CAPITULO 6

NOCIONES SOBRE GEOMETRIA DIFERENCIAL

6. 1 *Ecuaciones de la tangente a una curva.* En el capítulo 5 hemos visto cómo las líneas alabeadas o del espacio, se representan mediante ecuaciones paramétricas,

(1) $x = x(a)\ ; \qquad y = y(a)\ ; \qquad z = z(a)$

las cuales se reducen, en síntesis, a una ecuación vectorial,

(2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a)$

donde $\mathbf{r}$ designa el vector que une el origen de la terna con el punto $P(x, y, z)$. Al vector $\mathbf{r}$ se le menciona como *coordenada vectorial, vector de posición*, etc.

Se dijo, además, que los parámetros empleados con mayor frecuencia para describir una curva, eran: en Geometría Diferencial, la longitud s de línea, longitud medida a partir de un origen convencional; en Cinemática, el tiempo transcurrido desde el paso del móvil por una determinada posición en la trayectoria.

En este capítulo se considerará exclusivamente el parámetro s.

Pasamos a deducir las ecuaciones de la tangente geométrica a una curva del espacio, (Figura 6-1).

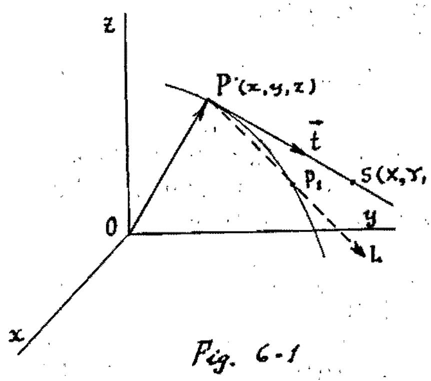

Fig. 6-1

Consideremos el punto $P(x, y, z)$ que supondremos fijo en la curva, y un punto P_1, variable en el entorno de P.

P_1 tendrá por coordenadas,

(3) $x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z$

que son, como es obvio, las componentes del vector $\mathbf{OP_1}$.

Se escribe ahora,

$$(4) \qquad \mathbf{OP_1} = \mathbf{r}_1 = \mathbf{i}(x + \Delta x) + \mathbf{j}(y + \Delta y) + \mathbf{k}(z + \Delta z)$$

$$(5) \qquad \mathbf{OP} = \mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

de las cuales se obtiene, por substracción,

$$(6) \qquad \mathbf{OP_1} - \mathbf{OP} = \mathbf{PP_1} = \Delta\mathbf{r} = \mathbf{i}\Delta x + \mathbf{j}\Delta y + \mathbf{k}\Delta z$$

Formemos ahora la ecuación de la secante que une los puntos P,P_1. Utilizaremos letras mayúsculas para designar puntos de la secante, en general; minúsculas para designar las coordenadas del punto fijo, P. Emplearemos además, como parámetro, la abscisa curvilínea, s.

La ecuación de la secante expresa que las componentes de los vectores **PL**, $\mathbf{PP_1}$, son proporcionales, a saber,

$$(7) \qquad \frac{X - x}{\Delta x} = \frac{Y - y}{\Delta y} = \frac{Z - z}{\Delta z}$$

Al dividir los incrementos por Δs, las ecuaciones (7) se modifican así,

$$(8) \qquad \frac{X - x}{\Delta x/\Delta s} = \frac{Y - y}{\Delta y/\Delta s} = \frac{Z - z}{\Delta z/\Delta s}$$

La tangente se define como la secante en la posición límite, o sea aquella posición a que se acerca la secante cuando el punto P_1 tiende a confundirse con P.

Aparecen entonces las derivadas,

$$(9) \qquad \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds} = x', \qquad \text{etc.}$$

con lo cual las ecuaciones de la tangente se escriben,

$$(10) \qquad \frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}$$

Si volvemos ahora a la relación (6), resulta fácil ver la conexión que existe entre la derivada del vector **r** y las derivadas de las coordenadas. Al efecto, dividiendo la (6) por Δs, se tiene,

$$(11) \qquad \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{i}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \mathbf{j}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \mathbf{k}\frac{\Delta z}{\Delta s}$$

de la cual se obtiene, al hacer tender Δs a cero:

$$(12) \qquad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{i}\frac{dx}{ds} + \mathbf{j}\frac{dy}{ds} + \mathbf{k}\frac{dz}{ds}$$

o, según la notación de Lagrange,

$$(13) \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z'$$

Si se tiene en cuenta que $\mathbf{r}'$ es el vector unitario **t**, (versor tangente), podemos escribir,

$$(14) \qquad x' = \cos\alpha\ ; \quad y' = \cos\beta\ ; \quad z' = \cos\gamma$$

donde cos α, etc., son los *cosenos directores* de la tangente, para el punto P.

La ecuación vectorial de la tangente, sintetiza las ecuaciones (10). Si se introduce la variable auxiliar empleada en Geometría analítica:

$$(15) \qquad \frac{(PS)}{(PT)} = \rho$$

(S: punto (X, Y, Z) ; T: extremo del versor **t**)
las (10) dan lugar a la siguiente relación,

$$(16) \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{t}\rho$$

En esta exposición mantendremos cierto paralelismo entre los procedimientos y expresiones cartesianas y los vectoriales. El método en general consistirá en pasar de la expresión cartesiana, (Análisis), a la vectorial, (Síntesis), y viceversa.

Volviendo a las ecuaciones de la tangente, vemos como ellas pueden ser escritas con empleo de diferenciales, así,

$$(17) \qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

Ocurre muchas veces que una curva alabeada aparece definida como intersección de dos superficies, cuyas ecuaciones escribimos de manera general, así,

$$(18) \qquad f(x,y,z) = 0\ ; \qquad f_1(x,y,z) = 0$$

Para obtener en este caso las ecuaciones de la tangente a la curva intersección de las (18), se procede como sigue:

$$(12) \qquad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{i}\,\frac{dx}{ds} + \mathbf{j}\,\frac{dy}{ds} + \mathbf{k}\,\frac{dz}{ds}$$

o, según la notación de Lagrange,

$$(13) \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z'$$

Si se tiene en cuenta que $\mathbf{r}'$ es el vector unitario $\mathbf{t}$, (versor tangente), podemos escribir,

$$(14) \qquad x' = \cos\alpha \; ; \quad y' = \cos\beta \; ; \quad z' = \cos\gamma$$

donde $\cos\alpha$, etc., son los *cosenos directores* de la tangente, para el punto P.

La ecuación vectorial de la tangente, sintetiza las ecuaciones (10). Si se introduce la variable auxiliar empleada en Geometría analítica:

$$(15) \qquad \frac{(PS)}{(PT)} = \rho$$

(S: punto (X, Y, Z) ; T: extremo del versor $\mathbf{t}$) las (10) dan lugar a la siguiente relación,

$$(16) \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{t}\rho$$

En esta exposición mantendremos cierto paralelismo entre los procedimientos y expresiones cartesianas y los vectoriales. El método en general consistirá en pasar de la expresión cartesiana, (Análisis), a la vectorial, (Síntesis), y viceversa.

Volviendo a las ecuaciones de la tangente, vemos como ellas pueden ser escritas con empleo de diferenciales, así,

$$(17) \qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

Ocurre muchas veces que una curva alabeada aparece definida como intersección de dos superficies, cuyas ecuaciones escribimos de manera general, así,

$$(18) \qquad f(x,y,z) = 0 \; ; \qquad f_1(x,y,z) = 0$$

Para obtener en este caso las ecuaciones de la tangente a la curva intersección de las (18), se procede como sigue:

Se efectúa la diferenciación de las ecuaciones (18), con lo que se tiene,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}\,dz = 0, \tag{20}$$

De estas ecuaciones se deduce,

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \\ \partial f_1/\partial y & \partial f_1/\partial z \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial z \\ \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y \end{vmatrix} \tag{21}$$

valores que, llevados a (17), resuelven la cuestión.

Mas resulta preferible proceder de la manera siguiente:

Se despejan de (17), dx, dy, dz y se reemplazan en (19) y (20), con lo cual se obtiene,

$$(X - x)\,(\partial f/\partial x) + (Y - y)\,(\partial f/\partial y) + (Z - z)\,(\partial f/\partial z) = 0, \tag{22}$$

$$(X - x)\,(\partial f_1/\partial x) + (Y - y)\,(\partial f_1/\partial y) + (Z - z)\,(\partial f_1/\partial z) = 0 \tag{23}$$

Las (22) y (23) vienen a ser las ecuaciones de la tangente a la curva considerada. Son ecuaciones de dos planos, puesto que son lineales en X, Y, Z. Tendremos ocasión más adelante de analizar su significado.

Obtendremos ahora de manera directa, por medio del Cálculo vectorial, las ecuaciones de la tangente a la curva. Sea, (Figura 6-1), **PS** un vector en la tangente, con origen en P; sus componentes valen,

$$X - x\;; \qquad Y - y\;; \qquad Z - z \tag{24}$$

Por otra parte, considerando el versor tangente, **t**, cuyas componentes son (x', y', z'), formaremos el *producto vectorial* de los dos vectores mencionados, que, por ser estos colineales, igualaremos a cero, teniéndose,

$$\mathbf{PS} \wedge \mathbf{t} = 0 \tag{25}$$

Las componentes de este producto vectorial se obtienen como cofactores de la primera línea, en el determinante simbólico,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

El desarrollo de este determinante es,

$$[(Y - y)z' - (Z - z)x']\mathbf{i} + [(Z - z)x' - (X - x)z']\mathbf{j} + [(X - x)y' - (Y - y)x']\mathbf{k} = 0 \tag{27}$$

igualdad a cero que implica la de las tres componentes.

$$\begin{aligned} (Y - y)z' - (Z - z)y' &= 0, \\ (Z - z)x' - (X - x)z' &= 0, \qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{28}$$

de las cuales se deduce fácilmente la (10).

6. 2 *Plano tangente a una superficie.* Sea una superficie de ecuación,

$$f(x,y,z) = 0 \tag{1}$$

Nos proponemos hallar el lugar geométrico de las tangentes a todas las curvas que sería posible trazar sobre la superficie considerada, a través de un punto P ordinario, de la misma, (Figura 6-2). Por *punto ordinario* se entiende todo punto de la superficie en el cual no se anulen a la vez las tres derivadas parciales de primer orden de $f(x,y,z)$, con respecto a sus variables.

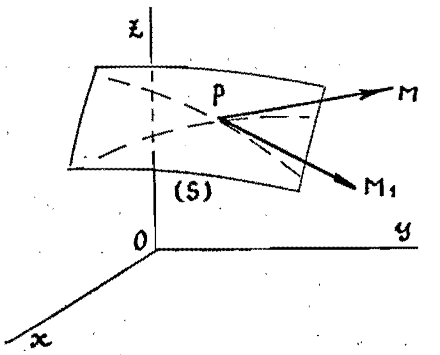

Fig. 6-2

Si imaginamos una curva trazada sobre la superficie (S), la curva tendrá ecuaciones de la forma,

$$f(x,y,z) = 0, \qquad f_1(x,y,z) = 0 \tag{2}$$

donde $f_1(x,y,z) = 0$ viene a ser la ecuación de una segunda supercie. Las ecuaciones de la tangente a la curva intersección definida

Las componentes de este producto vectorial se obtienen como cofactores de la primera línea, en el determinante simbólico,

$$(26) \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0$$

El desarrollo de este determinante es,

$$(27) \qquad [(Y - y)z' - (Z - z)x']\mathbf{i} + [(Z - z)x' - (X - x)z']\mathbf{j} + [(X - x)y' - (Y - y)x']\mathbf{k} = 0$$

igualdad a cero que implica la de las tres componentes.

$$(28) \qquad \begin{aligned} (Y - y)z' - (Z - z)y' &= 0, \\ (Z - z)x' - (X - x)z' &= 0, \end{aligned} \qquad \text{etc.}$$

de las cuales se deduce fácilmente la (10).

6. 2 *Plano tangente a una superficie.* Sea una superficie de ecuación,

$$(1) \qquad f(x,y,z) = 0$$

Nos proponemos hallar el lugar geométrico de las tangentes a todas las curvas que sería posible trazar sobre la superficie considerada, a través de un punto P ordinario, de la misma, (Figura 6-2). Por *punto ordinario* se entiende todo punto de la superficie en el cual no se anulen a la vez las tres derivadas parciales de primer orden de $f(x,y,z)$, con respecto a sus variables.

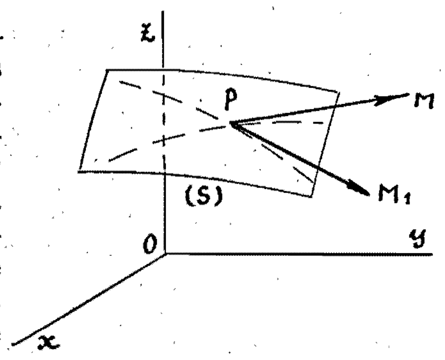

Fig. 6-2

Si imaginamos una curva trazada sobre la superficie (S), la curva tendrá ecuaciones de la forma,

$$(2) \qquad f(x,y,z) = 0, \qquad f_1(x,y,z) = 0$$

donde $f_1(x,y,z) = 0$ viene a ser la ecuación de una segunda supercie. Las ecuaciones de la tangente a la curva intersección definida por las (2), están escritas en (22) y (23) del número 6, 1, siendo innecesario repetirlas aquí.

Si ahora imaginamos una variedad infinita de superficies, $f_i(x,y,z) = 0$, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, las cuales contengan el punto P, obtendremos el lugar geométrico de las tangentes, al eliminar,

$$(3) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial z}$$

en el sistema (22), (23) ampliado a las nuevas funciones, eliminación que resulta innecesaria, puesto que la ecuación (22) es independiente de las $f_i(x,y,z) = 0$. El lugar geométrico viene a ser, en consecuencia,

$$(4) \qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

que, como habíamos dicho ya, es ecuación de un plano: el plano tangente a la superficie en el punto considerado.

Resulta ahora fácil interpretar las ecuaciones (22), (23). Estas representan la tangente a la línea intersección de las superficies $f = 0$, $f_1 = 0$. Pero la tangente no es otra cosa que la arista según la cual se cortan los dos planos tangentes a las superficies en el punto considerado.

6. 3 *El gradiente.* Se da el nombre de *gradiente* de la superficie $f(x, y, z) = 0$, al vector cuyas componentes son:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

En todo punto ordinario de la superficie, dicho vector tendrá módulo diferente de cero.

El gradiente es un vector de grande importancia en Física matemática. Como vamos a demostrar, es perpendicular a la superficie, en el punto considerado.

Sea el vector **PM** que, en el plano tangente une el punto P con el punto (X, Y, Z). Las componentes de este último vector, son,

$$(1) \qquad (X - x), \quad (Y - y), \quad (Z - z)$$

Ahora bien, si el gradiente se designa por **G**, la ecuación (4) del plano tangente puede escribirse,

$$(2) \qquad \mathbf{PM.G} = 0$$

lo que demuestra que **G** es perpendicular a **PM** y por consiguiente al plano tangente, puesto que el punto M ha sido elegido libremente en dicho plano. La normal al plano tangente es la normal a la superficie.

El módulo del gradiente vale,

$$(3) \qquad G = [(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + (\partial f/\partial z)^2]^{1/2}$$

6. 4 *Derivada direccional.* En muchas cuestiones de Física matemática, por ejemplo, en el estudio del calor, se consideran funciones escalares de los puntos, a saber,

$$(1) \qquad f(x, y, z) = C$$

Tales funciones definen superficies y, para los diversos valores de C, definen una familia de superficies, cuyos elementos componentes no se cortan.

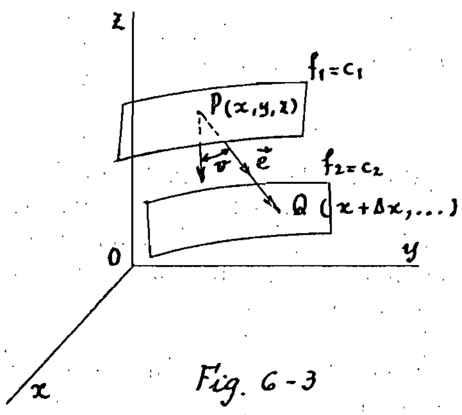

Fig. 6-3

Sean las dos superficies de la familia o conjunto:

$$(2) \qquad \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= C_1 \\ f_2(x, y, z) &= C_2 \end{aligned}$$

Sean, por otra parte $P(x, y, z)$ un punto en la primera, $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, un punto en la segunda. Representemos por Δs el módulo de **PQ**, (distancia), y formemos la razón de incrementos:

$$(3) \qquad \frac{f_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f_1(x, y, z)}{\Delta s}$$

El límite de esta razón cuando Δs tiende a cero, $(f_2 \to f_1)$, recibe el nombre de derivada direccional de f_1, en la dirección **PQ**.

Ahora bien, según el Cálculo Diferencial dicho límite vale,

$$(4) \qquad \frac{df}{ds} = \frac{\partial f dx}{\partial x ds} + \frac{\partial f dy}{\partial y ds} + \frac{\partial f dz}{\partial z ds}$$

(2) $$PM.G = 0$$

lo que demuestra que **G** es perpendicular a **PM** y por consiguiente al plano tangente, puesto que el punto M ha sido elegido libremente en dicho plano. La normal al plano tangente es la normal a la superficie.

El módulo del gradiente vale,

(3) $$G = [(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + (\partial f/\partial z)^2]^{1/2}$$

6. 4 *Derivada direccional.* En muchas cuestiones de Física matemática, por ejemplo, en el estudio del calor, se consideran funciones escalares de los puntos, a saber,

(1) $$f(x, y, z) = C$$

Tales funciones definen superficies y, para los diversos valores de C, definen una familia de superficies, cuyos elementos componentes no se cortan.

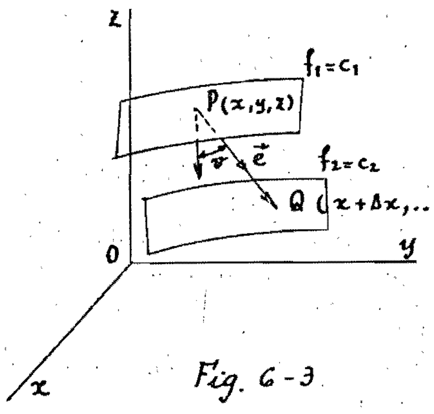

Fig. 6-3

Sean las dos superficies de la familia o conjunto:

(2) $$f_1(x, y, z) = C_1$$
$$f_2(x, y, z) = C_2$$

Sean, por otra parte $P(x, y, z)$ un punto en la primera, $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, un punto en la segunda. Representemos por Δs el módulo de **PQ**, (distancia), y formemos la razón de incrementos:

(3) $$\frac{f_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f_1(x, y, z)}{\Delta s}$$

El límite de esta razón cuando Δs tiende a cero, $(f_2 \to f_1)$, recibe el nombre de derivada direccional de f_1, en la dirección **PQ**.

Ahora bien, según el Cálculo Diferencial dicho límite vale,

(4) $$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f dx}{\partial x ds} + \frac{\partial f dy}{\partial y ds} + \frac{\partial f dz}{\partial z ds}$$

Tratemos de interpretar esta relación. En primer lugar, se observa que los cosenos directores de **PQ**, tienen por valor ,

$$(5) \qquad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

que pueden ser considerados como las componentes de un vector unitario, **e**, dirigido según **PQ**, (vector de dirección o versor). En consecuencia, la (4) puede escribirse como producto escalar, así,

$$(6) \qquad \frac{df}{ds} = \mathbf{G.e} = \mathrm{G} \cos \mathrm{v}$$

donde v designa el ángulo formado por **PQ** con la normal a la superficie, en P, (dirigida hacia f_2). La relación (6) hace ver cómo la derivada direccional se obtiene al multiplicar el módulo del gradiente por cos v o sea, que es igual a la proyección del vector gradiente sobre la dirección **PQ**.

Por lo anterior se concluye que el módulo del gradiente corresponde al valor más alto de la derivada direccional; en otras palabras: el gradiente mide en dirección, *intensidad* y sentido, la variación más rápida de la función

$$f(x, y, z) = \mathrm{C}$$

6. 5 *El plano normal.*

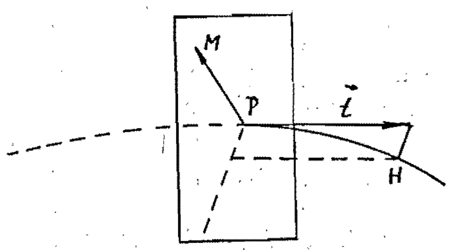

Fig. 6-4

El plano normal, en punto ordinario de una curva, es por definición, el plano perpendicular a la tangente, construído en el punto considerado.

Tiene como ecuación vectorial la siguiente,

$$(1) \qquad \mathbf{PM.t} = 0$$

cuya expresión cartesiana, es,

$$(2) \qquad (\mathrm{X} - x)(dx/ds) + (\mathrm{Y} - y)(dy/ds) + (\mathrm{Z} - z)(dz/ds) = 0$$

6. 6 *El plano osculador.* Un elemento geométrico de grande importancia en el estudio de curvas alabeadas, es el plano osculador. Este plano representa para las líneas del espacio tridimensional, un papel análogo al de la tangente para las curvas planas. Según vere-

mos luego, el plano osculador tiene un contacto de tal naturaleza con la curva, en un punto ordinario, que en el entorno del punto la curva puede ser considerada como si fuera plana y además, contenida en el plano osculador.

Las consideraciones siguientes permiten adquirir un concepto geométrico sobre el plano osculador.

Sea una curva alabeada, (Figura 6-4). P un punto ordinario en la misma y el versor **t** correspondiente. Se construye el plano que contiene a **t** y a un punto H de la curva, cuyas coordenadas vienen a ser,

$$(1) \qquad x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z$$

Al hacer tender H hacia P, el plano gira alrededor de la tangente acercándose a una posición límite, para la cual hablamos de plano osculador a la curva, en P.

La ecuación del plano osculador se deduce en seguida.

Sea primero la ecuación de un plano que contenga el punto P:

$$(2) \qquad \mathrm{A}(\mathrm{X} - x) + \mathrm{B}(\mathrm{Y} - y) + \mathrm{C}(\mathrm{Z} - z) = 0$$

La extremidad del versor tangente tiene por coordenadas,

$$(3) \qquad x + x', \quad y + y', \quad z + z'$$

En consecuencia, si el plano (2) contiene la tangente se cumple la relación,

$$(4) \qquad \mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}z' = 0$$

Si el plano contiene además el punto H, se verifica,

$$(5) \qquad \mathrm{A}\Delta x + \mathrm{B}\Delta y + \mathrm{C}\Delta z = 0$$

Ahora desarrollamos en serie de Taylor los incrementos Δx, Δy, Δz, para tener,

$$(6) \qquad \Delta x = x'\Delta s + (x''/2!)\,(\Delta s)^2 + (x'''/3!)\,(\Delta s)^3 + \ldots$$

etc. Substituyendo la (6) y análogas en (5), resulta,

$$(7) \quad (\mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}z')\Delta s + (\mathrm{A}x'' + \mathrm{B}y'' + \mathrm{C}z'')(\Delta s)^2/2! + \ldots = 0$$

El primer paréntesis es nulo en virtud de (4). Dividiendo la serie restante por $(\Delta s)^2/2!$ y haciendo tender a cero Δs, se obtiene, mos luego, el plano osculador tiene un contacto de tal naturaleza con la curva, en un punto ordinario, que en el entorno del punto la curva puede ser considerada como si fuera plana y además, contenida en el plano osculador.

Las consideraciones siguientes permiten adquirir un concepto geométrico sobre el plano osculador.

Sea una curva alabeada, (Figura 6-4). P un punto ordinario en la misma y el versor **t** correspondiente. Se construye el plano que contiene a **t** y a un punto H de la curva, cuyas coordenadas vienen a ser,

$$(1) \qquad x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z$$

Al hacer tender H hacia P, el plano gira alrededor de la tangente acercándose a una posición límite, para la cual hablamos de plano osculador a la curva, en P.

La ecuación del plano osculador se deduce en seguida.

Sea primero la ecuación de un plano que contenga el punto P:

$$(2) \qquad A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

La extremidad del versor tangente tiene por coordenadas,

$$(3) \qquad x + x', \quad y + y', \quad z + z'$$

En consecuencia, si el plano (2) contiene la tangente se cumple la relación,

$$(4) \qquad Ax' + By' + Cz' = 0$$

Si el plano contiene además el punto H, se verifica,

$$(5) \qquad A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0$$

Ahora desarrollamos en serie de Taylor los incrementos Δx, Δy, Δz, para tener,

$$(6) \qquad \Delta x = x'\Delta s + (x''/2!)\,(\Delta s)^2 + (x'''/3!)\,(\Delta s)^3 + \ldots$$

etc. Substituyendo la (6) y análogas en (5), resulta,

$$(7) \quad (Ax' + By' + Cz')\Delta s + (Ax'' + By'' + Cz'')\,(\Delta s)^2/2! + \ldots = 0$$

El primer paréntesis es nulo en virtud de (4). Dividiendo la serie restante por $(\Delta s)^2/2!$ y haciendo tender a cero Δs, se obtiene,

$$(8) \qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0$$

La eliminación de A, B, C, entre las ecuaciones (2), (4), (8), conduce a la ecuación del plano osculador,

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

Otras definiciones para el plano osculador.

Existen otras dos definiciones para el plano osculador que permiten obtener también la ecuación del mismo, las cuales expondremos en seguida, pues ayudan la intuición y tienen importancia en las aplicaciones.

Una nueva definición es la siguiente: dado un punto fijo, P, y dos puntos próximos, P_1, P_2, los tres determinan un plano, cuya posición límite, cuando P_1, P_2 tienden a reunirse con P, es la del plano osculador.

Por último: dado el punto P y el correspondiente versor tangente, **t**; un punto próximo P_1 y el consiguiente versor $\mathbf{t}_1$, se traza por P una paralela a este último versor. El plano que así se determina adquiere una posición límite cuando P_1 tiende a confundirse con P; en tal posición límite el plano es osculador a la curva en P.

6. 7 *Derivada segunda del vector de posición.* En este número analizaremos la significación geométrica de la derivada de segundo orden del vector de posición, a saber, el límite,

$$(1) \quad \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)_{s = s_2} - \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)_{s = s_1}}{s_2 - s_1}$$

cuando $s_2 \rightarrow s_1$.

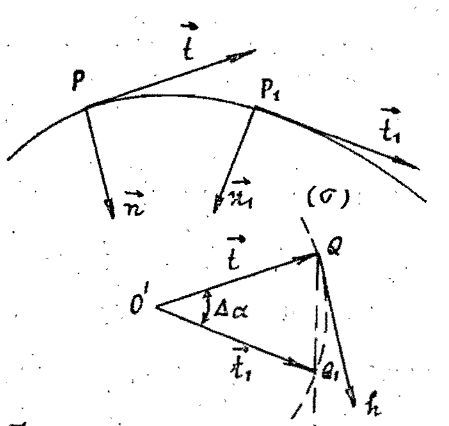

Fig. 6-5

Dicha segunda derivada se escribe en una u otra de las formas equivalentes,

$$(2) \quad \mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

Construyamos en el punto P un versor **n** sujeto a las siguientes condiciones: coincide con la arista intersección del plano osculador con el plano normal y su orientación es tal que se dirige hacia el centro de curvatura de la porción de curva que forma el entorno de P. Tal versor recibe el nombre de versor *normal-principal* y, como vamos a demostrar en seguida, permite completar las igualdades (2), así:

$$(3) \qquad \mathbf{r}'' = \mathbf{n}/R$$

donde R es un escalar, cuya dimensión es una longitud, que luego interpretaremos.

En lo que sigue resulta conveniente introducir un auxiliar geométrico, que recibe el nombre de *indicatriz esférica* de las tangentes.

Sea un punto O', (Figura 6-5), desde el cual trazamos versores equipolentes a **t**, $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, ..., los extremos de estos versores estarán situados en una superificie esférica de radio unidad, en la cual describen una curva, sigma, que recibe el nombre de indicatriz esférica de las tangentes. Entre la curva dada y su indicatriz, existe una correlación fácil de analizar.

Pasemos una secante $Q - Q_1$, con punto fijo Q, punto variable Q_1. Se tiene,

$$(4) \qquad \mathbf{QQ_1} = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t} = \Delta\mathbf{t}$$

$\Delta\mathbf{t}$ es el incremento vectorial de **t**. Dividiendo (4) por el escalar Δs, se obtiene un vector $\mathbf{Qh}_1$, variable, a saber,

$$(5) \qquad \frac{\Delta\mathbf{t}}{\Delta s} = \frac{\mathbf{QQ_1}}{\Delta s} = \mathbf{Qh}_1$$

Al hacer tender Δs a cero, se obtiene un vector límite **Qh** que sigue la dirección tangente a la indicatriz y lleva el sentido en que crecen los arcos, sigma. Por consiguiente, se puede escribir,

$$(6) \qquad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{Qh}$$

Precisemos completamente la naturaleza de este vector **Qh**.

Veamos, en primer lugar, la dirección. El vector $\mathbf{QQ_1}$, está contenido en el plano determinado por **t** y $\mathbf{t}_1$. Al límite de las posiciones de este plano corresponde el plano osculador, y al límite de la cuerda QQ_1 corresponde la tangente a sigma, o sea que, **Qh** vendrá a ser paralelo al plano osculador.

Construyamos en el punto P un versor $\mathbf{n}$ sujeto a las siguientes condiciones: coincide con la arista intersección del plano osculador con el plano normal y su orientación es tal que se dirige hacia el centro de curvatura de la porción de curva que forma el entorno de P. Tal versor recibe el nombre de versor *normal-principal* y, como vamos a demostrar en seguida, permite completar las igualdades (2), así:

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{n}/R \tag{3}$$

donde R es un escalar, cuya dimensión es una longitud, que luego interpretaremos.

En lo que sigue resulta conveniente introducir un auxiliar geométrico, que recibe el nombre de *indicatriz esférica* de las tangentes.

Sea un punto O', (Figura 6-5), desde el cual trazamos versores equipolentes a $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, ..., los extremos de estos versores estarán situados en una superificie esférica de radio unidad, en la cual describen una curva, sigma, que recibe el nombre de indicatriz esférica de las tangentes. Entre la curva dada y su indicatriz, existe una correlación fácil de analizar.

Pasemos una secante Q — Q_1, con punto fijo Q, punto variable Q_1. Se tiene,

$$\mathbf{QQ}_1 = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t} = \Delta\mathbf{t} \tag{4}$$

$\Delta\mathbf{t}$ es el incremento vectorial de $\mathbf{t}$. Dividiendo (4) por el escalar Δs, se obtiene un vector $\mathbf{Qh}_1$, variable, a saber,

$$\frac{\Delta\mathbf{t}}{\Delta s} = \frac{\mathbf{QQ}_1}{\Delta s} = \mathbf{Qh}_1 \tag{5}$$

Al hacer tender Δs a cero, se obtiene un vector límite $\mathbf{Qh}$ que sigue la dirección tangente a la indicatriz y lleva el sentido en que crecen los arcos, sigma. Por consiguiente, se puede escribir,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{Qh} \tag{6}$$

Precisemos completamente la naturaleza de este vector $\mathbf{Qh}$.

Veamos, en primer lugar, la dirección. El vector $\mathbf{QQ}_1$, está contenido en el plano determinado por $\mathbf{t}$ y $\mathbf{t}_1$. Al límite de las posiciones de este plano corresponde el plano osculador, y al límite de la cuerda QQ_1 corresponde la tangente a sigma, o sea que, $\mathbf{Qh}$ vendrá a ser paralelo al plano osculador.

El sentido de este vector es aquel en que se recorre la indicatriz, sigma, que a la vez es el mismo sentido que, en la primera curva, tiene el versor normal-principal.

Vamos a demostrar por último, que el módulo del vector **Qh** tiene por valor la curvatura principal en el punto P, con lo que se puede escribir,

$$(7) \qquad |\mathbf{Qh}| = |\mathbf{r}''| = K = 1/R$$

Por curvatura principal se entiende la curvatura de la porción infinitésima de curva, que en el entorno de P, coincide con el plano osculador.

Con el fin de determinar el módulo, atendemos a la relación (5) y a la Figura 6-5, por la cual observamos que el módulo del vector $\Delta\mathbf{t}$ es longitud de una cuerda en una circunferencia de radio unidad.

En consecuencia,

$$(8) \qquad \left|\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s}\right| = \frac{1}{\Delta s}|\Delta\mathbf{t}| = \frac{1}{\Delta s}.2\ |\mathbf{t}|\ \mathrm{sen}(\Delta\alpha/2)$$

Al considerar Δs como infinitésimo de primer orden, la relación (8) se simplifica así:

$$(9) \qquad \left|\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s}\right| = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = K_n$$

$\Delta\alpha$ es el *ángulo de contingencia* o sea, el ángulo entre las tangentes en P y P_1, de donde se desprende que la última relación tiene por valor la *curvatura media* de la línea considerada, entre los puntos P,P_1. Pasando al límite resulta, en consecuencia,

$$(10) \qquad \left|\frac{dt}{ds}\right| = \frac{d\alpha}{ds} = K = 1/R$$

De esta manera la igualdad (3) ha quedado completamente demostrada.

R designa, como ya hemos dicho, el radio de curvatura. La curvatura, a que nos referimos es la que se estudia en el caso de curvas planas, la cual, cuando las curvas son alabeadas, recibe el nombre de *curvatura principal.* El plano osculador hace posible asimilar toda curva alabeada, a una curva plana en las vecindades del punto de osculación.

6. 8 *El vector derivada n-sima.* Expresado el vector de posición por medio de sus componentes,

$$(1) \qquad \mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

se obtiene, derivando según x,

$$(2) \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z'$$

De ésta se obtiene, por otra parte,

$$(3) \qquad \mathbf{r}'' = \mathbf{i}x'' + \mathbf{j}y'' + \mathbf{k}z''$$

Las relaciones (2) y (3) son casos particulares de la relación general,

$$(4) \qquad \mathbf{r}^{(n)} = \mathbf{i}x^{(n)} + \mathbf{j}y^{(n)} + \mathbf{k}z^{(n)}$$

Fundados en la relación (3) vamos a obtener la expresión analítica de la curvatura.

La curvatura es una magnitud de naturaleza escalar: módulo del vector $\mathbf{r}''$. Su valor, en coordenadas cartesianas, se deduce fácilmente de la relación (3) del número 3-7, por medio de multiplicalión escalar, así,

$$(5) \qquad \mathbf{r}''.\,\mathbf{r}'' = \frac{\mathbf{n}.\mathbf{n}}{R^2} = 1/R^2$$

El producto escalar, que aparece al lado izquierdo de (5) se expresa ahora en función de las componentes sobre los ejes, con lo cual se obtiene,

$$(6) \qquad (x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2 = 1/R^2$$

de la cual se deduce el valor de R. Los cosenos directores de la normal principal se obtienen como cocientes de las proyecciones del vector $\mathbf{r}''$ al ser divididas por el módulo de éste vector. Son, a saber,

$$(7) \qquad a = Rx''\,; \quad b = Ry''\,; \quad c = Rz''$$

6. 9 *El plano rectificante.* Es el plano que contiene la tangente a la curva -el versor t- y es a la vez perpendicular al plano osculador. Omitimos, por no ser esencial a los fines de esta exposición, deducir la ecuación del plano rectificante.