



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Problemas Inversos Asociados a Ecuaciones con Derivadas Fraccionarias

**Estefanía Julieth Guevara Blanquicett**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemáticas y Estadística  
Manizales, Colombia

2016



# Problemas Inversos Asociados a Ecuaciones con Derivadas Fraccionarias

Estefanía Julieth Guevara Blanquicett

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ciencias Matemáticas Aplicadas**

Director:

Ph.D. Carlos Daniel Acosta Medina

Codirector:

Ph.D. Carlos Enrique Mejía Salazar

Línea de Investigación:

Problemas Inversos

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemáticas y Estadística  
Manizales, Colombia  
2016



*A mis padres Rosmary Blanquicett D.  
y Gustavo Guevara C.  
A mi amado Daniel Támara L.*



# Agradecimientos

A Dios por darme sabiduría y estar conmigo durante esta maravillosa etapa de mi vida.

A toda mi familia por su apoyo y palabras de aliento durante todo este proceso.

A mi novio, Daniel, por sus consejos, compañía incondicional y apoyo.

A mi madre académica Melba Vertel Morinsón por llenarme de ilusiones y empujare a cumplir este sueño.

A mi director de Tesis Carlos Daniel Acosta Medina y codirector Carlos Enrique Mejía Salazar por todo el apoyo y conocimiento brindado y sobretodo por permitirme entrar a esta maravillosa linea de investigación.

A todos aquellos compañeros y profesores que vivieron conmigo este proceso.

Finalmente a la Universidad de Sucre y Colciencias por el proyecto jóvenes investigadores e innovadores 2013 (convocatoria 617).





## Resumen

En esta tesis se propone una solución numérica al problema inverso de identificar un término forzante dependiente de espacio y tiempo, en una ecuación diferencial fraccionaria en el tiempo, a partir de aproximaciones de la solución del problema directo en un conjunto discreto de puntos. Por la propiedad de mal condicionamiento de los problemas inversos utilizamos como técnica de filtrado la *mollificación*. Se realizan análisis de estabilidad para los problemas directo e inverso y presentamos ejemplos numéricos que muestran la efectividad de nuestros métodos. Las rutinas empleadas para la aplicación de nuestro método son propias y se desarrollaron en MATLAB.

**Palabras clave:** Problemas mal condicionados, problemas inversos, derivadas fraccionales de Caputo, mollificación.

## Abstract

**Title:** Inverse problems associates to equations with fractional derivatives

In this thesis we propose a numerical solution to the inverse problem of identifying a forcing term dependent on space and time, in a fractional differential equation in time, by means of approximations of the solution of the direct problem in a discrete set of points. By the property of ill-conditioning of inverse problems we use as a filtering technique the *mollification*. Stability analysis are performed for the direct and inverse problems and present numerical examples that demonstrate the effectiveness of our methods. The routines used to implement our method are proper and developed in MATLAB.

**Keywords:** Ill-conditioned problems, inverse problems, Caputo fractional derivatives, mollification.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>xii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. Definición del problema . . . . .	5
2.2. Funciones especiales del cálculo fraccional . . . . .	6
2.2.1. Función Gamma de Euler . . . . .	6
2.2.2. Función Mittag-Leffler . . . . .	6
2.3. Derivada fraccionaria de Caputo . . . . .	6
2.3.1. Propiedades . . . . .	7
2.4. Molificación discreta . . . . .	7
<b>3. Modelo matemático</b>	<b>9</b>
3.1. Problema directo . . . . .	9
3.1.1. Método numérico . . . . .	9
3.1.2. Análisis de estabilidad . . . . .	11
3.2. Problema inverso . . . . .	13
3.2.1. Método numérico . . . . .	13
3.2.2. Versión molificada del método numérico . . . . .	14
3.2.3. Análisis de estabilidad . . . . .	14
<b>4. Ejemplos numéricos</b>	<b>19</b>
4.1. Ejemplo problema directo . . . . .	19
4.2. Ejemplos problema inverso . . . . .	20
4.2.1. Ejemplo sin error y sin molificación . . . . .	21
4.2.2. Ejemplo con error y sin molificación . . . . .	21
4.2.3. Ejemplo sin error y con molificación . . . . .	23

---

4.2.4. Ejemplo con error y con modificación . . . . .	24
<b>5. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>28</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	28
5.2. Recomendaciones . . . . .	28
<b>Bibliografía</b>	<b>29</b>

# Lista de Figuras

4-1.	Aproximación numérica de $u$ para diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	20
4-2.	$f$ exacta y numérica para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso sin error y sin molificación . . . . .	21
4-3.	$f$ exacta y numérica para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso con 1% de error y sin molificación . . . . .	22
4-4.	$f$ exacta y numérica para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso con 3% de error y sin molificación . . . . .	23
4-5.	$f$ exacta y numérica para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso con 5% de error y sin molificación . . . . .	23
4-6.	$f$ exacta y numérica para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso sin error y con molificación . . . . .	24
4-7.	$f$ exacta y numérica para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso con 1% de error y con molificación . . . . .	25
4-8.	$f$ exacta y numérica para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso con 3% de error y con molificación . . . . .	26
4-9.	$f$ exacta y numérica para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso con 5% de error y con molificación . . . . .	26

# Lista de Tablas

4-1.	Errores de la aproximación numérica de $u$ para diferentes valores de $\alpha$ . . . .	20
4-2.	Errores de $D_t^{(\alpha)}$ , $g(u)_x$ y $f$ para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso sin error y sin molificación . . . . .	21
4-3.	Errores de $D_t^{(\alpha)}$ , $g(u)_x$ y $f$ para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso con 1 %, 3 % y 5 % de error sin molificación . . . . .	22
4-4.	Errores de $D_t^{(\alpha)}$ , $g(u)_x$ y $f$ para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso sin error y con molificación . . . . .	24
4-5.	Errores de $D_t^{(\alpha)}$ , $g(u)_x$ y $f$ para diferentes valores de $\alpha$ . Proceso con 1 %, 3 % y 5 % de error con molificación . . . . .	25

# 1 Introducción

¿Qué sucedería en  $\frac{d^n f}{dx^n}$ , si  $n = 1/2$ ? fue la pregunta que L'Hopital le formuló a Leibniz y que hoy se acepta como el inicio de las *derivadas fraccionarias*, llamadas así porque la pregunta iba dirigida al orden fraccional de una derivada. Hoy en día ya podemos hablar de derivadas e integrales de orden fraccionario, irracional e incluso complejo, y gracias a los aportes de [13, 28, 38] es posible interpretar condiciones iniciales y de frontera relacionadas con este tipo de derivadas.

El cálculo fraccional ha permitido pasar de derivadas e integrales de orden natural a derivadas e integrales de orden real o complejo. Gracias a ello, se ha posibilitado el desarrollo de muchas investigaciones en distintas áreas del conocimiento, por ejemplo, en procesamiento de imágenes (ver [9, 15]), en bioingeniería (ver [21, 29]), en teoría de transporte (ver [10, 41]), y muchas otras. Con el cálculo fraccional surgió el estudio de las ecuaciones diferenciales fraccionarias y textos que desarrollan una amplia teoría sobre ellas son [1, 18, 25]. Algunos trabajos realizados en este sentido son: [30, 40], en donde se estudia la solución numérica de problemas con ecuaciones de advección-dispersión en dominios finitos; [8, 39], quienes presentan la solución numérica de problemas fraccionarios onda-difusivos; [17], en el cual muestran un algoritmo para la solución numérica de ecuaciones diferenciales de orden fraccional y [42] en donde se da un método para encontrar soluciones exactas utilizando derivadas fraccionarias de Riemann- Liouville. Debido a que las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario representan un conjunto más amplio de comportamientos dinámicos, se han realizado estudios de difusión (ver [19, 22, 27, 34]) y de conducción del calor (ver [16]) que han permitido obtener interpretaciones distintas de estos fenómenos.

A diferencia del cálculo tradicional, existen varias definiciones para las derivadas de orden fraccional y entre ellas tenemos las de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville y Caputo (ver [7, 36]).

Por otra parte, muchos de los trabajos relacionados con ecuaciones diferenciales fraccionarias buscan resolver problemas inversos. En [26] se refieren a los *problemas inversos* como aquellos que se pueden resolver a partir de un conocimiento de la solución de un *problema directo* asociado. Algunos problemas inversos estudiados que involucran derivadas fraccionarias son: [6], en el cual se resuelve un problema inverso de fuente para ecuaciones diferenciales fraccionarias de advección-dispersión, a partir de una observación final de la solución del problema

---

directo correspondiente, en [12, 39] se resuelven problemas inversos correspondientes a problemas mixtos fraccionarios de onda-difusión y en [24, 14] presentan la solución de un problema inverso relacionado a ecuaciones de difusión fraccionaria .

La diferencia entre los problemas directos e inversos es que, además de ser el primero más fácil de resolver, en el sentido de Hadarmard [23] los problemas inversos resultan ser mal condicionados y por ende se hace necesario emplear técnicas, como la molificación [5] y la regularización de Tikhonov, que permitan obtener mejores soluciones de tales problemas. Algunos trabajos que han utilizado molificación son: [2, 3] en los cuales se emplea para estabilizar esquemas de diferencias para una ecuación parabólica degenerada, en [4] se muestra que el uso de la molificación permite pasos de tiempo más grandes conservándose la estabilidad, en [31] se resuelve un problema de identificación de coeficientes utilizando el método hiperbólico molificado y en [37] se usa para reducir las perturbaciones en bioseñales.

En esta tesis se presenta la formulación y solución numérica de un problema inverso asociado a una ecuación diferencial fraccionaria en tiempo. Para alcanzar este logro fue necesario estudiar la solución numérica de problemas directos asociados con ecuaciones con derivadas fraccionarias, investigar sobre algunas técnicas de regularización, como la molificación, y finalmente escoger y resolver numéricamente un problema inverso. La ecuación trabajada combina parte de la estructura de las estudiadas en [24] y en [35]. En [24] estaban interesados en el problema inverso de recuperar un término potencial variante en espacio en una ecuación de difusión fraccional en tiempo. Por su parte, en [35], estudiaron el problema de reconstruir un término fuente variante en tiempo usando como técnica de regularización la *molificación discreta*. En este sentido, el principal aporte de nuestro trabajo consistió en desarrollar algoritmos basados en molificación discreta y en el flujo escalar de *Engquist-Osher*, con el fin de encontrar la solución de la ecuación e identificar su término fuente, asociado al problema directo e inverso respectivamente, y al mismo tiempo derivar la condición de estabilidad CFL y algunos estimados de error que permitieron mostrar la estabilidad de nuestros métodos. Es importante señalar que en la solución de nuestro problema inverso no partimos de un conocimiento a priori de las soluciones observadas del problema directo. En este caso, primero resolvimos numéricamente el problema directo y usamos esta estimación para dar solución al problema inverso de identificación.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo dos definimos el problema a tratar en el trabajo y los principales temas relacionados con el mismo, entre ellos, algunas funciones especiales del cálculo fraccionario como la función Gamma de Euler y la función Mittag-Leffler; la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo y algunas de sus propiedades y la definición de molificación discreta. En el tercer capítulo presentamos el modelo matemático y los problemas directo e inverso asociados a él. De igual forma, exponemos las discretizaciones necesarias para obtener las soluciones numéricas de tales problemas. Es

aquí donde se emplea el flujo escalar de *Engquist Osher* para estimar el término no lineal de nuestra ecuación; además presentamos el proceso de obtención de la CFL a partir de la demostración de la propiedad de monotonidad y así mismo unos estimados de error que permitieron concluir el capítulo con el teorema que garantiza la estabilidad de nuestro método para resolver el problema inverso. En el capítulo 4 presentamos algunos ejemplos numéricos que muestran los errores obtenidos al aproximar cada uno de los términos que intervienen en nuestra ecuación y por supuesto los obtenidos al identificar el término  $f$ , los cuales fueron realizados con rutinas propias ejecutadas en el software MATLAB. Finalmente, en el capítulo 5, exponemos las conclusiones y recomendaciones producto de la investigación desarrollada.



## 2 Preliminares

En este capítulo presentamos el modelo matemático que tratamos numéricamente y explicamos el origen del mismo; de igual forma, mostramos los principales temas relacionados con la tesis, entre ellos, algunas funciones especiales del cálculo fraccional como la función Gamma de Euler y la función Mittag-Leffler, la derivada fraccionaria en sentido de Caputo y algunas de sus propiedades y la definición de molificación discreta. Concluimos el capítulo con unos comentarios generales.

### 2.1. Definición del problema

En esta tesis consideramos el problema mixto

$$\begin{cases} D_t^{(\alpha)}u + g(u)_x = q(x)u + f(x, t), & 0 \leq t \leq T, \quad a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = u_0(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(b, t) = u_1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = u^0(x), & a \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2-1)$$

donde  $D_t^{(\alpha)}$  denota la derivada fraccional parcial de Caputo de orden  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , respecto al tiempo. Este problema combina parte de la estructura de los modelos estudiados en [24] y en [35]. Específicamente, en [24] manejan condiciones iniciales y de frontera homogéneas y una ecuación lineal que incluye una derivada fraccional en tiempo, una derivada espacial de segundo orden, un término forzante  $f$  y un potencial  $q$ . En [35] trabajan con una ecuación lineal que no tiene el término del potencial  $q$  pero manejan condiciones de frontera e iniciales no homogéneas. En nuestro caso, tratamos con una ecuación no lineal que involucra una derivada fraccional en tiempo, un término forzante  $f$ , un potencial  $q$  y condiciones iniciales y de frontera no nulas.

El problema de determinar la función solución  $u(x, t)$  que satisface la ecuación 2-1 y las condiciones iniciales y de frontera conociendo  $g, q$  y  $f$  es el *problema directo*. Un *problema inverso* asociado es, suponiendo un conocimiento aproximado de la función  $u$  en un dominio discreto de puntos, estimar el término forzante  $f$  suponiendo además un conocimiento del potencial  $q$  y de la función de flujo  $g$ .

## 2.2. Funciones especiales del cálculo fraccional

### 2.2.1. Función Gamma de Euler

La función Gamma de Euler es vista como una generalización del factorial de los números naturales a los números complejos.

**Definición 2.2.1.** La función Gamma de Euler  $\Gamma(z)$  esta definida por:

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (2-2)$$

que converge en la mitad derecha del plano complejo  $\Re(z) > 0$ .

### 2.2.2. Función Mittag-Leffler

Muchas derivadas fraccionarias están dadas en términos de la función Mittag-Leffler la cual se puede ver como una generalización de la exponencial compleja  $e^z$ .

**Definición 2.2.2.** La función Mittag-Leffler de un parámetro esta definida por:

$$E_{\alpha}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (2-3)$$

**Definición 2.2.3.** La función Mittag-Leffler de dos parámetros esta definida por:

$$E_{\alpha,\beta}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (2-4)$$

## 2.3. Derivada fraccionaria de Caputo

**Definición 2.3.1.** La derivada fraccional parcial de Caputo de orden  $\alpha > 0$ , donde  $m = \lceil \alpha \rceil$  de una función,  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , que es  $m$  veces diferenciable en  $(a, b)$  y  $D^m g \in L^1(a, b)$  esta definida por el operador integro-diferencial

$$\left( D^{(\alpha)} g \right) (t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t \frac{g^{(m)}(s)}{(t - s)^{\alpha+1-m}} ds. \quad (2-5)$$

La derivada fraccional parcial de Caputo de orden  $\alpha$ , donde  $0 < \alpha \leq 1$ , para  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  esta definida por el operador integro-diferencial

$$\left( D^{(\alpha)} g \right) (t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{g'(s)}{(t - s)^{\alpha}} ds, & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{dg(t)}{dt}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (2-6)$$

### 2.3.1. Propiedades

Las siguientes son algunas de las propiedades de la derivada fraccionaria de Caputo.

**Propiedad 1.** Si  $g(t) = k$  donde  $k \in \mathbb{R}$  es una constante entonces:

$$(D^\alpha g)(t) = 0. \quad (2-7)$$

**Propiedad 2.** Sea  $n = 1, 2, \dots, m - 1$ , entonces

$$(D^\alpha(D^n g))(t) = (D^n(D^\alpha g))(t) = (D^{\alpha+n} g)(t). \quad (2-8)$$

## 2.4. Molificación discreta

El método *Molificación Discreta* consiste en reemplazar un conjunto de datos  $y = \{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  por su versión molificada  $Jy$  donde  $J$  es el operador *molificación discreta* definido por

$$[Jy]_j := \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_i y_{j-i}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2-9)$$

donde  $\eta$  es el parámetro de soporte entero y los pesos  $w_i$  satisfacen

$$w_i = w_{-i}, \quad 0 \leq w_i \leq w_{i-1}, \quad i = 1, \dots, \eta, \quad \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_i = 1, \quad \sum_{i=-\eta}^{\eta} i w_i = 0. \quad (2-10)$$

Una forma para obtener los pesos de molificación  $w_i$  es: siendo  $\delta > 0$ ,  $h > 0$  y  $p > 0$ , escogemos  $\eta$  como el único entero no negativo tal que

$$(\eta - 1/2)h < p\delta \leq (\eta + 1/2)h, \quad (2-11)$$

que resulta ser

$$\eta = \left\lceil \frac{p\delta}{h} - \frac{1}{2} \right\rceil,$$

donde  $\lceil \cdot \rceil$  es la función parte entera superior. Los pesos son obtenidos por integración numérica del núcleo Gaussiano truncado

$$\kappa_{p\delta} = \begin{cases} A_p \delta^{-1} \exp(-t^2/\delta^2), & |t| \leq p\delta \\ 0, & |t| > p\delta, \end{cases} \quad (2-12)$$

donde la constante de normalización

$$A_p = \left( \int_{-p}^p \exp(-s^2) ds \right)^{-1} \quad (2-13)$$

es escogida de forma que  $\int_{\mathbb{R}} \kappa_{p\delta} = 1$ . En este trabajo tomamos  $p = 3$  y nos referimos a  $\delta$  como el parámetro de molificación. Para más detalles ver [5].

## Comentarios finales

Además del problema inverso asociado a (2-1) descrito anteriormente, está el de estimar el potencial  $q$  suponiendo un conocimiento aproximado de la función solución  $u$  en un dominio discreto de puntos y del término forzante  $f$ .

Ambos problemas resultan ser mal condicionados y por tanto se hace necesario el uso de técnicas regularizantes. En este sentido, la molificación discreta es un procedimiento de filtrado basado en convolución usado para regularizar problemas mal puestos y estabilizar esquemas explícitos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, es por ello que optamos utilizarla en la solución numérica del problema inverso que se describe en el siguiente capítulo.

## 3 Modelo matemático

A continuación describimos el modelo matemático trabajado y presentamos el problema directo y el proceso de obtención de un método numérico basado en el flujo escalar estándar de *Engquist-Osher*. Posteriormente, ilustramos el problema inverso y su respectivo algoritmo modificado. Para cada problema, presentamos los respectivos análisis de estabilidad obteniendo una condición de estabilidad (CFL) para el problema directo y unos estimados de error a partir de la modificación discreta y del flujo escalar estándar de *Engquist-Osher* para el problema inverso.

El modelo matemático descrito en (2-1) lo consideramos restringiendo  $0 \leq t \leq 1$  y  $0 \leq x \leq 1$ , de tal modo que la solución numérica del problema directo e inverso de identificar el término forzante  $f$  se tendrán en el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Por lo tanto, consideramos el modelo

$$\begin{cases} D_t^{(\alpha)} u + g(u)_x = q(x)u + f(x, t), & 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u_0(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ u(1, t) = u_1(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ u(x, 0) = u^0(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3-1)$$

### 3.1. Problema directo

El problema de determinar la función solución  $u$  que satisface la ecuación (3-1) y las condiciones iniciales y de frontera conociendo  $g, q$  y  $f$  es el *problema directo*. En esta sección estamos interesados en desarrollar un método numérico que permita obtener una solución de este problema y al mismo tiempo desarrollar el correspondiente análisis de estabilidad.

#### 3.1.1. Método numérico

Consideramos la función  $u$  medida en el cuadrado unitario  $I = I_x \times I_t = [0, 1] \times [0, 1]$  del plano  $(x, t)$ .  $K_x = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$  y  $K_t = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  son las particiones de  $I_x$  e  $I_t$  con tamaño de paso  $\Delta x$  y  $\Delta t$  respectivamente, donde  $x_i = (i - 1)\Delta x$  para  $i = 1, 2, \dots, M$  y  $t^j = (j - 1)\Delta t$  para  $j = 1, 2, \dots, N$ .

La ecuación dada en (3-1) evaluada en el dominio discreto viene a ser

$$D_t^{(\alpha)} u(x_i, t^j) + g(u(x_i, t^j))_x = q(x_i)u(x_i, t^j) + f(x_i, t^j). \quad (3-2)$$

Denotando  $u(x_i, t^j) = u_i^j$ ,  $f(x_i, t^j) = f_i^j$ ,  $q(x_i) = q_i$  la ecuación (3-2) queda

$$D_t^{(\alpha)} u_i^j + g(u_i^j)_x = q_i u_i^j + f_i^j. \quad (3-3)$$

Por lo tanto, para aproximar numéricamente la solución de esta ecuación es necesario discretizar los términos a izquierda de (3-2). A continuación presentamos tales discretizaciones.

### Discretización de la derivada fraccionaria

Por definición

$$(D^\alpha g)(t^{j+1}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t^{j+1}} \frac{g'(s)}{(t^{j+1}-s)^\alpha} ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^j \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \frac{g'(s)}{(t^{j+1}-s)^\alpha} ds. \quad (3-4)$$

Aproximando  $g'$  mediante diferencias finitas se tiene que

$$(D^\alpha g)(t^{j+1}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^j \frac{g(t^{k+1}) - g(t^k)}{\Delta t} \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \frac{ds}{(t^{j+1}-s)^\alpha} + r_{\Delta t}^{k+1}, \quad (3-5)$$

donde  $r_{\Delta t}^{k+1}$  es el error de truncación y  $|r_{\Delta t}^{k+1}| \leq C(\Delta t)^{2-\alpha}$  [27].

Al resolver la integral que aparece en (3-5) se concluye que

$$(D^\alpha g)(t^{j+1}) = \frac{1}{\Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \left[ g(t^{j+1})d_1 + \sum_{k=2}^j g(t^{j-k+2})(d_k - d_{k-1}) - g(t^1)d_j \right] + O((\Delta t)^{2-\alpha}), \quad (3-6)$$

donde  $d_k = k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}$  para  $k = 1, \dots, j$  y cumplen que  $1 = d_1 > d_2 > d_3 \dots \rightarrow 0$ .

Otra forma de escribir la ecuación (3-6) es

$$(D^\alpha g)(t^{j+1}) = \frac{1}{\Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \left[ g(t^{j+1})d_1 + \sum_{k=2}^j g(t^k)(d_{j-k+2} - d_{j-k+1}) - g(t^1)d_j \right] + O((\Delta t)^{2-\alpha}), \quad (3-7)$$

### Discretización del término no lineal $g(u)_x$

Para obtener la discretización del término no lineal  $g(u)_x$ , nos basamos en el flujo escalar estándar de *Engquist-Osher* (ver [11, 20]), la cual denotaremos  $G^{EO}(u)$ , por lo que:

$$G^{EO}(u) = \frac{1}{\Delta x} [G^{EO}(u_i^j, u_{i+1}^j) - G^{EO}(u_{i-1}^j, u_i^j)] \quad (3-8)$$

donde  $G^{EO}(u, v) = g^+(u) + g^-(v)$  con  $g^+$  y  $g^-$  dadas por

$$g^+(u) = g(0) + \int_0^u \max\{g'(s), 0\} ds, \quad g^-(u) = \int_0^u \min\{g'(s), 0\} ds.$$

### Método numérico

Si escribimos  $\omega = \Delta t^\alpha \Gamma(2 - \alpha)$  y reemplazamos (3-7) y (3-8) en (3-2), para  $i = 1, 2, \dots, M$  y  $j = 1, 2, \dots, N$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \left[ u_i^{j+1} + \sum_{k=2}^j u_i^k (d_{j-k+2} - d_{j-k+1}) - d_j u_i^1 \right] \\ + \frac{1}{\Delta x} [G^{EO}(u_i^j, u_{i+1}^j) - G^{EO}(u_{i-1}^j, u_i^j)] + O((\Delta t)^{2-\alpha}) = q_i u_i^j + f_i^j. \end{aligned} \quad (3-9)$$

Denotando la aproximación numérica de  $u_i^j$  por  $v_i^j$ , nuestro método numérico para resolver el problema directo es

$$\begin{aligned} v_i^{j+1} = v_i^j - \frac{\omega}{\Delta x} [G^{EO}(v_i^j, v_{i+1}^j) - G^{EO}(v_{i-1}^j, v_i^j)] + (\omega q_i - d_2) v_i^j + \omega f_i^j + v_i^1 d_j \\ - \sum_{k=2}^{j-1} v_i^k (d_{j-k+2} - d_{j-k+1}). \end{aligned} \quad (3-10)$$

### 3.1.2. Análisis de estabilidad

Los métodos explícitos requieren ciertas condiciones que relacionen sus parámetros para que este pueda ser utilizado. La condición CFL del método numérico (3-10) es

$$\lambda \|g\|_\infty - \omega \|q\|_\infty \leq 2 - 2^{1-\alpha}, \quad (3-11)$$

donde  $\lambda = \omega / \Delta x$ .

**Definición 3.1.1.** Sean  $v_i^j$  y  $u_i^j$  dos funciones discretas para las cuales el método (3-10) puede ser aplicado. El método (3-10) se dice que cumple la propiedad de monotonicidad si

$$u_i^1 \leq v_i^1 \text{ para toda } i \implies u_i^j \leq v_i^j \text{ para toda } i \text{ y toda } j. \quad (3-12)$$

**Lema 3.1.1.** El método (3-10) cumple la propiedad de monotonicidad (3-12) bajo la condición CFL (3-11).

*Demostración.* Razonamos por inducción matemática sobre  $j$ .

1. Para  $j = 2$  debemos mostrar que si  $u_i^1 \leq v_i^1 \implies u_i^2 \leq v_i^2$ , lo cual equivale a demostrar que  $v_i^2 - u_i^2 \geq 0$ . De (3-10) tenemos que:

$$v_i^2 = v_i^1 - \frac{\omega}{\Delta x} [G^{EO}(v_i^1, v_{i+1}^1) - G^{EO}(v_{i-1}^1, v_i^1)] + (\omega q_i - d_2) v_i^1 + \omega f_i^1 + d_1 v_i^1$$

$$u_i^2 = u_i^1 - \frac{\omega}{\Delta x} [G^{EO}(u_i^1, u_{i+1}^1) - G^{EO}(u_{i-1}^1, u_i^1)] + (\omega q_i - d_2) u_i^1 + \omega f_i^1 + d_1 u_i^1$$

de donde,

$$\begin{aligned}
v_i^2 - u_i^2 &= (2 + \omega q_i - d_2)(v_i^1 - u_i^1) - \frac{\omega}{\Delta x} \left[ G^{EO}(v_i^1, v_{i+1}^1) - G^{EO}(v_{i-1}^1, v_i^1) - G^{EO}(u_i^1, u_{i+1}^1) \right. \\
&\quad \left. + G^{EO}(u_{i-1}^1, u_i^1) \right] \\
&= (2 + \omega q_i - d_2)(v_i^1 - u_i^1) + \frac{\omega}{\Delta x} \left[ \int_{u_{i-1}^1}^{v_{i-1}^1} \max\{g'(s), 0\} ds + \int_{u_{i+1}^1}^{v_{i+1}^1} -\min\{g'(s), 0\} ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{u_i^1}^{v_i^1} \max\{g'(s), 0\} ds + \int_{u_i^1}^{v_i^1} \min\{g'(s), 0\} ds \right] \\
&= \frac{\omega}{\Delta x} \left[ \int_{u_{i-1}^1}^{v_{i-1}^1} \max\{g'(s), 0\} ds + \int_{u_{i+1}^1}^{v_{i+1}^1} -\min\{g'(s), 0\} ds \right] \\
&\quad + \int_{u_i^1}^{v_i^1} \left[ 2 + \omega q_i - d_2 - \frac{\omega}{\Delta x} (\max\{g'(s), 0\} - \min\{g'(s), 0\}) \right] ds \\
&\geq \frac{\omega}{\Delta x} \left[ \int_{u_{i-1}^1}^{v_{i-1}^1} \max\{g'(s), 0\} ds + \int_{u_{i+1}^1}^{v_{i+1}^1} -\min\{g'(s), 0\} ds \right] \\
&\quad + \int_{u_i^1}^{v_i^1} \left[ 2 + \omega q_i - d_2 - \frac{\omega}{\Delta x} \|g'\|_\infty \right] ds.
\end{aligned}$$

Las dos primeras integrales son no negativas ya que estamos integrando funciones no negativas en un intervalo no negativo; bajo la condición CFL (3-11) la tercera integral también es no negativa. Por tanto  $v_i^2 - u_i^2 \geq 0$ .

2. Supongamos ahora que  $u_i^n \leq v_i^n$  para  $n = 1, 2, \dots, j$ .
3. Veamos que  $u_i^{j+1} \leq v_i^{j+1}$ .

De (3-10) obtenemos:

$$\begin{aligned}
v_i^{j+1} &= v_i^j - \frac{\omega}{\Delta x} [G^{EO}(v_i^j, v_{i+1}^j) - G^{EO}(v_{i-1}^j, v_i^j)] + (\omega q_i - d_2)v_i^j + \omega f_i^j + v_i^1 d_j \\
&\quad - \sum_{k=2}^{j-1} v_i^k (d_{j-k+2} - d_{j-k+1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_i^{j+1} &= u_i^j - \frac{\omega}{\Delta x} [G^{EO}(u_i^j, u_{i+1}^j) - G^{EO}(u_{i-1}^j, u_i^j)] + (\omega q_i - d_2)u_i^j + \omega f_i^j + u_i^1 d_j \\
&\quad - \sum_{k=2}^{j-1} u_i^k (d_{j-k+2} - d_{j-k+1}).
\end{aligned}$$



de donde, razonando análogamente al caso  $j = 2$ , tenemos

$$\begin{aligned}
v_i^{j+1} - u_i^{j+1} &= \frac{\omega}{\Delta x} \left[ \int_{u_{i-1}^j}^{v_{i-1}^j} \max\{g'(s), 0\} ds + \int_{u_{i+1}^j}^{v_{i+1}^j} - \min\{g'(s), 0\} ds \right] + \int_{u_i^1}^{v_i^1} d_j ds \\
&\quad + \int_{u_i^j}^{v_i^j} \left[ 1 + \omega q_i - d_2 - \frac{\omega}{\Delta x} (\max\{g'(s), 0\} - \min\{g'(s), 0\}) \right] ds \\
&\quad - \sum_{k=2}^{j-1} (v_i^k - u_i^k) (d_{j-k+2} - d_{j-k+1}). \\
&\geq \frac{\omega}{\Delta x} \left[ \int_{u_{i-1}^j}^{v_{i-1}^j} \max\{g'(s), 0\} ds + \int_{u_{i+1}^j}^{v_{i+1}^j} - \min\{g'(s), 0\} ds \right] + \int_{u_i^1}^{v_i^1} d_j ds \\
&\quad + \int_{u_i^j}^{v_i^j} \left[ 2 - 2^{1-\alpha} + \omega q_i - \frac{\omega}{\Delta x} \|g'\|_\infty \right] ds + \sum_{k=2}^{j-1} (v_i^k - u_i^k) (d_{j-k+1} - d_{j-k+2}).
\end{aligned}$$

Las tres primeras integrales son no negativas ya que integramos funciones no negativas en intervalos no negativos, el cuarto término también lo es debido a la CFL (3-11) y por definición de los  $d_k$  en la sumatoria todos los términos son positivos. Por tanto,  $v_i^{j+1} - u_i^{j+1} \geq 0$ .  $\square$

## 3.2. Problema inverso

Un *problema inverso* asociado al problema directo de identificar  $u$  en (3-1), y que estudiamos en este trabajo, es estimar el término forzante  $f$  suponiendo un conocimiento aproximado de la función  $u$  en un dominio discreto, del potencial  $q$  y de la función de flujo  $g$ . En esta sección presentamos un método numérico para dar solución al problema inverso e inmediatamente damos justificaciones del por qué no se espera obtener una buena aproximación del término  $f$  con él. Seguidamente, mostramos la versión molificada del algoritmo para luego desarrollar algunos estimados de error que son de gran importancia para derivar el resultado de estabilidad.

### 3.2.1. Método numérico

De la ecuación (3-1), el término  $f$  evaluado en la malla de puntos está dado por

$$f(x_i, t^j) = D_t^{(\alpha)} u(x_i, t^j) + g(u(x_i, t^j))_x - q(x_i)u(x_i, t^j). \quad (3-13)$$

Usando las discretizaciones (3-7) y (3-8) en (3-13), y la notación antes usada, nuestro método numérico para resolver el problema inverso viene dado por

$$f_i^j = \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\omega} + \frac{G^{EO}(v_i^j, v_{i+1}^j) - G^{EO}(v_{i-1}^j, v_i^j)}{\Delta x} - \frac{1}{\omega}(\omega q_i - d_2)v_i^j - \frac{v_i^1 d_j}{\omega} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=2}^{j-1} v_i^k (d_{j-k+2} - d_{j-k+1}). \quad (3-14)$$

Del método (3-14) se espera que no aproxime correctamente al término  $f$  puesto que depende en parte de la aproximación numérica de derivadas, lo cual se sabe es un proceso mal condicionado (ver [35] para más detalles). En otras palabras, para poder identificar  $f$  requerimos algún conocimiento de la función  $u$  solución del problema directo, sin embargo, en general, lo que realmente se tiene es una versión con ruido,  $u^\epsilon$ , que hace que tal problema inverso sea mal condicionado, es decir, el ruido  $\epsilon$  en la función  $u$  puede causar malas aproximaciones en el cálculo de  $D_t^{(\alpha)}u$  y  $g(u)_x$  que son necesarios para poder estimar la función término forzante  $f$ .

Es por lo anterior que en el tratamiento de problemas inversos se hace necesario contar con técnicas, como la regularización de *Tikhonov* y la *molificación discreta*, que permitan minimizar la influencia de los errores. Es así, que a continuación usamos la molificación como técnica de regularización y presentamos la versión molificada de nuestro método numérico.

### 3.2.2. Versión molificada del método numérico

Si tomamos la versión molificada de  $u^\epsilon(x_i, t^j)$ , la cual denotamos  $\tilde{v}_i^j$ , de (3-14) resulta

$$J_\delta f_i^j = \frac{\tilde{v}_i^{j+1} - \tilde{v}_i^j}{\omega} + \frac{G^{EO}(\tilde{v}_i^j, \tilde{v}_{i+1}^j) - G^{EO}(\tilde{v}_{i-1}^j, \tilde{v}_i^j)}{\Delta x} - \frac{1}{\omega}(\omega q_i - d_2)\tilde{v}_i^j - \frac{\tilde{v}_i^1 d_j}{\omega} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=2}^{j-1} \tilde{v}_i^k (d_{j-k+2} - d_{j-k+1}). \quad (3-15)$$

A continuación presentamos el análisis de estabilidad para el método (3-15).

### 3.2.3. Análisis de estabilidad

Los siguientes resultados son necesarios para el análisis de estabilidad del proceso de reconstrucción del término forzante  $f$ .

Sean  $I_t = [0, 1]$ ,  $g \in L^1(I_t)$  y  $t \in I_t^\delta = [p\delta, 1 - p\delta]$ . Suponemos que en lugar de conocer la función  $g$ , conocemos alguna función dato con ruido  $g^\epsilon \in C^0(I_t)$  tal que  $\|g - g^\epsilon\|_{\infty, I_t} \leq \epsilon$ . Las funciones discretas  $G = \{g(t_j) : j \in \mathbf{Z}\}$  y  $G^\epsilon = \{g^\epsilon(t_j) : j \in \mathbf{Z}\}$  están definidas en una partición uniforme  $K_t$  de  $I_t$ , con tamaño de paso  $\Delta t$ , y satisfaciendo  $\|G - G^\epsilon\|_{\infty, I_t \cap K_t} \leq \epsilon$ . El símbolo  $C$  representa una constante real genérica positiva.

**Teorema 3.2.1.** *Si las funciones  $g'$  y  $g^\epsilon$  son uniformemente Lipschitz en  $I_t$  y si además  $\|g - g^\epsilon\|_{\infty, I_t} \leq \epsilon$ , entonces existe una constante  $C$ , independiente de  $\delta$ , tal que*

$$\|J_\delta(D^{(\alpha)}g^\epsilon) - D^{(\alpha)}g\|_{\infty, I_t} \leq \frac{C}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left( \delta + \frac{\epsilon}{\delta} \right). \quad (3-16)$$

*Demostración.* Una prueba puede encontrarse en [33]. □

**Lema 3.2.2.** *Si  $g \in C^0(I_t)$  es uniformemente Lipschitz en  $I$  entonces existe una constante  $C$ , independiente de  $\delta$ , tal que*

$$\|J_\delta G^\epsilon - J_\delta g\|_{\infty, I_t^\delta \cap K_t} \leq C(\epsilon + \Delta t) \quad (3-17)$$

y

$$\|J_\delta G^\epsilon - g\|_{\infty, I_t^\delta \cap K_t} \leq C(\epsilon + \delta + \Delta t). \quad (3-18)$$

*Demostración.* Una prueba puede encontrarse en [32]. □

**Lema 3.2.3.** *Si  $g \in C^0(I_t)$  entonces existe una constante  $C$ , independiente de  $\delta$ , tal que*

$$\|J_\delta G^\epsilon - G^\epsilon\|_{\infty, I_t^\delta \cap K_t} \leq C(\epsilon + \delta + \Delta t) + \epsilon. \quad (3-19)$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} \|J_\delta G^\epsilon - G^\epsilon\|_{\infty, I_t^\delta \cap K_t} &= \|J_\delta G^\epsilon - g^\epsilon\|_{\infty, I_t^\delta \cap K_t} \\ &= \|J_\delta G^\epsilon - g + g - g^\epsilon\|_{\infty, I_t^\delta \cap K_t} \\ &\leq \|J_\delta G^\epsilon - g\|_{\infty, I_t^\delta \cap K_t} + \|g - g^\epsilon\|_{\infty, I_t^\delta \cap K_t}, \end{aligned}$$

aplicando el Lema 3.2.2, concluimos que

$$\|J_\delta G^\epsilon - G^\epsilon\|_{\infty, I_t^\delta \cap K_t} \leq C(\epsilon + \delta + \Delta t) + \epsilon. \quad \square$$

Las estimativas siguientes involucran el flujo escalar estándar de *Engquist-Osher*. De ahora en adelante para simplificar notación usaremos  $\tilde{u}$  para denotar  $u^\epsilon$ .

**Lema 3.2.4.** *Si  $g' \geq 0$  en  $I$ , entonces existe una constante  $C$  positiva tal que*

$$\|G^{EO}(\tilde{u}_i^j) - g(\tilde{u}_i^j)_x\|_{\infty, I} \leq C\Delta x, \quad \forall i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3-20)$$

*Demostración.* Sean  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Usando el Teorema de Taylor tenemos que

$$g(\tilde{u}_{i-1}^j) = g(\tilde{u}_i^j) - \Delta x g(\tilde{u}_i^j)_x + O((\Delta x)^2).$$

Luego

$$g(\tilde{u}_i^j)_x = \frac{g(\tilde{u}_i^j) - g(\tilde{u}_{i-1}^j)}{\Delta x} + O(\Delta x),$$

de donde,

$$\left\| \frac{g(\tilde{u}_i^j) - g(\tilde{u}_{i-1}^j)}{\Delta x} - g(\tilde{u}_i^j)_x \right\|_{\infty, I} \leq C(\Delta x), \quad (3-21)$$

para cierta constante positiva  $C$ .

Ahora, reemplazando la ecuación (3-8) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|G^{EO}(\tilde{u}_i^j) - g(\tilde{u}_i^j)_x\|_{\infty, I} = & \left\| \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_0^{\tilde{u}_i^j} \max\{g'(s), 0\} ds + \int_0^{\tilde{u}_{i+1}^j} \min\{g'(s), 0\} ds \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^{\tilde{u}_{i-1}^j} \max\{g'(s), 0\} ds - \int_0^{\tilde{u}_i^j} \min\{g'(s), 0\} ds \right] - g(\tilde{u}_i^j)_x \right\|_{\infty, I}, \end{aligned}$$

y como  $g' \geq 0$ , resulta que

$$\|G^{EO}(\tilde{u}_i^j) - g(\tilde{u}_i^j)_x\|_{\infty, I} = \left\| \frac{g(\tilde{u}_i^j) - g(\tilde{u}_{i-1}^j)}{\Delta x} - g(\tilde{u}_i^j)_x \right\|_{\infty, I}.$$

Por la ecuación (3-21) se tiene que

$$\|G^{EO}(\tilde{u}_i^j) - g(\tilde{u}_i^j)_x\|_{\infty, I} \leq C(\Delta x). \quad \square$$

**Lema 3.2.5.** *Si  $g$  es uniformemente Lipschitz en  $I$  y  $g' \geq 0$ , entonces existen constantes  $C'_1$  y  $C'_2$  tales que*

$$\|G^{EO}(\tilde{v}_i^j) - G^{EO}(\tilde{u}_i^j)\|_{\infty, I} \leq \frac{C'_1(\epsilon + \delta + \Delta x) + C'_2\epsilon}{\Delta x}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N.$$

*Demostración.* De la ecuación (3-8) y teniendo en cuenta que  $g' \geq 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|G^{EO}(\tilde{v}_i^j) - G^{EO}(\tilde{u}_i^j)\|_{\infty, I} &= \frac{1}{\Delta x} \left\| g(\tilde{v}_i^j) - g(\tilde{v}_{i-1}^j) + g(\tilde{u}_{i-1}^j) - g(\tilde{u}_i^j) \right\|_{\infty, I} \\ &\leq \frac{1}{\Delta x} \left\| g(\tilde{v}_i^j) - g(\tilde{u}_i^j) \right\|_{\infty, I} + \frac{1}{\Delta x} \left\| g(\tilde{v}_{i-1}^j) - g(\tilde{u}_{i-1}^j) \right\|_{\infty, I}. \end{aligned}$$

Como  $g$  es uniformemente Lipschitz en  $I$  obtenemos

$$\|G^{EO}(\tilde{v}_i^j) - G^{EO}(\tilde{u}_i^j)\|_{\infty, I} \leq \frac{C_1}{\Delta x} \|\tilde{v}_i^j - \tilde{u}_i^j\|_{\infty, I} + \frac{C_2}{\Delta x} \|\tilde{v}_{i-1}^j - \tilde{u}_{i-1}^j\|_{\infty, I}.$$

Así, por Lema 3.2.3 se concluye que

$$\|G^{EO}(\tilde{v}_i^j) - G^{EO}(\tilde{u}_i^j)\| \leq \frac{C_1'(\epsilon + \delta + \Delta x) + C_2'\epsilon}{\Delta x}. \quad \square$$

**Lema 3.2.6.** *Sea  $g$  una función continua en  $I$  y tal que  $g' \geq 0$  en  $I$ , entonces existen las constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C$ , independientes de  $\delta$ , para las que*

$$\|G^{EO}(\tilde{v}_i^j) - g(v_i^j)_x\|_{\infty, I} \leq \frac{C_1(\epsilon + \delta + \Delta x) + C_2\epsilon}{\Delta x} + C_3\Delta x + \frac{C_4\epsilon + C_5(\Delta x)^2}{\Delta x},$$

donde  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} \|G^{EO}(\tilde{v}_i^j) - g(v_i^j)_x\|_{\infty, I} &= \|G^{EO}(\tilde{v}_i^j) - G^{EO}(\tilde{u}_i^j) + G^{EO}g(\tilde{u}_i^j) - g(\tilde{u}_i^j)_x + g(\tilde{u}_i^j)_x - g(v_i^j)_x\|_{\infty, I} \\ &\leq \|G^{EO}(\tilde{v}_i^j) - G^{EO}(\tilde{u}_i^j)\|_{\infty, I} + \|G^{EO}(\tilde{u}_i^j) - g(\tilde{u}_i^j)_x\|_{\infty, I} \\ &\quad + \|g(\tilde{u}_i^j)_x - g(v_i^j)_x\|_{\infty, I}. \end{aligned}$$

Utilizando diferencias finitas tenemos que  $\|g(\tilde{u}_i^j)_x - g(v_i^j)_x\|_{\infty, I} \leq \frac{C_4\epsilon + C_5(\Delta x)^2}{\Delta x}$ . Luego, por Lema 3.2.4 y Lema 3.2.5 se concluye que

$$\|G^{EO}(\tilde{v}_i^j) - g(v_i^j)_x\|_{\infty, I} \leq \frac{C_1(\epsilon + \delta + \Delta x) + C_2\epsilon}{\Delta x} + C_3\Delta x + \frac{C_4\epsilon + C_5(\Delta x)^2}{\Delta x}. \quad \square$$

A continuación presentamos el teorema que garantiza la estabilidad del método (3-15) usado para resolver nuestro problema inverso.

**Teorema 3.2.7.** *Si  $u, g, q \in C^0(I)$  y  $g, u^\epsilon$  son uniformemente Lipschitz en  $I$ , la reconstrucción molificada del término  $f$  dado por (3-15), satisface:*

$$\begin{aligned} \|J_\delta f - f\|_{\infty, K} &\leq \frac{C_0}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left( \delta + \frac{\epsilon}{\delta} \right) + \frac{C_1(\epsilon + \delta + \Delta x) + C_2\epsilon}{\Delta x} + C_3\Delta x \\ &\quad + \frac{C_4\epsilon + C_5(\Delta x)^2}{\Delta x} + C_6(\epsilon + \delta + \Delta t)\|q\|_{\infty, I}. \end{aligned} \quad (3-22)$$

*Demostración.* De (3-1) y (3-15), reorganizando términos y usando la norma del máximo, tenemos:

$$\|J_\delta f - f\|_{\infty, K} \leq \|D_t^{(\alpha)}\tilde{v} - D_t^{(\alpha)}u\|_{\infty, I} + \|G^{EO}(\tilde{v}) - g(u)_x\|_{\infty, I} + \|q\|_{\infty, I}\|\tilde{v} - u\|_{\infty, I}.$$

Luego, aplicando el Teorema 3.2.1 y los Lemas 3.2.2 y 3.2.6 resulta

$$\begin{aligned} \|J_\delta f - f\|_{\infty, K} \leq & \frac{C_0}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left( \delta + \frac{\epsilon}{\delta} \right) + \frac{C_1(\epsilon + \delta + \Delta x) + C_2\epsilon}{\Delta x} + C_3\Delta x \\ & + \frac{C_4\epsilon + C_5(\Delta x)^2}{\Delta x} + C_6(\epsilon + \delta + \Delta t) \|q\|_{\infty, I}. \end{aligned} \quad \square$$

## Comentarios finales

Mientras que los problemas directos con ecuaciones fraccionarias han sido ampliamente considerados, el trabajo con problemas inversos es más reciente. En este capítulo nos interesamos precisamente en obtener soluciones numéricas a dos problemas asociados al modelo (3-1), uno directo y otro inverso. Para el primero obtuvimos el método (3-10) y para el otro el dado en (3-14). Sin embargo, debido a la propiedad de mal condicionamiento de los problemas inversos obtuvimos la versión molificada de (3-14) en (3-15).

Por otro lado, hemos derivado la condición CFL (3-11) que garantiza la estabilidad del problema directo y los estimados de error 3.2.4, 3.2.5 y 3.2.6 basados en el flujo escalar de *Engquist-Osher* y molificación discreta a fin de obtener el resultado de estabilidad para el problema inverso dado en el Teorema 3.2.7.

## 4 Ejemplos numéricos

En este capítulo presentamos algunos ejemplos numéricos que permiten ver la efectividad de los métodos (3-10) y (3-15) para resolver los problemas directo e inverso descritos en las secciones 3.1 y 3.2 respectivamente. Inicialmente presentamos un ejemplo en donde se resuelve el problema directo de encontrar  $u$  y mostramos los errores obtenidos en norma  $l_1$  para distintos valores de  $\alpha$ . Esta aproximación de  $u$  se usa en los siguientes ejemplos para resolver el problema inverso de identificar el término forzante  $f$ .

Para dar solución al problema inverso usamos la aproximación de  $u$  obtenida al resolver el problema directo mediante (3-10). De esta manera, también presentamos cuatro ejemplos de identificación de  $f$  que varían en su planteamiento, es decir, en la posibilidad de usar errores aleatorios y molificación.

### 4.1. Ejemplo problema directo

Considere la siguiente ecuación diferencial de orden fraccionario en tiempo

$$D_t^{(\alpha)}u(x, t) + 3 \times 10^{-5}(e^t + \sin 7x)^2(7\cos 7x) = x^2u(x, t) + f(x, t), \quad (4-1)$$

para  $0 < \alpha \leq 1$ , con condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{cases} u(0, t) = e^t, & 0 \leq t \leq 1, \\ u(1, t) = e^t + \sin(7), & 0 \leq t \leq 1, \\ u(x, 0) = 1 + \sin(7x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (4-2)$$

En este caso  $g(x) = 10^{-5}x^3$  y por tanto  $g' \geq 0$ .

Para el problema directo conocemos la función

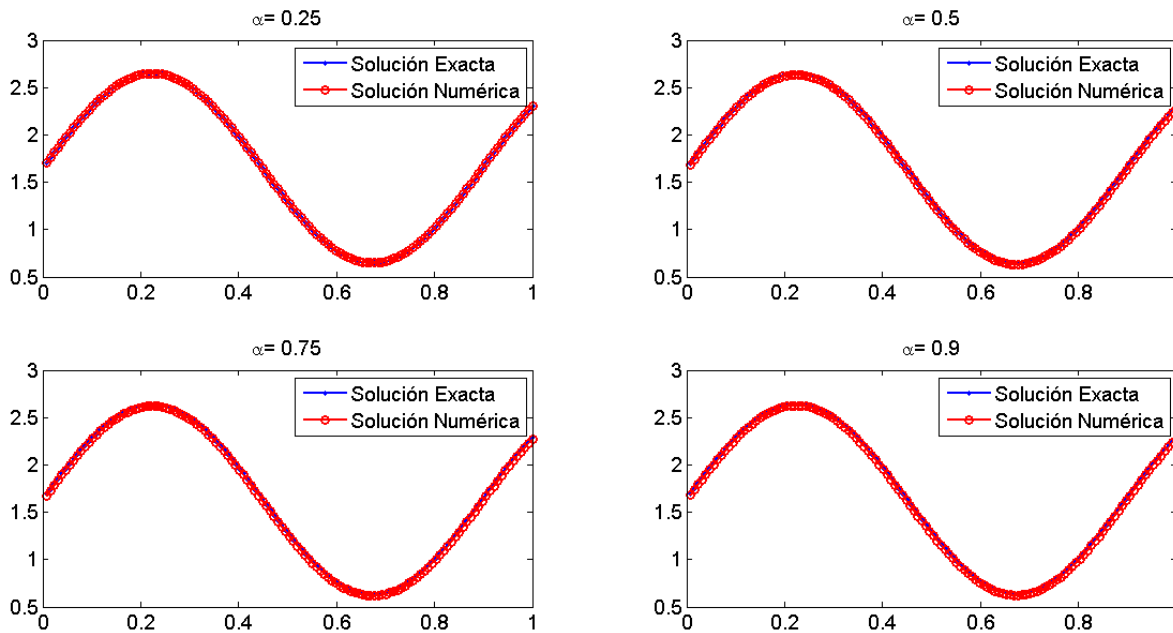
$$f(x, t) = t^{1-\alpha}E_{1,2-\alpha}(t) + 3 \times 10^{-5}(e^t + \sin 7x)^2(7\cos 7x) - x^2(e^t + \sin 7x), \quad (4-3)$$

y queremos determinar la solución  $u(x, t) = e^t + \sin 7x$  de (4-1).  $\Delta t$  se calcula a partir de la condición CFL.

La Tabla 4-1 muestra los errores en norma  $l_1$  de la aproximación de  $u$  para  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$  y  $\alpha=0.9$ , y la Figura 4-1 ilustra la solución exacta versus la solución numérica del problema directo para estos valores de  $\alpha$ .

$\alpha$	Error- $l_1$ de $u$	$\alpha$	Error- $l_1$ de $u$
0.25	2.2510e-03	0.25	4.3866e-03
0.50	6.8453e-03	0.50	6.9742e-03
0.75	9.6737e-03	0.75	9.8128e-03
0.90	9.1087e-03	0.90	9.2387e-03

**Tabla 4-1:** Errores en norma  $l_1$  de la aproximación numérica de  $u$  para diferentes valores de  $\alpha$ . Izquierda ( $\Delta x = \frac{1}{128}$ ), derecha ( $\Delta x = \frac{1}{256}$ )



**Figura 4-1:** Aproximación numérica de  $u$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

## 4.2. Ejemplos problema inverso

En esta sección presentamos cuatro ejemplos en los que se resuelve el problema inverso asociado a la ecuación (4-1) de identificar el término  $f$ . En ellos conocemos en una malla de puntos la función  $u$  que satisface la ecuación (4-1) y queremos identificar el término  $f$  que aparece en (4-3). En algunos casos usamos los niveles de error 1 %, 3 %, y 5 %.

El orden de los ejemplos es el siguiente: en el primero no se usa error ni molificación, en el siguiente, adicionamos error pero no usamos molificación, en el otro no utilizamos errores pero si se molifica y en el último introducimos error y también molificamos. En todos los ejemplos mostramos los errores obtenidos en  $l_1$  para cada uno de los términos que aparecen en la ecuación (4-1).



### 4.2.1. Ejemplo sin error y sin molificación

La Tabla 4-2 muestran los errores relativos en norma  $l_1$  para  $D_t^{(\alpha)}$ ,  $g(u)_x$  y  $f$ , y la Figura 4-2 ilustra  $f$  exacta y  $f$  numérica en el tiempo  $t = 0.5$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

$\alpha$	Error- $l_1$ de $D_t^{(\alpha)}$	Error- $l_1$ de $g(u)_x$	Error- $l_1$ de $f$
0.25	4.3395e-08	3.1273e-02	2.6823e-05
0.50	9.1675e-05	3.1258e-02	1.2723e-04
0.75	1.0867e-03	3.1242e-02	1.4370e-03
0.90	2.8786e-03	3.1238e-02	3.7434e-03

Tabla 4-2: Errores de  $D_t^{(\alpha)}$ ,  $g(u)_x$  y  $f$  para diferentes valores de  $\alpha$ . Proceso sin error y sin molificación.

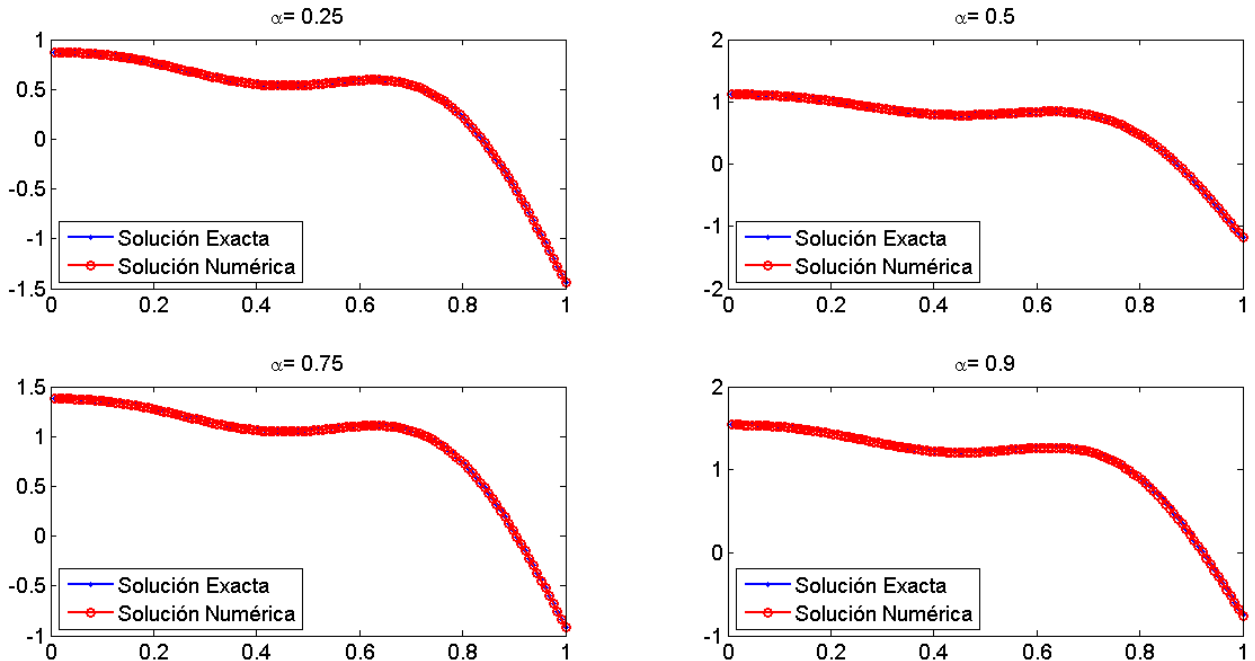


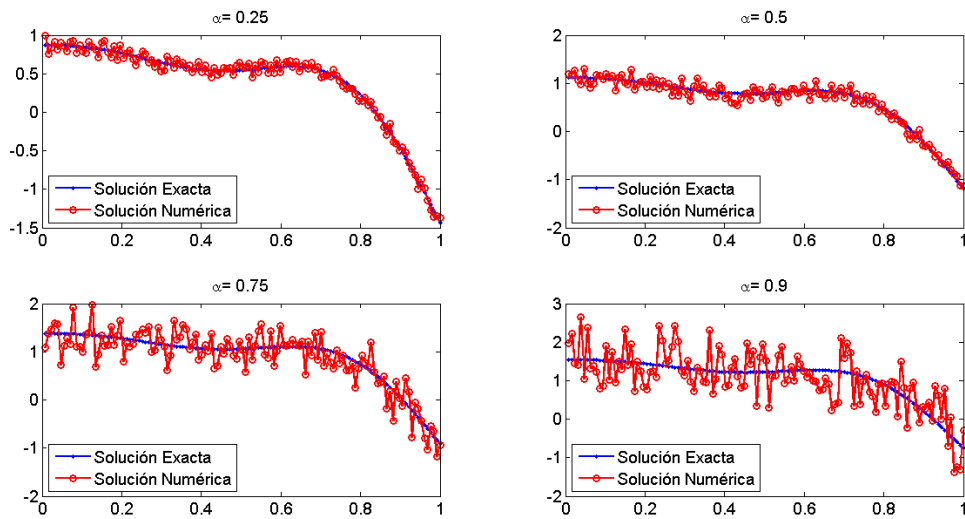
Figura 4-2:  $f$  exacta y numérica para diferentes valores de  $\alpha$ . Proceso sin error y sin molificación

### 4.2.2. Ejemplo con error y sin molificación

La Tabla 4-3 muestra los errores relativos en  $l_1$  para  $D_t^{(\alpha)}$ ,  $g(u)_x$  y  $f$ , y las figuras 4-3, 4-4 y 4-5 ilustran  $f$  exacta y  $f$  numérica molificada en el tiempo  $t = 0.5$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

$\epsilon=0.01$			
$\alpha$	Error- $l_1$ de $D_t^{(\alpha)}$	Error- $l_1$ de $g(u)_x$	Error- $l_1$ de $f$
0.25	7.7040e+03	1.3555e+00	1.0409e+02
0.50	1.6045e+02	1.3449e+00	1.9736e+02
0.75	3.9017e+02	1.3398e+00	5.0328e+02
0.90	6.6087e+02	1.3431e+00	8.5357e+02
$\epsilon=0.03$			
$\alpha$	Error- $l_1$ de $D_t^{(\alpha)}$	Error- $l_1$ de $g(u)_x$	Error- $l_1$ de $f$
0.25	2.4372e+02	1.3567e+00	3.3136e+02
0.50	4.1594e+02	1.3478e+00	5.5752e+02
0.75	1.1084e+01	1.3413e+00	1.4589e+01
0.90	1.9318e+01	1.3445e+00	2.5053e+01
$\epsilon=0.05$			
$\alpha$	Error- $l_1$ de $D_t^{(\alpha)}$	Error- $l_1$ de $g(u)_x$	Error- $l_1$ de $f$
0.25	4.0988e+02	1.3576e+00	5.5870e+02
0.50	7.2767e+02	1.3510e+00	9.7507e+02
0.75	1.8675e+01	1.3427e+00	2.4559e+01
0.90	3.2975e+01	1.3493e+00	4.2774e+01

**Tabla 4-3:** Errores de  $D_t^{(\alpha)}$ ,  $g(u)_x$  y  $f$  para diferentes valores de  $\alpha$ . En las tres tablas se muestran resultados sin molificación. Usamos 1%, 3% y 5% de error en la tabla superior, media e inferior respectivamente.



**Figura 4-3:**  $f$  exacta y numérica para diferentes valores de  $\alpha$ . Proceso con 1% de error y sin molificación

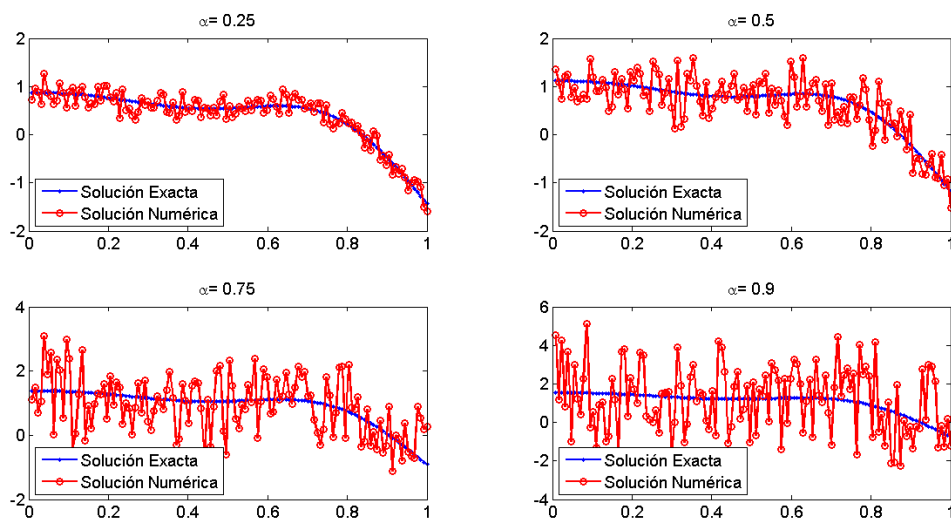


Figura 4-4:  $f$  exacta y numérica para diferentes valores de  $\alpha$ . Proceso con 3% de error y sin molificación

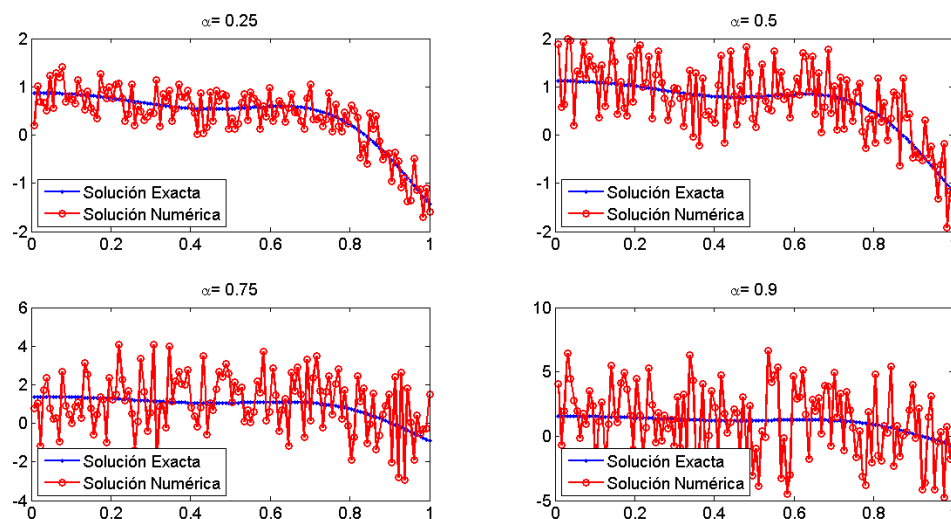


Figura 4-5:  $f$  exacta y numérica para diferentes valores de  $\alpha$ . Proceso con 5% de error y sin molificación

### 4.2.3. Ejemplo sin error y con molificación

La Tabla 4-4 muestra los errores relativos en  $l_1$  para  $J_\delta D_t^{(\alpha)}$ ,  $J_\delta g(u)_x$  y  $J_\delta f$ , y la Figura 4-6 ilustra  $f$  exacta y  $f$  numérica molificada en el tiempo  $t = 0.5$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

$\alpha$	Error- $l_1$ de $D_t^{(\alpha)}$	Error- $l_1$ de $g(u)_x$	Error- $l_1$ de $f$
0.25	8.6631e-03	9.7987e-02	9.3254e-04
0.50	1.8588e-02	4.0206e-02	1.0663e-02
0.75	3.3030e-02	4.0206e-02	1.8123e-02
0.90	4.9701e-02	4.0206e-02	1.7131e-02

Tabla 4-4: Errores de  $D_t^{(\alpha)}$ ,  $g(u)_x$  y  $f$  para diferentes valores de  $\alpha$ . Proceso sin error y con molificación

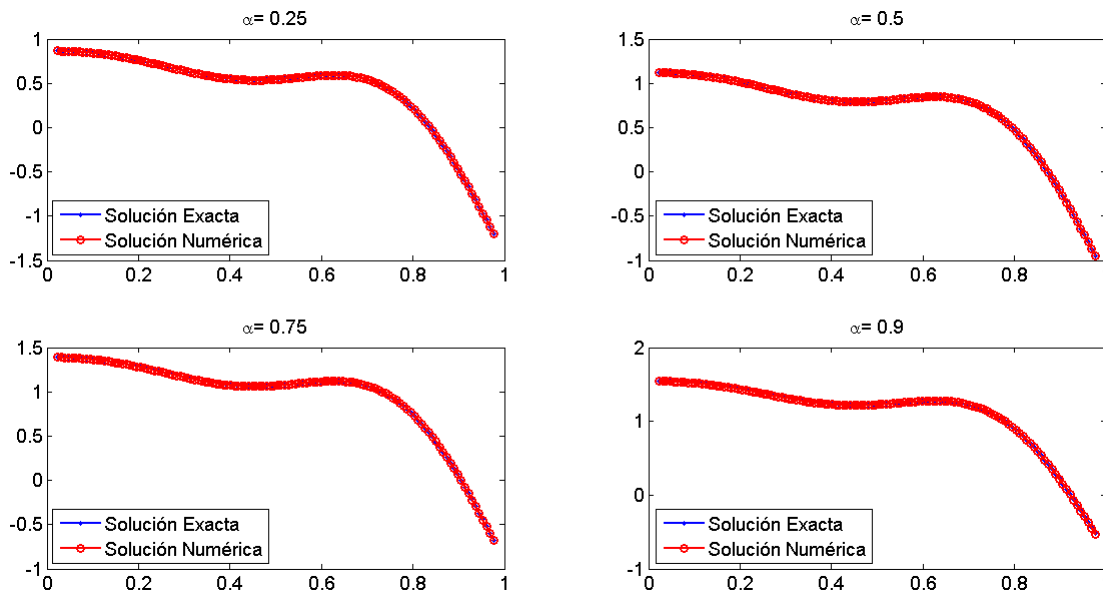


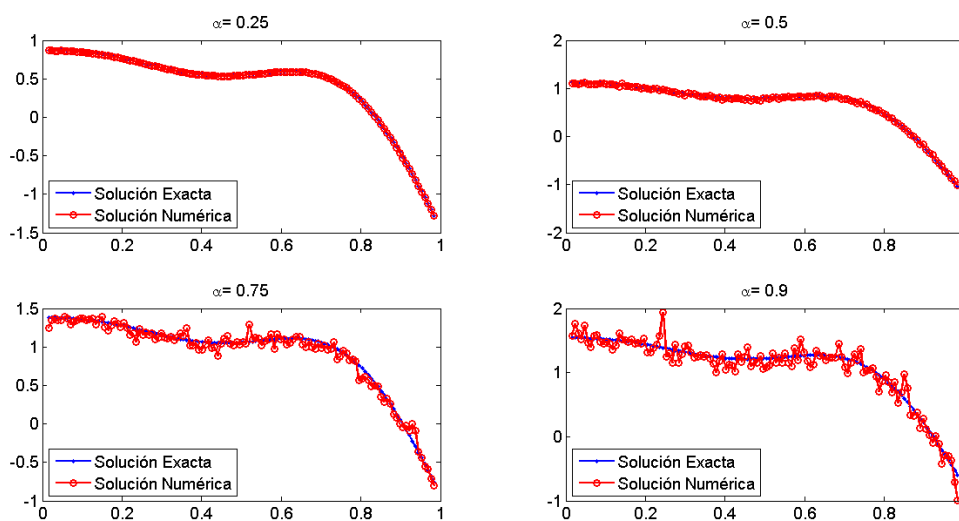
Figura 4-6:  $f$  exacta y numérica para diferentes valores de  $\alpha$ . Proceso sin error y con molificación

#### 4.2.4. Ejemplo con error y con molificación

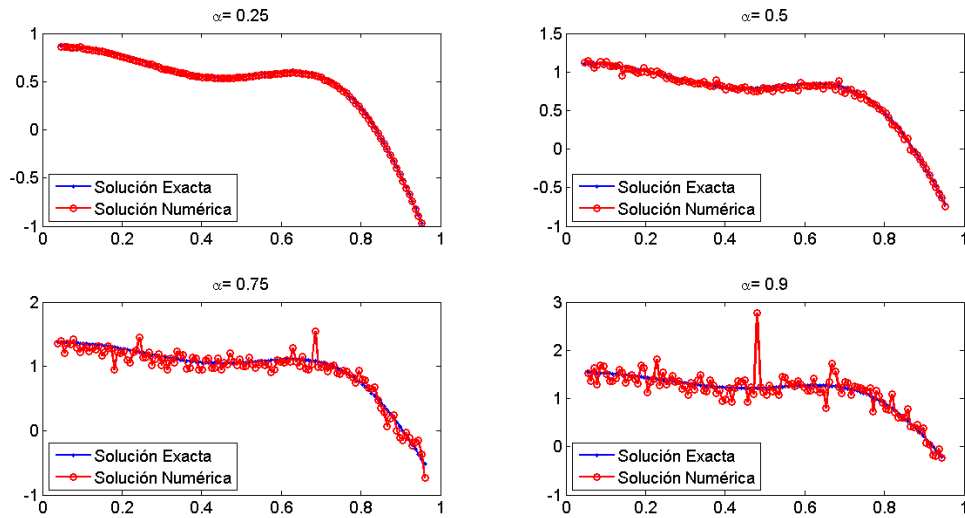
La Tabla 4-5 muestra los errores relativos en  $l_1$  para  $J_\delta D_t^{(\alpha)}$ ,  $J_\delta g(u)_x$  y  $J_\delta f$ , y las figuras 4-7, 4-8 y 4-9 ilustran  $f$  exacta y  $f$  numérica molificada en el tiempo  $t = 0.5$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

$\epsilon=0.01$			
$\alpha$	Error- $l_1$ de $D_t^{(\alpha)}$	Error- $l_1$ de $g(u)_x$	Error- $l_1$ de $f$
0.25	8.5409e-03	1.1559e-01	4.2808e-03
0.50	2.1420e-02	1.3522e-01	1.2057e-02
0.75	3.9348e-02	1.4105e-01	1.7775e-02
0.90	5.9134e-02	1.3693e-01	3.1307e-02
$\epsilon=0.03$			
$\alpha$	Error- $l_1$ de $D_t^{(\alpha)}$	Error- $l_1$ de $g(u)_x$	Error- $l_1$ de $f$
0.25	9.3512e-03	7.8562e-02	7.3422e-03
0.50	2.7718e-02	1.8297e-01	1.7838e-02
0.75	5.7695e-02	1.9422e-01	4.2379e-02
0.90	8.8252e-02	2.3745e-01	6.0563e-02
$\epsilon=0.05$			
$\alpha$	Error- $l_1$ de $D_t^{(\alpha)}$	Error- $l_1$ de $g(u)_x$	Error- $l_1$ de $f$
0.25	1.1263e-02	1.1965e-01	1.0476e-02
0.50	3.4042e-02	3.2746e-01	2.2614e-02
0.75	6.9745e-02	4.0542e-01	3.5345e-02
0.90	1.0325e-01	4.0130e-01	6.3001e-02

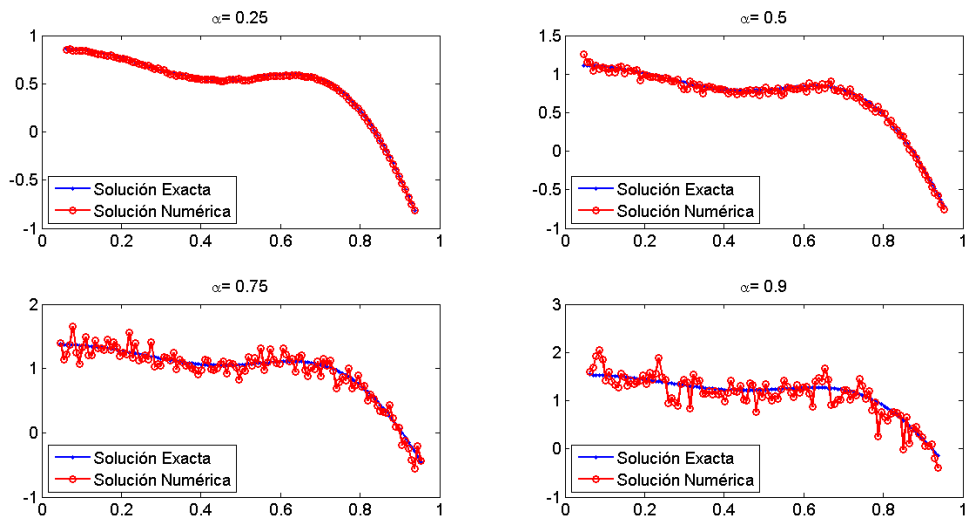
**Tabla 4-5:** Errores de  $D_t^{(\alpha)}$ ,  $g(u)_x$  y  $f$  para diferentes valores de  $\alpha$ . En las tres tablas se muestran resultados con molificación. Usamos 1%, 3% y 5% de error en la tabla superior, media e inferior respectivamente.



**Figura 4-7:**  $f$  exacta y numérica para diferentes valores de  $\alpha$ . Proceso con 1% de error y con molificación



**Figura 4-8:**  $f$  exacta y numérica para diferentes valores de  $\alpha$ . Proceso con 3% de error y con molificación



**Figura 4-9:**  $f$  exacta y numérica para diferentes valores de  $\alpha$ . Proceso con 5% de error y con molificación

## Comentarios finales

En este capítulo presentamos inicialmente la solución numérica del problema directo expuesto en 4.1, obteniendo que el error de la aproximación disminuye cuando  $\alpha \rightarrow 0$ . Además, hemos resuelto el problema inverso de identificar  $f$  para varias situaciones:

- En la primera situación se estudió cómo funcionaba el método numérico (3-14) en ausencia de error, obteniéndose buenas aproximaciones del término forzante  $f$  para los distintos valores de  $\alpha$  utilizados.

- En la segunda situación estudiamos el funcionamiento del método (3-14) en presencia de diferentes niveles error sin el uso de técnicas de regularización. Encontramos que, tal como lo mencionamos anteriormente, el problema es mal condicionado, pues pequeños errores en los datos dieron lugar a malas aproximaciones.
- En el tercer caso se pretendía conocer la influencia de molificar datos en ausencia de error en el proceso de recuperar  $f$ . Respecto a la primera situación, es decir, sin error y sin molificación, los errores obtenidos fueron similares.
- En el último ejemplo evaluamos el método (3-15) en el proceso de identificar el término forzante  $f$  en presencia de error. A diferencia de la segunda situación (con error y sin molificación) los errores disminuyeron considerablemente en cada uno de los términos de la ecuación (4-1), y por supuesto en la identificación de  $f$ . Con esto ilustramos la eficiencia de nuestro algoritmo molificado (3-15) para solucionar el problema inverso en cuestión.

# 5 Conclusiones y recomendaciones

## 5.1. Conclusiones

En esta tesis se obtuvo la solución numérica de un problema directo de determinar una función  $u$  en una ecuación diferencial no lineal fraccionaria en el tiempo, además se desarrolló un método numérico para resolver el correspondiente problema inverso de reconstruir un término forzante  $f$ . Para cada problema, se desarrollaron análisis de estabilidad obteniendo una condición de estabilidad (CFL) para el problema directo y unos estimados de error a partir de la molificación discreta y del flujo escalar estándar de *Engquist-Osher* para el problema inverso.

La obtención de estas soluciones se llevó a cabo mediante rutinas propias elaboradas en el lenguaje matemático MATLAB, de las cuales podemos inferir que la solución numérica  $u$  del problema directo está muy próxima de la solución exacta; de la misma forma, que el hecho de molificar los datos en ausencia de error poco afecta la calidad de la identificación de  $f$  y, finalmente, que en condiciones reales en donde la información con la que se cuenta viene influenciada por errores, la acción de la molificación permite la efectiva identificación del término forzante  $f$ .

## 5.2. Recomendaciones

Un trabajo interesante, referido también a problemas inversos, es considerar recuperar numéricamente el término potencial  $q$  en la ecuación (2-1), teniendo en este caso un conocimiento del término forzante  $f$ . Este problema resulta ser más complejo que el tratado en esta tesis, ya que este término está multiplicando a la función  $u$  haciéndolo dependiente del comportamiento de esta.



# Bibliografía

- [1] ABBAS, Saïd ; BENCHOHRA, Mouffak ; N'GUÉRÉKATA, Gaston M.: *Topics in fractional differential equations*. Vol. 27. Springer Science & Business Media, 2012
- [2] ACOSTA, Carlos D. ; BÜRGER, Raimund: Difference schemes stabilized by discrete mollification for degenerate parabolic equations in two space dimensions. En: *IMA Journal of Numerical Analysis* (2012), p. drr049
- [3] ACOSTA, Carlos D. ; BÜRGER, Raimund ; MEJÍA, Carlos E.: Monotone difference schemes stabilized by discrete mollification for strongly degenerate parabolic equations. En: *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 28 (2012), Nr. 1, p. 38–62
- [4] ACOSTA, Carlos D. ; MEJÍA, Carlos E.: Approximate solution of hyperbolic conservation laws by discrete mollification. En: *Applied numerical mathematics* 59 (2009), Nr. 9, p. 2256–2265
- [5] ACOSTA, Carlos D. ; MEJÍA, Carlos E.: *Stable computations by discrete mollification*. Vol. 1. Universidad Nacional, 2014
- [6] ALDOGHATHIER, Abeer ; LALEG-KIRATI, Taous-Meriem ; LIU, Da-Yan: Direct and Inverse Source Problem for a Space Fractional Advection Dispersion Equation. En: *arXiv preprint arXiv:1401.3153* (2014)
- [7] AMADOR, Pedro A.: *Analysis of a finite difference scheme for the numerical solution of a fractional convection-diffusion equation*, Tesis de Grado, 2014
- [8] ARCILA, Niny J. ; ACOSTA, Carlos D. ; CASANOVA, Simeón: Solución numérica de ecuaciones diferenciales fraccionarias de onda-difusión. En: *Revista NOOS* 2 (2013), Nr. 6
- [9] BAI, Jian ; FENG, Xiang-Chu: Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising. En: *Image Processing, IEEE Transactions on* 16 (2007), Nr. 10, p. 2492–2502
- [10] BERKOWITZ, Brian ; KLAFTER, Joseph ; METZLER, Ralf ; SCHER, Harvey: Physical pictures of transport in heterogeneous media: Advection-dispersion, random-walk, and fractional derivative formulations. En: *Water Resources Research* 38 (2002), Nr. 10, p. 9–1

- 
- [11] BÜRGER, Raimund ; KARLSEN, Kenneth H. ; TOWERS, John D.: An Engquist-Osher-type scheme for conservation laws with discontinuous flux adapted to flux connections. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 47 (2009), Nr. 3, p. 1684–1712
- [12] BURTSEV, MV ; ZARUBIN, AN: Inverse initial-boundary value problem for a fractional diffusion-wave equation with a non-carleman shift. En: *Differential Equations* 44 (2008), Nr. 3, p. 390–400
- [13] CAPUTO, M: Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. En: *Annals of Geophysics* 19 (1966), Nr. 4, p. 383–393
- [14] CHENG, Jin ; NAKAGAWA, Junichi ; YAMAMOTO, Masahiro ; YAMAZAKI, Tomohiro: Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation. En: *Inverse problems* 25 (2009), Nr. 11, p. 115002
- [15] CUESTA-MONTERO, Eduardo ; FINAT, Javier: IMAGE PROCESSING BY MEANS OF A LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION.
- [16] DENG, Zhi-Liang ; YANG, Xiao-Mei: A Discretized Tikhonov Regularization Method for a Fractional Backward Heat Conduction Problem. En: *Abstract and Applied Analysis* Vol. 2014 Hindawi Publishing Corporation, 2014
- [17] DIETHELM, Kai: An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. En: *Electronic transactions on numerical analysis* 5 (1997), Nr. 1, p. 1–6
- [18] DIETHELM, Kai: *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer, 2010
- [19] EIDELMAN, Samuil D. ; KOCHUBEI, Anatoly N.: Cauchy problem for fractional diffusion equations. En: *Journal of Differential Equations* 199 (2004), Nr. 2, p. 211–255
- [20] ENGQUIST, Björn ; OSHER, Stanley: One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws. En: *Mathematics of Computation* 36 (1981), Nr. 154, p. 321–351
- [21] FREED, AD ; DIETHELM, K: Fractional calculus in biomechanics: a 3D viscoelastic model using regularized fractional derivative kernels with application to the human calcaneal fat pad. En: *Biomechanics and modeling in mechanobiology* 5 (2006), Nr. 4, p. 203–215
- [22] GARCÍA, Efraín A. ; GARZA, Guadalupe E C. ; MARTÍNEZ, Rodolfo C.: Representación de la difusión del calor mediante ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. En: *Ingenierías* 11 (2008), Nr. 39, p. 3

- 
- [23] HADAMARD, J: The Cauchy problem for linear partial differential equations of hyperbolic type. En: *Russian translation, Nauka, Moscow* (1978)
- [24] JIN, Bangti ; RUNDELL, William: An inverse problem for a one-dimensional time-fractional diffusion problem. En: *Inverse Problems* 28 (2012), Nr. 7, p. 075010
- [25] KILBAS, A Anatolii A. ; SRIVASTAVA, Hari M. ; TRUJILLO, Juan J.: *Theory and applications of fractional differential equations*. Vol. 204. Elsevier Science Limited, 2006
- [26] KIRSCH, Andreas: *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Vol. 120. Springer Science & Business Media, 2011
- [27] LIN, Yumin ; XU, Chuanju: Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation. En: *Journal of Computational Physics* 225 (2007), Nr. 2, p. 1533–1552
- [28] LIOUVILLE, Joseph: *Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions*. 1832
- [29] MAGIN, Richard L.: *Fractional calculus in bioengineering*. Begell House Redding, 2006
- [30] MEERSCHAERT, Mark M. ; TADJERAN, Charles: Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 172 (2004), Nr. 1, p. 65–77
- [31] MEJÍA, CE ; MURIO, DA: Mollified hyperbolic method for coefficient identification problems. En: *Computers & Mathematics with Applications* 26 (1993), Nr. 5, p. 1–12
- [32] MURIO, DA ; MEJÍA, Carlos E. ; ZHAN, S: Discrete mollification and automatic numerical differentiation. En: *Computers & Mathematics with Applications* 35 (1998), Nr. 5, p. 1–16
- [33] MURIO, Diego A.: On the stable numerical evaluation of Caputo fractional derivatives. En: *Computers & Mathematics with Applications* 51 (2006), Nr. 9, p. 1539–1550
- [34] MURIO, Diego A.: Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations. En: *Computers & Mathematics with Applications* 56 (2008), Nr. 4, p. 1138–1145
- [35] MURIO, Diego A. ; MEJIA, Carlos E.: Source terms identification for time fractional diffusion equation. En: *Revista Colombiana de Matemáticas* 42 (2008), Nr. 1, p. 25–46
- [36] PODLUBNY, Igor: *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Vol. 198. Academic press, 1998

- 
- [37] PULGARÍN, Juan D. ; ACOSTA, Carlos D. ; CASTELLANO, Germán: Reducción de perturbaciones mediante molificación discreta y umbralización por wavelets. En: *Scientia et Technica* 1 (2007), Nr. 35
- [38] RIEMANN, Bernhard: Versuch einer allgemeinen auffassung der Integration und Differentiation. En: *Gesammelte Werke* 62 (1876), p. 331–344
- [39] SAKAMOTO, Kenichi ; YAMAMOTO, Masahiro: Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 382 (2011), Nr. 1, p. 426–447
- [40] SCHUMER, Rina ; BENSON, David A. ; MEERSCHAERT, Mark M. ; BAEUMER, Boris: Multiscaling fractional advection-dispersion equations and their solutions. En: *Water Resources Research* 39 (2003), Nr. 1
- [41] ZASLAVSKY, George M.: Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. En: *Physics Reports* 371 (2002), Nr. 6, p. 461–580
- [42] ZHENG, Bin ; WEN, Chuanbao: Exact solutions for fractional partial differential equations by a new fractional sub-equation method. En: *Advances in Difference Equations* 2013 (2013), Nr. 1, p. 1–12