CAPITULO 3

EL PRODUCTO VECTORIAL

3. 1 *Definición.* Dados dos vectores libres $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, se da el nombre de *producto vectorial* de tales vectores, en el orden en que se les ha escrito, a un tercer vector construído según las siguientes condiciones:

1º) Es perpendicular al plano determinado por $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$.

2º) El sentido es el que corresponde al eje Z en la terna directa, cuando el eje X lleva la orientación de $\mathbf{V}_1$ y el eje Y la orientación de $\mathbf{V}_2$;

3º) El módulo del vector producto -P- es igual al área del paralelogramo construído con $\mathbf{V}_1$ *y* $\mathbf{V}_2$ (Figura 3-1).

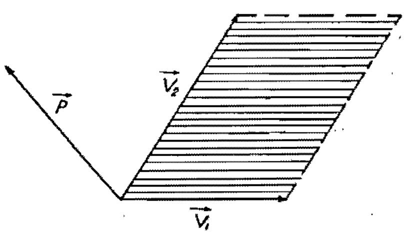

Fig 3-1

El producto vectorial se designa como sigue:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}_1\ \mathbf{V}_2]$$
(notación alemana);

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2$$
(notación italiana)

Corolario I. El producto vectorial es nulo si los vectores $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ tienen soportes paralelos, pues entonces el paralelogramo tiene área nula.

Corolario II. El producto vectorial es nulo, si, por lo menos uno de los vectores que forman el producto, es un vector nulo.

Corolario III. El producto vectorial no es conmutativo. En efecto, según la definición, se tiene,

$$\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_1 = -\mathbf{P}_1$$

Veamos ahora algunas relaciones que son fundamentales en el Cálculo Vectorial.

Corolario IV. Para los versores de una terna directa de ejes coordenados rectangulares, se tiene,

(1) $$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0$$

(2) $$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}\,;\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}\,;\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

(3) $$\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k}\ ;\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}\ ;\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Consideremos ahora (Figura 3-2), dos vectores, $\mathbf{OA} = \mathbf{V}_1$ $\mathbf{OB} = \mathbf{V}_2$, no co-axiales. Por el extremo B del segundo vector, tracemos una paralela al soporte del primero, y sea C un punto elegido arbitrariamente en dicha paralela.

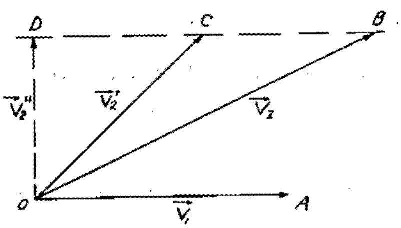

Fig 3-2

Para el vector $\mathbf{OC} = \mathbf{V}_2'$ vale el siguiente,

Lema.— El producto $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2$ es igual al producto $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2'$ si se designa con $\mathbf{V}_2'$ todo vector que tenga el mismo origen O y su extremidad en la paralela trazada a $\mathbf{V}_1$ por el extremo de $\mathbf{V}_2$.

Entre el conjunto de vectores $\mathbf{V}_2'$ es importante destacar aquel que es perpendicular a $\mathbf{V}_1$, designado por $\mathbf{V}_2''$.

Las anteriores consideraciones permiten dar un nuevo concepto sobre el producto vectorial.

Reducido el producto de dos vectores dados al de dos vectores perpendiculares entre sí, a saber, teniéndose, (Figura 3-2),

$$\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2'' = \mathbf{P}$$

el vector $\mathbf{V}_1$ puede ser considerado como un *operador* que, aplicado a $\mathbf{V}_2''$ le transforma en $\mathbf{P}$, bajo los siguientes efectos:

a) Producir, en sentido directo, un giro de 90º del vector $\mathbf{V}_2''$;

b) Amplificar el vector $\mathbf{V}_2''$ de tal manera que el vector que resulta de la operación, a saber, **P**, tenga por módulo el producto de los módulos de los factores, es decir,

$$P = V_1 \times V_2"$$

3. 2 *La ley distributiva del producto vectorial.* Para avanzar en la teoría es necesario proceder a demostrar la ley distributiva del producto vectorial, a saber, que se tiene,

$$(1) \qquad \mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3$$

A fin de llevar a cabo la demostración, distinguiremos tres casos, según que se tenga: a) vectores coplanarios; b) un vector normal al plano de los otros dos; c) vectores cualesquiera.

Conviene advertir que, por ser el producto vectorial una operación definida para vectores libres, supondremos siempre los vectores aplicados a un cierto punto, convenientemente elegido, del espacio.

Ocupémonos del primer caso o sea, aquél en que los vectores son coplanarios.

En la Figura 3-3, aparecen los vectores $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, así como el vector suma, $\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$. Demostremos que, en este caso, es válida la relación (1).

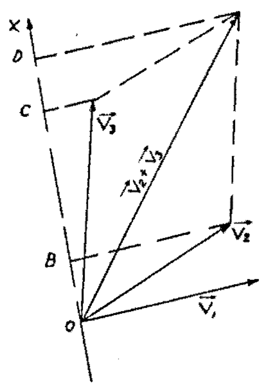

Fig 3-3

Con tal fin, en el plano determinado por los vectores, levantemos una perpendicular a $\mathbf{V}_1$. Orientemos dicha perpendicular considerándole como un eje de abscisas, Ox.

Con referencia a la Figura 3-3 se tiene, que,

OB es proyección vectorial de $\mathbf{V}_2$ sobre Ox ;

OC es proyección vectorial de $\mathbf{V}_3$ sobre Ox ;

OD es proyección vectorial de $\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$ sobre Ox.

En virtud del lema que se explicó anteriormente, la relación (1) equivale a la siguiente;

(2) $$\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{OD} = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{OB} + \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{OC}$$

Digamos, en primer lugar, que los vectores producto que figuran en la igualdad (2), son vectores co-axiales, por ser normales al plano de los vectores que entran en los productos. (Podemos suponer los vectores producto, aplicados al punto O). En segundo lugar, los vectores producto, que aparecen en (2) tienen el mismo sentido. Basta en consecuencia, demostrar una igualdad aritmética, a saber, que el módulo de $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{OD}$ es igual a la suma de los módulos de $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{OB}$ y $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{OC}$, lo cual es bien fácil pues se tiene la siguiente igualdad aritmética entre segmentos,

(3) $$OD = OB + OC$$

la cual, al ser multiplicada por el módulo de $\mathbf{V}_1$, da,

(4) $$V_1.OD = V_1.OB + V_1.OC$$

lo cual demuestra la ley distributiva, (1), en este primer caso.

Segundo caso.— Uno de los vectores es normal a los otros dos.

Supongamos $\mathbf{V}_1$ normal a $\mathbf{V}_2$ y a $\mathbf{V}_3$. Elijamos como plano de representación el que forman estos dos últimos vectores. (Fig. 3-4).

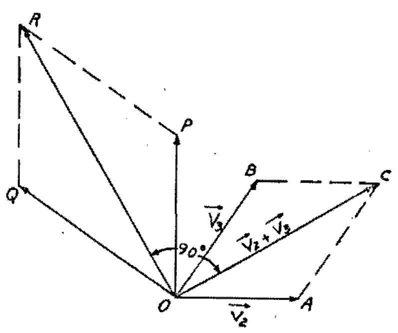

Fig 3-4

Considerando los productos,

$$\mathbf{OP} = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3$$

$$\mathbf{OR} = \mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)$$

se advierte fácilmente que, **OP**, **OQ**, **OR**, están contenidos en el plano de representación, o sea el de $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_3$. Si el vector $\mathbf{V}_1$, que se proyecta en O, va dirigido hacia el lector, los vectores producto tendrán la orientación indicada en la Figura 3-4.

Debemos demostrar que la Figura OPRQ es semejante a OACB, o sea que la primera es también un paralelogramo.

En efecto, los ángulos homólogos son iguales por perpendicularidad respectiva:

$$OP \perp OA; \qquad OQ \perp OB; \qquad OR \perp OC$$

Por otra parte, los módulos tienen por valor,

$$OP = V_1 \times OA; \qquad OQ = V_1 \times OB; \qquad OR = V_1 \times OC$$

luego,

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OQ}{OB} = \frac{OR}{OC}$$

En consecuencia, la Figura OPRQ es un paralelogramo y se puede escribir,

$$\mathbf{OR} = \mathbf{OP} + \mathbf{OQ}$$

o bien,

$$\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{OC} = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{OA} + \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{OB}$$

lo que deja demostrada la ley distributiva en este segundo caso.

Pasamos finalmente a demostrar el

Tercer caso, o caso general.— El vector $\mathbf{V}_1$ no es perpendicular al plano de los otros dos vectores ni está contenido en el plano de éstos.

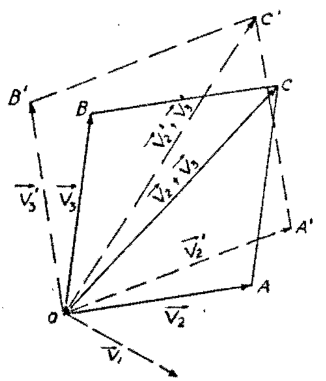

Fig 3-5

Por el punto O de aplicación de los vectores se traza el plano normal a $\mathbf{V}_1$. Designemos tal plano por (L). Proyectando ortogonalmente los vectores $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $(\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)$, sobre el plano (L), se tendrá un nuevo paralelogramo para el cual se puede escribir, utilizando acentos para destinguir las proyecciones:

$$\mathbf{OC'} = \mathbf{OA'} + \mathbf{OB'}$$

o bien,

$$(\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)' = \mathbf{V}_2' + \mathbf{V}_3'$$

En virtud del segundo caso demostrado, se tiene,

$$(5) \qquad \mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)' = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2' + \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3'$$

Pero en virtud del lema demostrado en la página 38, se tiene,

$$(6) \qquad \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2' = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2; \quad \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3' = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3$$

$$(7) \qquad \mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)' = \mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)$$

valores que, al ser substituídos en (5), dan,

$$(8) \qquad \mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3$$

con lo cual queda demostrado el caso general.

Corolario I.— De la primera ley distributiva, (2), se deduce la siguiente:

$$(9) \qquad (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) \wedge \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_1$$

En efecto, si se cambia el orden de los factores en (8) cambia el signo de los términos, con lo que puede escribirse,

$$(10) \qquad \begin{aligned} \mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) &= -(\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) \wedge \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2 &= -\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3 &= -\mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_1 \end{aligned}$$

Substituyendo las anteriores en (8) y multiplicando el resultado por (—1) se obtiene la relación (9).

Corolario II.— De las dos leyes distributivas (8) y (9), antes demostradas, se deduce la siguiente,

$$(13) \qquad (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) \wedge (\mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4) = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_4$$

Corolario III.— La ley distributiva vale para cualesquier número de sumandos en los paréntesis.

Dejamos al lector hacer la demostración de los dos últimos corolarios.

3. 3 *Componentes del producto vectorial en una terna cartesiana directa.* Con lo anterior ha quedado demostrada la ley dis-

tributiva general en la multiplicación de vectores. Así, según el Corolario III, para el producto vectorial de sumas de vectores, se tiene,

$$(1) \qquad (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \ldots) \wedge (\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \ldots) = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{U}_1 + \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{U}_2 + \ldots + \mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{U}_1 + \mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{U}_2 + \ldots$$

Este resultado nos permitirá obtener la expresión cartesiana del producto vectorial. Sea,

$$(2) \qquad \mathbf{V}_1 = \mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1$$

$$(3) \qquad \mathbf{V}_2 = \mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2$$

Se tiene,

$$(4) \qquad \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2 = (\mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1) \wedge (\mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2) = \mathbf{i}(Y_1Z_2 - Z_1Y_2) + \mathbf{j}(Z_1X_2 - X_1Z_2) + \mathbf{k}(X_1Y_2 - Y_1X_2)$$

habiéndose tenido en cuenta las relaciones de la página 38.

El resultado anterior puede escribirse como sigue,

$$(5) \qquad \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

determinante cuya primera línea es vectorial y exige al ser desarrollado, que el signo de suma se interprete como un signo de suma vecrial.

El resultado anterior se escribe también con la siguiente designación tradicional.

$$(6) \qquad \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2 = \mathbf{i}M + \mathbf{j}N + \mathbf{k}P$$

donde se tiene,

$$(7) \qquad \begin{aligned} M &= Y_1Z_2 - Z_1Y_2 \\ N &= Z_1X_2 - X_1Z_2 \\ P &= X_1Y_2 - Y_1X_2 \end{aligned}$$

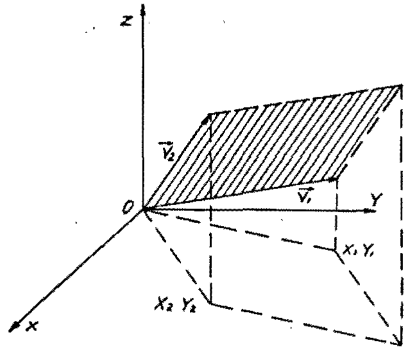

Fig 3-6

Estos números miden áreas de paralelogramos, (con signo), a saber, las áreas de los paralelogramos proyección del que se construye con $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$.

En la Figura 3-6 se ha indicado únicamente la proyección que corresponde al plano de las (x, y)

1) Dados los vectores

$$\mathbf{V}_1 = [3;\ -4;\ 5], \qquad \mathbf{V}_2 = [2;\ 1;\ -3]$$

$$\mathbf{V}_3 = [\ 1;\ \ 0;\ \ 8], \qquad \mathbf{V}_4 = [0;\ -3;\ 4]$$

formar los productos vectoriales:

$$\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2,\ \ldots\ldots,\ \mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_4$$

2) Demostrar las relaciones siguientes:

$$\mathrm{m}\ \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2 = \mathrm{m}\ (\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2)$$
$$\mathrm{m}\mathbf{V}_1 \wedge \mathrm{n}\mathbf{V}_2 = \mathrm{mn}\ (\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2)$$

donde m, n son números reales.

3) Justificar el resultado siguiente,

$$[X_1,\ Y_1,\ Z_1] \wedge [X_2,\ Y_2,\ Z_2] =$$

$$[X_1,\ Y_1,\ Z_1] \begin{vmatrix} 0 & -Z_2 & Y_2 \\ Z_2 & 0 & -X_2 \\ -Y_2 & X_2 & 0 \end{vmatrix}$$

4) La última fórmula da para $Z_1 = Z_2 = 0$:

$$[X_1,\ Y_1, 0] \wedge [X_2,\ Y_2,\ 0] \doteq [0,\ 0,\ X_1Y_2 - Y_1X_2]$$

Interpretar geométricamente este resultado.

5) La expresión,

$$\mathbf{A}.(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$$

es uno de los *productos mixtos*. Demostrar que se tiene,

$$\mathbf{A}.(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

El determinante cuyas líneas se forman con las componentes de los vectores **A**, **B**, **C** en orden, expresa el volumen del paralelipípedo que tiene los vectores **A**, **B**, **C** por aristas (Estas pueden suponerse aplicadas al origen).

6) La siguiente fórmula del doble producto vectorial es de empleo frecuente en Mecánica Analítica:

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A}.\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}.\mathbf{B})\mathbf{C}$$

Efectuar la demostración, para lo cual se sugiere utilizar las notaciones siguientes:

$$\mathbf{A} = [X_1, Y_1, Z_1], \qquad \mathbf{B} = [X_2, Y_2, Z_2] \qquad \mathbf{C} = [X_3, Y_3, Z_3]$$