CAPITULO 2

PRODUCTO ESCALAR O INTERIOR DE DOS VECTORES

2. 1 *Definición.* Se da el nombre de *producto escalar* o bien, *producto interior* de dos vectores, al número que se obtiene al multiplicar los módulos de los vectores, por el coseno del ángulo que forman:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} = ab \cos\,(\mathbf{a},\mathbf{b}) \tag{1}$$

(La designación que hace uso del paréntesis, tiende a desaparecer).

Según la definición, se tiene,

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = a_b.b = a.b_a \tag{2}$$

donde se designa mediante b_a la proyección **b** sobre **a** (la medida algebraica de la proyección). a_b designa la proyección de **a** sobre **b**, (Figura 2.1).

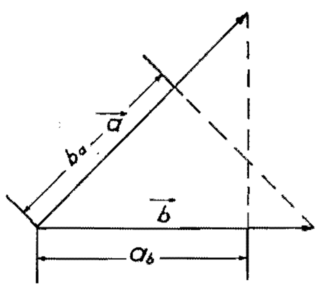

Fig 2-1

Corolario I. Se tiene,

$$\mathbf{a}.\mathbf{a} = a^2 \cos 0 = a^2$$

o sea que,

el producto escalar de un vector por otro igual (o por el mismo vector), es igual al cuadrado del módulo.

Corolario II. El producto escalar de dos vectores ortogonales, es nulo.

Corolario III. El producto escalar es conmutativo. Es decir, que se tiene,

(3) $$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}$$

porque,

$$ab = ba \; ; \quad \cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \cos(\mathbf{b},\mathbf{a})$$

luego....

Corolario IV. Sea una dirección caracterizada por el versor $\mathbf{r}$. Se tiene,

(4) $$\mathbf{a}.\mathbf{r} = a \cos(\mathbf{a},\mathbf{r}) = a_r$$

o sea que,

Se obtiene la proyección de un vector sobre una dirección de versor $\mathbf{r}$, *efectuando el producto escalar correspondiente.*

Corolario V. El producto escalar es distributivo. En efecto,

(5) $$\mathbf{a}.(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = a \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})_a = a \times (b_a + c_a) = ab_a + ac_a = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$$

lo que demuestra la aserción.

Corolario VI. En el precedente está contenida la siguiente ley de multiplicación,

(6) $$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{ac} + \mathbf{ad} + \mathbf{bc} + \mathbf{bd}$$

la cual se extiende a un número cualesquiera de sumandos. Dejamos al cuidado del alumno completar la demostración.

Corolario VII. Para los versores de una terna ortogonal de ejes coordenados, se cumplen las siguientes leyes de multiplicación,

(7) $$\mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1 \; ; \qquad \mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{j}.\mathbf{k} = \mathbf{k}.\mathbf{i} = 0$$

2. 2 *Expresión cartesiana para el producto escalar.*

En una terna directa de ejes coordenados rectangulares en la cual se tengan los dos vectores,

(1) $$\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1$$

(2) $$\mathbf{d}_2 = \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2$$

se tiene, efectuando el producto,

$$(3) \qquad \mathbf{d}_1.\mathbf{d}_2 = (\mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1).(\mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2)$$
$$= (\mathbf{i}.\mathbf{i})\ x_1x_2 + (\mathbf{j}.\mathbf{j})\ y_1y_2 + (\mathbf{k}.\mathbf{k})\ z_1z_2$$
$$+ (\mathbf{i}.\mathbf{j})\ x_1y_2 + \ldots .$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Corolario I. El cuadrado escalar de un vector es el cuadrado de su longitud o módulo. A saber,

$$(4) \qquad \mathbf{d}_1.\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (\mathrm{d}_1)^2$$

o también,

$$(5) \qquad \mathbf{d}_1.\mathbf{d}_1 = \mathrm{d}_1 \times \mathrm{d}_1 \times \cos 0 = \mathrm{d}_1^2$$

Corolario II. Si $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ son vectores unitarios sus coordenadas son los llamados *cosenos directores*:

$$\cos \alpha_1\,,\quad \cos \beta_1\,,\quad \cos \gamma_1$$
$$\cos \alpha_2\,,\quad \cos \beta_2\,,\quad \cos \gamma_2$$

en consecuencia,

$$(6) \qquad \mathbf{d}_1.\mathbf{d}_2 = \cos v$$

$$= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

Corolario III. Dada una segunda terna cartesiana directa, cuyo origen coincida con el origen del primer triedro, cada uno de los nuevos ejes vendrá a estar determinado por un versor. Así el eje de x_1, cuyo versor designaremos por $\mathbf{i}_1$, da lugar a la expresión,

$$(7) \qquad \mathbf{i}_1 = \mathbf{i} \cos \alpha_1 + \mathbf{j} \cos \beta_1 + \mathbf{k} \cos \gamma_1$$

Se tendrá, de manera análoga,

$$(8) \qquad \mathbf{j}_1 = \mathbf{i} \cos \alpha_2 + \mathbf{j} \cos \beta_2 + \mathbf{k} \cos \gamma_2$$

$$(9) \qquad \mathbf{k}_1 = \mathbf{i} \cos \alpha_3 + \mathbf{j} \cos \beta_3 + \mathbf{k} \cos \gamma_3$$

Multiplicando cada uno de estos versores, escalarmente, por sí mismo y por los dos restantes, se obtienen las siguientes relaciones, básicas en la Geometría Analítica,

$$(10) \qquad \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$$

....

$$(11) \qquad (\cos \alpha_1)^2 + (\cos \beta_1)^2 + (\cos \gamma_1)^2 = 1$$

. . . .

2. 3 *El producto escalar en una terna de ejes oblicuos.*

Los ejes estarán caracterizados por los versores **I**, **J**, **K** (Figura 2-2). Para los productos escalares entre versores, se tiene,

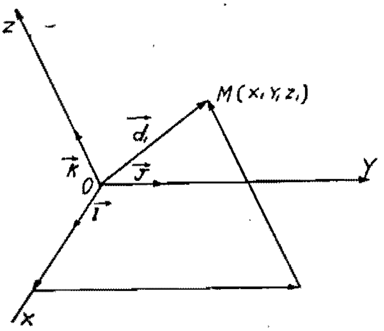

Fig 2-2

$$(\mathbf{IJ}) = \cos\,(X, Y)$$

$$(\mathbf{JK}) = \cos\,(Y, Z)$$

$$(\mathbf{KI}) = \cos\,(Z, X)$$

$$(2) \quad (\mathbf{II}) = (\mathbf{JJ}) = (\mathbf{KK}) = 1$$

Los vectores se expresan también en esta terna, como sigue,

$$(3) \qquad \mathbf{d}_1 = \mathbf{I}x_1 + \mathbf{J}y_1 + \mathbf{K}z_1$$

$$(4) \qquad \mathbf{d}_2 = \mathbf{I}x_2 + \mathbf{J}y_2 + \mathbf{K}z_2$$

pero debe tenerse en cuenta que ahora son (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), coordenadas oblicuas en la terna, es decir - que se obtienen proyectando los extremos de los vectores, paralelamente a los planos coordenados.

Veamos la expresión del producto escalar en la terna de ejes oblicuos. Se tiene,

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad \mathbf{d}_1.\mathbf{d}_2 &= (\mathbf{I}x_1 + \mathbf{J}y_1 + \mathbf{K}z_1).(\mathbf{I}x_2 + \mathbf{J}y_2 + \mathbf{K}z_2) \\
&= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\
&+ (x_1y_2 + y_1x_2)\cos\,(X, Y) \\
&+ (y_1z_2 + z_1y_2)\cos\,(Y, Z) \\
&+ (z_1x_2 + x_1z_2)\cos\,(Z, X)
\end{aligned}
$$

donde, al multiplicar escalarmente término a término, se han tenido en cuenta las relaciones (1) y (2).

Corolario I. En la terna oblicua, se tiene,

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad \mathbf{dd} = \mathrm{d}^2 = x^2 + y^2 + z^2 &+ 2\,x\,y\cos\,(X, Y) \\
&+ 2\,x\,z\cos\,(X, Z) + 2\,y\,z\cos\,(Y, Z)
\end{aligned}
$$

Corolario II. Las proyecciones ortogonales de un vector sobre los ejes oblicuos, valen

$$(7)\qquad \mathbf{d}_1.\mathbf{I}\,; \qquad \mathbf{d}_1.\mathbf{J}\,; \qquad \mathbf{d}_1.\mathbf{K}$$

Para obtener su expresión en la terna oblicua, bastará hacer en (5), $x_2 = 1$, $y_2 = z_2 = 0$, etc., de lo cual se deduce,

$$(8)\qquad \mathrm{u} = \mathbf{d}_1\mathbf{I} = x_1 + y_1 \cos (X, Y) + z_1 \cos (Z, X)$$

$$(9)\qquad \mathrm{v} = \mathbf{d}_1\mathbf{J} = x_1 \cos (X,Y) + y_1 + z_1 \cos (Y, Z)$$

$$(10)\qquad \mathrm{w} = \mathbf{d}_1\mathbf{K} = x_1 \cos (Z, X) + y_1 \cos (Y, Z) + z_1$$

Los números u, v, w, expresados en estas relaciones reciben el nombre de *coordenadas covariantes* del vector.

Corolario III. Con relación a la forma cuadrática que aparece en (6):

$$(11)\qquad \begin{aligned} F\,(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x\,y \cos (X, Y) \\ &\quad + 2\,x\,z \cos (X, Z) + 2\,y\,z \cos (Y, Z) \end{aligned}$$

se tiene,

$$(12)\quad \mathrm{u} = \mathbf{d}.\mathbf{I} = x + y \cos (X, Y) + z \cos (Z, X) \;=\; (1/2)\; F'_x$$

$$(13)\quad \mathrm{v} = \mathbf{d}.\mathbf{J} = x \cos (X, Y) + y + z \cos (Y, Z) \;=\; (1/2)\; F'_y$$

$$(14)\quad \mathrm{w} = \mathbf{d}.\mathbf{K} = x \cos (X,Z) + y \cos (Y, Z) + z = (1/2)\; F'_z$$

Las coordendas oblicuas (x, y, z) reciben el nombre de *coordenadas contravariantes*.

Corolario IV. Si se expresa un vector en coordenadas covariantes y el otro en coordenadas contravariantes, se tiene,

$$(15)\qquad \begin{aligned} \mathbf{d}_1.\mathbf{d}_2 &= x_1\mathrm{u}_2 + y_1\mathrm{v}_2 + z_1\mathrm{w}_2 \\ &= \mathrm{u}_1x_2 + \mathrm{v}_1y_2 + \mathrm{w}_1z_2 \end{aligned}$$

teniéndose, además

$$(16)\qquad \mathbf{d}_1.\mathbf{d}_1 = \mathrm{d}_1^2 = x_1\mathrm{u}_1 + y_1\mathrm{v}_1 + z_1\mathrm{w}_1$$

2. 4 *Transformación de las componentes de un vector por cambio del sistema de ejes coordenados.* Veremos aquí únicamente el caso de ternas ortogonales, las que siempre consideraremos orientadas en sentido directo.

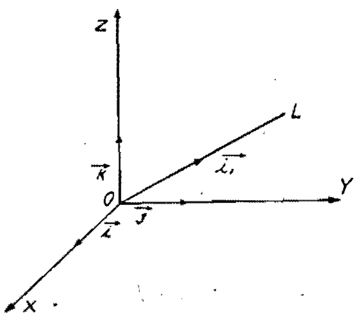

Fig 2-3

Sea (Figura 2-3), un sistema ortogonal y directo, determinado por los versores **i**, **j**, **k**, correspondientes, en orden, a los ejes x, y, z.

Para una semi-recta OL de versor $\mathbf{i}_1$ se tiene,

$$(1) \qquad \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\beta + \mathbf{k}\gamma$$

en la cual (α, β, γ) designan los cosenos directores.

Si se tiene una nueva terna ortogonal, directa, caracterizada por el subíndice 1, vendrá a ser,

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\beta + \mathbf{k}\gamma$$
$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{i}\alpha' + \mathbf{j}\beta' + \mathbf{k}\gamma'$$
$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{i}\alpha'' + \mathbf{j}\beta'' + \mathbf{k}\gamma''$$

Los nueve cosenos directores que aparecen en (2) poseen un significado que se explica en el siguiente esquema,

	x	y	z	
x_1:	α	β	γ	$\mathbf{i}_1$
y_1:	α'	β'	γ'	$\mathbf{j}_1$
z_1:	α''	β''	γ''	$\mathbf{k}_1$
	i	**j**	**k**	

Según este esquema, el eje y_1 forma con el eje z un ángulo cuyo coseno es γ' -intersección de las líneas horizontal y vertical respectivas.- Se han indicado tanto los ejes, como los correspondientes versores en la posición opuesta.

Los nueve cosenos directores constituyen la llamada *matriz de la transformación,* a saber

$$(3) \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{bmatrix}$$

De acuerdo a las leyes de multiplicación de matrices se tiene,

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta' & \gamma'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

Veamos ahora cómo se transforman las componentes de un vector, $\mathbf{r}$.

Para la primera terna, se tiene,

$$(5) \qquad \mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

Para la segunda,

$$(6) \qquad \mathbf{r} = \mathbf{i}_1 x_1 + \mathbf{j}_1 y_1 + \mathbf{k}_1 z_1$$

Reemplazando en la última los valores de $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ dados en (2), se tiene,

$$(7) \qquad \begin{aligned} \mathbf{r} = {} & (\mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\beta + \mathbf{k}\gamma)\ x_1 \\ & + (\mathbf{i}\alpha' + \mathbf{j}\beta' + \mathbf{k}\gamma')\ y_1 \\ & + (\mathbf{i}\alpha'' + \mathbf{j}\beta'' + \mathbf{k}\gamma'')\ z_1 \\ = {} & (\alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1)\ \mathbf{i} \\ & + (\beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1)\ \mathbf{j} \\ & + (\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1)\ \mathbf{k} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la (5) e igualando componentes, se obtienen las fórmulas de transformación de coordenadas,

$$x = \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1$$
$$y = \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1$$
$$z = \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1$$

las cuales, en forma matricial se expresarán así,

$$(9) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathrm{A}' . \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

donde, como es costumbre, A' designa la *traspuesta* de la matriz A.

Se llega rápidamente al anterior resultado si se procede de la manera siguiente:

La relación (6) se escribe así

$$(10) \qquad \mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1) \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{bmatrix}$$

y teniendo en cuenta la (4),

$$(11) \qquad \mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1) \; \mathrm{A} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

Como, por otra parte se tiene,

$$(12) \qquad \mathbf{r} = (x, y, z) \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

se concluye al comparar las relaciones (11) y (12),

$$(13) \qquad (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)\ \mathrm{A}$$

o bien, efectuando la transposición,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathrm{A}'. \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

2. 5 *Relaciones entre cosenos directores.* Las seis relaciones entre cosenos directores para la terna acentuada, se obtienen con sólo efectuar los productos escalares posibles de los versores, como sigue:

$$(15) \qquad \begin{aligned} \mathbf{i}_1.\mathbf{i}_1 &= 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ ; & \mathbf{i}_1.\mathbf{j}_1 &= 0 = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \\ \mathbf{j}_1.\mathbf{j}_1 &= 1 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 \ ; & \mathbf{j}_1.\mathbf{k}_1 &= 0 = \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' \\ \mathbf{k}_1.\mathbf{k}_1 &= 1 = \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 \ ; & \mathbf{k}_1.\mathbf{i}_1 &= 0 = \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma \end{aligned}$$

Estas seis relaciones dan lugar a la siguiente síntesis,

$$(16) \qquad \alpha_r\,\alpha_s + \beta_r\,\beta_s + \gamma_r\,\gamma_s = \delta$$

con

$$\delta = 1 \quad \text{si es } r = s$$

$$\delta = 0 \quad \text{si es } r \neq s$$

Se conviene en indicar aquí los acentos como subíndices, para mayor facilidad en la escritura.

δ, es el índice de Kronecker.

De los nueve parámetros que figuran en la matriz de transformación, sólo tres son libres, los demás quedan determinados por las relaciones (15). Cuando coniciden los orígenes de las dos ternas y la no acentuada se considera como fija, la segunda posee, con relación a la primera, tres *grados de libertad.*

EJERCICIOS

1) Calcular el producto escalar de los vectores,

$$\mathbf{V}_1 = [3;\ 4;\ 2] \qquad \mathbf{V}_2 = [5;\ -8;\ 11]$$

y obtener el coseno del ángulo que forman. (Ejes rectangulares).

Resp. 5; $\cos \alpha = 5/\sqrt{(6090)}$

2) Comprobar la ortogonalidad de los dos vectores,

$$\mathbf{V}_1 = [2;\ -3;\ 4] \qquad \mathbf{V}_2 = [5;\ 2;\ -1]$$

Obtener la expresión general para los vectores normales a éstos. (Ejes rectangulares).

Resp. $m[-5;\ 22;\ 19]$

3) En una terna de ejes coordenados rectangulares, se tienen los siguientes vectores posición,

$$\mathbf{OA} = [2;\ 1;\ -3], \qquad \mathbf{OB} = [1;\ 1;\ 3], \qquad \mathbf{OC} = [2;\ 5;\ 7]$$

Calcular la proyección del vector **BC** sobre la dirección OA.

Resp. $-6/\sqrt{14}$

4) Demostrar que las componentes de un vector $[X;\ Y;\ Z]$, en los ejes de una terna cartesiana, se obtienen como producto escalar del vector dado por los correspondientes versores de los ejes.

5) Dada una terna de ejes oblicuos, en la cual valen,

$$(X,Y) = 120^\circ; \qquad (Y,Z) = 75^\circ; \qquad (Z,X) = 60^\circ$$

se pide

a) Calcular el producto interno de los vectores,

$$\mathbf{OA} = [4;\ 2;\ -5]; \qquad \mathbf{OB} = [5;\ 7;\ 6]$$

expresados en coordenadas contravariantes u oblicuas.

Resp. $-25{,}9528$

b) Obtener la distancia AB.

Resp. $d = 13{,}8011$

c) Obtener las correspondientes coordenadas covariantes.

Resp. Para **OA**:

$u = -0,5000 \qquad v = -0,7941 \qquad w = -2,9824$

Para **CB**:

$u = \ \ 4,5000 \qquad v = \ \ 6,0529 \qquad w = 10,3117$

d) Compruébense los resultados obtenidos, mediante las fórmulas (15) y (16) del número (2-3).

6) Demostrar que, en la terna ortogonal, la función cuadrado de la distancia:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

es invariante, o sea, que se tiene,

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$$

Observación.—Aunque en este capítulo hemos dado preferencia a la terna cartesiana *directa*, esto no es esencial en la expresión del producto escalar, que es independiente de la orientación de la terna.

No obstante haber sido explicado ya en Física el concepto de *terna directa*, le resumimos de nuevo aquí diciendo que en esta disposición: si el semi-eje Ox gira 90º hasta coincidir con Oy, la orientación de Oz será coincidente con el sentido de *avance* de un tornillo cuya *cabeza* hubiera sufrido el giro del semi-eje Ox.