mathfrak{q}} \in q_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Como $b_{\mathfrak{q}} \notin \mathfrak{m}$ para cada $\mathfrak{m} \in M$ concluimos que $a \in \mathfrak{q}_i$ para cada i; es decir, $a \in I$. De esto es claro que $x \in S$, completando la prueba. ■

Como lo hemos dicho antes, estableceremos una correspondencia biyectiva entre las ramas centradas en un punto P, con los ideales maximales de $\tilde{\mathcal{O}}_P$, la clausura algebraica del anillo local $\mathcal{O}_P$. Este hecho, será de gran utilidad más adelante. Sean $v_1, ..., v_n \in \tilde{\mathcal{X}}$ las ramas centradas en P. Entonces, la clausura algebraica de $\mathcal{O}_P$

$$\tilde{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}_{v_1} \cap \cdots \cap \mathcal{O}_{v_n}$$

es un dominio de ideales principales. De otro lado; es sabido que $\tilde{\mathcal{O}}_P$ es un anillo semilocal de K, (por Teorema 2.2.1). Así por Lema 2.2.2 se tiene:

$$\tilde{\mathcal{O}}_P = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}} (\tilde{\mathcal{O}}_P)_{\mathfrak{m}}$$

donde $\mathcal{M} = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, ..., \mathfrak{m}_k\}$ es el conjunto de todos los ideales maximales de $\tilde{\mathcal{O}}_P$. Sea $S_{\mathfrak{m}} := (\tilde{\mathcal{O}}_P)_{\mathfrak{m}}$. Mostremos que $k = n$. Supongamos que $k < n$. Entonces

$$O_{v1} \cap O_{v2} \cdots \cap O_{vk} \cap O_{vk+1} \cdots \cap O_{vn} = S_1 \cap S_2 \cdots \cap S_k \subset S_j$$

para $j = 1, 2, ..., k$. Por el Lema 2.2.1, existe $i \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que $O_{v_i} \subset S_j$. Sin pérdida de generalidad $i = j$. Ahora como O_{v_j} es un anillo de valoración de $K|k$ por Teorema de extensión se tiene que $O_{v_j} = S_j$. Así

$$O_{v_1} \cdots \cap O_{v_k} \cap O_{v_{k+1}} \cdots \cap O_{v_n} = O_{v_1} \cap O_{v_2} \cdots \cap O_{v_k}.$$

Por tanto, $O_{v_1} \cap O_{v_2} \cdots \cap O_{v_k} \subset O_{v_{k+1}|}$ y se tendría que $O_{v_j} \subset O_{v_{k+1}}$ para algún $j \in \{1, 2, ..., k\}$ lo cual es absurdo. De manera análoga se muestra que $n < k$ tampoco es posible, lo cual significa que $k = n$. ■

Como conclusión tenemos lo siguiente.

Para cualquier punto $P \in \mathcal{X}$, existe una correspondencia entre los ideales maximales de $\tilde{\mathcal{O}}_P$ y las ramas centradas en P.

El siguiente teorema, aunque técnico, nos permite definir el *Grado de singularidad* en un punto P de la curva $\mathcal{X}$. También, estará presente en múltiples resultados, e incluso para llegar hasta Riemann-Roch.

Teorema 2.2.2. *Sea $K|k$ un campo de funciones algebraicas en una variable. Sea A un anillo tal que $k \subseteq A \subseteq K$ y $K = \mathrm{Fr}(A)$ es el campo de fracciones de A. Entonces*

$$dim_k(\frac{\tilde{A}}{A}) < \infty$$

donde $\tilde{A}$ denota la clausura algebraica de A en K.

Demostración. Sea $x \in A\backslash\tilde{k}$ (tal elemento existe. En efecto, si suponemos lo contrario, se tendría que $A \subseteq \tilde{k}$. Dado que $\tilde{k}$ es un campo y $K = Fr(A)$, se tiene que $K \subseteq \tilde{k}$, de esto, $\tilde{k} = K$. así la extensión $K|k$ sería algebraica, absurdo). Sea $B := \widetilde{k\,[x]}$. Mostraremos que B es un dominio de Dedekind. En efecto:

- B **es íntegramente cerrado en** K. Sea $a \in K$. Dado que $[K : k(x)] < \infty$, existen $h_i, g_i \in k\,[x]$ tal que $0 = a^m + (\frac{h_1}{g_1})a^{m-1} + (\frac{h_2}{g_2})a^{m-2} + \cdots + (\frac{h_m}{g_m})$, donde $g_i \neq 0$ para cada i. Sea $g = g_1 \cdots g_m$. Tenemos $0 = 0 \cdot g^m = (ag)^m + h_1(\frac{g}{g_1})(ag)^{m-1} + \cdots + h_m(\frac{g^m}{g_m})$. Esto muestra que ag es entero sobre $k\,[x]$, y así; $a = \frac{b}{g}$, donde $b \in B$ y $g \in k[x]\backslash 0$. En particular, K es el campo de fracciones de B y por tanto, B es íntegramente cerrado en K.

- **dim** B **= 1**. Dado que la extensión de anillos $B|k\,[x]$ es entera se tiene que

  $$dimB = dimk\,[x]$$

  ([15], proposición 9.2) y esta última siendo 1; pues $k[x]$ es un DIP que no es un campo.

- B **es un dominio Noetheriano**. B es un $k[x]-$módulo finitamente generado, digamos que $B = \sum_{i=1}^{m} k[x]b_i$(para una prueba, ver [15], Corolario 13.13 y proposición 13.14). En particular podemos escribir $B = k[x, b_1, b_2, ..., b_m]$, así por el Teorema de la base de Hilbert se sigue el resultado.

De otro lado, tenemos el siguiente hecho.
HECHO. Si C es un dominio de Dedekind y D es anillo tal que $C \subseteq D \subseteq Fr(C)$ entonces D también es un dominio de Dedekind. Para una prueba de este resultado ver [9]
Si $A \cdot B$ denota el subanillo de K generado por $A \bigcup B$, entonces por el hecho anterior; $A \cdot B$ es un dominio de Dedekind. En particular; $A \cdot B$ es íntegramente cerrado en

$Fr(A \cdot B) = Fr(A) = K$ y por tanto $\tilde{A} \subseteq \widetilde{A \cdot B} = A \cdot B$. De otro lado, como $A \subseteq \widetilde{A}$ y $B = \widetilde{k[x]} \subseteq \widetilde{A}$ entonces $A \cdot B \subseteq \widetilde{A}$. De ahí donde $A \cdot B = \widetilde{A}$.
Ahora, dado que $A \cdot B = \{\sum a_i b_i : a_i \in A, b_i \in B\}$ y $B = \sum_{i=1}^{m} k[x]b_i$ podemos decir que $\tilde{A} = \sum_{i=1}^{m} Ab_i$. así, podemos escribir $b_i = \frac{h_i}{f}$, con $h_i \in A$ y $f \in A \backslash 0$.
Sea $\mathcal{J} := \left\{ g \in \tilde{A} : g \cdot \tilde{A} \subseteq A \right\}$. Tenemos luego $\mathcal{J}$ es un ideal en $\tilde{A}$ y en A. En particular, $\mathcal{J}$ es un k-subespacio de A distinto de cero; pues $f \in \mathcal{J}$. La aplicación natural $\frac{\tilde{A}}{\mathcal{J}} \longrightarrow \frac{\tilde{A}}{A}$ es un epimorfismo k-lineal; de esta manera

$$dim_k \frac{\tilde{A}}{A} \leq dim_k \frac{\tilde{A}}{\mathcal{J}}$$

Si $\mathcal{J} = \tilde{A}$, el resultado se cumple, luego podemos suponer que $\mathcal{J} \neq \tilde{A}$. Ahora $\mathcal{J} = P_1^{r_1} P_2^{r_2} \cdots P_m^{r_m}$, donde $m \geq 1$, los P_i son ideales primos no nulos de $\tilde{A}$,(y por tanto maximales pues $dim\tilde{A} = 1$), distintos dos a dos; y cada r_i es un entero positivo.
Por el Teorema del residuo chino, la aplicación natural

$$\frac{\tilde{A}}{\mathcal{J}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} \frac{\tilde{A}}{P_i^{r_i}}$$

es un isomorfismo de anillos, y en particular k-lineal; luego

$$dim_k \frac{\tilde{A}}{\mathcal{J}} = \sum_{i=1}^{m} dim_k \frac{\tilde{A}}{P_i^{r_i}}$$

Ahora, para cada i, el campo $L_i := \frac{\tilde{A}}{P_i}$ es un k-espacio vectorial; y por tanto

$$dim_k \frac{\tilde{A}}{P_i^{r_i}} = dim_{L_i} \frac{\tilde{A}}{P_i^{r_i}} \cdot dim_k L_i$$

Ahora consideremos las siguientes dos afirmaciones.
Afirmación 1. Si A es un dominio de Dedekind y Q es un ideal primo no nulo de A (luego maximal), entonces $dim_{\frac{A}{Q}} \frac{A}{Q^n} = n$ para todo $n \geq 1$.
Prueba. Nótese que $\frac{Q^n}{Q^{n+1}}$ es de manera natural un $\frac{A}{Q}$-espacio vectorial. Luego $dim_{\frac{A}{Q}} \frac{A}{Q^{n+1}} = dim_{\frac{A}{Q}} \frac{A}{Q^n} + dim_{\frac{A}{Q}} \frac{Q^n}{Q^{n+1}}$. Para que la afirmación uno quede probada, basta ver que $dim_{\frac{A}{Q}} \frac{Q^j}{Q^{j+1}} = 1$ para todo $j \geq 1$, lo cual se hace por induccion sobre n. El caso $n = 1$ es trivial.
Por factorización única de ideales, $Q^j \neq Q^{j+1}$. Sea $z \in Q^j \backslash Q^{j+1}$. Queremos probar que $\frac{Q^j}{Q^{j+1}} = \frac{A}{Q} \cdot \overline{z}$ o equivalentemente $Q^j = Q^{j+1} + Az$. Para esto; note que; si P es un factor primo del ideal $Q^{j+1} + Az$ entonces $Q^{j+1} \subseteq P$. Luego $Q \subseteq P$ y así $Q = P$ por la maximalidad de Q. Por tanto, $Q^r = Q^{j+1} + Az$, con $r \geq 1$. Notar que $Q^s \subseteq Q^t$ implica que $s \geq t$ (de lo contrario, $s < t$, entonces multiplicando por el ideal fraccionario $(Q^{-1})^s$ obtendríamos $A \subseteq Q^{t-s}$ lo cual es absurdo). Con esto tenemos que $j + 1 \geq r$. Note que $r = j + 1$ no es posible, pues en tal caso $z = 0$ lo cual es absurdo. así que $j \geq r$. De esto $Q^r \supseteq Q^j \supseteq Q^{j+1}$. Dado que $z \in Q^r$, se tiene

que $r = j$

Afirmación 2. Si Q es un ideal primo no nulo de $\tilde{A}$, entonces $dim_k \frac{\tilde{A}}{Q} < \infty$.

Prueba. La aplicación natural $\frac{\tilde{A}}{Q} \longrightarrow \frac{\tilde{A_Q}}{Q\tilde{A_Q}}$ es un isomorfismo k-lineal (pues si $t \in \tilde{A} \backslash Q$ entonces $1 = b + ct$ con $b \in Q$ y $c \in \tilde{A}$. Luego $\frac{1}{t} - \frac{c}{1} = \frac{b}{t} \in Q\tilde{A_Q}$, probando, así la sobreyectividad). Como $\tilde{A}$ es un dominio de Dedekind entonces $\tilde{A_Q}$ es un anillo de valoración de K ([16] Teoremás 6,7 y 8) y como $k \subseteq \tilde{A_Q}$, entonces $\tilde{A_Q}$, es de hecho, un anillo de valoración de $K|k$ y por tanto $dim_k \frac{\tilde{A_Q}}{Q\tilde{A_Q}} < \infty$ ([10] Proposición I.1.14)

De esta manera, el teorema queda probado. ■

Corolario 2.2.1. *Para cada $P \in \mathcal{X}$, se cumple que $dim_k(\frac{\tilde{\mathcal{O}_P}}{\mathcal{O}_P}) < \infty$.*

Definición 2.2.1. *Para cada $P \in \mathcal{X}$, se define el grado de singularidad de P como el entero*

$$\delta_P := dim_k(\frac{\tilde{\mathcal{O}_P}}{\mathcal{O}_P}).$$

Ejemplo 2.2.1. *Sea $\widetilde{\mathcal{X}}$ una curva algebraica completa , geométricamente irreducible, no-singular, con campo de funciones dado por $K|\mathbb{F}_q$. Sea $S = \{Q_1, Q_2, .., Q_m\}$ m puntos racionales de $\widetilde{\mathcal{X}}$ con $m \geq 2$. Sean $n_{Q_1}, n_{Q_2}, .., n_{Q_m}$ m enteros positivos. Consideremos el anillo local $\mathcal{O}_{P_0} := k + \mathcal{F}_{P_0}$ de $K|\mathbb{F}_q$, donde $\mathcal{F}_{P_0}$ está dado por*

$$\mathcal{F}_{P_0} = \{x \in K : \quad v_Q(x) \geq n_Q, \quad Q \in S\},$$

donde v_Q es la valoración asociada al anillo $\mathcal{O}_Q$. Existe una curva $\mathcal{X}$ algebraica completa , geométricamente irreducible, no-singular, con campo de funciones dado por $K|\mathbb{F}_q$ que tiene un sólo punto singular en P_0, con anillo local isomorfo al anillo $\mathcal{O}_{P_0}$ (ver [6], teor. 5). Se nota que $\mathcal{F}_{P_0}$ no es más que el conductor del anillo $\widetilde{\mathcal{O}}_{P_0}$ en $\mathcal{O}_{P_0}$. Dado que, $\mathcal{F}_{P_0} \subseteq \mathcal{O}_{P_0} \subseteq \widetilde{\mathcal{O}}_{P_0}$, se tiene

$$\begin{aligned} dim_k \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_{P_0}}{\mathcal{F}_{P_0}} &= dim_k \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_{P_0}}{\mathcal{O}_{P_0}} + dim_k \frac{\mathcal{O}_{P_0}}{\mathcal{F}_{P_0}} \\ \sum_{Q \in S} n_Q &= \delta_{P_0} + 1 \end{aligned}$$

así que,

$$\delta_{P_0} = \sum_{Q \in S} n_Q - 1.$$

Ahora, nos propondremos definir el grado de un divisor $\boldsymbol{a}$. Pero antes, consideremos lo siguiente. Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ divisores de $\mathcal{X}$, tal que $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$. Fijemos un punto P de $\mathcal{X}$. Como $\widetilde{\mathcal{O}}_P$ es un D.I.P y además un dominio de Dedekind, se concluye entonces que, $(\mathfrak{a}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P) = z'\widetilde{\mathcal{O}}_P$ con $z' \in (\mathfrak{a}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P)$. Sea $\mathfrak{p}_i$ el $i-$ésimo ideal maximal de $\widetilde{\mathcal{O}}_P$. Dado que, $(\mathfrak{b}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P) \subseteq \mathfrak{b}_P \subseteq \mathfrak{a}_P$, es claro que,

$$dim_k \frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b}_P} \leq dim_k \frac{\mathfrak{a}_P}{(\mathfrak{b}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P)}$$

Note que

$$\frac{z\mathfrak{a}_P}{z(\mathfrak{a}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P)} \hookrightarrow \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{zz'\widetilde{\mathcal{O}}_P}$$

donde z es un elemento de $\mathcal{O}_P$ diferente de cero, con la propiedad, $z\mathfrak{a}_P \subseteq \mathcal{O}_P$. Por Teorema chino del residuo

$$\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{zz'\widetilde{\mathcal{O}}_P} \cong \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{p}_1^{n_1}} x \cdots x \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{p}_m^{n_m}}$$

de modo que

$$dim_k \frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b}_P} \leq \sum_{i=1}^{m} dim_k \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{p}_i^{n_i}} < \infty$$

De esta manera, tiene sentido definir el *Grado* de un divisor por las siguientes propiedades:

1. $deg(\mathcal{O}) = 0$.

2. $deg(\boldsymbol{a}) - deg(\boldsymbol{b}) = \sum_{P\in\mathcal{X}} dim_k \frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b}_P}$.

siempre y cuando $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$.

Para cada función racional $z \in K^*$ definimos el *Divisor principal* de z, como:

$$div(z) := \prod_{P\in\mathcal{X}} z^{-1}\mathcal{O}_P.$$

Consideremos el siguiente k-espacio vectorial:

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}) := \bigcap_{P\in\mathcal{X}} \mathfrak{a}_P = \{z \in K | div(z) \cdot \mathbf{a} \geq \mathcal{O}\}$$

Para que éstas definiciones y notaciones tengan una relación con el trabajo de Rosenlicht [**R**], asignamos a cada elemento $\sum n_P P$ del grupo libre, abeliano; generado por los puntos no singulares de $\mathcal{X}$; el divisor localmente principal cuya $P-$componente es igual a $(m_p)^{-n_P}$ (respectivamente, $\mathcal{O}_P$) cuando P es no singular (respectivamente, singular), donde m_p es el ideal maximal de $\mathcal{O}_P$.

En este punto, podemos preguntarnos que relación hay entre los divisores de $\mathcal{X}$ y los de $\widetilde{\mathcal{X}}$. La respuesta a esta pregunta, es de hecho, el punto fundamental para pasar del modelo no singular $\widetilde{\mathcal{X}}$ al $\mathcal{X}$, o viceversa. Para establecer esta relación, necesitamos primero un par de definiciones.

Definición 2.2.2. *($\widetilde{\mathcal{O}}-$**divisor**) Decimos que un divisor*

$$\mathbf{a} = \prod_{P\in\mathcal{X}} \mathfrak{a}_P$$

de $\mathcal{X}$ es un $\widetilde{\mathcal{O}}-$divisor, si cada componente $\mathfrak{a}_P$ es un ideal fraccionario de $\widetilde{\mathcal{O}}_P$ y $\mathfrak{a}_P = \widetilde{\mathcal{O}}_P$ para casi todo $P \in \mathcal{X}$.

Definición 2.2.3. ***(Divisor de*** $\widetilde{\mathcal{X}}$***)*** *Un divisor del modelo no-singular* $\widetilde{\mathcal{X}}$*, es un producto formal*

$$\mathcal{A} = \prod_{v \in \widetilde{\mathcal{X}}} A_v$$

donde A_v *es un ideal fraccionario de* $\mathcal{O}_v$ *y para casi todo* $v \in \widetilde{\mathcal{X}}$*,* $A_v = O_v$*.*

Sea $v \in \widetilde{\mathcal{X}}$. Como el anillo asociado a la valoración v, $\mathcal{O}_v$, es un dominio de Dedekind, se sigue que cada ideal fraccionario A_v de $\mathcal{O}_v$ tiene la forma

$$A_v = \mathfrak{m}_v{}^{-n_v}.$$

De esta manera, un divisor $\mathcal{A}$ de $\widetilde{\mathcal{X}}$ tiene la expresión

$$\mathcal{A} = \prod_{v \in \widetilde{\mathcal{X}}} \mathfrak{m}_v{}^{-n_v}.$$

Ahora, establezcamos la biyección que se había mencionado. Dado un divisor $\mathcal{A}$ de $\widetilde{\mathcal{X}}$

$$\mathcal{A} = \prod_{v \in \widetilde{\mathcal{X}}} \mathfrak{m}_v{}^{-n_v}$$

se sigue que $\mathcal{A}$ se puede factorizar en la forma

$$\mathcal{A} = \prod_{P \in \mathcal{X}} \prod_{v|P} \mathfrak{m}_v{}^{-n_v}.$$

Sean $P \in \mathcal{X}$ y $v_1, ... v_m$ las m valoraciones encima de P. Se sabe que $\widetilde{\mathcal{O}_P}$ tiene exactamente m ideales maximales, digamos que son $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_m$. Consideremos

$$\mathfrak{a}_P := \mathfrak{p}_1{}^{-n_{v_1}} \cdots \mathfrak{p}_m{}^{-n_{v_m}} \tag{2.1}$$

y se define

$$\boldsymbol{a} = \prod_{P \in \mathcal{X}} \mathfrak{a}_P.$$

Es decir, dado un divisor $\mathcal{A}$ de $\widetilde{\mathcal{X}}$, lo identificamos con el $\widetilde{\mathcal{O}}-$divisor $\boldsymbol{a}$ construido. Recíprocamente, dado un $\widetilde{\mathcal{O}}-$divisor $\boldsymbol{a}$, digamos

$$\boldsymbol{a} = \prod_{P \in \mathcal{X}} \mathfrak{a}_P$$

entonces $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{p}_1{}^{-n_{v_1}} \cdots \mathfrak{p}_m{}^{-n_{v_m}}$, ya que $\mathfrak{a}_P$ es un ideal fraccionario del dominio de Dedekind $\widetilde{\mathcal{O}_P}$. Por tanto, a este divisor $\boldsymbol{a}$, se le asocia el divisor de $\widetilde{\mathcal{X}}$

$$\mathcal{A} = \prod_{P \in \mathcal{X}} \prod_{v|P} \mathfrak{m}_v{}^{-n_v}.$$

De esta manera, se establece una relación biyectiva entre divisores de $\widetilde{\mathcal{X}}$ y $\widetilde{\mathcal{O}}-$divisores de $\mathcal{X}$. Note que el divisor estructural de $\widetilde{\mathcal{X}}$ se corresponde con el $\widetilde{\mathcal{O}}-$divisor

$$\widetilde{\mathcal{O}} := \prod_{P \in \mathcal{X}} \widetilde{\mathcal{O}}_P.$$

2.3. Paraleletope y Adeles

En esta sección, se agrupa todas las ideas expuestas hasta el momento y se procede a dar la demostración del Teorema de Riemann-Roch para curvas singulares. Para esto, debemos introducir la noción de paraleletope y adeles. Sea $P \in \mathcal{X}$ y $v_1, ..., v_m$ las ramas de $\widetilde{\mathcal{X}}$ centradas en P, entonces

$$\mathcal{O}_P \subseteq \widetilde{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}_{v_1} \cap \cdots \cap \mathcal{O}_{v_m}$$

donde $\widetilde{\mathcal{O}}_P$ es un dominio de ideales principales cuyos ideales maximales se corresponden biyectivamente a las ramas $v_1, ..., v_m$. Por definición

$$\widehat{\mathcal{O}}_P := \overleftarrow{lim}_n \; \mathcal{O}_P/{m_p}^n$$

y

$$\widehat{\widetilde{\mathcal{O}}}_P := \overleftarrow{lim}_n \; \widetilde{\mathcal{O}}_P/(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_m)^n$$

siendo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, ..., \mathfrak{p}_m$ los ideales maximales de $\widetilde{\mathcal{O}}_P$. Como $\widetilde{\mathcal{O}}_P$ es un $\mathcal{O}_P$-módulo finitamente generado (se sigue de la demostración del teorema 1.1) por el Lema de Artin-Ress (ver [17] teorema 10.11 pág.107), la topología de $\mathcal{O}_P$ es inducida por la topología de $\widetilde{\mathcal{O}}_P$, teniendo así $\widehat{\mathcal{O}}_P \subseteq \widehat{\widetilde{\mathcal{O}}}_P$, luego se sigue fácilmente que

$$dim_k \frac{\widehat{\widetilde{\mathcal{O}}_P}}{\widehat{\mathcal{O}}_P} = dim_k \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P} = \delta_P < \infty.$$

Ahora, por el Teorema chino del residuo

$$\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_m)^n} \cong \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{p}_1^n} \times \cdots \times \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{p}_m^n}.$$

Además, para $j = 1, 2, ..., m$, afirmamos que si $\mathfrak{m}_{v_j}$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{v_j}$, entonces

$$\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{m}_j^n} \cong \frac{\mathcal{O}_{v_j}}{\mathfrak{m}_{v_j}^n}.$$

En efecto: Consideremos la aplicación canónica $\phi : \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{p}_j^n} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{v_j}}{m_{v_j}^n}$ definida de la siguiente forma, $\phi(x + \mathfrak{p}_j^n) := x + m_{v_j}^n$. Así $x + m_{v_j}^n = y + m_{v_j}^n$ en $\frac{\mathcal{O}_{v_j}}{m_{v_j}^n}$ si y sólo si $x - y \in m_{v_j}^n = \mathcal{O}_{v_j} \cap \mathfrak{p}_j^n$ si y sólo si $x + \mathfrak{p}_j^n = y + \mathfrak{p}_j^n$ en $\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{p}_j^n}$. Luego, la aplicación está bien definida y es inyectiva. Mostremos la sobreyectividad. Si $y \in \mathcal{O}_{v_j}$ veamos que existe $x \in \widetilde{\mathcal{O}}_P$ tal que $x + m_{v_j}^n = y + m_{v_j}^n$ es decir; $x - y \in m_{v_j}^n$ o equivalentemente $v_j(x - y) \geq n$, donde v_j es una valoración de $K|K$ asociada al anillo $\mathcal{O}_{v_j}$. Por el Teorema de aproximación, existe $x \in K$ tal que $v_i(x) \geq 0$ para $i \neq j$ y $v_j(x - y) \geq n$ con esto, $x \in \widetilde{\mathcal{O}}_P$ terminando la justificación de la afirmación. De manera que

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_m)^n} &\cong \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{p}_1^n}\times\cdots\times\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{p}_m^n} \\ &\cong \frac{\mathcal{O}_{v_1}}{m_{v_1}^n}\times\cdots\times\frac{\mathcal{O}_{v_m}}{m_{v_m}^n} \end{aligned} \tag{2.2}$$

y tomando límete inverso en 2.2

$$\begin{aligned} \overleftarrow{lim}\,\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_m)^n} &\cong \overleftarrow{lim}\left(\frac{\mathcal{O}_{v_1}}{\mathfrak{m}_{v_1}^n}\times\cdots\times\frac{\mathcal{O}_{v_m}}{\mathfrak{m}_{v_m}^n}\right) \\ &= \overleftarrow{lim}\,\frac{\mathcal{O}_{v_1}}{\mathfrak{m}_{v_1}^n}\times\cdots\times\overleftarrow{lim}\,\frac{\mathcal{O}_{v_m}}{\mathfrak{m}_{v_m}^n} \end{aligned}$$

obteniendo así

$$\widehat{\widetilde{\mathcal{O}}_P}\cong\widehat{\mathcal{O}}_{v_1}\times\cdots\times\widehat{\mathcal{O}}_{v_m}.$$

De otro lado, sea v una valoración de $K|k$, se define $\widehat{k_v}:=k((t))$ como las series de potencias formales de Laurent donde t es un parámetro local uniformizante.
Ahora, si $\mathfrak{a}_P$ es la P-componente de un divisor $\boldsymbol{a}$ de $\mathcal{X}$; se tiene

$$\widehat{\mathfrak{a}_P}\hookrightarrow\widehat{\widetilde{\mathcal{O}}_P}=\widehat{\mathcal{O}}_{v_1}\times\cdots\times\widehat{\mathcal{O}}_{v_m}\hookrightarrow\widehat{k}_{v_1}\times\widehat{k}_{v_2}\cdots\times\widehat{k}_{v_m}$$

ya que por el Teorema de la estructura de Cohen $\widehat{\mathcal{O}}_{v_j}\cong k[[t]]\subseteq k((t))$ siendo $k[[t]]$ el conjunto de series de potencias. Si denotamos para cada $P\in X$

$$\prod_{v|P}\widehat{k_v}:=\widehat{k}_{v_1}\times\widehat{k}_{v_2}\cdots\times\widehat{k}_{v_m}$$

se puede ver entonces que

$$\prod_{P\in\mathcal{X}}\widehat{\mathfrak{a}_P}\hookrightarrow\prod_{P\in\mathcal{X}}\prod_{v|P}\widehat{k_v}=\prod_{v\in\widetilde{X}}\widehat{k_v} \tag{2.3}$$

De esta manera, podemos defnir el paraleletope de un divisor $\boldsymbol{a}$ y la k-álgebra de adeles como sigue:

Definición 2.3.1. ***(Paraleletope)*** *Para cada divisor* $\mathbf{a}$ *de* $\mathcal{X}$*, se define el paraleletope de* $\mathbf{a}$*, como el producto cartesiano*

$$\Lambda(\mathbf{a}):=\prod_{P\in\mathcal{X}}\widehat{\mathfrak{a}_P}$$

Definición 2.3.2. ***(Adeles)*** *El álgebra de adeles de* $K|k$ *es la* k*-álgebra definida por*

$$\widehat{A_{K|k}}:=\{(x_v)\in\prod_{v\in\widetilde{\mathcal{X}}}\widehat{k_v}:\quad\widehat{v}(x_v)\geq 0,\quad\text{para casi todo}\quad v\in\widetilde{\mathcal{X}}\}$$

donde $\widehat{v}$ *es la extensión de* v *en* $\widehat{k_v}$*.*

Cabe decir que las operaciones definidas en $\widehat{A_{K|k}}$ son las naturales, esto es:

$$\begin{aligned}(x_v)+(y_v): &= (x_v+y_v)\\ (x_v)\cdot(y_v): &= (x_v\cdot y_v)\\ c(x_v): &= (cx_v)\end{aligned}$$

para toda constante c del campo k.

Notación: En vez de escribir $\widehat{A_{K|k}}$, escribiremos simplemente A. Según la relación 2.3, se puede ver el paraleletope de **a**, como una subálgebra de $\widehat{A_{K|k}}$. Similarmente, el campo K, será considerado como una subálgebra de $\widehat{A_{K|k}}$, ya que

$$\begin{aligned}K &\hookrightarrow \widehat{A_{K|k}}\\ z &\longmapsto (z_v)\end{aligned}$$

donde $z_v = z$ para todo $v \in \mathcal{X}$. De hecho, se trata de una subálgebra, ya que como es sabido, toda función racional $x \in K$ tiene sólo un número finito de polos.
Con esta notación, es fácil ver que

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}) = \Lambda(\mathbf{a})\bigcap K.$$

Como siempre sucede en matemáticas, al tratar de generalizar un concepto o un resultado, se tiene por apoyo o como base, la situación que se quiere generalizar. Pues bien, el siguiente teorema es en este caso, el punto de apoyo que nos permite generalizar el Teorema de Riemann-Roch para curvas singulares. Como es costumbre, para cada divisor **a** de $\mathcal{X}$ se denota por $i(\mathbf{a})$ la dimensión sobre k del espacio cociente $\frac{A}{\Lambda(\mathbf{a})+K}$ y $\ell(\mathbf{a}) := dim_k\mathcal{L}(\mathbf{a})$. Lo mismo vale para los divisores del modelo no-singular $\widetilde{\mathcal{X}}$, es decir, $i(\mathcal{A}) = dim_k\frac{A}{\Lambda(\mathcal{A})+K}$ y $\ell(\mathcal{A}) = dim_k\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Teorema 2.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ un divisor de $\widetilde{\mathcal{X}}$ y* **a** *el $\widetilde{\mathcal{O}}-$divisor de $\mathcal{X}$ correspondiente, entonces*

$\boxed{1.}$ $\Lambda(\mathbf{a}) = \Lambda(\mathcal{A})$.

$\boxed{2.}$ $(\mathbf{a}) = i(\mathcal{A})$.

$\boxed{3.}$ $\ell(\mathbf{a}) = \ell(\mathcal{A})$.

Demostración. $\boxed{1.}$ Según la correspondencia y la construcción hecha antes (ver página 17) se sigue fácilmente que

$$\widehat{a_P} = \prod_{v|P}\widehat{A_v}$$

ya que $\mathfrak{m}_{v_i} = \mathfrak{p}_i \cap \mathcal{O}_{v_i}$. Así

$$\Lambda(\mathbf{a}) = \prod_{P\in\mathcal{X}}\prod_{v|P}\widehat{A_v} = \prod_{v\in\widehat{\mathcal{X}}}\widehat{A_v} = \Lambda(\mathcal{A}).$$

$\boxed{2.}$ Tenemos que $i(\mathbf{a}) = dim_k A/(\Lambda(\mathbf{a}) + K) = dim_k A/(\Lambda(\mathcal{A}) + K) = i(\mathcal{A})$.
$\boxed{3.}$ $\ell(\mathbf{a}) = dim_k \mathcal{L}(\mathbf{a}) = dim_k \Lambda(\mathbf{a}) \bigcap K = dim_k \Lambda(\mathcal{A}) \bigcap K = \ell(\mathcal{A})$. ■

Veamos que todo esta preparado para llegar al propósito de este capítulo. Sea $\mathbf{a}$ un divisor cualquiera de $\mathcal{X}$, entonces

$$\mathbf{a} : \widetilde{\mathcal{O}} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{a} \cdot \widetilde{\mathcal{O}} \tag{2.4}$$

siendo $(\mathbf{a} : \widetilde{\mathcal{O}})$, el mayor $\widetilde{\mathcal{O}}-$divisor de $\widetilde{\mathcal{X}}$ que cumple la relación 2.4. Similarmente, $\mathbf{a} \cdot \widetilde{\mathcal{O}}$ es el menor $\widetilde{\mathcal{O}}-$divisor de $\widetilde{\mathcal{X}}$ que cumple la fórmula 2.4. De esta relación, se deduce que $i(\mathbf{a})$ y $\ell(\mathbf{a})$ son finitas. En efecto:
Como $\mathbf{a} \leq \mathbf{a} \cdot \widetilde{\mathcal{O}}$, se sigue entonces que $\Lambda(\mathbf{a}) \bigcap K \subseteq \Lambda(\mathbf{a} \cdot \widetilde{\mathcal{O}}) \bigcap K$, así es claro que $\ell(a) \leq \ell(\mathbf{a} \cdot \widetilde{\mathcal{O}})) < \infty$, por Teorema 2.3.1 y aplicado en el caso no-singular. Ahora, en vista de que $(\mathbf{a} : \widetilde{\mathcal{O}}) \leq \mathbf{a}$, implica entonces que

$$\Lambda(\mathbf{a} : \widetilde{\mathcal{O}}) + K \subseteq \Lambda(\mathbf{a}) + K$$

y por tanto, el homomofismo natural

$$A/(\Lambda(\mathbf{a} : \widetilde{\mathcal{O}}) + K) \longrightarrow A/(\Lambda(\mathbf{a}) + K)$$

es sobreyectivo. Luego, $i(\mathbf{a}) \leq i(\mathbf{a} : \widetilde{\mathcal{O}}) < \infty$ por Teorema 2.3.1 y aplicado en el caso no-singular.
Note que el homomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(\mathbf{a}) & \longrightarrow & \bigoplus_{P \in \mathcal{X}} \frac{\widehat{a_P}}{\widehat{b_P}} \\ (z_P)_{P \in \mathcal{X}} & \longmapsto & (..., z_P + \widehat{b_P}, ...) \end{array}$$

induce el isomorfismo

$$\frac{\Lambda(\mathbf{a})}{\Lambda(\mathbf{b})} \cong \bigoplus_{P \in \mathcal{X}} \frac{\widehat{a_P}}{\widehat{b_P}}$$

para dos divisores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de $\mathcal{X}$ con $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$. De modo que,

$$\begin{aligned} dim_k \frac{\Lambda(\mathbf{a})}{\Lambda(\mathbf{b})} &= \sum_{P \in \mathcal{X}} dim_k \frac{\widehat{a_P}}{\widehat{b_P}} \\ &= \sum_{P \in \mathcal{X}} dim_k \frac{\mathbf{a}_P}{\mathbf{b}_P} \\ &= deg(\mathbf{a}) - deg(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Es decir,

$$dim_k \frac{\Lambda(\mathbf{a})}{\Lambda(\mathbf{b})} = deg(\mathbf{a}) - deg(\mathbf{b}) \tag{2.5}$$

Con estos resultados, estamos en condiciones para mostrar entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. ***(Teorema de Riemann-Roch para curvas singulares)*** *Cada divisor* $\mathbf{a}$ *de* $\mathcal{X}$ *satisface*

$$\ell(\mathbf{a}) = deg(\mathbf{a}) + 1 - g + i(\mathbf{a})$$

donde $g := i(\mathcal{O})$ *es llamado el género aritmético de* $\mathcal{X}$

Demostración. Es claro que la aplicación

$$\Lambda(\mathbf{a}) \to \Lambda(\mathbf{a}) + K \to \frac{\Lambda(\mathbf{a}) + K}{\Lambda(\boldsymbol{b}) + K}$$

es sobreyectiva, cuyo núcleo esta dado por $\Lambda(\mathbf{a}) \cap (\Lambda(\boldsymbol{b}) + K) = \Lambda(\boldsymbol{b}) + \mathcal{L}(\mathbf{a})$. así,

$$\frac{\Lambda(\mathbf{a})}{\Lambda(\boldsymbol{b}) + \mathcal{L}(\mathbf{a})} \cong \frac{\Lambda(\mathbf{a}) + K}{\Lambda(\boldsymbol{b}) + K}$$

Como

$$\frac{\Lambda(\mathbf{a})}{\Lambda(\boldsymbol{b}) + \mathcal{L}(\mathbf{a})} \cong \frac{\Lambda(\mathbf{a})/\Lambda(\boldsymbol{b})}{\Lambda(\boldsymbol{b}) + \mathcal{L}(\mathbf{a})/\Lambda(\boldsymbol{b})}$$

se tiene la siguiente secuencia exacta

$$0 \to \frac{\Lambda(\boldsymbol{b}) + \mathcal{L}(\mathbf{a})}{\Lambda(\boldsymbol{b})} \hookrightarrow \frac{\Lambda(\mathbf{a})}{\Lambda(\boldsymbol{b})} \to \frac{\Lambda(\mathbf{a}) + K}{\Lambda(\boldsymbol{b}) + K} \to 0$$

Pero,

$$\frac{\Lambda(\boldsymbol{b}) + \mathcal{L}(\mathbf{a})}{\Lambda(\boldsymbol{b})} \cong \frac{\mathcal{L}(\mathbf{a})}{\Lambda(\boldsymbol{b}) \cap \mathcal{L}(\mathbf{a})} = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{a})}{\mathcal{L}(\boldsymbol{b})}$$

así, vemos finalmente, que la secuencia

$$0 \to \frac{\mathcal{L}(\mathbf{a})}{\mathcal{L}(\boldsymbol{b})} \hookrightarrow \frac{\Lambda(\mathbf{a})}{\Lambda(\boldsymbol{b})} \to \frac{\Lambda(\mathbf{a}) + K}{\Lambda(\boldsymbol{b}) + K} \to 0$$

es exacta. De estas relaciones se concluye

$$dim_k \frac{\Lambda(\mathbf{a})}{\Lambda(\boldsymbol{b})} = dim_k \frac{\mathcal{L}(\mathbf{a})}{\mathcal{L}(\boldsymbol{b})} + dim_k \frac{\Lambda(\mathbf{a}) + K}{\Lambda(\boldsymbol{b}) + K}$$

Observe lo siguiente,

$$dim_k \frac{\Lambda(\mathbf{a}) + K}{\Lambda(\boldsymbol{b}) + K} = i(\mathbf{a}) - i(\boldsymbol{b})$$

ya que

$$\frac{A}{\Lambda(\mathbf{a}) + K} \cong \frac{(A/\Lambda(\boldsymbol{b}) + K)}{(A/(\Lambda(\mathbf{a}) + K)/\Lambda(\boldsymbol{b}) + K)}.$$

así

$$deg(\mathbf{a}) - deg(\boldsymbol{b}) = \ell(\mathbf{a}) - \ell(\boldsymbol{b}) + i(\mathbf{a}) - i(\boldsymbol{b})$$

Por tanto,

$$deg(\boldsymbol{a}) - \ell(\boldsymbol{a}) - i(\boldsymbol{a}) = deg(\boldsymbol{b}) - \ell(\boldsymbol{b}) - i(\boldsymbol{b})$$

para cualesquier para de divisores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de $\mathcal{X}$ con $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$. De hecho, si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos divisores arbitrarios de $\mathcal{X}$ y $\boldsymbol{c}$ es un tercer divisor de $\mathcal{X}$, con $\boldsymbol{c}$ mayor que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, aplicando el mismo razonamiento anterior, se tiene

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{a}) - \ell(\mathbf{a}) - i(\mathbf{a}) &= deg(\mathbf{c}) - \ell(\mathbf{c}) - i(\mathbf{c}) \\ &= deg(\boldsymbol{b}) - \ell(\boldsymbol{b}) - i(\boldsymbol{b}). \end{aligned}$$

Como conclusión, $deg(\mathbf{a}) - \ell(\mathbf{a}) - i(\mathbf{a})$ no depende del divisor $\mathbf{a}$. En particular, $deg(\mathbf{a}) - \ell(\mathbf{a}) - i(\mathbf{a}) = deg(\mathcal{O}) - \ell(\mathcal{O}) - i(\mathcal{O}) = -1 - i(\mathcal{O})$. así queda mostrado el teorema. ■

2.4. Consecuencias del Teorema de Riemann-Roch

Esta sección, esta dedicada a considerar ciertas consecuencias inmediatas del teorema 2.3.2. algúnas de ellas, la fórmula de Hironaka 2.4.1, y la definición 2.4.2 del divisor de una direfencial λ, entre otras. Consideremos inicialmente un par de resultados que utilizaremos para hacer cuentas más adelante.

Corolario 2.4.1. *Para cada* $z \in K^*$

$$deg(div(z)) = 0$$

Demostración. Sean $h \in K^*$ y $\boldsymbol{b} = div(h)$ entonces $h\boldsymbol{b} = \mathcal{O}$. De manera que, $h\mathcal{L}(\boldsymbol{b}) = \mathcal{L}(\mathcal{O})$ y por tanto $\ell(\boldsymbol{b}) = \ell(\mathcal{O})$. También $h\Lambda(\boldsymbol{b}) = \Lambda(\mathcal{O})$ y luego $i(\boldsymbol{b})) = i(\mathcal{O})$. Utilizando el Teorema de Riemann-Roch

$$\ell(\boldsymbol{b}) = deg(\boldsymbol{b}) + 1 - g + i(\boldsymbol{b}) = \ell(\mathcal{O}) = deg(\mathcal{O}) + 1 - g + i(\mathcal{O})$$

así, $deg(div(z)) = 0$ ■

Corolario 2.4.2. *Si* $deg(\mathbf{a}) < 0$, *entonces* $\mathcal{L}(\mathbf{a}) = 0$

Demostración. Supongamos que existe $h \in \mathcal{L}(\mathbf{a}) \setminus \{0\}$. Entonces, $div(h) \cdot \mathbf{a} \geq \mathcal{O}$ y por tanto $deg(div(h) \cdot \mathbf{a}) \geq 0$, es decir, $deg(div(h)) + deg(\mathbf{a}) = deg(\mathbf{a}) \geq 0$. ■

Corolario 2.4.3. *Sea* $\mathbf{a}$ *un divisor de* $\mathcal{X}$, *y* $x \in K$ *diferente de cero. Entonces*

$$deg(div(x) \cdot \mathbf{a}) = deg(\mathbf{a})$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x^{-1}\mathfrak{a}_P \subseteq \mathcal{O}_P$ para todo punto $P \in \mathcal{X}$, con $x \in \mathcal{O}_P$. De manera que $deg(div(x)\cdot \mathbf{a}) \subseteq \mathcal{O}$. Así

$$\begin{aligned} deg(\mathcal{O}) - deg(div(x)\cdot \mathbf{a}) &= \sum_{P\in\mathcal{X}} dim_k \frac{\mathcal{O}_P}{x^{-1}\mathfrak{a}_P} \\ &= \sum_{P\in\mathcal{X}} dim_k \frac{x\mathcal{O}_P}{\mathfrak{a}_P} \\ &= deg(div(x^{-1}) - deg(\mathbf{a}) \\ &= 0 - deg(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Al entero $\widetilde{g}$, el género del modelo no singular $\widetilde{\mathcal{X}}$, es llamado el género geométrico de $\mathcal{X}$.

Teorema 2.4.1. ***(Fórmula género de Hironaka)***

$$g = \widetilde{g} + \sum_{P\in\mathcal{X}} \delta_P.$$

Demostración. Sea $\widetilde{\mathcal{A}}$ el divisor de $\widetilde{\mathcal{X}}$ que se corresponde con el $\widetilde{\mathcal{O}}-$divisor, $\widetilde{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{X}$. Por el Teorema de Riemann-Roch se tiene que

$$\ell(\widetilde{\mathcal{O}}) = deg(\widetilde{\mathcal{O}}) + 1 - g + i(\widetilde{\mathcal{O}})$$
$$\ell(\widetilde{\mathcal{A}}) = deg(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1 - \widetilde{g} + i(\widetilde{\mathcal{A}})$$

restando estas dos ecuaciones y teniendo en cuenta que $deg(\widetilde{\mathcal{A}}) = 0$ se llega a que $deg(\widetilde{\mathcal{O}}) - g + \widetilde{g} = 0$ quedando así demostrado el teorema. ∎

Uno de los conceptos importante en geometría algebraica y para este trabajo, es el concepto de "diferencial". Este concepto se presenta a continuación y es bien conocido en geometría algebraica. En el próximo capítulo se retoma constantemente. Por el momento, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.4.1. *Por una diferencial de Weil de X (o simplemente una diferencial) se quiere decir un funcional k-lineal $A_{K|k} \longrightarrow k$ que se anula sobre $\Lambda(\mathbf{a}) + K$ para algún divisor $\mathbf{a}$ de $\mathcal{X}$.*

Dado que

$$\Lambda(\mathbf{a} : \widetilde{\mathcal{O}}) \subseteq \Lambda(\mathbf{a}) \subseteq \Lambda(\mathbf{a}\cdot\widetilde{\mathcal{O}})$$

esta noción de diferencial, sólo depende del modelo no-singular $\widetilde{\mathcal{X}}$. Es decir, es claro que si λ es una diferencial de $\mathcal{X}$, lo es también también de $\mathcal{X}$, (se entiende por diferencial de $\widetilde{\mathcal{X}}$, a una diferencial de $\Omega_{K|k}$ en el sentido clásico) y viceversa.

Sea $\Omega(\mathbf{a})$ el conjunto de todas las diferenciales que se anulan sobre $\Lambda(\mathbf{a})$. Evidentemente $\Omega(\mathbf{a})$ es un k-espacio vectorial.

Como en la versión clásica del teorema 2.3.2 en términos de diferenciales, también se tiene lo siguiente.

Teorema 2.4.2. *Sea* $\mathbf{a}$ *un divisor de* $\mathcal{X}$. *Entonces* $i(\mathbf{a}) = dim_k\Omega(\mathbf{a})$

Demostración. Dado que $A/(\Lambda(\mathbf{a}) + K)$ y k son k-espacios vectoriales finito dimensionales, por Teorema de álgebra lineal se tiene que $A/(\Lambda(\mathbf{a})+K) \cong Hom_k(A/(\Lambda(\mathbf{a})+K), k)$. Con esto, basta mostrar que $Hom_k(A/(\Lambda(\mathbf{a}) + K), k) \cong \Omega(\mathbf{a})$. En efecto, sea $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{i(\mathbf{a})}$ una base para $Hom_k(A/(\Lambda(\mathbf{a}) + K), k)$ y sea $\Psi : Hom_k(A/(\Lambda(\mathbf{a}) + K), k) \longrightarrow \Omega(\mathbf{a})$ la transformación lineal dada por $\Psi(\delta_j) := \Psi_{\delta_j}$, donde $\Psi_{\delta_j} : A \longrightarrow k$ esta definida por $\Psi_{\delta_j}(x) := \delta_j(\bar{x})$ para cada $j = 1, 2, ..., i(\mathbf{a})$. Es claro que Ψ esta bien definida. Veamos que $\Psi_{\delta_1}, \Psi_{\delta_2}, ..., \Psi_{\delta_{i(\mathbf{a})}}$ es una base para $\Omega(\mathbf{a})$.
Sea $\lambda \in \Omega(\mathbf{a})$. Definamos $\bar{\lambda} : A/(\Lambda(\mathbf{a}) + K) \longrightarrow k$ la aplicación dada por $\bar{\lambda}(\bar{x}) := \lambda(x)$. Con esto, $\bar{\lambda}$ esta bien definida pues, si $\bar{x} = \bar{y}$ entonces $x - y \in \Lambda(\mathbf{a}) + K$ por tanto, $\lambda(x) = \lambda(y)$ ya que $\lambda \in \Omega(\mathbf{a})$, es decir, $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\bar{y})$ y es evidente que $\bar{\lambda}$ es k-lineal. Así, $\bar{\lambda} \in Hom_k(A/(\Lambda(\mathbf{a}) + K), k)$, luego $\bar{\lambda} = \sum_{j=1}^{i(\mathbf{a})} \alpha_j \delta_j$. Dado $x \in A$, $\bar{x} \in A/(\Lambda(\mathbf{a}) + K)$ entonces $\lambda(x) = \bar{\lambda}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{i(\mathbf{a})} \alpha_j \delta_j(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{i(\mathbf{a})} \alpha_j \Psi_{\delta_j}(x)$ de esta manera se concluye que $\lambda = \sum_{j=1}^{i(\mathbf{a})} \alpha_j \Psi_{\delta_j}$.
Si $\sum_{j=1}^{i(\mathbf{a})} \alpha_j \Psi_{\delta_j} = 0$ entonces para cada $x \in A$, $0 = \sum_{j=1}^{i(\mathbf{a})} \alpha_j \Psi_{\delta_j}(x) = \sum_{j=1}^{i(\mathbf{a})} \alpha_j \delta_j(\bar{x})$. Luego, $\sum_{j=1}^{i(\mathbf{a})} \alpha_j \delta_j = 0$. Dado que $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{i(\mathbf{a})}$ es base; se cumple que $\alpha_j = 0$ para todo j. En conclusión, $\Psi_{\delta_1}, \Psi_{\delta_2}, ..., \Psi_{\delta_{i(\mathbf{a})}}$ es base para $\Omega(\mathbf{a})$ y esto demuestra el teorema. ∎

Uno de los puntos centrales de esta sección, es definir el divisor de una diferencial λ diferente de cero. Este divisor, esta relacionado directamente con resultados importantes como el Teorema de dualidad local 2.4.4 y la ley de reprocidad. Para esto, consideremos previamente los siguientes resultados.

Lema 2.4.1. *Sea* $\mathbf{a}$ *un divisor de* $\mathcal{X}$ *y* $\mathbf{b}$ *un divisor de* $\mathcal{X}$ *localmente principal, entonces* $deg(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = deg(\mathbf{a}) + deg(\mathbf{b})$

Demostración. Supongamos que $\boldsymbol{b} = \prod_{P \in \mathcal{X}} x_P \mathcal{O}_P$. Note que

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{b} = \prod_{P \in \mathcal{X}} x_P \mathfrak{a}_P$$

Para cada $P \in \mathcal{X}$, existen $z_P \in \mathcal{O}_P$ diferentes de cero tal que $z_P \mathfrak{a}_P \subseteq \mathcal{O}_P$. Sea $z = \prod_{P \in \mathcal{X}} z_P$, (note que, $z_P = 1$, para casi todo punto $P \in \mathcal{X}$). Luego, $z\mathfrak{a}_P \subseteq \mathcal{O}_P$. De modo que

$$\mathbf{s} := div(z^{-1}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{b}) \leq \boldsymbol{b}.$$

Luego,

$$deg(\boldsymbol{b}) - deg(s) = \sum_{P \in \mathcal{X}} dim_k(\frac{x_P \mathcal{O}_P}{z x_P \mathfrak{a}_P}) \tag{2.6}$$

$$= \sum_{P \in \mathcal{X}} dim_k(\frac{\mathcal{O}_P}{z \mathfrak{a}_P}) \tag{2.7}$$

pero

$$deg(\mathcal{O}) - deg(div(z^{-1}) \cdot (\mathbf{a})) = \sum_{P \in \mathcal{X}} dim_k(\frac{\mathcal{O}_P}{z \mathfrak{a}_P})$$

Igualando estas dos últimás relaciones , obtenemos, $deg(\boldsymbol{b}) - deg(s) = -deg(\mathbf{a})$. Pero claramente, $deg(s) = deg(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{b})$, terminando así la demostración. ■

Lema 2.4.2. *Sea* $\mathbf{a}$ *un divisor de* $\mathcal{X}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *un divisor de* $\mathcal{X}$ *localmente principal, entonces* $deg(\mathbf{a} : \boldsymbol{b}) = deg(\mathbf{a}) - deg(\boldsymbol{b})$

Demostración. Observe simplemente que $\boldsymbol{b} \cdot (\mathbf{a} : \boldsymbol{b}) = \mathbf{a}$ y aplica el Lema 2.4.1 ■

Teorema 2.4.3. *Sea* $\mathbf{a}$ *un divisor de* $\mathcal{X}$. *Si* $\Omega(\mathbf{a}) \neq 0$, *entonces* $deg(\mathbf{a}) \leq 2g - 2$

Demostración. Sean $\lambda \in \Omega(\mathbf{a})$ diferente de cero y $\boldsymbol{b}$ un divisor de $\mathcal{X}$ localmente principal, con $deg(\mathbf{a}) < deg(\boldsymbol{b})$. Luego, $deg(\mathbf{a} : \boldsymbol{b}) = deg(\mathbf{a}) - deg(\boldsymbol{b}) < 0$ y por tanto $\ell(\mathbf{a} : \boldsymbol{b}) = 0$. Para cada $z \in K$, se define el operador $z\lambda$ como: $z\lambda(x) := \lambda(zx)$, para todo $x \in A$. Es evidente que $z\lambda$ es un funcional k-lineal de $A_{K|k}$ en k. Sean $z_1, z_2, ..., z_m$ una base para $\mathcal{L}(\boldsymbol{b})$. Luego, $z_1\lambda, z_2\lambda, ..., z_m\lambda \in \Omega(\mathbf{a} : \boldsymbol{b})$ son linealmente independientes. En efecto, si $x \in \Lambda(\mathbf{a} : \boldsymbol{b}) + K$ entonces $x = y + z$ con $y \in \Lambda(\mathbf{a} : \boldsymbol{b})$ y $z \in K$. Para cada $j = 1, 2, ..., m$ se tiene que $z_jx = z_jy + z_jz \in \Lambda(\mathbf{a}) + K$ (se sigue de la definición) por lo tanto $z_j\lambda(x) = \lambda(z_jx) = 0$ de modo que $z_j\lambda \in \Omega(\mathbf{a} : \boldsymbol{b})$ para $j = 1, 2, ..., m$.
Para mostrar que son linealmente independientes, supongamos que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(z_j\lambda) = 0$$

Dado $x \in A$, $0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(z_j\lambda)(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\lambda(z_jx) = \lambda(\sum_{j=1}^{m} \alpha_jz_jx)$. Como λ es diferente de cero se sigue que $\sum_{j=1}^{m} \alpha_jz_j = 0$ y así $\alpha_j = 0$ para todo j; pues $z_1, z_2, ..., z_m$ es una base. Ahora, por lo anterior es claro que $\ell(\boldsymbol{b}) \leq i(\mathbf{a} : \boldsymbol{b})$ y al aplicar el Teorema de Riemann-Roch a los divisores $\boldsymbol{b}$ y $(\mathbf{a} : \boldsymbol{b})$ se tiene

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{b}) &= deg(\boldsymbol{b}) + 1 - g + i(\boldsymbol{b}) \\ \ell(\mathbf{a} : \boldsymbol{b}) &= deg(\mathbf{a} : \boldsymbol{b}) + 1 - g + i(\mathbf{a} : \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

por lo cual,

$$\ell(\boldsymbol{b}) - i(\mathbf{a} : \boldsymbol{b}) = deg(\mathbf{a}) + 2 - 2g + i(\boldsymbol{b}) \leq 0.$$

En conclusión, $deg(\mathbf{a}) \leq 2g - 2$. ■

Corolario 2.4.4. *Sea* λ *una diferencial no nulo de* $\mathcal{X}$, *entonces existe un paralelepípedo* $\Lambda(\mathcal{C})$ *más grande en el cual* λ *se anula, es decir; existe un único divisor* $\mathcal{C}$ *de* $\mathcal{X}$ *tal que para cada divisor* $\mathbf{a}$ *de* $\mathcal{X}$ *vale*

$$\mathbf{a} \leq \mathcal{C} \Leftrightarrow \lambda \in \Omega(\mathbf{a}).$$

Demostración. Obviamente existe un divisor $\mathcal{C}$ de $\mathcal{X}$ para el cual $\lambda \in \Omega(\mathcal{C})$. por Teorema 2.4.3, $deg(\mathcal{C}) \leq 2g-2$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $deg(\mathcal{C})$ es maximal. Sea $\mathbf{a}$ un divisor de $\mathcal{X}$ para el cual $\lambda \in \Omega(\mathbf{a})$. Para cada $P \in \mathcal{X}$ se define $\boldsymbol{d}_P := \mathbf{a}_P + \mathcal{C}_P$, entonces se obtiene un divisor $\boldsymbol{d}$ para el cual $\boldsymbol{d} \geq \mathcal{C}$ y además $\lambda \in \Omega(\boldsymbol{d})$ y así por la maximalidad del divisor $\mathcal{C}$ se tiene entonces que $\mathcal{C} = \boldsymbol{d}$, en consecuencia, $\mathbf{a} \leq \mathcal{C}$ ■

Definición 2.4.2. *Sea λ una diferencial no nula de $\mathcal{X}$. Al único divisor $\mathcal{C}$ dado por el Corolario 2.4.4, es llamado el divisor del diferencial λ y se denota por $div(\lambda)$. Es decir,*

$$div(\lambda) := \mathcal{C}$$

Es sabido que las diferenciales de $\widetilde{\mathcal{X}}$ forman un k-espacio vectorial $1-$dimensional, es decir,

$$dim_K \Omega_{K|k} = 1$$

Veamos como esto afecta a los divisores de las diferenciales no nulas de $\mathcal{X}$.
Sea μ otra diferencial de $\mathcal{X}$ distinta de cero, por tanto, λ y μ pertenecen a $\Omega_{K|k}$ (el conjunto de todas las diferenciales de $\widetilde{\mathcal{X}}$), que es un k-espacio vectorial $1-$dimensional. así, existe un único $h \in K \setminus \{0\}$ tal que $\mu = h\lambda$. Supongamos que $\mathcal{M} = div(\mu)$. Entonces, para cualquier $x \in \Lambda(div(h) \cdot \mathcal{C})$ se tiene que $\mu(x) = h\lambda(x) = \lambda(hx) = 0$ pues $hx \in \Lambda(\mathcal{C})$. En consecuencia $div(h) \cdot \mathcal{C} \leq \mathcal{M}$. Similarmente; $h^{-1}\mu = \lambda$ obteniendo que $div(h^{-1}) \cdot \mathcal{M} \leq \mathcal{C}$ o equivalentemente $\mathcal{M} \leq div(h) \cdot \mathcal{C}$. De esto, $\mathcal{M} = div(h) \cdot \mathcal{C}$. Se ha mostrado que $div(\mu) = div(h) \cdot div(\lambda)$ y como conclusión, la clase del divisor $\mathcal{C} = div(\lambda)$ no depende de la escogencia de la diferencial distinta de cero λ y se le llama la *Clase canónica*. Más aún, del razonamiento anterior se deduce que para cada divisor $\mathbf{a}$ de $\mathcal{X}$ y para $P \in \mathcal{X}$ vale

$$h\lambda \in \Omega(\mathbf{a}) \Leftrightarrow h\mathbf{a}_P \leq \mathcal{C}_P \Leftrightarrow div(h^{-1}) \cdot \mathbf{a} \leq \mathcal{C} \Leftrightarrow h \in \mathcal{L}(\mathcal{C} : \mathbf{a}).$$

Esto significa que, $\Omega(\mathbf{a}) = \mathcal{L}(\mathcal{C} : \mathbf{a})\lambda$, y en particular, $i(\mathbf{a}) = \ell(\mathcal{C} : \mathbf{a})$. Luego, $dim_k \Omega(\mathcal{O}) = \ell(\mathcal{C}) = g$. Ahora, aplicando el Teorema de Riemann-Roch al divisor $\mathcal{C}$ obtenemos:

$$deg(\mathcal{C}) = 2g - 2$$

ya que $\ell(\mathcal{C} : \mathcal{C}) = 1$. De hecho, para cada divisor $\mathbf{a}$ de $\mathcal{X}$ vale

$$\mathcal{O} \leq (\mathbf{a} : \mathbf{a}) \leq \widetilde{\mathcal{O}}$$

En efecto, sea $x \in (\mathbf{a}_P : \mathbf{a}_P)$. Se tiene que $x \cdot \mathbf{a}_P \subseteq \mathbf{a}_P$. Como $\mathbf{a}_P$ es un $\mathcal{O}_P-$ideal, existe $r \in \mathcal{O}_P$ distinto de cero tal que $r \cdot \mathbf{a}_P \subseteq \mathcal{O}_P$; luego $rx \cdot \mathbf{a}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P \subseteq r \cdot \mathbf{a}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$. Como $\widetilde{\mathcal{O}}_P$ es un DIP, $r \cdot \mathbf{a}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P = z \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$, para $z = ra_p$ con $a_p \in \mathbf{a}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}$. Veamos que $x \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P \subseteq \widetilde{\mathcal{O}}_P$. Si $xy \in x \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$ entonces $xyz \in r \cdot \mathbf{a}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P = z \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$ luego $xyz = zs$ con $s \in \widetilde{\mathcal{O}}_P$ de ahí que $xy = s \in \widetilde{\mathcal{O}}_P$. así $x \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P \subseteq \widetilde{\mathcal{O}}_P$, por tanto, $x \in \widetilde{\mathcal{O}}_P$. así, $(\mathbf{a}_P : \mathbf{a}_P) \subseteq \widetilde{\mathcal{O}}_P$ y de esto, $(\mathbf{a}$:$\mathbf{a})\subseteq \widetilde{\mathcal{O}}$. *Ahora*, k =L(O)$\subseteq \mathcal{L}(\mathbf{a} : \mathbf{a}) \subseteq \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{O}})$=k ya que si $\mathcal{A}$ es el divisor que a $\widetilde{\mathcal{O}}$ le corresponde en el modelo no singular $\widetilde{\mathcal{X}}$, (el divisor estructural) se tiene que:

$$\ell(\widetilde{\mathcal{O}}) = \ell(A) = deg(A) + 1 - \widetilde{g} + i(A) = 1$$

y así $\mathcal{L}(\mathbf{a} : \mathbf{a}) = k$.

En lo que falta de esta sección, y de este capítulo, se analizará las diferenciales a nivel local, consiguiendo resultados importantes para este trabajo. De hecho, a continuación se presenta el Teorema de dualidad local y la ley de reprocidad. Seguidamente, algunas consecuencias o resultados que se desprenden de esto.

Sea P un punto de $\mathcal{X}$. La $P-$componente de una diferencial λ, se define como el homomorfismo composición:

$$\lambda_P : K \hookrightarrow \oplus_{i=1}^{m} \widehat{k}_{v_i} \hookrightarrow A_{K|k} \xrightarrow{\lambda} k.$$

Se sigue de la definición de $\mathcal{C}$, que la $P-$componente $\mathcal{C}_P$ de $\mathcal{C} = div(\lambda)$, es el $\mathcal{O}_P$-ideal más grande en el cual el homomorfismo composición

$$\oplus_{i=1}^{m} \widehat{k}_{v_i} \hookrightarrow A_{K|k} \xrightarrow{\lambda} k$$

se anula en la completación $\widehat{\mathcal{C}}_P$. por Teorema de aproximación el campo K es denso en $\oplus_{i=1}^{m} \widehat{k}_{v_i}$. Luego, se concluye que $\mathcal{C}_P$ es el $\mathcal{O}_P$-ideal más grande en el cual se anula λ_P, o equivalentemente $\mathcal{C}_P = \{z \in K : \lambda_P(z\mathcal{O}_P) = 0\}$. De manera más general, para cada $\mathcal{O}_P$-ideal $\mathfrak{a}_P$ se tiene:

$$(\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P) = \{z : \lambda_P(z\mathfrak{a}_P) = 0\} \tag{2.8}$$

Note simplemente que, λ_P se anula sobre $z\mathfrak{a}_P = z\mathfrak{a}_P\mathcal{O}_P$ si y sólo si $z\mathfrak{a}_P \subseteq \mathcal{C}_P$, es decir, $z \in (\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P)$. Para cada $P \in \mathcal{X}$ se define

$$\Omega(\mathfrak{a}_P) := \left\{\mu \in \Omega_{K|k} : div(\mu)_P \supseteq \mathfrak{a}_P\right\}$$

Se comprueba fácilmente que $\Omega(\mathfrak{a}_P)$ es un $\mathcal{O}_P$-módulo y que $\Omega(\mathfrak{a}_P) = \{\mu : \mu_P(\mathfrak{a}_P) = 0\}$. Note que $\Omega(\mathfrak{a}_P) = (\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P)\lambda$ y que

$$\Omega(\mathbf{a}) = \bigcap_{P \in \mathcal{X}} \Omega(\mathfrak{a}_P) = \mathcal{L}(\mathcal{C} : \mathbf{a})\lambda$$

Teorema 2.4.4. ***(Dualidad Local)*** *Sea $P \in \mathcal{X}$. Si $\mathfrak{a}_P$ y $\mathfrak{b}_P$ son $\mathcal{O}_P-$ideales fraccionario, con $\mathfrak{b}_P \subseteq \mathfrak{a}_P$, entonces existe un isomorfismo de k-espacios vectoriales*

$$\frac{\Omega(\mathfrak{b}_P)}{\Omega(\mathfrak{a}_P)} \to Hom_k(\frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b}_P}, k)$$

definido por $\mu + \Omega\mathfrak{a}_P) \longmapsto [(a+\mathfrak{b}_P) \mapsto \mu_P(a)]$. *Equivalentemente, existe un k-isomorfismo*

$$\frac{(\mathcal{C} : \mathfrak{b}_P)}{(\mathcal{C} : \mathfrak{a}_P)} \longmapsto Hom_k(\frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b}_P}, k)$$

definido por $\bar{c} \mapsto [\bar{a} \mapsto \lambda_P(ac)]$.

Demostración. Se considerar la aplicación $K \to Hom_k(\mathfrak{a}_P, k)$ dada por $z \mapsto z\lambda_P$, siendo $z\lambda_P$ el homomomorfismo $z\lambda_P(x) := \lambda_P(zx)$, para todo $x \in \mathfrak{a}_P$. Ahora, por (1.10) el núcleo de la primera aplicación es $(\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P)$, por tanto se tiene una aplicación inyectiva $\frac{K}{(\mathcal{C}_P:\mathfrak{a}_P)} \hookrightarrow Hom_k(\mathfrak{a}_P, k)$ y en particular, $\frac{(\mathcal{C}_P:\mathfrak{b}_P)}{(\mathcal{C}_P:\mathfrak{a}_P)} \hookrightarrow Hom_k(\frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b}_P}, k)$. De esta forma,

$$dim_k(\frac{(\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P)}{(\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P)}) \leq dim_k(\frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b}_P}). \tag{2.9}$$

Para mostrar el teorema, es suficiente mostrar la igualdad de las dimensiones. Denotemos por $a^+ := \mathfrak{a}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$ y por $b^- := (\widetilde{\mathcal{O}}_P : \mathfrak{b}_P)$. Dado que $(\mathfrak{b}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P) \subseteq \mathfrak{b}_P \subseteq \mathfrak{a}_P \subseteq \mathfrak{a}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$, se obtiene

$$(\mathcal{C}_P : a^+) \subseteq (\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P) \subseteq (\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P) \subseteq (\mathcal{C}_P : b^-)$$

entonces, de ahí se sigue por propiedades de álgebra lineal que

$$dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : b^-}{\mathcal{C}_P : a^+}) = dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : b^-}{\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P}) + dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P}{\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P}) + dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P}{\mathcal{C}_P : a^+}) \tag{2.10}$$

Similarmente

$$dim_k(a^+/b^-) = dim(a^+/\mathfrak{a}_P) + dim_k(\mathfrak{a}_P/\mathfrak{b}_P) + dim_k(\mathfrak{b}_P/b^-) \tag{2.11}$$

Afirmación 1.

$$dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : b^-}{\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P}) = dim_k(\frac{\mathfrak{b}_P}{b^-}) \qquad y \qquad dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P}{\mathcal{C}_P : a^+}) = dim_k(\mathfrak{a}_P/a^+)$$

Mostremos esta afirmación. Dado que $b^- \subseteq \mathfrak{b}_P$, $\mathfrak{a}_P \subseteq a^+$ y $\mathfrak{b}_P \subseteq \mathfrak{a}_P \subseteq a^+$, al aplicar la relación (2.11) llegamos a las siguientes desigualdades

1. $dim_k(\frac{\mathcal{C}_P:b^-}{\mathcal{C}_P:\mathfrak{b}_P}) \leq dim_k(\frac{\mathfrak{b}_P}{b^-})$

2. $\dim_k(\frac{\mathcal{C}_P:\mathfrak{a}_P}{\mathcal{C}_P:a^+}) \leq dim_k(\frac{a^+}{\mathfrak{a}_P})$

3. $dim_k(\frac{\mathcal{C}_P:\mathfrak{b}_P}{\mathcal{C}_P:a^+}) \leq dim_k(\frac{a^+}{\mathfrak{b}_P})$

Con todo esto; se sigue que

$$\begin{aligned} dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P}{\mathcal{C}_P : a^+}) + dim_k(\frac{\mathfrak{b}_P}{b^-}) &\leq dim_k(\frac{a^+}{\mathfrak{b}_P}) + dim_k(\frac{\mathfrak{b}_P}{b^-}) \\ &= dim_k(\frac{a^+}{b^-}). \end{aligned}$$

En consecuencia;

$$\begin{aligned} dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P}{\mathcal{C}_P : a^+}) + dim_k(\frac{\mathfrak{b}_P}{b^-}) &\leq dim_k(\frac{a^+}{b^-}) \\ &= dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : b^-}{\mathcal{C}_P : a^+}) \\ &= dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : b^-}{\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P}) + dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : b_P}{\mathcal{C}_P : a^+}). \end{aligned}$$

De esta forma,

$$dim_k(\frac{\mathfrak{b}_P}{b^-}) \leq dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : b^-}{\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P})$$

y así se cumple la primera igualdad de la afirmación. Para la segunda igualdad se procede de manera análoga.

Afirmación 2.

$$dim_k(\frac{\mathcal{C}_P : b^-}{\mathcal{C}_P : a^+}) = dim_k(\frac{a^+}{b^-})$$

En efecto: Dado que a^+ y b^- son $\widetilde{\mathcal{O}}_P$-ideales, y $\widetilde{\mathcal{O}}_P$ es un D.I.P, se tiene que $a^+ = \alpha \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$ y $b^- = \beta \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$ para ciertos α, β pertenecientes a a^+ y b^- respectivamente. Sea $d := (\mathcal{C}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P)$. Como d también es un $\widetilde{\mathcal{O}}_P$-ideal, existe $\delta \in d$ tal que $d = \delta \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$. Se observa fácilmente que, $(\mathcal{C}_P : a^+) = (d : a^+)$ y que $(\mathcal{C}_P : b^-) = (d : b^-)$, por esta razón se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{(\mathcal{C}_P : b^-)}{(\mathcal{C}_P : a^+)} &= \frac{(d : a^+)}{(d : b^-)} \\ &= \frac{(\delta \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P : \alpha \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P)}{(\delta \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P : \beta \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P)} \\ &= \frac{\alpha^{-1}\delta(\widetilde{\mathcal{O}}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P)}{\beta^{-1}\delta(\widetilde{\mathcal{O}}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P)} \\ &\cong \frac{\beta \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P}{\alpha \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P} \\ &= \frac{b^-}{a^+}. \end{aligned}$$

De esta forma, queda demostrado la afirmación 2.

Con las dos afirmaciones anteriores y las igualdades (2.12) y (2.13) se sigue inmediatamente el teorema. ■

Con el Teorema de dualidad local, nos permite definir el siguiente concepto de "grado local"para la componente P de un divisor **a** de $\mathcal{X}$. Este concepto, nos lleva directamente hasta la ley de reprocidad.

Se define la función *Grado local* deg_P, por las siguientes propiedades:

1. $deg_P(\mathcal{O}) = 0$
2. $deg_P(\mathfrak{a}_P) - deg_P(\mathfrak{b}_P) = dim_k \frac{\mathfrak{a}_P}{\mathfrak{b}_P}$
siempre y cuando $\mathfrak{a}_P \supseteq \mathfrak{b}_P$.
Por el Teorema de dualidad local se sigue que, $deg_P(\mathfrak{a}_P) + deg_P(\mathcal{C} : \mathfrak{a}_P)$ no depende del $\mathcal{O}_P$-ideal fraccionario $\mathfrak{a}_P$. Ya que si $\mathfrak{b}_P$ es otro $\mathcal{O}_P$-ideal fraccionario, considerar un $\mathcal{O}_P$-ideal fraccionario $\mathbf{d}_P$ tal que $\mathbf{d}_P \supseteq \mathfrak{a}_P$ y además $\mathbf{d}_P \supseteq \mathfrak{b}_P$. Entonces, aplicando el Teorema de dualidad local, se tiene:

$$deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P) - deg_P(\mathcal{C}_P : \mathbf{d}_P) = deg_P(\mathbf{d}_P) - deg_P(\mathfrak{a}_P)$$
$$deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P) - deg_P(\mathcal{C}_P : \mathbf{d}_P) = deg_P(\mathbf{d}_P) - deg_P(\mathfrak{b}_P)$$

luego, haciendo la diferencia entre estas dos ecuaciones se tiene

$$deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P) - deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P) \;=\; deg_P(\mathfrak{b}_P) - deg_P(\mathfrak{a}_P)$$

es decir;

$$deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P) + deg_P(\mathfrak{a}_P) \;=\; deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P) + deg_P(\mathfrak{b}_P)$$

como se quería. Ahora, note lo siguiente,

$$\begin{aligned} deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P) + deg_P(\mathfrak{a}_P) &= deg_P(\mathcal{C}_P : \mathcal{O}_P) + deg_P(\mathcal{O}_P) \\ &= deg_P(\mathcal{C}_P) \end{aligned}$$

teniendo

$$deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P) \;=\; deg_P(\mathcal{C}_P) - deg_P(\mathfrak{a}_P)$$

De manera que si $\mathfrak{b}_P$ es un $\mathcal{O}_P$-ideal fraccionario, tal que $\mathfrak{b}_P \subseteq \mathcal{O}_P$ y $\mathfrak{b}_P \subseteq \mathfrak{a}_P$, entonces

$$\begin{aligned} deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P) - deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{a}_P) &= deg_P(\mathfrak{a}_P) - deg_P(\mathfrak{b}_P) \\ deg_P(\mathcal{C}_P : \mathfrak{b}_P) - deg_P(\mathcal{C}_P) &= deg_P(\mathcal{O}_P) - deg_P(\mathfrak{b}_P). \end{aligned}$$

De este modo, tomando suma sobre $P \in \mathcal{X}$ en las últimás dos relaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} deg(\mathcal{C} : \mathbf{b}) - deg(\mathcal{C} : \mathbf{a}) &= deg(\mathbf{a}) - deg(\mathbf{b}) \\ deg(\mathcal{C} : \mathbf{b}) - deg(\mathcal{C}) &= deg(\mathcal{O}) - deg(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Simplificando de estas dos relaciones, tenemos la siguiente relación

$$deg(\mathcal{C} : \mathbf{a}) \;=\; deg(\mathcal{C}) - deg(\mathbf{a}).$$

En particular,

$$\begin{aligned} deg(\mathcal{C} : (\mathcal{C} : \mathbf{a})) &= deg(\mathcal{C}) - deg(\mathcal{C} : \mathbf{a}) \\ &= deg(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

y como $\boldsymbol{a} \leq (\mathcal{C} : (\mathcal{C} : \mathbf{a}))$, deducimos la siguiente ley de reciprocidad
Reciprocidad Para cualquier divisor $\boldsymbol{a}$ de $\mathcal{X}$, se tiene

$$\mathcal{C} : (\mathcal{C} : \mathbf{a}) \;=\; \boldsymbol{a}$$

En el caso especial, cuando $\boldsymbol{a} = \mathcal{O}$, se obtiene

$$(\mathcal{C} : \mathcal{C}) \;=\; \mathcal{O}$$

Corolario 2.4.5. *Para cualesquier par de divisores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *de* $\mathcal{X}$ *vale la relación:*

$$((\mathcal{C} : \boldsymbol{b}) : (\mathcal{C} : \mathbf{a})) = (\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b})$$

Demostración. Es claro que $((\mathcal{C} : \boldsymbol{b}) : (\mathcal{C} : \mathbf{a})) \geq (\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b})$. De manera similar, se sigue entonces que; $((\mathcal{C} : \mathbf{a'}) : (\mathcal{C} : \mathbf{b'})) \geq (\mathbf{b'} : \mathbf{a'})$ siendo $\mathbf{a'} := (\mathcal{C} : \mathbf{a})$ y $\mathbf{b'} := (\mathcal{C} : \boldsymbol{b})$. Luego, aplicando reprocidad se sigue el corolario. ■

Observación. Reescribiendo el Corolario 2.4.5 , dice que para cada $P \in \mathcal{X}$ y cada función $z \in K$:

$$z\Omega(\mathfrak{a}_P) \subseteq \Omega(\mathfrak{b}_P) \Leftrightarrow z\mathfrak{b}_P \subseteq \mathfrak{a}_P$$

Capítulo 3

Polos de diferenciales regulares

Este capítulo, se enfoca principalmente en analizar el comportamiento de los polos de una diferencial regular. Para este fin, se utiliza algunos resultados de los capítulos anteriores. Un concepto importante para este capítulo es el de conductor de la curva $\mathcal{X}$. Para iniciar este nuevo objetivo, se necesitan algunas definiciones. En todo el texto, $\mathcal{X}$ denota una curva, ver la definición en la Sección 2.1.

Definición 3.0.3. ***(Diferencial regular)*** *Decimos que una diferencial λ de $\mathcal{X}$ es regular en un punto P de $\mathcal{X}$, si $\lambda \in \Omega(\mathcal{O}_P)$.*

Note que μ es regular en un punto P, si $\mu_P(\mathcal{O}_P) = 0$, o de manera equivalente, $div(\mu)_P \supseteq \mathcal{O}_P$. Además,

$$\Omega(\mathcal{O}_P) \supseteq \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)$$

donde $\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)$ es el espacio de las diferenciales regulares en las ramas centradas en P.

Definición 3.0.4. ***(Polo)*** *Sea $v \in \widetilde{\mathcal{X}}$. Se dice que una diferencial λ de $\mathcal{X}$, tiene un polo en $v \in \widetilde{\mathcal{X}}$, si $ord_v(\lambda) < 0$.*

Podría suceder que una diferencial regular de $\mathcal{X}$ tuviera poles en las ramas centradas en puntos singulares. Para analizar el comportamiento de los polos, se estudia el espacio $\Omega(\mathcal{O})$ de las diferenciales regulares sobre $\mathcal{X}$, módulo el espacio $\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})$ de las diferenciales regulares de $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Teorema 3.0.5. *Existe un isomorfismo canónico*

$$\Omega(\mathcal{O})/\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}) \cong \bigoplus_P \Omega(\mathcal{O}_P)/\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)$$

donde P recorre todos los puntos singulares de $\mathcal{X}$.

Demostración. Para mostrar éste teorema, observe simplemente que la inclusión $\Omega(\mathcal{O}_P) \supseteq \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)$ induce un homomorfismo inyectivo de $\Omega(\mathcal{O})/\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})$ en la suma directa de los cocientes $\Omega(\mathcal{O}_P)/\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)$. Dado que $dim_k\Omega(\mathcal{O}) = g$ y además $dim_k\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}) = i(\widetilde{\mathcal{O}}) = \widetilde{g}$, se sigue que

$$dim_k(\Omega(\mathcal{O})/\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})) = g - \widetilde{g} = \sum_P \delta_P = \sum_P dim_k\Omega(\mathcal{O}_P)/\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)$$

terminando la demostración del teorema. ■

Observación. Ya se sabe que $\Omega(\mathcal{O}_P) \supseteq \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)$, pero en realidad, se tiene

$$\Omega(\mathcal{O}_P) = \Omega(\mathcal{O}) + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P).$$

En efecto: La inclusión " $\supset$ " es clara. Para mostrar la otra inclusión, sea $\mu \in \Omega(\mathcal{O}_P)$, y consideremos el elemento $U = (0, .., \mu + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P), 0, .., 0) \in \oplus\frac{\Omega(\mathcal{O}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}$. Por Teorema 3.0.5, existe $\lambda \in \Omega(\mathcal{O}) \subseteq \Omega(\mathcal{O}_P)$, tal que si Φ es el isomorfismo canónico dado en el Teorema 3.0.5, se tiene entonces que $\Phi(\bar{\lambda}) = U$, es decir, $\lambda + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_R) = \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_R)$ para $R \neq P$ y $\lambda + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P) = \mu + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)$. De esta última igualdad se desprende que $\alpha := \lambda - \mu \in \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)$, así que $\mu = \lambda - \alpha$, completando la inclusión.
Se sigue del Teorema 3.0.5, que es suficiente con estudiar los polos de los diferenciales $\mu \in \Omega(\mathcal{O}_P)$ en las ramas centradas en P.

Definición 3.0.5. ***(Conductor)*** *Se define el conductor de la curva $\mathcal{X}$, denotado por $\mathfrak{f}$, como el $\widetilde{\mathcal{O}}$-divisor de $\mathcal{X}$*

$$\mathfrak{f} : \;=\; (\mathcal{O} : \widetilde{\mathcal{O}}).$$

Así, el conductor de $\mathcal{X}$, es el $\widetilde{\mathcal{O}}$-divisor de $\mathcal{X}$ más grande de los $\widetilde{\mathcal{O}}$-divisores que son menores que $\mathcal{O}$.
El siguiente teorema, relaciona la P-componente de un divisor $\mathcal{C}$ para una diferencial, y el conductor. Esta relación, caracteriza los anillos de Gorenstein en el sentido siguiente.

Definición 3.0.6. ***(Anillo Gorenstein)*** *Un anillo local uno-dimensional $\mathcal{O}_P$ se llama un anillo de Gorenstein, si*

$$dim_k\frac{\mathcal{O}_P}{\mathfrak{f}_P} \;=\; \delta_P.$$

Denotemos por $\mathfrak{a}_P{}^- = (\mathfrak{a}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P)$ y $\mathfrak{a}_P{}^+ = \mathfrak{a}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$ para cada $\mathcal{O}_P$-ideal $\mathfrak{a}_P$. Con esta notación, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_P &= (\mathcal{O}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P) \\ &= ((\mathcal{C}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P) : (\mathcal{C}_P : \mathcal{O}_P)) \\ &= (\mathcal{C}_P{}^- : \mathcal{C}_P) \\ &= (\mathcal{C}_P : \mathcal{C}_P{}^+) \end{aligned}$$

para la última igualdad, de hecho, para cualquier $\mathcal{O}_P$-ideal $\mathfrak{a}_P$ vale, $({\mathfrak{a}_P}^- : \mathfrak{a}_P) = (\mathfrak{a}_P : {\mathfrak{a}_P}^+)$ ya que:

$$\begin{aligned} z \in ({\mathfrak{a}_P}^- : \mathfrak{a}_P) &\Leftrightarrow z\mathfrak{a}_P \subseteq {\mathfrak{a}_P}^- \\ &\Leftrightarrow z\mathfrak{a}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P \subseteq \mathfrak{a}_P \\ &\Leftrightarrow z{\mathfrak{a}_P}^+ \subseteq \mathfrak{a}_P \\ &\Leftrightarrow z \in (\mathfrak{a}_P : {\mathfrak{a}_P}^+) \end{aligned}$$

En conclusión, $\mathfrak{f}_P = (\mathcal{C}_P : {\mathcal{C}_P}^+)$.

Teorema 3.0.6. *Con la misma notación de arriba, se tiene:* ${\mathcal{C}_P}^- = \mathfrak{f}_P \cdot \mathcal{C}_P$. *Además,*

$$dim_k \frac{\mathcal{O}_P}{\mathfrak{f}_P} \leq dim_k \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $\mathcal{C}_P$ *es principal*

Demostración. Dado que $\mathcal{C}_P$ es un $\mathcal{O}_P$-ideal y $\widetilde{\mathcal{O}}_P$ es un dominio de ideales principales se tiene que $\mathcal{C}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P = c_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$ para algún $c_P \in \mathcal{C}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P$. así que, $\mathfrak{f}_P = (\mathcal{C}_P : {\mathcal{C}_P}^+) = (\mathcal{C}_P : c_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P) = {c_P}^{-1} \cdot (\mathcal{C}_P : \widetilde{\mathcal{O}}_P) = {c_P}^{-1} \cdot \mathcal{C}_P^-$. Luego $c_P \cdot \mathfrak{f}_P = \mathcal{C}_P^-$. Como $\mathfrak{f}_P$ es un $\widetilde{\mathcal{O}}_P$-ideal fraccionario se tiene pues que $\mathfrak{f}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P = \mathfrak{f}_P$. Por tanto, $\mathcal{C}_P^- = c_P \cdot \mathfrak{f}_P = c_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P \cdot \mathfrak{f}_P = \mathcal{C}_P \cdot \widetilde{\mathcal{O}}_P \cdot \mathfrak{f}_P = \mathcal{C}_P \cdot \mathfrak{f}_P$
Ahora,

$$\frac{\mathcal{O}_P}{\mathfrak{f}_P} \cong \frac{c_P \cdot \mathcal{O}_P}{c_P \cdot \mathfrak{f}_P} \cong \frac{c_P \cdot \mathcal{O}_P}{{\mathcal{C}_P}^-} \subseteq \frac{\mathcal{C}_P}{{\mathcal{C}_P}^-}$$

de esto, es claro que $dim_k \frac{\mathcal{O}_P}{\mathfrak{f}_P} \leq dim_k \frac{\mathcal{C}_P}{{\mathcal{C}_P}^-} = dim_k \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P}$ (esta última igualdad por dualidad local) y que la igualdad se cumple si y sólo si $\mathcal{C}_P = c_P \cdot \mathcal{O}_P$ es decir, si y sólo si $\mathcal{C}_P$ es principal. ■

Para el resto de esta sección, se asumirá que el campo constante k es algebraicamente cerrado. Como es usual, por la fórmula del residuo; los diferenciales de Weil son identificados con las formás diferenciales. Esto es, si Ω' es el conjunto de todas las formas diferenciales de $K|k$, entonces la aplicación $\Omega' \longrightarrow \Omega$, dada por

$$w \longmapsto ((z_v)_{v \in \widetilde{\mathcal{X}}} \mapsto \sum_{v \in \widetilde{\mathcal{X}}} res_v(z_v w))$$

resulta ser un isomorfismo. De esta manera; la P-componente de una forma diferencial μ de $K|k$ esta dada por

$$\mu_P(z) = \mu((z_v)_{v \in \widetilde{\mathcal{X}}}) = \sum_{v|P} res_v(z\mu)$$

donde $z_v = 0$, para toda valoración v de $K|k$ diferente de las ramas centradas en P y esto es cierto, para todo $z \in K$.

Para iniciar el estudio del comportamiento de polos de las diferenciales regulares, se tiene previamente lo siguiente.
Para cada $i = 1, 2, ..., m$, sea $\mathfrak{p}_i$ el i-ésimo ideal maximal del D.I.P $\widetilde{\mathcal{O}}_P = \bigcap_{v|P}^{m} \mathcal{O}_v$, es decir,

$$\mathfrak{p}_i = \left\{ z \in \widetilde{\mathcal{O}}_P : ord_{v_i}(z) \geq 1 \right\}.$$

Se escribirá

$$\mathfrak{f}_P := \mathfrak{p}_1^{f_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{f_2} \cdots \mathfrak{p}_m^{f_m}$$

donde los exponentes $f_1, ..., f_m$ son entero no negativos. Para estudiar el comportamiento de polos de las diferenciales regulares, se considera el conjunto

$$R := \{(ord_{v_1}(\mu), ..., ord_{v_m}(\mu)) : \mu \in \Omega(\mathcal{O}) \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{Z}^m.$$

Afirmación. El conjunto R es finito.
Razón. Sea $(r_1, r_2, ..., r_m) \in R$. Luego, existe $\mu \in \Omega(\mathcal{O}) \setminus \{0\}$, tal que $r_j = ord_{v_j}(\mu)$ para cada $j = 1, ..., m$. Dado que $f_P \subseteq \mathcal{O}_P$, se sigue que $\Omega(\mathcal{O}_P) \subset \Omega(\mathfrak{f}_P)$, y por tanto $\mu \in \Omega(\mathfrak{f}_P)$. así $C_P \supset \mathfrak{f}_P$ y con esto, $C_P^- \supset \mathfrak{f}_P^-$. Como

$$\mathfrak{f}_P^- = \mathfrak{f}_P \subseteq C_P^- = \prod_{i=1}^{m} p_i^{-ord_{v_i}(\mu)}$$

se sigue para $j = 1, 2, ..., m$ que

$$r_j \geq -f_j. \tag{3.1}$$

Luego,

$$-\sum_{i=1}^{m} ord_{v_i}(\mu) \leq \sum_{i=1}^{m} f_i = dim_k(\widetilde{\mathcal{O}}_P / f_P). \tag{3.2}$$

Si $\widetilde{div(\mu)}$ denota el divisor de λ en el modelo no-singular $\widetilde{\mathcal{X}}$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\widetilde{div(\mu)} &= \sum_{v \in \widetilde{\mathcal{X}}} ord_v(\mu) \cdot v \\
&= \sum_{P \in \mathcal{X}} \sum_{v|P} ord_v(\mu) \cdot \\
&= \sum_{i=1}^{m} ord_{v_i}(\mu) \cdot v_i + \sum_{P'} \sum_{v|P'} ord_v(\mu) \cdot v
\end{aligned}$$

es decir,

$$\widetilde{div(\mu)} = \sum_{i=1}^{m} ord_{v_i}(\mu) \cdot v_i + \sum_{P'} \sum_{v|P'} ord_v(\mu) \cdot v$$

donde P' corre en $\mathcal{X}$, con $P' \neq P$ y $v \in \widetilde{\mathcal{X}}$. por Teorema de Riemann-Roch (aplicado en el caso no-singular)

$$\begin{aligned}
2\widetilde{g}-2 &= deg(\widetilde{div(\mu)}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} ord_{v_i}(\mu) + \sum_{P'}\sum_{v|P'} ord_v(\mu) \\
&= r_1 + r_2 + ... + r_m + \sum_{P'}\sum_{v|P'} ord_v(\mu)
\end{aligned}$$

Así,

$$2\widetilde{g}-2 = r_1 + r_2 + ... + r_m + \sum_{P'}\sum_{v|P'} ord_v(\mu) \tag{3.3}$$

De otro lado, por 2.4.1, se tiene $2g-2 = 2\widetilde{g}-2+2\sum_{P\in\mathcal{X}}\delta_P$ y remplazando en la fórmula (3.3) se obtiene

$$2g-2 = \sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{P'}\sum_{v|P'} ord_v(\mu) + 2\sum_{P\in\mathcal{X}}\delta_P.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} r_i &= 2g-2-\sum_{P'\neq P}\sum_{v|P'} ord_v(\mu) - 2\sum_{P\in\mathcal{X}}\delta_P \\
&\leq 2g-2-\sum_{P'}\sum_{v|P'} ord_v(\mu).
\end{aligned}$$

obteniendo la relación

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \leq 2g-2-\sum_{P'}\sum_{v|P'} ord_v(\mu). \tag{3.4}$$

Dado que $\mathfrak{f}_P \subset \mathcal{O}_P \subset \widetilde{\mathcal{O}}_P$,

$$dim_k(\widetilde{\mathcal{O}}_P/\mathfrak{f}_P) = \delta_P + dim_k(\mathcal{O}_P/\mathfrak{f}_P)$$

y así $\delta_P \leq dim_k(\widetilde{\mathcal{O}}_P/\mathfrak{f}_P)$, por tanto

$$\sum_{P'}\delta_P \leq \sum_{P'} dim_k(\widetilde{\mathcal{O}}_P/\mathfrak{f}_P)$$

De la relación (3.2), se concluye

$$-\sum_{P'\neq P\in\mathcal{X}}\sum_{v|P'} ord_v(\mu) \leq \sum_{P'\neq P\in\mathcal{X}} dim_k(\widetilde{\mathcal{O}}_P/f_P). \tag{3.5}$$

De (3.4) y de (3.5)

$$\sum_{i=1}^{m} r_m \leq 2g-2+\sum_{P'} dim_k(\widetilde{\mathcal{O}}_P/\mathfrak{f}_P). \tag{3.6}$$

Finalmente, de (3.1) y de (3.5) se concluye que el conjunto R es finito.
El conjunto R es no vacío cuando $g > 0$, o equivalentemente, cuando $\mathcal{X}$ no es isomorfo a la línea proyectiva.
Dado que para cada $i = 1, 2, 3..., m$ la función $ord_{v_i} : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \infty$ es una valoración con campo residual infinito k y en vista de que $\Omega(\mathcal{O})$ es un espacio vectorial sobre k, se ve fácilmente que el conjunto R satisface las siguientes dos propiedades:
(a) Si $r = (r_1, r_2, ..., r_m)$ y $s = (s_1, s_2, ..., s_m)$ son elementos de R, entonces el vector $(min\{r_1, s_1\}, ..., min\{r_m, s_m\})$ también esta en R.
(b) Si $r, s \in R$ y $r_i = s_i$ para algún i, entonces existe un vector $t \in R$ tal que $r_i < t_i$, $min\{r_j, s_j\} \leq t_j$ para cada j y $t_j = min\{r_j, s_j\}$ siempre y cuando $r_j \neq s_j$.
Se compara el conjunto R con el semigrupo aditivo

$$S_P := \{(ord_{v_1}(z), ord_{v_2}(z), ..., ord_{v_m}(z)) | z \in \mathcal{O}_P \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{N}^m$$

el cual ha sido estudiado por varios autores $([18], [2], [19] y [3])$. Dado que el conductor $\mathfrak{f}_P$ es el $\widetilde{\mathcal{O}}_P$-ideal más grande contenido en $\mathcal{O}_P$, el vector $(f_1, f_2, ..., f_m)$ es el vector más pequeño (con respecto al producto ordenado de $\mathbb{N}^m$) tal que

$$(f_1, f_2, ..., f_m) + \mathbb{N}^m \subset S_P.$$

En efecto: Sea $z = t_1^{f_1} t_2^{f_2} \cdots t_m^{f_m} \in \mathcal{O}_P$ tal que $v_j(z) = ord_{v_j}(z) = f_j$. Es claro que para cada $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m) \in \mathbb{N}^m$, se sigue que $z_{\mathbf{n}} := t_1^{f_1+n_1} t_2^{f_2+n_2} \cdots t_m^{f_m+n_m} \in \mathcal{O}_P$, de manera que $(f_1, f_2, ..., f_m) + \mathbb{N}^m \subset S_P$. Veamos ahora la minimalidad.
Supongamos que $(n_1, n_2, ..., n_m) + \mathbb{N}^m \subset S_P$. Veamos que $\mathfrak{P}^{\mathbf{n}} := \mathfrak{p}_1^{n_1} \mathfrak{p}_2^{n_2} \cdots \mathfrak{p}_m^{n_m}$ está contenido en $\mathcal{O}_P$. Sea $z \in \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}$. Como $\mathfrak{P}^{\mathbf{n}} = \widetilde{\mathcal{O}}_P t_1^{n_1} t_2^{n_2} \cdots t_m^{n_m}$ se tiene que $z = s t_1^{n_1} t_2^{n_2} \cdots t_m^{n_m}$ donde $s \in \widetilde{\mathcal{O}}_P$. Luego para cada j, $ord_{v_j}(z) = v_j(z) = v_j(s) + n_j$ y así $(ord_{v_1}(z), ord_{v_2}(z), ..., ord_{v_m}(z)) = (ord_{v_1}(s), ord_{v_2}(s), ..., ord_{v_m}(s)) + \mathbf{n} \in \mathbf{n} + \mathbb{N}^m \subset S_P$, lo cual implica que $z \in \mathcal{O}_P$. Dado que $\mathfrak{P}^{\mathbf{n}}$ es claramente un $\widetilde{\mathcal{O}}_P$-ideal y mostramos que $\mathfrak{P}^{\mathbf{n}} \subset \mathcal{O}_P$, se concluye que $\mathfrak{P}^{\mathbf{n}} \subset \mathfrak{f}_P$ y de ahí que $(f_1, f_2, ..., f_m) \leq (n_1, n_2, ..., n_m)$.

Como S_P también satisface las propiedades (a) y (b), se deduce ([2])
(c) Un vector $(s_1, s_2, ..., s_m) \in \mathbb{N}^m$ esta en S_P si y sólo si el vector

$$(min\{s_1, f_1\}, ..., min\{s_m, f_m\}) \in S_P.$$

En particular, se sigue de la minimalidad del vector conductor $(f_1, f_2, ..., f_m)$, que el vector $(r_1, r_2, ..., r_m)$ con $r_i = f_i - 1$ para algún i y $r_j \geq f_j$ para cada $j \neq i$ no pertenece a S_P. Note que el vector cero $(0, 0, ..., 0)$ es el único elemento de S_P que tiene una coordenada igual a 0. Si P es un punto singular de $\mathcal{X}$, entonces $f_i > 0$ para cada $i = 1, 2, .., m$

Teorema 3.0.7. *Sea $(n_1, n_2, ..., n_m)$ un vector de enteros no negativos. Entonces existe una diferencial regular μ en $\mathcal{X}$ tal que*

$$\begin{aligned} ord_{v_i}(\mu) &= -n_i \ , \quad si\ n_i = 0 \\ ord_{v_i}(\mu) &\geq 0 \ , \quad si\ n_i > 0 \end{aligned}$$

si y sólo si para cada $i = 1, 2, ...m$ *los vectores* $(r_1, r_2, ..., r_m)$ *con* $r_i = n_i - 1$ *y* $r_j \geq n_j$ *para cada* $j \neq i$*, no pertenece al semigrupo* S_P *asociado al punto* P*. Es más, por Teorema 3.0.5, podemos imponer la condición que* $ord_v(\mu) \geq 0$ *para cada* $v \in \widetilde{\mathcal{X}}$ *que no sea una rama centrada en* P*.*

Mostremos por el momento la última afirmación del Teorema 3.0.7. En efecto, si tal diferencial μ existe; entonces dado que el elemento $(0, .., \mu + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P), .., 0) \in \oplus \frac{\Omega(\mathcal{O}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}$, existiría $\lambda \in \Omega(\mathcal{O}) \subseteq \Omega(\mathcal{O}_P)$, para el cual $\Phi(\bar{\lambda}) = (0, .., \mu + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P), .., 0)$ siendo Φ el isomorfismo del Teorema 3.0.5. De modo que para $R \in \mathcal{X}$ se tiene

$$\lambda + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_R) = \begin{cases} \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_R) & , \quad si \quad R \neq P \\ \mu + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_R) & , \quad si \quad R = P \end{cases}$$

Veamos que λ cumple la afirmación. Note que si v no es una rama centrada en P , que corresponde al caso $R \neq P$, se obtiene que $ord_v(\lambda) \geq 0$.
Ahora, si $n_i > 0$, entonces $ord_{v_i}(\mu) = -n_i$. Veamos pues que $ord_{v_i}(\lambda) = -n_i$. En efecto, supongamos por el absurdo que no es cierto. Si se tuviera $ord_{v_i}(\lambda) > -n_i$, dado que $\lambda - \mu \in \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P$, se obtiene

$$0 \leq ord_{v_i}(\lambda - \mu) = min \{ord_{v_i}(\lambda), -n_i\} = -n_i$$

lo cual es una contradicción ya que $n_i > 0$. Similarmente, si $ord_{v_i}(\lambda) < -n_i$ se llega a un absurdo. De esta manera $ord_{v_i}(\lambda) = -n_i$. El razonamiento es análogo cuando $n_i = 0$. Con esto, la afirmación queda probada.
Antes de dar la demostración del Teorema 3.0.7, veamos las siguientes consecuencias.

Corolario 3.0.6. *Si* $g > 0$*, entonces existe una diferencial regular* μ *de* $\widetilde{\mathcal{X}}$ *tal que*

$$ord_{v_i}(\mu) = -f_i, \quad \text{para cada} \ \ i = 1, 2, ..., m$$

y $ord_v(\mu) \geq 0$ *para cada* $v \in \widetilde{\mathcal{X}}$ *que no este centrada en* P*.*

Corolario 3.0.7. *Sea* $i \in \{1, 2, .., m\}$ *y sea* n *un entero positivo. Existe una diferencial regular sobre* $\mathcal{X}$ *que tiene en* v_i *un polo de orden* n*, si y sólo si, el vector* $(f_1, .., f_{i-1}, n-1, f_{i+1}, .., f_m)$ *no pertenece al semigrupo* S_P*.*

De hecho, si hay una diferencial regular μ sobre $\mathcal{X}$ con $ord_{v_j}(\mu) = -n$, entonces por el Corolario 3.0.7 y la Propiedad (a) se tiene que $(-f_1, .., -f_{i-1}, -n, -f_{i+1}, .., -f_m) \in R$ y esto, por el Teorema 3.0.7 y la propiedad (c), obtenemos que $(f_1, .., f_{i-1}, n - 1, f_{i+1}, .., f_m) \notin S_P$.
Ahora procedemos a justificar el Teorema 3.0.7.

Demostración. Para cada vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m)$, se escribiá

$$\mathfrak{P}^{\mathbf{n}} := \mathfrak{p}_1^{n_1}\mathfrak{p}_2^{n_2}\cdots\mathfrak{p}_m^{n_m}$$

y se considera el divisor

$$\mathbf{a_n} := (\mathcal{O}_P + \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}) \cdot \prod_{P' \in \mathcal{X}} \mathcal{O}_{P'}$$

con $P' \neq P$. Se nota fácilmente que

$$\Omega(\mathbf{a_n}) = \{\mu \in \Omega(\mathcal{O}) | ord_{v_i}(\mu) \geq -n_i, i = 1, 2, ..., m\}.$$

Veamos dos afirmaciones

1) Sea $w_{\mathbf{n}} := dim\Omega(\mathbf{a_n})$. Entonces, $w_{\mathbf{n}} = w_{\mathbf{n}-e_i} + 1$ siendo $e_i = (0, 0, .,1, 0, .,0)$ el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^m$ si sólo si, existe una diferencial regular μ_i con $ord_{v_i}(\mu_i) = -n_i$ y $ord_{v_j}(\mu_j) \geq -n_j$ para cada $j \neq i$

2) $w_{\mathbf{n}} := w_{\mathbf{n}-e_i}$ si y sólo si no existe $\mu_i \in \Omega_{K|k}$ tal que $ord_{v_i}(\mu_i) = -n_i$ y $ord_{v_j}(\mu_i) \geq -n_j$ para cada $j \neq i$.

En efecto: 1) "$\Rightarrow$". Por hipótesis, se sigue que $\Omega(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-e_i})$ está contenido estrictamente en $\Omega(\mathbf{a_n})$, por tanto, existe $\mu_i \in \Omega(\mathbf{a_n})$ talque $\mu_i \notin \Omega(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-e_i})$. De estas dos últimás condiciones se tiene

$$\begin{aligned} ord_{v_j}(\mu_i) &\geq -n_j, \quad j = 1, ..., m \\ ord_{v_i}(\mu_i) &< -(n_i - 1) \end{aligned}$$

de ahí que, $ord_{v_i}(\mu_i) = -n_i$ y $ord_{v_j}(\mu_i) \geq -n_j$ para todo $j \neq i$.

"$\Leftarrow$". Según la hipótesis, se tiene por el mismo razonamiento anterior, que $\Omega(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-e_i}) \subset \Omega(\mathbf{a_n})$, pero $\Omega(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-e_i}) \neq \Omega(\mathbf{a_n})$, de lo cual $w_{\mathbf{n}-e_i}+1 \leq w_{\mathbf{n}}$. Si $w_{\mathbf{n}-e_i}+1 < w_{\mathbf{n}}$, existiría un vector $\widetilde{\mu}$ en $\Omega(\mathbf{a_n})$ tal que $\{\widetilde{\mu}, \mu\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\Omega(\mathbf{a_n})$, lo cual es una contradicción, pues $\widetilde{\mu} = \lambda\mu$ donde $\lambda \in K$. De esta manera, $w_{\mathbf{n}} = w_{\mathbf{n}-e_i} + 1$.

2) Es inmediato de la parte *1)*.

Sea I un subconjunto no vacío de $\{1, ..., m\}$. Ahora, por la Propiedad (a), existe una diferencial $\mu \in \Omega(\mathcal{O})$ con $ord_{v_i}(\mu) = -n_i$ para cada $i \in I$ y $ord_{v_j}(\mu) \geq -n_j$ para todo $j \in \{1, ..., m\}$, $(j \notin I)$, si y sólo si, $w_{\mathbf{n}} = w_{\mathbf{n}-e_i} + 1$ para cada $i \in I$.

De otro lado, por el Teorema de Riemann-Roch se tiene

$$\ell(\mathbf{a_n}) = deg(\mathbf{a_n}) + 1 - g + w_{\mathbf{n}}.$$

Note que

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{a_n}) &= dim_k(\frac{\mathcal{O}_P + \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}}{\mathcal{O}_P}) \\ &= dim_k(\frac{\mathfrak{P}^{\mathbf{n}}}{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}}) \\ &= l_{\mathbf{n}} + \delta_P - (n_1 + n_2 + \cdots + n_m) \end{aligned}$$

donde $l_{\mathbf{n}} := dim_k(\frac{\mathcal{O}_P}{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}})$, siendo $\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}} = \{z \in \mathcal{O}_P | ord_{v_i}(z) \geq n_i, i = 1, 2, ..., m\}$.
La última igualdad se sigue de lo siguiente: Como $\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}} \subset \mathfrak{P}^{\mathbf{n}} \subset \widetilde{\mathcal{O}}_P$, entonces

$$dim_k(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}}) = dim_k(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{P}^{\mathbf{n}}}) + dim_k(\frac{\mathfrak{P}^{\mathbf{n}}}{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}})$$

de esto

$$\begin{aligned} dim_k(\frac{\mathfrak{P}^{\mathbf{n}}}{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}}) &= dim_k(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}}) - (n_1 + \cdots + n_m) \\ &= \delta_P + l_{\mathbf{n}} - (n_1 + \cdots + n_m) \end{aligned}$$

ya que $\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{textbfn} \subset \mathcal{O}_P \subset \widetilde{\mathcal{O}}_P$. Por tanto, $dim_k(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{textbfn}}) = \delta_P + l_n$
Ahora usamos el hecho de que $n_i \geq 0$, para cada $i = 1, 2, ..., m$. Como $\mathcal{O} \leq \mathbf{a_n} \leq \widetilde{\mathcal{O}}$, se tiene $\mathcal{L}(\mathbf{a}) = k$. Tomando $I := \{i \in \{1, 2, ..., m\} | 0 < n_i\}$ se deduce, con el razonamiento anterior que

$$\ell(\mathbf{a_n}) = \ell(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-e_i}) = 1$$

para cada $i \in I$.
De manera similar,

$$\ell(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-e_i}) = deg(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-e_i}) + 1 - g + w_{\mathbf{n}-e_i}$$

$$deg(\mathbf{a_n})) = l_{\mathbf{n}} + \delta_P - (n_1 + ... + n_i - 1 + .. + n_m).$$

Utilizando el hecho de que $w_{\mathbf{n}} = w_{\mathbf{n}-e_i} + 1$ y las relaciones anteriores se obtiene que $l_{\mathbf{n}} = l_{n-e_i}$ lo cual implica que $\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}} = \mathcal{O}_P \cap P^{\mathbf{n}-e_i}$.
Se ha probado que existe una diferencial $\mu \in \Omega(\mathcal{O})$ con $ord_{v_i}(\mu) = -n_i$ para cada $i \in I$ y $ord_{v_j}(\mu) \geq 0$ para cada $j \in \{1, 2, ..., m\}$ $(j \notin I)$, si y sólo si, para cada $i \in I$, $l_n = l_{n-e_i}$ o equivalentemente, no existe una función $z_i \in \mathcal{O}_P$, con $ord_{v_i}(z_i) = n_i - 1$ y $ord_{v_j}(z_i) \geq n_j$ para cada $j \neq i$ ■
el Teorema 3.0.7 es una consecuencia de la primera parte del siguiente teorema, el cual expresa

$$R_P := \{(ord_{v_1}(\mu), ..., ord_{v_m}(\mu)) \;\; \mu \in \Omega(\mathcal{O}_P) \setminus \{0\}\}$$

en términos del semigrupo S_P.

Teorema 3.0.8. *Sea* $(n_1, ..., n_m) \in \mathbb{Z}^m$
1) Existe una diferencial $\mu \in \Omega(\mathcal{O}_P)$*, con* $ord_{v_i}(\mu) = -n_i$ *para cada* $i = 1, 2, .., m$*, si sólo si, para cada* $i = 1, 2, ..., m$ *los vectores* $(r_1, ..., r_m)$ *con* $r_i = n_i - 1$ *y* $r_j \geq n_j$ *para cada* $j \neq i$ *no pertenece al semigrupo* S_P *asociado al punto* P*.*
2) El vector $(n_1, ..., n_m)$ *pertenece al semigrupo* S_P*, si y sólo si, para cada* $i = 1, 2, ..., m$*, los vectores* $(r_1, ..., r_m)$ *con* $r_i = -n_i - 1$ *y* $r_j \geq -n_j$ *para cada* $j \neq i$*, no pertenece a* R_P*.*

Demostración. Con la misma notación del Teorema 3.0.7, consideremos el $\mathcal{O}_P$-ideal

$$\mathfrak{d}_{\mathbf{n}} := \mathcal{O}_P + \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}$$

Observe que

$$\Omega(\mathfrak{d}_{\mathbf{n}}) = \{\mu \in \Omega(\mathcal{O}_P) | ord_{v_i}(\mu) \geq -n_i, i = 1, 2, ..., m\}$$

así, $dim_k \frac{\Omega(\mathfrak{d}_{\mathbf{n}})}{\Omega(\mathfrak{d}_{\mathbf{n}-e_i})} = 1$, si y sólo, si existe una diferencial $\mu_i \in \Omega(\mathcal{O}_P)$ con $ord_{v_i}(\mu_i) = -n_i$ y $ord_{v_j}(\mu_i) \geq -n_j$ para cada j. Si tal diferencial μ_i existe para cada i, entonces por la Propiedad (a), siempre existe una diferencial $\mu \in \Omega(\mathcal{O}_P)$ tal que $ord_{v_i}(\mu) = -n_i$ para cada i, o equivalentemente $(-n_1, ..., -n_m) \in R_P$.
De otro lado, por dualidad local, se tiene:

$$\begin{aligned} dim_k \frac{\Omega(\mathfrak{d}_{\mathbf{n}})}{\Omega(\mathfrak{d}_{\mathbf{n}-e_i})} &= dim_k \frac{\mathcal{O}_P + P^{\mathbf{n}-e_i}}{\mathcal{O}_P + \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}} \\ &= dim_k \frac{\mathfrak{P}^{\mathbf{n}-e_i}}{\mathfrak{P}^{\mathbf{n}}} - dim_k \frac{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}-e_i}}{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}} \\ &= 1 - dim_k \frac{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}-e_i}}{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{\mathbf{n}}} \end{aligned}$$

así, el vector $(-n_1, n_2, ..., n_m)$ pertenece a R_P, si y sólo si, para cada i, $\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^{n-e_i} = \mathcal{O}_P \cap \mathfrak{P}^n$ o equivalentemente no existe $z_i \in \mathcal{O}_P$ con $ord_{v_i}(z_i) = n_i - 1$ y $ord_{v_j}(z_i) \geq n_j$ para cada j. Esto prueba la primera parte del teorema. Para la segunda parte, se procede de manera similar. ■

Teorema 3.0.9. *Si* $\mathcal{O}_P$ *es un anillo Gorenstein, entonces*

$$R_P = S_P - (f_1, f_2, ..., f_m)$$

Demostración. Como $\mathcal{O}_P$ es un anillo Gorenstein, por Teorema 3.0.6, el $\mathcal{O}_P$-módulo $\Omega(\mathcal{O}_P)$ es libre de rango 1, por tanto, existe una diferencial λ tal que $\Omega(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}_P\lambda$ y así se sigue que

$$R_P = S_P + (ord_{v_1}(\lambda), ..., ord_{v_m}(\lambda))$$

En efecto, si $(ord_{v_1}(\mu), ..., ord_{v_m}(\mu)) \in R_P$, entonces $\mu \in \Omega(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}_P\lambda$. Luego existe $x \in \mathcal{O}_P$ tal que $\mu = x\lambda$. De esta manera, $ord_{v_j}(\mu) = ord_{v_j}(x) + ord_{v_j}(\lambda)$. Por tanto, $(ord_{v_1}(\mu), ..., ord_{v_m}(\mu)) \in S_P + (ord_{v_1}(\lambda), ..., ord_{v_m}(\lambda))$
La otra inclusión es similar. Dado que $g > 0$, por el Colorario 3.0.6 existe una diferencial regular μ sobre $\mathcal{X}$ tal que $ord_{v_i}(\mu) = -f_i$ para cada i=1,2,...,m y $ord_v(\mu) \geq 0$ para cada $v \in \widetilde{\mathcal{X}}$, con la restrcción que v no esta centrada en P Ahora, dado que $\mu \in \Omega(\mathcal{O}_P)$, se sigue que $\Omega(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}_P\mu$. De esta manera, si hacemos el mismo razonamiento anterior, se obtiene el resultado. ■
Al combinar los teoremás 3.0.8 y 3.0.9 se obtiene las propiedades de simetría para S_P y R_P.

Corolario 3.0.8. *Supongamos que $\mathcal{O}_P$ es un anillo Gorenstein.*
i) Un vector $(s_1, s_2, ..., s_m) \in \mathbb{Z}^m$ pertenece al semigrupo S_P, si y sólo si, para cada $i = 1, 2, ..., m$ los vectores $(r_1, r_2, ..., r_m)$ con $r_i = f_i - 1 - s_i$ y $r_j \geq f_j - s_j$ para cada $j \neq i$ no pertenece a S_P.
ii) Un vector $(r_1, r_2, ..., r_m) \in \mathbb{Z}^m$ pertenece a R_P, si y sólo si, para cada $i = 1, 2, ..., m$ los vectores $(n_1, n_2, ..., n_m)$, con $n_i = -r_i - f_i - 1$ y $n_j \geq -r_j - f_j$ para cada $j \neq i$ no pertenece a R_P.

La simetría del semigrupo S_P ha sido discutida por Kunz [11] en el caso de una rama, por Waldi [18] y García [2] en el caso de dos ramas, y por delgado ([3], [3]) en el caso general.

Capítulo 4

Operador de Cartier y función zeta

El propósito de este capítulo es usar los resultados descritos en lo que va de este trabajo y aplicarlos en este nuevo contexto, que es por ejemplo, la acción del operador de Cartier sobre el espacio de diferenciales regulares sobre la curva $\mathcal{X}$, cuyos polos son todos de orden uno, módulo el espacio de las diferenciales regulares de la curva no-singular $\widetilde{\mathcal{X}}$, es decir, sobre el espacio cociente

$$\frac{\Omega(\mathcal{O}+\mathfrak{r})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}.$$

Las acciones de este operador sobre los diferentes espacios, que se verán a continuación, son de gran importancia para el análisis de la función zeta (que se da al final de este documento) conduciendo a resultados importantes como el Corolario 4.0.1. Un punto central para este nuevo objetivo, es la definición del rango de este operador.

Operador de Cartier

Sea $\mathcal{X}$ una curva algebraica completa e irreducible definida sobre un campo perfecto k de caracteristica positiva p. Recordar que por un Teorema de Tate [5]; existe un operador C, llamado *Operador Cartier*, que esta bien definido en el espacio de las formás diferenciales por:

$$C(zdx) := (\frac{d^{p-1}z}{dx^{p-1}})^{1/p}dx$$

para cada $z \in K$ y cada variable separante x de $K|k$. Si v es un punto del modelo no singular $\widetilde{\mathcal{X}}$, k_v su campo residual, t un parámetro local en v, y $\sum c_i t^{i-1}dt \in k_v((t))$ la expansión local de una forma diferencial en v, entonces se sigue que

$$C(\sum c_j t^{j-1}dt) = -(\sum c_j \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} t^{j-1})^{1/p}dt.$$

Ahora, como $j = pi + r$ con $0 \leq r \leq p-1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} t^{j-1} &= \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} t^{pi} t^{r-1} \\ &= t^{pi} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} t^{r-1}. \end{aligned}$$

Note que si $r > 0$, entonces $\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} t^{r-1} = 0$. De esta forma, cuando $r = 0$ se tiene $j = pi$. Luego

$$C(\sum c_j t^{j-1} dt) = -(\sum c_{pi} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} t^{pi-1})^{1/p} dt$$

pero como $\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} t^{pi-1} = (p-1)! t^{p(j-1)}$, y utilizando el Teorema de Wilson, se sigue al simplificar que

$$C(\sum c_j t^{j-1} dt) = (\sum c_{pi}^{1/p} t^{pi-1}) dt \tag{4.1}$$

De la definición se sigue que, la $P-$componente de una forma diferencial μ satisface la fórmula

$$\mu_P(z) = \sum_{i=1}^{m} tr_{k_{v_i}|k} res_{v_i}(z\mu)$$

para cada $z \in K$, donde $v_1, ..., v_m \in \widetilde{\mathcal{X}}$ son las ramas centradas en P. Además, mediante un cálculo directo se comprueba la siguiente relación

$$(C\mu)_P(z) = (\mu_P(z^p))^{1/p} \tag{4.2}$$

para cada $z \in K$. Note que de 4.2 se sigue directamente la siguiente afirmación. Si $\boldsymbol{a}$ es un divisor de $\mathcal{X}$ que satisface $\boldsymbol{a}^p \in \boldsymbol{a}_P$ para cada $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{a}_P$ y $P \in \mathcal{X}$, entonces el operador Cartier C actua sobre el espacio $\Omega(\boldsymbol{a}_P)$ y en particular, sobre $\Omega(\boldsymbol{a})$.
Por las formas normales Hasse-Witt de p-álgebra lineal que el rango de la r-ésima potencia $C^r_{\Omega(\mathcal{O})}$ no depende de r cuando $r \geq g$ (ver [12] , Satz 11). Este rango, denotado por $\sigma(\mathcal{X})$, es llamado el invariante Hasse-Witt de $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{X}$ es no singular y k algebraicamente cerrado entonces $p^{\sigma(\mathcal{X})}$ es el número de puntos de p-torsión de la clase del grupo de divisores de $\mathcal{X}$ (Serre, [[21], §2.11]).
Los resultados más importantes en este capítulo, esta relacionados directa o indirectamente por el entero $\sigma(\mathcal{X}) - \sigma(\widetilde{\mathcal{X}})$. así que para estudiar la diferencia $\sigma(\mathcal{X}) - \sigma(\widetilde{\mathcal{X}})$, se analiza la acción del operador Cartier sobre el espacio cociente $\frac{\Omega(\mathcal{O}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}$. Por el Teorema 3.0.5

$$\frac{\Omega(\mathcal{O}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)} \cong \bigoplus_{P \in \mathcal{X}} \frac{\Omega(\mathcal{O}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}.$$

así que, basta con analizar su acción sobre el espacio cociente $\frac{\Omega(\mathcal{O}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}$. Sea

$$\mathfrak{r}_P := \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i$$

el radical Jacobson de $\widetilde{\mathcal{O}}_P$. Note que

$$\Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P) = \{\mu \in \Omega(\mathcal{O}_P) | ord_{v_i}(\mu) \geq -1, i = 1, .., m\}.$$

Realizando el mismo razonamiento de (4.1), se llega que para cada entero positivo r se tiene

$$\begin{aligned} C^r(\sum c_i t^{i-1} dt) &= \sum c_{p^r i}^{1/p^r} t^{p^r i-1} dt \\ &= \cdots + c_{-p^r}^{1/p^r} t^{-p^r-1} + c_0^{1/p^r} t^{-1} + \cdots \end{aligned}$$

es decir,

$$C^r(\sum c_i t^{i-1} dt) = \cdots + c_{-p^r}^{1/p^r} t^{-p^r-1} + c_0^{1/p^r} t^{-1} + \cdots \tag{4.3}$$

Así, de las relaciones (3.1) y (4.3), es claro que cuando $p^r > f_i$, para $i = 1, .., m$ donde $f_1, ..., f_m$ son los exponentes del conductor de $\mathcal{O}_P$, se tiene que

$$C^r \Omega(\mathcal{O}_P) \subseteq \Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)$$

De esta forma, la acción del operador Cartier sobre $\frac{\Omega(\mathcal{O}_P)}{\Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)}$ es nilpotentes. Ahora, describamos su acción sobre $\frac{\Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}$.

Teorema 4.0.10. *Existe un isomorfismo*

$$\frac{\Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)} \cong \left\{ (a_1, ..., a_m) \in \oplus_{i=1}^m k_{v_i} | \sum_{i=1}^{m} tr_{k_{v_i}|k}(a_i) = 0 \right\}$$

definido por

$$\mu + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P) \longmapsto (res_{v_1}(\mu), ..., res_{v_m}(\mu)).$$

El operador Cartier induce sobre los vectores del lado derecho la acción

$$(a_1, ..., a_m) \longmapsto (a_1^{1/p}, ..., a_m^{1/p}).$$

Demostración. Recordar que una forma diferencial μ es regular en P si y sólo si

$$\mu_P(z) := \sum_{i=1}^{m} tr_{k_{v_i}|k} res_{v_i}(z\mu) = 0$$

para cada $z \in \mathcal{O}_P$. Si $ord_{v_i}(\mu) \geq -1$ para cada $i = 1, ..., m$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu_P(z) &= \sum_{i=1}^{m} tr_{k_p|k}(tr_{k_{v_i}|k_P}(res_{v_i}(z\mu))) \\
&= \sum_{i=1}^{m} tr_{k_p|k}(tr_{k_{v_i}|k_P} z(P)(res_{v_i}(\mu))) \\
&= tr_{k_P|k}(z(P) \sum_{i=1}^{m} tr_{k_{v_i}|k_P}(res_{v_i}(\mu))) \\
&= tr_{k_p|k}(z(P) \cdot \sum_{i=1}^{m} tr_{k_{v_i}|k_P} res_{v_i}(\mu))
\end{aligned}$$

para cada $z \in \mathcal{O}_P$. así, la regularidad de μ en P quiere decir

$$\sum_{i=1}^{m} tr_{k_{v_i}|k_P} res_{v_i}(\mu) = 0$$

De esta manera, el homomorfismo del Teorema esta bien definido y se sigue fácilmente la inyectividad. Ahora, la sobreyectividad se tiene de un conteo de dimensiones, en el cual se usa la dualidad local.

$$\begin{aligned}
dim_k(\frac{\Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}) &= dim_k(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P}) \\
&= dim_k(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{\mathfrak{r}_P}) - dim_k(\frac{\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P}{\mathfrak{r}_P}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} dim_k(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_P}{p_i}) - dim_k(\frac{\mathcal{O}_P}{\mathcal{O}_P \cap \mathfrak{r}_P}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} deg(v_i) - deg(P).
\end{aligned}$$

Sea M el conjunto del lado derecho en el Teorema 4.0.10. Veamos que efectivamente

$$dim_k M = \sum_{i=1}^{m} deg(v_i) - deg(P).$$

Para cada $i = 1, 2, ..., m$, consideremos la transformación k_P-lineal

$$\begin{aligned}
T_i : \bigoplus_{i=1}^{m} k_{v_i} &\rightarrow k_P \\
(a_1, a_2, ..., a_m) &\mapsto tr_{k_{v_i}|k_P}(ai)
\end{aligned}$$

Sea

$$T := \sum_{i=1}^{m} T_i \in Hom_{k_P}(\bigoplus_{i=1}^{m} k_{v_i}, k_P).$$

Es claro que el núcleo de T, digamos $ker(T)$, es M. Dado que T es sobreyectiva, se tiene la siguiente secuencia exacta

$$0 \longrightarrow ker(T) \longrightarrow \bigoplus_i^m k_{v_i} \xrightarrow{T} k_P \longrightarrow 0$$

Por tanto,

$$dim_{k_P} M = \sum_{i=1}^m [k_{v_i} : k_P] - 1.$$

Así,

$$\begin{aligned} dim_k M &= dim_{k_P} M[k_P : k] \\ &= (\sum_{i=1}^m [k_{v_i} : k_P] - 1)[k_P : k] \\ &= \sum_{i=1}^m deg(v_i) - deg(P). \end{aligned}$$

Finalmente, la acción del operador Cartier sobre el vector $(a_1, ..., a_m) \in M$, se obtiene de su acción sobre las expansiones locales de los diferenciales en las ramas $v_1, ..., v_m$. Es decir, dado $(a_1, ..., a_m) \in M$, existe una única $\mu \in \Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)$ tal que

$\mu + \Omega(\widetilde{O})_P \mapsto (res_{v_1}(\mu), ..., res_{v_m}(\mu)) = (a_1, ..., a_m)$de modo que

$$\begin{aligned} C(a_1, ..., a_m) &= C\mu \\ &= \sum_{i \geq 0} c_{pi}^{1/p} t^{pi-1} dt \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} c_{pi}^{1/p} t^{pi-1} dt &\mapsto (res_{v_1}(C\mu), ..., res_{v_m}(C\mu)) \\ &= ((res_{v_1}(\mu))^{1/p}, ..., (res_{v_m}(\mu))^{1/p}) \\ &= (a_1^{1/p}, ..., a_m^{1/p}). \end{aligned}$$

Es decir, la acción de C sobre los vectores $(a_1, ..., a_m)$ de M, esta dada por $C(a_1, ..., a_m) = (a_1^{1/p}, ..., a_m^{1/p})$. ■

Observación. Con la misma notación del Teorema 4.0.10, $C_M = M$

Demostración. En efecto: Del teorema se sigue que $C_M \subseteq M$. Ahora, si $(a_1, ..., a_m) \in M$ entonces para $i = 1, 2, .., m$ se tiene que $a_i = res_{v_i}(\mu)$ para una ónica $\mu \in \Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)$. Así que $\mu = \sum_{j=0} a_{i+j} t^{j-1} dt \in k_{v_i}((t))$. Si $\mu^p := \sum_{j=0} a_{i+j}^p t^{j-1} dt \in$

$\Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)$ es claro por el Teorema anterior que $\mu^p + \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P) \mapsto (a_1^p, ..., a_m^p) \in M$ y así $C(a_1^p, ..., a_m^p) = (a_1, ..., a_m)$. ■

Note que $\Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r})$ es el espacio de los diferenciales regulares sobre $\mathcal{X}$ cuyos polos son todos de orden 1.

Corolario 4.0.9.

$$\sigma(\mathcal{X}) - \sigma(\widetilde{\mathcal{X}}) = dim_k \Omega(\mathcal{O} + r)/\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}) = \sum_{P\in\mathcal{X}} (\sum_{v|P} deg(v) - deg(P))$$

Donde el símbolo $v|P$ indica que v recorre las ramas centradas en P.

Demostración. Como

$$\frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})} \cong \frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\mathcal{O}+r)} \bigoplus \frac{\Omega(\mathcal{O}+r)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}$$

y dado que la acción del operador Cartier sobre $\Omega(\mathcal{O})/\Omega(\mathcal{O}+r)$ es nilpotente, se concluye:

$$rank \;\; C^r_{\frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}} = rank \;\; C^r_{\frac{\Omega(\mathcal{O}+r)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}} \qquad \text{para cada } \; r \geq g - \widetilde{g}$$

Pero claramente

$$C^r_{\frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}} \cong \frac{C^r(\Omega(\mathcal{O}))}{C^r(\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}))}$$

por lo cual

$$rank \;\; C^r_{\frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}} = \sigma(\mathcal{X}) - \sigma(\widetilde{\mathcal{X}}) \;, \qquad r \geq g - \widetilde{g}.$$

El isomorfismo del Teorema 3.0.5, induce un isomorfismo

$$\frac{\Omega(\mathcal{O}+r)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})} \cong \bigoplus_{P\in\mathcal{X}} \frac{\Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}$$

y así obtenemos para cada r:

$$rank \;\; C^r_{\frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}} = \sum_{P\in\mathcal{X}} rank \;\; C^r_{\frac{\Omega(\mathcal{O}_P+\mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}}$$

Finalmente, por el Teorema 4.1 y la observación seguida de este teorema, se concluye que para cada r:

$$\begin{aligned} rank \;\; C^r_{\frac{\Omega(\mathcal{O}_P+\mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}} &= dim_k \frac{\Omega(\mathcal{O}_P + \mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} deg(v_i) - deg(P). \qquad ■ \end{aligned}$$

En particular, si k es algebraicamenete cerrado, entonces $\sigma(\mathcal{X}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{X}})$ si y sólo si para cada punto de $\mathcal{X}$ admite sólo una rama.
Para el resto de este trabajo se asumirá que el campo constante de la curva completa e irreducible $\mathcal{X}$ es un campo finito con p^n elementos, es decir:

$$k = \mathbb{F}_q \quad \text{donde} \quad q = p^n$$

Dado que la n-ésima potencia C^n del operador Cartier es k-linal, podemos pensar en calcular su polinomio característico sobre $\frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}$. De hecho, y como resultado importante para este capítulo se tiene la siguiente consecuencia

Corolario 4.0.10.

$$det(I_d - tC^n_{\frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}}) = \prod_{P\in\mathcal{X}_{sing}} \frac{\prod_{v|P}(1 - t^{deg(Q)})}{1 - t^{deg(P)}}$$

donde P varia en el conjunto finito $\mathcal{X}_{sing}$ de puntos singulares de $\mathcal{X}$ y v recorre las ramas centradas en P.

Demostración. Dado que

$$\frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})} \cong \bigoplus_{P\in\mathcal{X}_{sing}} \frac{\Omega(\mathcal{O}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}$$

se tiene:

$$det(I_d - tC^n_{\frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}}) = \prod_{P\in\mathcal{X}_{sing}} det(I_d - tC^n_{\frac{\Omega(\mathcal{O}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}}).$$

por Teorema 4.0.10, tenemos un diagrama conmutativo con líneas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \frac{\Omega(\mathcal{O}_P+\mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)} \arrow[r] \arrow[d, "C^n"] & \bigoplus_{i=1}^m k_{v_i} \arrow[r] \arrow[d, "F^{-1}"] & k_P \arrow[r] \arrow[d, "F^{-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{\Omega(\mathcal{O}_P+\mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)} \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^m k_{v_i} \arrow[r] & k_P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde F es el automorfismo de Frobenius sobre k. De esta manera, se obtiene

$$det(I_d - tC^n_{\frac{\Omega(\mathcal{O}_P+\mathfrak{r}_P)}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}}_P)}}) = \frac{\prod_{i=1}^m det(I_d - tF^{-1}_{k_{v_i}|k})}{det(I_d - tF^{-1}_{k_P|k})}$$

Ahora, si k_r es un campo extensión de k de grado finito r, entonces $k_r = \bigoplus_{i=0}^{r-1} ka^{q^i}$ para algún $a \in k^r$. Así

$$det(I_d - tF^{-1}_{k_r|k}) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -t \\ -t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & -t & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -t & 1 \end{pmatrix} = 1 - t^r \quad \blacksquare$$

La *Función zeta* de $\mathcal{X}$, se define como el producto Euleriano

$$\zeta(\mathcal{X}, s) := \prod_{P \in \mathcal{X}} \frac{1}{1 - q^{-s deg(P)}}$$

donde la parte real de $s \in \mathbb{C}$; $\Re(s)$, es más grande que 1. Así; abreviando $t = q^{-s}$ se obtiene:

$$\frac{\zeta(\mathcal{X}, s)}{\zeta(\widetilde{\mathcal{X}}, s)} = M(\mathcal{X}, t) := \prod_{P \in \mathcal{X}_{sing}} \frac{\prod_{v|P}(1 - t^{deg(Q)})}{1 - t^{deg(P)}} \tag{4.4}$$

Dado que $deg(P)$ divide $deg(v)$ siempre y cuando v sea una rama centrada en P, $M(\mathcal{X}, t)$ es un polinomio en $t = q^{-s}$ con coeficientes enteros, cuyas raíces estan sobre el círculo unitario $|t| = 1$. Denotemos por d al grado de $M(\mathcal{X}, t)$. Por Corolario 4.0.10, se sigue que

$$\begin{aligned} d := degM(\mathcal{X}, t) &= dim_k \Omega(\mathcal{O} + r) - \widetilde{g} \\ &= \sigma(\mathcal{X}) - \sigma(\widetilde{\mathcal{X}}) \end{aligned}$$

Similar al caso del campo numérico (Jenner [8]), la función zeta $\zeta(\mathcal{X}, s)$, excepto para posible nuevos cero sobre el eje imaginario $\Re(s) = 0$, tiene los mismos ceros como $\zeta(\widetilde{\mathcal{X}}, s)$.
Por la hipótesis de Riemann para curvas no-singulares, se puede escribir

$$\zeta(\widetilde{\mathcal{X}}, s) = \frac{L(\widetilde{\mathcal{X}}, t)}{(1-t)(1-qt)}$$

donde $L(\widetilde{\mathcal{X}}, t)$ es un polinomio en $t = q^{-s}$ con coeficientes enteros de grado $2\widetilde{g}$, cuyos ceros estan sobre el círculo $|t| = q^{-1/2}$. De esta forma, se obtiene

$$\zeta(\mathcal{X}, s) = \frac{L(\mathcal{X}, t)}{(1-t)(1-qt)}$$

donde

$$L(\mathcal{X}, t) = L(\widetilde{\mathcal{X}}, t) M(\mathcal{X}, t) \in \mathbb{Z}[t].$$

así,

$$degL(\mathcal{X}, t) = \widetilde{g} + dim_k\Omega(\mathcal{O} + r).$$

La importancia de la función zeta en geometría algebraica, radica en la conocida relación

$$\zeta(\mathcal{X}, s) = exp(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} N_r t^r) \tag{4.5}$$

donde $N_r := card\mathcal{X}(k_r)$ es el número de puntos racionales de $\mathcal{X}$, sobre el campo extensión $k_r = \mathbb{F}_{q^r}$ de $k = \mathbb{F}_q$ de grado r. Al tomar derivadas logarítmicas en la relación 4.5 se tiene

$$\frac{\zeta'(\mathcal{X}, s)}{\zeta(\mathcal{X}, s)} = \sum_{i=1}^{\infty} N_r t^{r-1} \tag{4.6}$$

De otro lado, como

$$\zeta(\mathcal{X}, s) = (1-t)^{-1}(1-qt)^{-1} \prod_{i=1}^{2\widetilde{g}} (1-\alpha_i t) \prod_{i=1}^{d} (1-\beta_i t)$$

donde se ha factorizado

$$L(\widetilde{\mathcal{X}}, t) = \prod_{i=1}^{2\widetilde{g}} (1-\alpha_i t) \qquad \text{con} \quad |\alpha_i| = q^{1/2}$$

$$M(\mathcal{X}, t) = \prod_{i=1}^{d} (1-\beta_i t) \qquad \text{con} \quad |\beta_i| = 1$$

y al tomar derivada logarítmica en (4.4) y se compara con (4.5), se tiene, después de simplificar

$$N_r = q^r + 1 - \sum_{i=1}^{2\widetilde{g}} \alpha_i^r - \sum_{i=1}^{d} \beta_i^r.$$

En particular, abreviando $\widetilde{N}_r = card\widetilde{\mathcal{X}}(k_r)$ se obtiene

$$\widetilde{N}_r - N_r = \sum_{i=1}^{d} \beta_i^r$$

llegando de esta manera a probar el siguiente estimativo

Proposición 4.0.1. $|N_r - \widetilde{N}_r| \leq \sigma(\mathcal{X}) - \sigma(\widetilde{\mathcal{X}})$ *para cada r.*

Denotemos por $\widetilde{L}(\mathcal{X}, t) \in \mathbb{F}_p[t]$ la reducción de $L(\mathcal{X}, t) \in \mathbb{Z}[t]$ módulo p.

Proposición 4.0.2. $deg\widetilde{L}(\mathcal{X},t) = \sigma(\mathcal{X})$

Esta relación se conoce en el caso no-singular (Stichtenoth [10]) y el resultado general se sigue al observar que $deg\widetilde{M}(\mathcal{X},t) = d = \sigma(\mathcal{X}) - \sigma(\widetilde{\mathcal{X}})$.

Teorema 4.0.11. $\widetilde{L}(\mathcal{X},t) = det(I_d - tC^n_{\Omega(\mathcal{O})})$

En particular, al comparar los coeficientes de grado 1, se deduce que

$$card\mathcal{X}(k) \equiv 1 - trC^n_{\Omega(\mathcal{O})} \quad mod \quad p$$

Este teorema, lo obtiene Manin [7] en el caso no-singular. Por el corolaro 4.0.10, el Teorema 4.0.11 se cumple para $\mathcal{X}$ si y sólo si se cumple para $\widetilde{\mathcal{X}}$. En efecto: Es claro que si se cumple para $\mathcal{X}$, se cumple para $\widetilde{\mathcal{X}}$. Recíprocamente, si se cumple para $\widetilde{\mathcal{X}}$, se sigue por el Corolario 4.0.10 que

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}(\mathcal{X},t) &= \widetilde{L}(\widetilde{\mathcal{X}},t)\widetilde{M}(\mathcal{X},t) \\
&= det(I_d - tC^n_{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})})det(I_d - tC^n_{\frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}}) \\
&= det(I_d - tC^n_{\Omega(\mathcal{O})})
\end{aligned}$$

ya que

$$\Omega(\mathcal{O}) \cong \Omega(\widetilde{\mathcal{O}}) \oplus \frac{\Omega(\mathcal{O})}{\Omega(\widetilde{\mathcal{O}})}.$$

De esta forma, se cumple el teorema en general.

Bibliografía

[1] V. M. Galkin, Zeta functions of some one-dimensional rings, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 37 (1973), 3-19.

[2] A. Garcia, Semigroups associated to singular points of plane curves, J. reine angew. Math. 336 (1982), 165-184.

[3] F. Delgado de la Mata, Gorenstein curves and symmetry of the semigroup of values, Manuscripta Math. 61 (1988), 285-296.

[4] K.-O. Stöhr, Local and Global Zeta-Functions of singular álgebraic Curves, J. of Number Theory. 71(1998), 1-31.

[5] J. Tate, Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-function, Thesis, Princeton University, 1950.

[6] M. Rosenlicht, Equivalence relations on álgebraic curves, Ann of Math.(2)56 (1952),169-191.

[7] Yu.I.Manin, The Hasse-Witt matrix of an álgebraic curves, Amer. Math. Soc. Transl.45(1965),245-264.

[8] W.E.Jenner, On zeta-functions of number fields, Duke Math. J.36(1969),669-671.

[9] Irvin Sol Cohen, 'Commutative Rings with Restricted Minimum Condition', Duke Math. J. 17 (1950), 27-42.

[10] Henning Stichtenoth, álgebraic Function Fields and Codes, (Springer Universitext), Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[11] E. Kunz,The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring, Proc. J. Math. 150(1991), 107-115.

[12] H. Hasse and E. Witt, Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper von Primzahlgrade p ´uber einem álgebraischem Funktionenk´orpe der Characteristick p, Monatsh. Math. Phys. 43(1936), 477-492.

[13] H. Hironaka, On the arithmetic genera and the effective genera of the álgebraic curves, Mem. Kyoto 30(1957), 177-195.

[14] K.-O. Stöhr, On the Poles of Regular Differentials of singular Curves, BSB Mat.24(1993),105-136.

[15] D. Eisenbud, 'Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry', GTM 150, Springer, New York, 1995.

[16] I.S Cohen, 'Commutative Rings with Restricted Minimum Condition', Duke Math. J. 17 (1950), 27-42.

[17] Atiyah M. F. and Macdonald I. G., *"Introduction to Commutative Algebra"*, *Addison-Wesley Publishing Company,* Reading, mas., 1969.

[18] Waldi R., *"Wertehalbgruppe und singularität einer ebenen algebroiden Kurve"*, Ph. D Thesis, Universität Regensburg, Regensburg, Germany, 1972.

[19] Bayer V., Semigroup of two irreducible algebroid plane curves, *Manuscripta Math.* **39**, (1985), 207-241.

[20] K. O. Stöhr and J.F. Voloch, Weierstrass point and curves over finite fields, Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986), 1-19.

[21] J.-P. Serre, "Sur la topologie des variétés algebrique en caracteristic p". Symp. Top. Alg., México City 1958, 28-53.