ELEMENTOS DEL ALGEBRA DE MATRICES

1. *Definición* Se da el nombre de matriz, en particular matriz numérica, de dimensiones m x n, a un conjunto de números escritos en m filas horizontales -líneas- y en n filas verticales -columnas-. Los elementos que constituyen las matrices suelen ser representados, de manera general, por a_{ij}, donde el primer índice, a saber, i, indica el orden de la línea; el segundo índice, j, el orden de la columna a que pertenece el elemento considerado. Así, por ejemplo a_{34} es el elemento que ocupa la intersección de la tercera línea y la cuarta columna. Este procedimiento de ubicación de un elemento se refiere a las explicaciones teóricas, haciéndose innecesario en el trabajo de orden práctico.

Este sistema de indicación del lugar es el de doble sub-índice y será el que empleemos en esta exposición. Existe además, el sistema de sub-índice y superíndice, según el cual el elemento a^j_i es el que ocupa la intersección de la línea i con la columna j.

Para escribir las matrices, el cuadro formado por sus elementos se encierra entre paréntesis, corchetes o dobles barras. Aquí utilizaremos las siguientes designaciones equivalentes:

$$(1) \qquad A = (a_{ij}) = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ .. & .. \ldots & .. \\ .. & .. \ldots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se puede decir, para facilitar la comprensión, que las matrices numéricas son *colecciones ordenadas* de números. Los vectores, como veremos luego, son un caso particular; los números aislados pueden ser considerados como matrices 1 x 1.

2. *Igualdad.* Dos matrices A, B son iguales sí, al ser de iguales dimensiones, o sea, al contener el mismo número de líneas, y el mismo número de columnas respectivamente, sus elementos cumplen la siguiente condición:

(1) $$a_{ij} = b_{ij}$$

para todos los valores de i y de j.

La igualdad de dos matrices implica, en consecuencia, m x n igualdades: la de cada elemento de la matriz A y su homólogo en la matriz B.

3. *Suma.* Por suma de dos matrices A, B, de las mismas dimensiones m x n, se entiende la matriz cuyos elementos son suma de los elementos homólogos de A y B.

De manera que si se tiene,

(1) $$A = (a_{ij}) \; ; \quad B = (b_{ij})$$

la matriz suma se expresa así:

(2) $$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Según la definición, la suma de matrices goza de las propiedades *conmutativa y asociativa* correspondientes a la suma de números. A saber,

(3) $$A + B = B + A$$

(4) $$A + (B + C) = (A + B) + C$$

4. *Matriz nula o cero.* Matriz cero, m x n, es la matriz de estas dimensiones, cuyos elementos son el número cero. Se le representa por (0) o bien por 0. Para toda matriz, A, se verifica,

(1) $$A + 0 = 0 + A = A$$

5. *Producto.* Dada una matriz, A, m x n, y una matriz B, n x p, se define el producto AB como la matriz C cuyos elementos c_{ij} se forman según el siguiente esquema,

(1) $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

lo que para fijar mejor los conceptos, escribiremos así,

(2) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

Debemos dar énfasis a la circunstancia que hace posible el producto. Este está definido, -es posible- *únicamente* cuando el número de columnas de la primera matriz, A, es igual al número de líneas de la segunda B. Las dimensiones de la matriz producto, C, vienen a ser: m, número de líneas de la primera, y p, número de columnas de la segunda.

6. *Substituciones lineales.* La multiplicación de matrices tiene su origen en la teoría de las substituciones lineales. Veámosle por medio del siguiente ejemplo.

Supongamos que las variables x_1, x_2, x_3, están vinculadas a y_1, y_2, de la manera siguiente:

(1) $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \end{aligned}$$

Si, por otra parte, las x_1, x_2, x_3, dependen de z_1, z_2 según las relaciones,

(2) $$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ x_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ x_3 &= b_{31}z_1 + b_{32}z_2, \end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Debemos dar énfasis a la circunstancia que hace posible el producto. Este está definido, -es posible- *únicamente* cuando el número de columnas de la primera matriz, A, es igual al número de líneas de la segunda B. Las dimensiones de la matriz producto, C, vienen a ser: m, número de líneas de la primera, y p, número de columnas de la segunda.

6. *Substituciones lineales.* La multiplicación de matrices tiene su origen en la teoría de las substituciones lineales. Veámosle por medio del siguiente ejemplo.

Supongamos que las variables x_1, x_2, x_3, están vinculadas a y_1, y_2, de la manera siguiente:

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \end{aligned}$$

Si, por otra parte, las x_1, x_2, x_3, dependen de z_1, z_2 según las relaciones,

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ x_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ x_3 &= b_{31}z_1 + b_{32}z_2, \end{aligned}$$

la dependencia de las z_i con las y_i se podrá establecer directamente mediante la substitución de las (2) en las (1).

Quedará, al substituir y ordenar,

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
(a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31})\, z_1 + (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32})\, z_2 &= y_1 \\
(a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31})\, z_1 + (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32})\, z_2 &= y_2
\end{aligned}
$$

Veamos ahora la disposición matricial de las operaciones anteriores.

$$
(1')\quad
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}
$$

$$
(2')\quad
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}
$$

La substitución de (2') en (1'), da,

$$
(3')\quad
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}
$$

lo cual hace ver cómo la matriz de la substitución (3), producto de las substituciones (1) y (2), viene a ser,

$$
(4)\quad
\begin{bmatrix}
a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} \\
a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32}
\end{bmatrix}
$$

$$
=
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}
$$

7 *Vectores.* Una matriz de orden 1 x n, recibe el nombre de *vector-línea* de orden n. De manera análoga, una matriz de orden

m x 1, recibe el nombre de *vector-columna*, de orden m. El producto matricial de dos vectores exige, para ser posible, que los órdenes de éstos sean iguales.

Sean los vectores,

$$
(1)\qquad u = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \;; \qquad v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Se tiene,

$$
(2)\qquad uv = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n
$$

Por otra parte, es,

$$
(3)\qquad vu = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} [a_1, a_2, \ldots a_n] =
\begin{bmatrix}
b_1 a_1 & b_1 a_2 \ldots b_1 a_n \\
b_2 a_1 & b_2 a_2 \ldots b_2 a_n \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
b_n a_1 & b_n a_2 \ldots b_n a_n
\end{bmatrix}
$$

El primer producto, uv, conduce a una matriz 1 x1, es decir, a un número; el segundo producto vu, conduce a una matriz n x n. El producto de un vector-línea por un vector columna, recibe el nombre de producto *interior* o también, *producto escalar*.

m x 1, recibe el nombre de *vector-columna*, de orden m. El producto matricial de dos vectores exige, para ser posible, que los órdenes de éstos sean iguales.

Sean los vectores,

$$(1) \qquad u = [a_1,a_2,\ldots,a_n] \; ; \qquad v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Se tiene,

$$(2) \qquad uv = [a_1,a_2,\ldots,a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

Por otra parte, es,

$$(3) \qquad vu = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} [a_1,a_2,\ldots a_n] = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 \ldots b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 \ldots b_2a_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots \\ b_na_1 & b_na_2 \ldots b_na_n \end{bmatrix}$$

El primer producto, uv, conduce a una matriz 1 x1, es decir, a un número; el segundo producto vu, conduce a una matriz n x n. El producto de un vector-línea por un vector columna, recibe el nombre de producto *interior* o también, *producto escalar*.

Obs. El Cálculo vectorial define el vector como un n-tuplo ordenado de números reales sin que interese en esta definición que se lo escriba como línea o como columna. En Cálculo matricial, como veremos poco después, el vector-columna resulta de efectuar una *transposición* en un vector-línea.

8. *Propiedades del Producto.* El producto de matrices no es, en general, conmutativo. Es decir, que AB y BA son, en general, distintos. Acabamos de ver un producto no conmutativo, al efectuar la multiplicación de dos vectores u, v. Esto ocurre aún en el caso de matrices cuadradas.

Veamos el siguiente ejemplo.

Sean las matrices

$$(1) \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene,

$$(2) \qquad AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos dar ahora un nuevo concepto en relación al producto AB de dos matrices. La relación 5-1, indica la *estructura* de los términos en la matriz producto, y, en efecto, dicha relación puede ser escrita así,

$$(3) \qquad c_{ij} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

es decir que, el elemento c_{ij} del producto se obtiene al multiplicar interiormente el vector línea, i, de la primera matriz, por el vector columna, j, de la segunda.

9. *Matrices diagonales.* Se da este nombre a matrices cuadradas en las cuales los elementos que están situados fuera de la diagonal principal, son iguales a cero. Tales matrices poseen la particularidad de ser conmutativo su producto. Veamos el ejemplo siguiente:

$$(1) \qquad H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{bmatrix}$$

Se tiene,

$$(2) \qquad HT = \begin{bmatrix} h_1t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4t_4 \end{bmatrix}$$

por lo cual se ve que es HT = TH.

10. *Matriz unidad.* Existe una matriz diagonal particular correspondiente a cada orden, la cual recibe el nombre de *matriz unidad*. Es la siguiente,

$$(1) \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{bmatrix}$$

El subíndice, n corresponde al orden de la matriz.

A esta matriz se le ha llamado también *matriz idéntica* por razones que serán vistas en seguida.

Para todas las matrices A de dimensiones n x n, se cumple la siguiente relación,

9. *Matrices diagonales.* Se da este nombre a matrices cuadradas en las cuales los elementos que están situados fuera de la diagonal principal, son iguales a cero. Tales matrices poseen la particularidad de ser conmutativo su producto. Veamos el ejemplo siguiente:

$$(1) \qquad H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{bmatrix}$$

Se tiene,

$$(2) \qquad HT = \begin{bmatrix} h_1t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4t_4 \end{bmatrix}$$

por lo cual se ve que es $HT = TH$.

10. *Matriz unidad.* Existe una matriz diagonal particular correspondiente a cada orden, la cual recibe el nombre de *matriz unidad.* Es la siguiente,

$$(1) \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{bmatrix}$$

El subíndice, n corresponde al orden de la matriz.

A esta matriz se le ha llamado también *matriz idéntica* por razones que serán vistas en seguida.

Para todas las matrices A de dimensiones n x n, se cumple la siguiente relación,

(2) $$AI_n = I_nA = A$$

Dejamos al lector, como ejercicio, la verificación de estas relaciones.

Se puede establecer también, designando por 0 la matriz nula de dimensiones adecuadas a cada caso, que se tiene,

(3) $$A0 = 0A = 0$$

La recíproca de (3) no es cierta. Es decir, el producto de dos matrices puede ser nulo, (matriz cero), sin ser nulo uno de los factores. Por ejemplo, si son,

(4) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta,

(5) $$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11. *Determinantes.* Dado un número complejo, se definen la *norma* y el *módulo* como funciones numéricas de las componentes de aquél. De manera análoga, dada una matriz cuadrada, existe el determinante correspondiente a los elementos de aquélla, dispuestos en el mismo orden. El determinante no es pues, cosa distinta a una simple función numérica de los elementos de una matriz cuadrada.

Para multiplicar determinantes se puede proceder de dos maneras, una de las cuales coincide con la que se sigue en la multiplicación de matrices.

Dadas dos matrices cuadradas del mismo orden, y dado el producto, a saber,

(1) $$AB = C$$

si se designa el determinante de la matriz A por $|A|$, etc. se tiene, por otra parte,

(2) $$|A|.|B| = |C|$$

La relación (2) puede concebirse como consecuencia de la (1) y enunciar la circunstancia diciendo:

El determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden, es igual al producto de los determinantes de las matrices factores.

Una matriz cuadrada cuyo determinante sea nulo, recibe el nombre de *matriz singular.*

Al hablar del determinante correspondiente o asociado a una matriz cuadrada, nos referimos al determinante cuyo orden es igual al de la matriz.

12. *Matriz transpuesta.* Dada una matriz, por ejemplo, la 1-1, se define la *matriz transpuesta* como sigue:

(1) $$A' = T(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

o sea que, la primera, segunda, tercera, ..., líneas de la primera matriz, se escriben como primera, segunda, tercera, ..., columnas, respectivamente, de la transpuesta. Esto produce a la vez el cambio de las columnas de A en líneas del correspondiente orden en T(A).

Entre las matrices cuadradas existen las *simétricas* que son aquellas para las cuales se cumple la relación,

(2) $$a_{ij} = a_{ji}$$

para todos los valores de los índices.

Las matrices cuadradas simétricas cumplen la relación $A = T(A)$.

(2) $$|A| \cdot |B| = |C|$$

La relación (2) puede concebirse como consecuencia de la (1) y enunciar la circunstancia diciendo:

El determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden, es igual al producto de los determinantes de las matrices factores.

Una matriz cuadrada cuyo determinante sea nulo, recibe el nombre de *matriz singular.*

Al hablar del determinante correspondiente o asociado a una matriz cuadrada, nos referimos al determinante cuyo orden es igual al de la matriz.

12. *Matriz transpuesta.* Dada una matriz, por ejemplo, la 1-1, se define la *matriz transpuesta* como sigue:

(1) $$A' = T(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

o sea que, la primera, segunda, tercera, ..., líneas de la primera matriz, se escriben como primera, segunda, tercera, ..., columnas, respectivamente, de la transpuesta. Esto produce a la vez el cambio de las columnas de A en líneas del correspondiente orden en T(A).

Entre las matrices cuadradas existen las *simétricas* que son aquellas para las cuales se cumple la relación,

(2) $$a_{ij} = a_{ji}$$

para todos los valores de los índices.

Las matrices cuadradas simétricas cumplen la relación A = T(A).

Puesto que el número de columnas de una matriz, A, es igual, por definición, al número de líneas de la transpuesta, T(A) se concluye que el producto,

(3) $$AT(A)$$

existe siempre, viniendo a ser el resultado una matriz cuadrada simétrica.

Una matriz de una sola línea -vector-línea-, tiene como transpuesta una matriz de una sola columna -vector-columna-, y viceversa.

Refiriéndonos a los vectores que aparecen en (7-1), vamos a demostrar que se tiene,

(4) $$uv = T(v)\ T(u)$$

Al efecto escribimos,

(5) $$T(v) = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$$

(6) $$T(u) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

(7) $$\begin{aligned} T(v)T(u) &= b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \end{aligned}$$

lo cual demuestra la aserción. Ahora demostraremos el teorema general que dice:

La transpuesta del producto de dos matrices, es igual al producto de las transpuestas, en orden contrario.

En símbolos, de la relación,

(8) $$AB = C$$

se deduce,

(9) $$T(B)T(A) = T(C) = C_1$$

Demostración. Por la transposición, ha pasado la columna j de B a ser la línea j de T(B); la línea i de A se ha convertido en la columna i de T(A). Este producto nos da el elemento c_{ji} de C_1 que debe ser igual, según (7), al elemento c_{ij} de C. C_1 es, por consiguiente, la transpuesta de C.

Ahora podemos demostrar el enunciado hecho anteriormente, según el cual, el producto de una matriz por su transpuesta es una matriz simétrica.

Al efecto, escribimos,

(10) $$AT(A) = S$$

Aplicando el teorema que se acaba de demostrar, y si se tiene en cuenta que dos transposiciones consecutivas sobre una misma matriz dan por resultado la matriz original, se tiene al afectuar transposición en (10),

(11) $$AT(A) = T(S)$$

de donde, al comparar las (10) y (11):

(12) $$S = T(S)$$

lo que demuestra que es S es simétrica.

13. *Relaciones algebraicas.* Se multiplica un escalar K por una matriz, multiplicando K por cada uno de los elementos de la matriz. Lo mismo puede decirse en cuanto al producto de una matriz por un escalar.

En símbolos,

(1) $$KA = (Ka_{ij}) = (a_{ij}K) = AK$$

Es fácil demostrar, además, las siguientes igualdades,

(2) $$(A + B)C = AC + BC$$

(3) $$C(A + B) = CA + CB$$

las cuales hacen ver que el producto matricial goza de la propiedad *distributiva* respecto de la adición.

(9) $T(B)T(A) = T(C) = C_1$

Demostración. Por la transposición, ha pasado la columna j de B a ser la línea j de T(B); la línea i de A se ha convertido en la columna i de T(A). Este producto nos da el elemento c_{ji} de C_1 que debe ser igual, según (7), al elemento c_{ij} de C. C_1 es, por consiguiente, la transpuesta de C.

Ahora podemos demostrar el enunciado hecho anteriormente, según el cual, el producto de una matriz por su transpuesta es una matriz simétrica.

Al efecto, escribimos,

(10) $AT(A) = S$

Aplicando el teorema que se acaba de demostrar, y si se tiene en cuenta que dos transposiciones consecutivas sobre una misma matriz dan por resultado la matriz original, se tiene al afectuar transposición en (10),

(11) $AT(A) = T(S)$

de donde, al comparar las (10) y (11):

(12) $S = T(S)$

lo que demuestra que es S es simétrica.

13. *Relaciones algebraicas.* Se multiplica un escalar K por una matriz, multiplicando K por cada uno de los elementos de la matriz. Lo mismo puede decirse en cuanto al producto de una matriz por un escalar.

En símbolos,

(1) $KA = (Ka_{ij}) = (a_{ij}K) = AK$

Es fácil demostrar, además, las siguientes igualdades,

(2) $(A + B)C = AC + BC$

(3) $C(A + B) = CA + CB$

las cuales hacen ver que el producto matricial goza de la propiedad *distributiva* respecto de la adición.

14. *Matriz adjunta.* Sea la matriz cuadrada,

$$(1) \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Formemos la transpuesta,

$$(2) \qquad T(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{n2} \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se da el nombre de *matriz adjunta* de A, a la matriz formada con los co-factores de la transpuesta. A saber,

$$(3) \qquad \text{adj. } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots A_{nn} \end{bmatrix}$$

en otras palabras: la adjunta de (a_{ij}) es la matriz formada con los cofactores A_{ji} de (a_{ji}).

15. *Matriz Inversa.* Supongamos que A es una matriz no singular. Al dividir la matriz adjunta, (3), por el escalar $|A|$, determinante de la matriz (1), se obtiene la matriz *inversa*,

$$(4) \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

A esta matriz se le llama inversa de A por satisfacer las relaciones siguientes:

$$(5) \qquad AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

de fundamental importancia, las cuales pasamos a demostrar.

Al efecto, es suficiente calcular el término c_{ij} correspondiente al primer miembro en (5). Se tiene,

$$(6) \qquad c_{ij} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}] \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{jn} \end{bmatrix}$$

o bien,

$$(7) \qquad c_{ij} = \frac{1}{|A|}[a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}]$$

La expresión encerrada en el corchete adquiere el valor $|A|$ cuando es $i = j$, es decir para términos de la diagonal principal en la matriz producto. Por el contrario, para i diferente de j, la expresión del corchete tiene por valor cero. En otras palabras, los términos que están fuera de la diagonal principal en la matriz producto, son nulos.

Se puede, en consecuencia, escribir,

$$AA^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \ldots \\ 0 & |A| & 0 \ldots \\ 0 & 0 & |A| \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 1 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 1 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \end{bmatrix} = I_n$$

Análoga demostración para la segunda igualdad contenida en (5).

16. *Ecuaciones lineales.* Veremos aquí únicamente el caso de un sistema *regular* o sea, de tantas ecuaciones como incógnitas y cu-

A esta matriz se le llama inversa de A por satisfacer las relaciones siguientes:

$$(5) \qquad AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

de fundamental importancia, las cuales pasamos a demostrar.

Al efecto, es suficiente calcular el término c_{ij} correspondiente al primer miembro en (5). Se tiene,

$$(6) \qquad c_{ij} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}] \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{jn} \end{bmatrix}$$

o bien,

$$(7) \qquad c_{ij} = \frac{1}{|A|} [a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}]$$

La expresión encerrada en el corchete adquiere el valor $|A|$ cuando es $i = j$, es decir para términos de la diagonal principal en la matriz producto. Por el contrario, para i diferente de j, la expresión del corchete tiene por valor cero. En otras palabras, los términos que están fuera de la diagonal principal en la matriz producto, son nulos.

Se puede, en consecuencia, escribir,

$$AA^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \ldots \\ 0 & |A| & 0 \ldots \\ 0 & 0 & |A| \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 1 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 1 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \end{bmatrix} = I_n$$

Análoga demostración para la segunda igualdad contenida en (5).

16. *Ecuaciones lineales.* Veremos aquí únicamente el caso de un sistema *regular* o sea, de tantas ecuaciones como incógnitas y cu-

yo determinante de coeficientes es diferente de cero. Equivale esto a decir que la matriz de los coeficientes es no-singular.

Sea pues, el sistema,

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
\tag{1}
$$

La disposición matricial de este sistema de ecuaciones viene a ser,

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}
\tag{2}
$$

o también, de manera sintética,

$$AX = B \tag{3}$$

En esta última igualdad, A indica la matriz de los coeficientes, (a_{ij}); X, la matriz-columna de las incógnitas; B, la matriz-columna de los términos conocidos, b_i. La resolución del sistema (1), equivale a la resolución de la ecuación matricial (3), es decir, a la obtención del vector columnar X, lo que se logra así:

Sea A^{-1} la matriz inversa de A. Si se multiplican a izquierda los dos miembros de (3) por A^{-1} y se tiene en cuenta que el producto de matrices también posee la propiedad asociativa, según la cual se cumple,

$$(AB)\,C = A\,(BC) = ABC \tag{4}$$

se tiene,

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \tag{5}$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \tag{6}$$

de donde,

$$I_n X = X = A^{-1}B \tag{7}$$

Con esto las incógnitas, o sea los elementos del vector X, quedan conocidos por el valor de los elementos homólogos en la matriz-columna $A^{-1}B$. Lo esencial en la resolución es el cálculo de la matriz inversa. El ejemplo que damos a continuación, dará más claridad a las explicaciones anteriores.

Se debe resolver el sistema siguiente,

$$
\begin{array}{l}
3x - 2y + 5z = 6 \\
4x + y + 3z = -5 \\
7x + 5y - 2z = 8
\end{array}
\tag{8}
$$

Se tiene,

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}; \quad
T(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}
$$

$$
|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -44
$$

$$
\text{adj. } A = \begin{bmatrix} -17 & 21 & -11 \\ 29 & -41 & 11 \\ 13 & -29 & 11 \end{bmatrix}
$$

$$
A^{-1} = -\frac{1}{44}\begin{bmatrix} -17 & 21 & -11 \\ 29 & -41 & 11 \\ 13 & -29 & 11 \end{bmatrix}
$$

En consecuencia,

(6) $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

de donde,

(7) $I_n X = X = A^{-1} B$

Con esto las incógnitas, o sea los elementos del vector X, quedan conocidos por el valor de los elementos homólogos en la matriz-columna $A^{-1}B$. Lo esencial en la resolución es el cálculo de la matriz inversa. El ejemplo que damos a continuación, dará más claridad a las explicaciones anteriores.

Se debe resolver el sistema siguiente,

(8)
$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 6 \\ 4x + y + 3z &= -5 \\ 7x + 5y - 2z &= 8 \end{aligned}$$

Se tiene,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}; \quad T(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -44$$

$$\text{adj. } A = \begin{bmatrix} -17 & 21 & -11 \\ 29 & -41 & 11 \\ 13 & -29 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{44}\begin{bmatrix} -17 & 21 & -11 \\ 29 & -41 & 11 \\ 13 & -29 & 11 \end{bmatrix}$$

En consecuencia,