CAPITULO I

CONCEPTO DE VECTOR. LA ADICION VECTORIAL

1. 1 El concepto de vector resulta al generalizar o abstraer las propiedades comunes a ciertas magnitudes conocidas en Física, tales como la fuerza, la velocidad, la intensidad de campo eléctrico o de campo magnético, etc.

Definición. Se da el nombre de *vector* a ciertas magnitudes que pueden ser representadas geométricamente por medio de un segmento orientado, en el cual se consideran las siguientes cualidades:

a) Longitud o *módulo* del vector, que es un número positivo representativo de la *intensidad* de la magnitud que expresa. Por ejemplo, si una fuerza tiene una intensidad de 10 kilogramos, la longitud del segmento AB será igual a 10 veces la unidad de longitud elegida para representar 1 kg. en el dibujo. 10 kgs., o su equivalente en el dibujo, viene a ser entonces el módulo del vector.

b) La *dirección*, que es aquélla de la recta que contiene el vector. A tal recta se le llama *línea de acción* o también, *soporte* del vector.

c) El *sentido*. Por cada dirección hay dos sentidos, los cuales se particularizan, bien leyendo primero el origen, después el extremo del vector, bien disponiendo una flecha sobre las letras que le designan. Así decimos, "vector A - B" y escribimos $\overrightarrow{AB}$ como designación para el vector que aparece en la Figura 1-1.

Varios son los procedimientos seguidos para designar un vector. En este campo, como en otros de las ciencias matemáticas, no se ha llegado a un sistema único para designación de los elementos y las operaciones.

En realidad, imponer una designación única, -un *standard*- podría no ser conveniente. Así tenemos, en apoyo de este punto de vista, las múltiples designaciones que existen en Análisis para las derivadas, diversidad que ofrece sus ventajas, según el caso.

Una designación muy usada es la que provee una flecha sobre la letra o letras que designan el vector; resulta muy conveniente en las explicaciones gráficas de cátedra. Gran parte de los libros modernos han optado por designar el vector mediante una letra en negrita, lo que hace innecesaria la provisión de la flecha. Autores de lengua alemana acostumbran designar el vector mediante una letra gótica, dejando para los restantes elementos matemáticos caracteres latinos.

La designación empleada en estas lecciones será la de caracteres en negrita, aunque las figuras correspondientes al texto indicarán los vectores con flechas.

El módulo del vector vendrá a estar designado aquí mediante la letra ordinaria, si bien algunas veces, para ser enfáticos, proveeremos el vector con las iniciales mód. antepuestas a aquél.

Los vectores han quedado así definidos en el espacio ordinario, (euclídeo), de tres dimensiones. Como, según la definición, la posición del vector no interesa, se usa la denominación de *vector libre*.

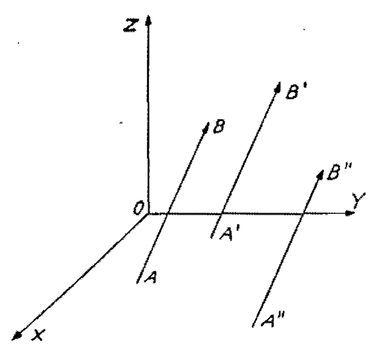

Fig 1-1

Aplicar un vector a un punto es construír el vector dado, de tal manera que su origen coincida con el punto. Así, por ejemplo, en la Figura 1-1, hemos aplicado un mismo vector a los puntos A, A', A''. Se concibe de esta manera la existencia de un conjunto infinito, (triplemente infinito), de vectores, que resultan al aplicar un mismo vector a todos los puntos del espacio. De los vectores pertenecientes a dicho conjunto se dice que son *equipolentes* entre sí o, como es más acostumbrado ahora, se dice que son *iguales*.

1. 2. *Suma de dos vectores.* Se da el nombre de suma de dos vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ a un tercer vector construído según el siguiente procedimiento:

Elegido un punto A arbitrariamente, (Fig 1-2), se construye el vector **AB** igual a $\mathbf{V}_1$ y, por el punto B, un vector **BC** igual a $\mathbf{V}_2$ El vector **AC** que une el origen A de $\mathbf{V}_1$ con el extremo C de $\mathbf{V}_2$, es el vector *suma* de los dos vectores dados, lo que se escribe en símbolos así,

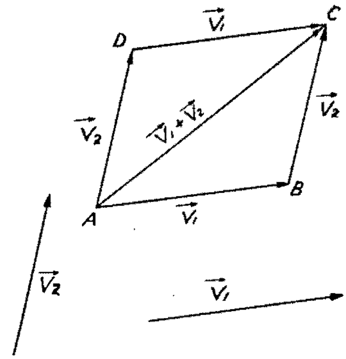

Fig 1-2

(1) $$\mathbf{AC} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$$

Si hubiésemos sumado al vector $\mathbf{AD} = \mathbf{V}_2$, el vector $\mathbf{DC} = \mathbf{V}_1$, habríamos obtenido el mismo resultado, es decir, el vector **AC**. O sea, que se tiene,

(2) $$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1$$

lo que se expresa diciendo: *la suma vectorial tiene la propiedad conmutativa.*

1. 3 *Suma de n vectores.* Si se tienen n vectores libres en el espacio de tres dimensiones, se da el nombre de *suma vectorial* de los mismos, o simplemente *suma,* al vector construído de acuerdo con el siguiente procedimiento:

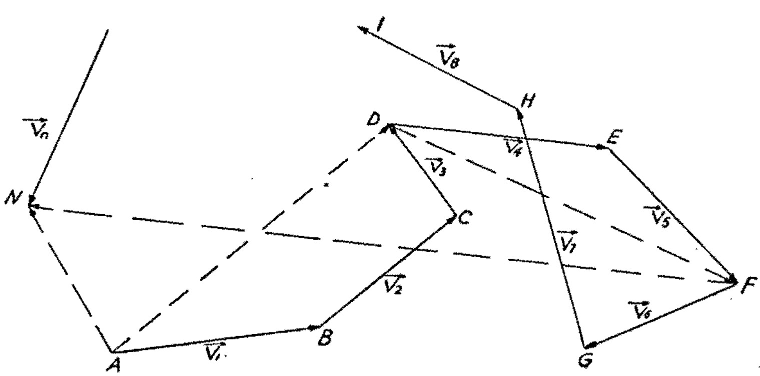

Fig 1-3

Elegido un punto A, (Fig. 1-3), se aplica a tal punto el vector $\mathbf{V}_1$; por el extremo de éste se aplica un vector igual a $\mathbf{V}_2$; por el extremo de éste se aplica un vector igual a $\mathbf{V}_3$ y así sucesivamente hasta aplicar $\mathbf{V}_n$. El vector **AN** que une el origen del primer vector con el extremo del último, recibe el nombre de *suma* de los vectores dados, y se escribe,

$$\mathbf{AN} = \mathbf{S} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \ldots . + \mathbf{V}_n \tag{1}$$

La operación de sumar tiene aquí un contenido más amplio que la operación del mismo nombre tiene en Aritmética con los números positivos, o en Algebra con todas las clases de números reales y complejos, pero conserva las mismas propiedades de estas sumas o sea que, como veremos en seguida, la suma **S** es independiente del orden de los sumandos (propiedad conmutativa) y además pueden ser reemplazados varios sumandos por la suma parcial, (adiciones parciales), de tal manera que la suma de vectores posee la *propiedad asociativa.*

Aunque el dibujo correspondiente a la Figura 1-3, aparece en un plano, debe entenderse que proviene de proyectar las construcciones hechas en el espacio de tres dimensiones. Para conocer la verdadera magnitud de los vectores, sería necesario proyectar sobre dos planos o, en otras palabras, utilizar los procedimientos de la Geometría descriptiva.

Ahora, atendiendo a la Figura 1-3 es evidente que se tiene, por ejemplo,

$$\mathbf{AN} = \mathbf{S} = \mathbf{AD} + \mathbf{DF} + \mathbf{FN} \tag{2}$$

o bien,

$$\mathbf{S} = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) + (\mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_5) + (\mathbf{V}_6 + \ldots . + \mathbf{V}_n) \tag{3}$$

o sea que, se pueden reemplazar varios sumandos por el vector suma de los mismos, sin que se altere la suma general. Esto es, como ya hemos dicho, la *propiedad asociativa.*

Demostremos ahora que, dada una suma de vectores, es posible cambiar el orden de dos elementos contiguos, o, en otras palabras, efectuar una *transposición,* sin que la suma se altere.

Sea, para facilitar la demostración, una suma limitada a cinco vectores,

(4) $$\mathbf{S} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_5$$

Puesto que se puede introducir paréntesis en virtud de la ley asociativa, se tiene,

(5) $$\mathbf{S} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + (\mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4) + \mathbf{V}_5$$

Como la ley conmutativa vale para dos vectores, puede escribirse,

(6) $$\mathbf{S} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + (\mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_3) + \mathbf{V}_5$$

y finalmente suprimiendo el paréntesis, queda,

(7) $$\mathbf{S} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_5$$

En resumen: la suma no se afecta por la transposición de dos elementos contiguos, (en este caso $\mathbf{V}_3$ y $\mathbf{V}_4$).

Ahora, para demostrar que la ley conmutativa es válida en general, haremos ver cómo, mediante un número limitado de transposiciones se pasa de una ordenación dada, a otra cualesquiera ordenación de los sumandos.

Veamos por ejemplo, la igualdad de las dos sumas siguientes:

$$(S'') : \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_5 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_2$$

$$(S') : \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_5$$

Limitándose a escribir sólamente los índices, se tienen las siguientes transposiciones:

(S'') : 3 - 5 - 1 - 4 - 2
3 - 1 - 5 - 4 - 2
1 - 3 - 5 - 4 - 2
1 - 3 - 5 - 2 - 4
1 - 3 - 2 - 5 - 4
1 - 2 - 3 - 5 - 4
1 - 2 - 3 - 4 - 5 : (S')

De lo expuesto hasta ahora se desprenden algunas consecuencias importantes que conviene mencionar.

Primera. La suma de vectores coplanarios (es decir, paralelos a un mismo plano), es coplanaria.

Segunda. La suma de vectores co-axiales (es decir paralelos a una misma recta), es co-axial. Como caso aún más restringido de esta última suma, se tiene la suma de vectores iguales, por ejemplo,

$$\mathbf{S} = \mathbf{V} + \mathbf{V} + \mathbf{V} = 3\mathbf{V}$$

o sea, un vector cuyo módulo es tres veces el módulo de uno de los sumandos, pero que conserva la dirección y el sentido de éstos.

Es oportuno decir que la suma de números positivos y negativos (de números reales en general), está asociada a la suma de vectores co-axiales. En efecto, la operación de sumar tales vectores y la operación de sumar los números que expresan los módulos, afectados de signo (+) para un sentido, de signo (—) para el sentido opuesto, están en relación de *isomorfismo.*

Pasamos ahora a ver qué se entiende por

1. 4 *Producto de un número (un escalar) por un vector.*

Se define el producto de un número m, real, por un vector $\mathbf{V}$, como sigue:

El producto m$\mathbf{V}$ es un vector cuyo soporte es *paralelo* al soporte de $\mathbf{V}$; en otros términos, $\mathbf{V}$ y m$\mathbf{V}$ son paralelos. El módulo es igual a $|m| \cdot V$. En cuanto al sentido, será el mismo de $\mathbf{V}$ si m es positivo; el opuesto a $\mathbf{V}$, si m es negativo.

Un caso particular importante es aquél en que $m = -1$, pues entonces el efecto del factor (—1), será el de cambiar el sentido, conservando la dirección y el módulo. Se conviene en escribir

$$(1) \qquad (-1)\mathbf{V} = -\mathbf{V}$$

Se dice entonces que $-\mathbf{V}$ es el vector *opuesto* a $\mathbf{V}$

Definiremos en seguida la

1. 5 *Diferencia de vectores.* Dados dos vectores, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, se llama diferencia entre $\mathbf{V}_2$ (minuendo) y $\mathbf{V}_1$ (substraendo), a un tercer vector $\mathbf{V}$ que sumado a $\mathbf{V}_1$ nos da $\mathbf{V}_2$. En símbolos ha de cumplirse,

(1) $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}$

Por razones que veremos luego, cabe escribir,

(2) $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$

En la Figura 1-4 se hace ver cómo el vector diferencia, une el extremo del vector substraendo al extremo del vector minuendo.

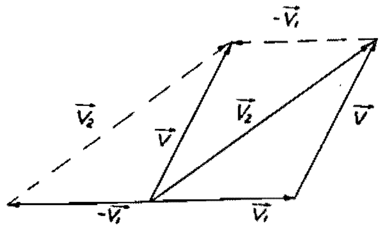

Fig 1-4

La definición dada se atiene a la ley de *permanencia de las propiedades formales* (Hankel).

Es fácil ver cómo la diferencia entre los dos vectores se obtiene como resultado de sumar al vector $\mathbf{V}_2$, el vector opuesto a $\mathbf{V}_1$.

Así como en Algebra el concepto de *suma* se extiende a los números negativos, el cálculo vectorial reduce la operación de substraer o restar, a la de sumar los correspondientes vectores opuestos.

La razón para escribir (2) radica en que si se substituye en (1), se obtiene identidad.

1. 6 *Descomposición de un vector en una terna cartesiana.*

Utilizaremos en lo que sigue la terna de ejes coordenados rectangulares con orientación directa.

Sea un punto P de coordenadas (x, y, z). Si se une el origen del sistema con el punto P, se obtiene el vector **OP**, llamado *vector de punto, vector de posición* o también, *coordenada vectorial* de P.

Si se construye sobre cada uno de los ejes, un vector de módulo unidad, orientado en el mismo sentido del correspondiente eje, a tales vectores unitarios (versores) se les designará por

$$\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k},$$

para los ejes x, y, z, respectivamente.

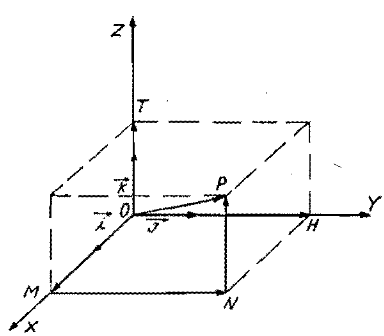

Fig 1-5

Construído el contorno de coordenadas del punto P -mejor aún, el paralelepípedo del cual **OP** es una diagonal- se tienen las siguientes igualdades vectoriales,

(1) $$\mathbf{OP} = \mathbf{OM} + \mathbf{MN} + \mathbf{NP}$$

$$= \mathbf{OM} + \mathbf{OH} + \mathbf{OT}$$

Ahora bien, puede escribirse,

(2) $$\mathbf{OM} = \mathbf{i}x \ ; \quad \mathbf{OH} = \mathbf{j}y \ ; \quad \mathbf{OT} = \mathbf{k}z$$

luego, substituyendo en la anterior,

(3) $$\mathbf{OP} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

la cual expresa la descomposición del vector en la terna ortogonal considerada.

1. 7 *El vector libre como diferencia de vectores - posición.*

Atendiendo a la figura 1-6, se escribe,

(1) $$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} \qquad \ldots$$

que nos dice: el vector **AB** es igual a la diferencia entre la coordenada vectorial del extremo, B, y la coordenada vectorial del origen, A, del vector.

Esta diferencia caracteriza los vectores libres, porque, para otro vector **CD** = **AB**, se tiene,

(2) $$\mathbf{OD} = \mathbf{OB} + \mathbf{BD}$$

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OA} + \mathbf{AC}$$

Efectuando la substracción y teniendo en cuenta que es **BD** = **AC**, queda,

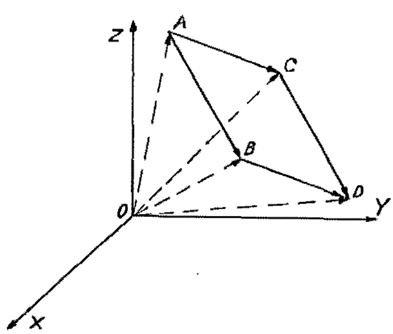

Fig 1-6

(3) $$\mathbf{OD} - \mathbf{OC} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}$$

igualdad que comprueba el enunciado.

La descomposición de un vector libre equivale en consecuencia a la descomposición de los dos vectores posición, como sigue:

Sean,

(4) $$\mathbf{OB} = \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2$$

(5) $$\mathbf{OA} = \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1$$

de donde,

(6) $$\mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \mathbf{i}(x_2 - x_1) + \mathbf{j}(y_2 - y_1) + \mathbf{k}(z_2 - z_1)$$

Para simplificar se escribe,

(7) $$x_2 - x_1 = X \; ; \qquad y_2 - y_1 = Y \; ; \qquad z_2 - z_1 = Z$$

en las cuales se designa con X, Y, Z, las proyecciones algebraicas o *componentes* del vector **AB**.

1. 8. *Expresión de la suma de vectores, en el sistema de coordenadas.* Para n vectores $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, ..., $\mathbf{V}_n$, hemos visto que la suma,

(1) $$\mathbf{S} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \ldots + \mathbf{V}_n = \Sigma \mathbf{V}_r$$
(desde r = 1 hasta r = n)

es un vector bien definido, independiente del orden en que se consideren los sumandos.

Si por otra parte, se tiene,

(2) $$\mathbf{V}_r = \mathbf{i}X_r + \mathbf{j}Y_r + \mathbf{k}Z_r$$

la suma se expresa así,

(3) $$\mathbf{S} = \Sigma(\mathbf{i}X_r + \mathbf{j}Y_r + \mathbf{k}Z_r)$$
(desde r = 1 hasta r = n)

Distribuyendo la sumatoria, se tiene,

(4) $$\mathbf{S} = \mathbf{i}\Sigma X_r + \mathbf{j}\Sigma Y_r + \mathbf{k}\Sigma Z_r$$
(desde r = 1 hasta r = n)

o sea que, las componentes de **S**, valen,

(5) $$S_x = \Sigma X_r \; ; \qquad S_y = \Sigma Y_r \; ; \qquad S_z = \Sigma Z_r$$
(desde r = 1 hasta r = n)

En palabras: *la componente del vector suma, según cada eje, es igual a la suma de las componentes de los vectores sumandos.*

Esto es intuitivo desde un punto de vista geométrico y vale también para sistemas oblicuos, de coordenadas.

Así, con atención a la Figura 1-7, se ve que el enunciado anterior equivale a afirmar que la proyección de **S** es igual a la suma de las proyecciones de $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_5$, o sea que es

$$(6) \qquad (AF) = (AB) + (BC) + (CD) + (DE) + (EF)$$

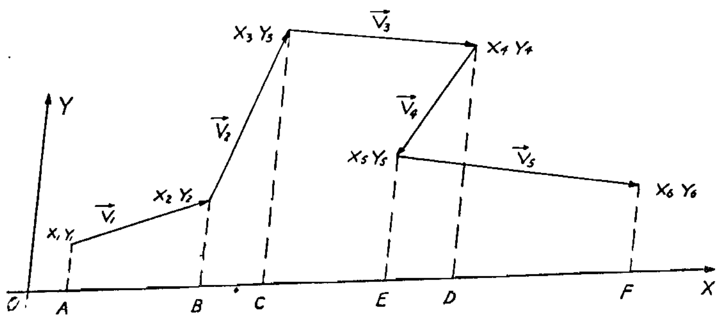

Fig 1-7

lo que se constata por inspección o también, analíticamente, así:

El segundo lado de (6), vale,

$$(7) \qquad (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + (x_5 - x_4) + (x_6 - x_5) = x_6 - x_1 = (AF)$$

Se ha utilizado el paréntesis para indicar la medida algebraica del segmento (proyección analítica o simplemente, proyección).

En estas lecciones daremos preferencia a la notación,

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \tag{1}$$

para designar un vector en la terna cartesiana.

Otra designación que ofrece ventajas en el álgebra de Matrices, es aquella que expresa el vector por medio de sus componentes cartesianas ordenadas, escritas entre paréntesis, así,

$$\mathbf{V} = [x, y, z] \tag{2}$$

En los ejercicios que siguen, utilizaremos esta última designación, por favorecer la brevedad.

1) Determinar la suma de los vectores,

$$\mathbf{V}_1 = [3; 4; 2] \qquad \mathbf{V}_2 = [4; -6; 0]$$

$$\mathbf{V}_3 = [5; -8; 11] \qquad \mathbf{V}_4 = [3; 1; -4]$$

2) De la igualdad, $\mathbf{V} = [x, y, z]$, se deduce la siguiente ley de multiplicación por un escalar,

$$\mathrm{k}.\mathbf{V} = [\mathrm{k}x; \mathrm{k}y; \mathrm{k}z]$$

3) Ejecutar la siguiente operación,

$$4\mathbf{V}_1 + 3\mathbf{V}_2 + 6\mathbf{V}_3 - 5\mathbf{V}_4$$

Los vectores son los correspondientes del ejercicio 1.

4) Obtener los cosenos de dirección del vector $[-3; 4; 2]$, con relación a los ejes cartesianos a que está referido.

5) Qué significado geométrico tiene el vector expresado por

$$\left([x_2 - x_1]; [y_2 - y_1]; [z_2 - z_1] \right) ?$$

6) Dados los puntos,

$$\mathbf{r}_1 = [-3; 4; 2] \; ; \qquad \mathbf{r}_2 = [4; 6; 0] \; ; \qquad \mathbf{r}_3 = [5; -8; 11]$$

calcúlense las longitudes de los lados del triángulo que forman.

(La locución *punto* equivale a: extremidad del vector de posición).

Dependencia lineal. —Cuando un conjunto de vectores,

$$(3) \qquad \mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2,\ \mathbf{V}_3,\ \ldots,\ \mathbf{V}_n$$

es tal, que se puede establecer una ecuación,

$$(4) \qquad k_1\mathbf{V}_1 + k_2\mathbf{V}_2 + \ldots + k_n\mathbf{V}_n = 0$$

con números k_1, k_2, ..., k_n *que no son todos nulos,* se dice que los vectores (3) son linealmente dependientes.

Independencia lineal. —Cuando, por el contrario, la igualdad (4) exige el que se tenga, $k_1 = k_2 = \ldots k_n = 0$, los vectores (3) son *linealmente independientes.*

7) Demostrar que los tres vectores del ejercicio 6 son linealmente independientes.

8) Demostrar que los vectores,

$$[-3;\ 4;\ 2],\qquad [4;\ -6;\ 0],\qquad [-23;\ 32;\ 10]$$

son linealmente dependientes.

Los vectores unitarios pueden ser expresados como sigue,

$$\mathbf{i} = [1;\ 0;\ 0],\qquad \mathbf{j} = [0;\ 1;\ 0]\qquad \mathbf{k} = [0;\ 0;\ 1]$$

9) Demostrar que más de tres vectores no pueden ser linealmente independientes (en el espacio ordinario de tres dimensiones).

Esta importante proposición puede cambiarse a la siguiente:

Si $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, son tres vectores linealmente independientes, (vectores base), todo vector $\mathbf{V}_4$ podrá expresarse así,

$$\mathbf{V}_4 = \lambda_1\mathbf{V}_1 + \lambda_2\mathbf{V}_2 + \lambda_3\mathbf{V}_3$$

En efecto, la anterior conduce a las ecuaciones,

$$x_4 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$
$$y_4 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$$
$$z_4 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$$

De este sistema es posible obtener λ_1, λ_2, λ_3, siempre que se tenga,

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Mas esta condición está implícita en la de independencia lineal de $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, pues en efecto, el sistema,

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 &= 0 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 &= 0 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 &= 0 \end{aligned}$$

sólo ha de tener como solución la solución trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, lo que exige que el determinante D sea diferente de cero.