



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Métodos de Galerkin Discontinuos para Problemas de Convección-Difusión

Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Diffusion Equation

Nestor Jaime Rios Zuluaga

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2013

Métodos de Galerkin Discontinuos para Problemas de Convección-Difusión

Nestor Jaime Rios Zuluaga

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemática Aplicada

Director:

Carlos Daniel Acosta Medina
Departamento de Matemáticas y Estadística
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales

Codirector:

Rommel Andrés Bustinza Pariona
Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI²MA)
& Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción, Chile

Línea de Investigación:

Análisis Numérico

Grupo de Investigación:

Cálculo Científico y Modelamiento Matemático
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia

2013

A mis padres, Amparo y Balmore,

a mi hermano Daniel,

y a mi Juanita...

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi director de tesis Dr. Carlos Daniel Acosta por el apoyo y confianza brindados para el desarrollo de la misma, estar bajo su tutoría me ha hecho crecer más como persona y como profesional; a mi codirector Dr. Rommel Bustinza por el acompañamiento constante, por sus consejos y por hacer mi estancia en Concepción (Chile) más amena.

Al Departamento de Matemáticas y Estadística por su apoyo, al profesor Jose Alonso Salazar por sus consejos y comentarios, a mis compañeros y amigos Carlos, Ingrid, Michael, Jhon Q., Pedro, Jaider, Camilo, Leo, Jhon C., Karen, Luis & Ana, Raúl, Hector, Alejandro; por hacer más divertidas las jornadas de trabajo y por supuesto los eventos del fin de semana.

Agradezco especialmente a mi novia (y futura esposa) Juanita por su apoyo, comprensión y paciencia infinita; además fue mi motivación e inspiración para llevar a feliz término esta empresa.

Finalmente quiero agradecer profundamente a mi familia por brindarme la oportunidad de continuar mi carrera, por su apoyo y aliento en el desarrollo de este proyecto.

Resumen

En la naturaleza y en la industria, algunos procesos de transporte se modelan matemáticamente por la ecuación de convección-difusión. Tal es el caso del vertido de contaminante en un medio hídrico, la simulación del comportamiento de reservas de petróleo, la transferencia de calor y masa, entre otros.

La ecuación de convección-difusión se expresa matemáticamente como una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico, usualmente para modelar numéricamente este tipo de problemas, resulta eficaz discretizar (particionar) el dominio sobre el que se define la ecuación en derivadas parciales. En el presente trabajo se discretizará el dominio espacial utilizando elementos finitos discontinuos, entre tanto se aplicará un esquema de diferencias finitas en el dominio temporal para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante.

En un contexto general, el método de elementos finitos se basa en tres etapas:

- Reescribir la forma débil del problema con valores inicial y en la frontera incluyendo allí implícitamente las condiciones de frontera.
- Se aplica el método de Galerkin “para resolver la ecuación sobre un subespacio de dimensión finita”.
- Se elige una base conveniente del subespacio de dimensión finita, de tal modo que el sistema de ecuaciones asociado sea (en lo posible) fácil, rápido y barato de resolver.

Los métodos de Galerkin discontinuo son técnicas numéricas que se utilizan frecuentemente para convertir problemas de operadores continuos (como una ecuación diferencial) en problemas discretos. En este trabajo se estudiarán los aspectos teóricos y las técnicas de implementación de los métodos Galerkin discontinuos apropiados para hallar la solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales de tipo parabólico 1-Dimensional.

Palabras clave: métodos de Galerkin discontinuos, convección-difusión, problemas parabólicos .

Abstract

In nature and industry, some transport processes are modeled mathematically by means of the convection-diffusion equation. Such is the case of pollution in hidric environment, the simulating the behavior of oil reserves, the heat and mass transfer, among others.

The convection-diffusion equation is expressed mathematically as a partial differential equation of parabolic type. Usually in order to model numerically these problems, it is effective to find a partition of the domain on which the partial differential equation is defined. In this thesis the spatial domain is discretized by using discontinuous finite elements, whereas a finite difference scheme is applied in the time domain in order to solve the resulting system of ordinary differential equations.

The finite elements method is based on the following stages: Rewrite the weak form of the problem with initial and boundary conditions, apply the Galerkin method “ to solve the equation on a finite-dimensional subspace” by choosing a convenient basis.

Keywords: discontinuous Galerkin methods, convection-diffusion, parabolic problems)

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Lista de símbolos	xiii
1. Introducción	1
1.1. Métodos de Galerkin discontinuos	2
2. Marco Teórico	4
2.1. Ecuaciones de Convección-Difusión	4
2.1.1. Ecuación del calor (Difusión)	4
2.1.2. Ecuación de Convección	5
2.1.3. Ecuación de Convección-Difusión	6
2.2. Elementos de Espacios Vectoriales y Espacios de Sobolev	7
2.2.1. Métodos de Elementos Finitos	13
2.2.2. Método DG para un Problema con Valores en la Frontera	16
2.2.3. Existencia y unicidad de la solución DG	26
2.2.4. Convergencia de DG	28
2.3. Ejemplo Numérico	30
2.4. Conclusiones	31
3. Implementación de un método DG para resolver la ecuación de convección-difusión	32
3.1. DG para resolver la ecuación del calor	32
3.1.1. Discretización	33
3.1.2. Discretización temporal	41
3.1.3. Cálculo del error	42
3.1.4. Ejemplos	43
3.2. DG para resolver el problema de Convección-Difusión	81
3.3. Conclusiones	90
4. Conclusiones	92
4.1. Conclusiones del método	92

4.2. Futuros trabajos	93
Bibliografía	94

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término
a	Coefficiente de Convección
b	Coefficiente de Difusión
$C^k[a, b]$	Espacio de funciones k veces continuamente diferenciables sobre $[a, b]$
H, H^*	Espacio de Hilbert
$H^1(I), H_0^1(I)$	Espacio de Sobolev
h	Tamaño del intervalo
J	Término de penalización
K	Matriz de rigidez
L^2	Espacio de funciones cuadrado integrables
M	Matriz de masa
$\mathcal{P}_k(\varepsilon_h)$	Polinomios discontinuos de grado k
$\mathbb{P}(I_n)$	Espacio de polinomios de grado k sobre I_n
r_{L^2}, r_ε	Orden de aproximación
$\text{supp } f$	Soporte de una función f
\hat{u}, \hat{u}'	Flujo numérico

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término
Ω	Dominio espacial
Δt	Tamaño de paso
α	Vector del sistema EDO
$\varepsilon_2 \beta_2$	Parámetro de penalización
ϵ	Parámetro de simetría
$\eta, \lambda, \gamma, \mu$	Parámetros de las condiciones de frontera
τ, μ	Valor de las condiciones de frontera
ϕ	Función base para la solución aproximada

Abreviaturas

Abreviatura	Término
DG, DGM	Método de Galerkin discontinuo
EDO	Ecuación diferencial ordinaria
EDP	Ecuación diferencial parcial
IBVP	Problema con valores inicial y en la frontera
IP	Métodos de penalización interior
NIPG	Métodos de penalización interior no simétrica

1 Introducción

Los problemas de convección-difusión hacen parte de los llamados *problemas con valor inicial y en la frontera* o *IBVP* por sus siglas en inglés (Initial and Boundary Value Problems), dichos problemas se representan matemáticamente por ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico, los cuales tienen la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t), \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ \gamma u(0, t) + \eta \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \psi(t) \quad t > 0; \\ \mu u(1, t) + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= \chi(t) \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= g(x), \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

En este caso $u(x, t)$ es una función y cuando $\eta = \lambda = 0, \gamma = \mu = 1$ se dice que las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet; por otra parte, si $\eta = \mu = 0$ a la vez que $\gamma = \lambda = 1$ o si $\gamma = \lambda = 0$ a la vez que $\eta = \mu = 1$, se dice que el problema tiene condiciones mixtas.

Sin embargo, en muchos problemas de convección-difusión, no resulta conveniente encontrar su solución analítica (en general se sabe que existe solución pero esta no puede calcularse de manera explícita), por esta razón es necesario implementar métodos numéricos apropiados para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP), como el método de las series de Fourier, el método de diferencias finitas, el método de volúmenes finitos y el método de elementos finitos, entre otros.

El método de las series de Fourier se utiliza principalmente para problemas con coeficientes constantes, sin embargo no es fácil aplicar este método (series de Fourier) cuando no hay una fórmula explícita para las funciones propias y en ocasiones resulta más costoso calcular dichas funciones que resolver el problema original. En los esquemas de volúmenes finitos y diferencias finitas es necesario definir apropiadamente los *flujos numéricos* cuando se trata con problemas puramente convectivos (no lineales), pues su solución exacta produce discontinuidades en tiempo finito.

Estas limitaciones motivaron el desarrollo de este trabajo, donde se implementa un método de elementos finitos, denominado el *Método de Galerkin discontinuo* o DGM por sus siglas en inglés (Discontinuous Galerkin Method); dicho método se aplicará para resolver problemas

de convección-difusión y se espera que tenga eficiencia computacional, precisión numérica y un costo computacional significativamente bajo.

La implementación de éste método se realiza como un primer acercamiento del grupo de investigación “Cálculo Científico y Modelamiento Matemático” a los llamados métodos de elementos finitos; y pretende motivar su aplicación, por parte de los estudiantes de pregrado y posgrado, en los problemas que involucran ecuaciones diferenciales, además de generar nuevos proyectos de investigación.

Para cumplir con ello, en el segundo capítulo se describirá brevemente el fenómeno de convección-difusión y se proporcionarán los fundamentos necesarios para el desarrollo del método de Galerkin discontinuo. Estos fundamentos involucran elementos de análisis y álgebra esencialmente, como la integración, la diferenciación, el cálculo de los sistemas lineales, bases de espacios de funciones, los espacios vectoriales de dimensión infinita (L^2).

En el tercer capítulo se implementará el método de Galerkin discontinuo a un problema unidimensional de difusión y un problema unidimensional de convección-difusión. Se verificará la existencia y unicidad de la solución para este problema y se aplicará posteriormente en diferentes ejemplos.

Por último se muestran los resultados obtenidos y las conclusiones recogidas durante el desarrollo de este trabajo.

A continuación se comenta brevemente el surgimiento de los métodos DG, además del avance de éstos en los últimos años.

1.1. Métodos de Galerkin discontinuos

El método de Galerkin discontinuo se conoce desde 1973, cuando Reed y Hill [54] lo introdujeron con el propósito de resolver la ecuación de transporte de neutrones (ecuación hiperbólica). Luego LeSaint y Raviart [48] hacen un análisis en el que muestran que el método es estable de orden $2k + 1$ cuando se utilizan polinomios de grado k . En la misma época (años setenta) se proponen los métodos de Galerkin para ecuaciones elípticas y parabólicas usando elementos finitos discontinuos, además se estudian algunas variantes como los llamados métodos de penalización interior [4, 5, 11, 46, 61] y su desarrollo es independiente de los métodos DG propuestos originalmente.

Por otra parte Peterson [53] confirma la tasa de convergencia de $(\Delta x)^k$ numéricamente. En [49] Lin y Zhou demostraron la convergencia del método cuando la solución del problema admite discontinuidades y en [63] ellos mismos exploran la relación entre la malla y el orden de convergencia. Recientemente, Falk y Richter [39] muestran una tasa de convergencia de

$(\Delta x)^{k+1/2}$ para triangulaciones generales y aproximaciones por polinomios de grado $\leq k$ aplicados a sistemas de ecuaciones hiperbólicos simétricos y lineales.

Una introducción más amplia se puede encontrar en [28]; en [33] se presenta la evolución histórica de los métodos DG hasta el año 1999, y en [25] se muestra un ensayo sobre dicho método.

Actualmente, los métodos de Galerkin discontinuos se han aplicado exitosamente en la aproximación de sistemas de leyes de conservación [37], problemas con valores en la frontera y en general es útil para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales [59]. Además se ha aplicado en ciencias y en ingeniería en problemas de convección-difusión [34, 37], en el flujo de Darcy [6], en dinámica de fluidos [40], en dinámica de gases [13, 15, 27], en flujo compresible [12, 50, 51], en flujo incompresible [14, 31, 32], en magneto hidrodinámica [60], en flujo granular [44, 45], en dispositivos de simulación de semiconductores [23, 24], en transporte de químicos [20], en visco-elasticidad [8, 10, 41], en transporte de contaminante en medios porosos [3, 29, 30, 35], en procesadores gráficos [47]. También se ha aplicado con buenos resultados en problemas para los que no fue diseñado en un principio, como es el caso de los problemas elípticos de segundo orden [2, 7, 9, 17, 19, 22, 26, 34, 19, 56].

El esquema resultante de los métodos DG posee importantes ventajas sobre otros métodos clásicos de discretización como elementos finitos continuos (clásicos) y volúmenes finitos debido a que "permite utilizar aproximaciones discontinuas lo que habilita su aplicación sobre geometrías complejas utilizando mallas irregulares y considerando aproximaciones polinomiales de grado diferente en elementos diferentes; además se pueden implementar estrategias adaptativas como el refinamiento de la malla sin tener en cuenta las restricciones típicas de discontinuidad. Por otra parte, los métodos son localmente conservativos y proveen aproximaciones discontinuas de alto orden en la aproximación" según Cockburn en [25].

2 Marco Teórico

En este capítulo se presentan, en primer lugar, las ecuaciones que modelan el proceso físico de convección-difusión, además de la definición de los métodos de Galerkin discontinuos que se aplicarán en este trabajo para resolver dichos problemas y la forma en que se abordará la discretización para la evolución temporal.

2.1. Ecuaciones de Convección-Difusión

A continuación se presentan el fenómeno físico de la convección-difusión modelado por ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales. Ejemplo de esto es el flujo de calor en una barra delgada o transporte por convección de una sustancia química en un tubo delgado. Para comprender mejor este problema es necesario distinguir dos procesos físicos: Difusión y convección.

2.1.1. Ecuación del calor (Difusión)

La *difusión* es el proceso físico en el que se introducen partículas materiales en un medio en el que inicialmente estaba ausente.

Por ejemplo, cuando se vierte cierto químico en una solución que se encuentra en un tubo de longitud ℓ , si la concentración varía en una dirección (x), se puede definir $u(x, t)$ como la concentración en unidades de masa por volumen del químico en el instante t , en la sección circular determinada por el punto x . Entonces la masa total del químico entre las secciones x y $x + \Delta x$ (en el instante t) es

$$\int_x^{x+\Delta x} Au(s, t) ds,$$

donde A es el área de una rebanada del tubo.

El químico tiende a difundirse de áreas de alta concentración hacia regiones de baja concentración, por esta razón se asumirá que la difusión es igual en todas las direcciones. En este sentido, la tasa de difusión es proporcional al gradiente de concentración, pues el gradiente

indica la dirección en la que la concentración cambia más rápidamente.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

es decir, existe una constante $b > 0$ tal que la sustancia química se mueve a través de la sección x a una proporción de

$$-b \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

donde u tiene unidades de masa sobre volumen ($\frac{kg}{m^3}$) y el coeficiente de difusión debe tener unidades de área sobre tiempo ($\frac{m^2}{t}$).

Así, la tasa de cambio de la masa total es

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_x^{x+\Delta x} Au(s, t) ds \right] = \int_x^{x+\Delta x} A \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds$$

donde

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} A \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds &= \int_x^{x+\Delta x} Ab \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) ds \\ &= -Ab \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + Ab \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \\ &= \int_x^{x+\Delta x} Ab \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, t) ds \end{aligned}$$

debido a que el flujo en la sección x entra a una tasa de

$$-Ab \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

mientras que en la sección $x + \Delta x$ entra a una tasa de

$$Ab \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t)$$

y el resultado es la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > t_0$$

2.1.2. Ecuación de Convección

A diferencia de la difusión, la *convección* es el movimiento del químico debido al movimiento de la solución, y mientras la solución se encuentre en reposo no habrá convección.

La convección también se puede ver como una forma de transferencia de calor y se caracteriza porque se produce por intermedio de un fluido (aire o agua). Éstos medios, por los que se

transfiere el calor, aumentan de volumen cuando su temperatura aumenta, y por lo tanto su densidad disminuye y ascienden desplazando el fluido que se encuentra en la parte superior y que está a menor temperatura. Lo que se llama convección en si, es el transporte de calor por medio de las corrientes ascendente y descendente del fluido, es decir, las partículas del fluido actúan como "portadoras" del calor.

Sin tener en cuenta la difusión, un químico introducido en una solución en movimiento será arrastrado por el flujo. Este movimiento se caracteriza por la ecuación de transporte unidireccional

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

donde a es la velocidad del soluto y u es la concentración del químico en este [38].

2.1.3. Ecuación de Convección-Difusión

Como consecuencia, la ecuación de convección-difusión unidimensional se expresa con una ecuación diferencial parcial de tipo parabólica. Tal ecuación describe la fenomenología donde las partículas o la energía se transforman dentro de un sistema físico debido a dos procesos: la difusión y la convección. En su forma más simple (cuando el coeficiente de difusión b y la velocidad de convección a son constantes y no hay fuentes) la ecuación se expresa de la siguiente manera

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde, evidentemente, el segundo término de la izquierda representa la convección y el término de la derecha la difusión. Además u es la función incógnita de interés, la constante b es el coeficiente de difusión, y a es la velocidad [58]. Dependiendo del problema físico, la incógnita u puede ser, por ejemplo, la temperatura o concentración de un fluido en movimiento.

Sin embargo, esta ecuación no es un modelo completo de un problema de convección-difusión, pues es necesario conocer los flujos (temperatura o concentración de químico) en los extremos, además de su distribución en un instante inicial. Si los extremos están completamente aislados, el flujo a través de ellos es cero, es decir

$$-b \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 = -b \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t), \quad \text{para todo valor } t.$$

Por otra parte, si la temperatura (o concentración) en dichos extremos es cero, se obtiene

$$u(0, t) = 0 = u(\ell, t) \quad \text{para todo valor } t.$$

Estas condiciones en la frontera pueden ser incluso no homogéneas, y por supuesto es posible tener condiciones mixtas.

Para completar el modelo se debe conocer la distribución inicial de temperatura (o concentración) en el instante inicial t_0 , es decir

$$u(x, t_0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Finalmente, el problema de convección-difusión con una temperatura o concentración nula en los extremos, con condición inicial nula y sin término fuente, describe el IBVP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, t > 0 \quad (2-1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2-2)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2-3)$$

$$u(x, t_0) = g(x), \quad 0 < x < \ell \quad (2-4)$$

En la práctica, este tipo de ecuaciones modelan fenómenos meteorológicos, de dinámica de gases, de flujos turbulentos, transporte de contaminante en medios porosos, simulación del comportamiento de reservas de petróleo, entre otros.

Sin embargo, la solución exacta de los problemas puramente convectivos no lineales desarrollan discontinuidades en un tiempo finito, además presentan estructuras complicadas cerca de tales discontinuidades. Por este motivo es necesario desarrollar métodos numéricos eficientes y precisos como los *métodos de diferencias finitas de alta resolución* y los *métodos de volúmenes finitos* para sistemas hiperbólicos por medio de *flujos numéricos*; y debido a que los métodos DG asumen soluciones aproximadas discontinuas, estos se pueden considerar como la generalización de los métodos de volúmenes finitos, como muestran Cockburn, Karniadakis y Shu en [33].

2.2. Elementos de Espacios Vectoriales y Espacios de Sobolev

En esta sección se presentan los fundamentos teóricos del método de elementos finitos, es decir, la formulación variacional de un problema con valores en la frontera y el método de Galerkin para producir una solución aproximada a la ecuación variacional de un subespacio de dimensión finita dado. La clave del método radica en elegir apropiadamente el subespacio de aproximación.

Para describir este método se darán algunas definiciones teniendo en cuenta que el cuerpo de trabajo será \mathbb{R} , salvo que se diga otra cosa:

Definición 2.1 (Subespacio Vectorial). *Si V es un espacio vectorial y W un subconjunto de V con las siguientes propiedades:*

1. el vector nulo $\mathbf{0}$ está en W .
2. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores en W y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in W.$$

Entonces se dice que W es un subespacio vectorial de V .

Un tipo común de espacio vectorial son los espacios de funciones, es decir, espacios en los que los vectores representan funciones. En este caso es necesario verificar que la adición entre funciones y la multiplicación por escalar verifican la condición de espacio vectorial.

Por ejemplo, para un entero positivo k , el conjunto $\mathcal{C}^k[a, b]$ es el espacio formado por todas las funciones de valor real definidas sobre el intervalo $[a, b]$ que son continuamente diferenciables k veces y dichas derivadas son continuas. Debido a que la suma de funciones continuamente diferenciables es de nuevo continuamente diferenciable y el producto de una función continuamente diferenciable por un escalar es también continuamente diferenciable, entonces $\mathcal{C}^k[a, b]$ es un espacio vectorial.

Definición 2.2. Suponga que V y W son espacios vectoriales, y $\mathbf{f} : V \rightarrow W$ es un operador con dominio V y espacio de llegada W . Entonces \mathbf{f} es lineal si y sólo si

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

teniendo en cuenta lo anterior, se puede verificar que el operador diferencial $D(g) \mapsto g'$ es lineal

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{C}^1[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$$

pues tomando $f, g \in \mathcal{C}^1[a, b]$ y $m, n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (m f(x) + n g(x)) &= \frac{d}{dx} (m f(x)) + \frac{d}{dx} (n g(x)) \\ &= m \frac{d}{dx} f(x) + n \frac{d}{dx} g(x) \\ &= m f'(x) + n g'(x) \end{aligned}$$

En general, la k -ésima derivada, como operador, define un operador lineal del espacio $\mathcal{C}^k[a, b]$ en el espacio $\mathcal{C}[a, b]$.

Definición 2.3. Si V es un espacio vectorial y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una colección de vectores en V . El conjunto generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ denotado por $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} = \{\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Definición 2.4. Los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V son linealmente dependientes si existen constantes c_1, c_2, \dots, c_n no todas iguales a cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

En caso contrario, se dice que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, son linealmente independientes.

Definición 2.5. Los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V forman una base para V si:

1. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ generan a V , y
2. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes.

Según esta definición, si B es una base para un espacio vectorial V , $\text{span}(B) = V$.

Definición 2.6. La dimensión de un espacio vectorial no nulo V es el número de vectores en una base para V . La dimensión de V se denota por $\dim V$

Definición 2.7. Si V es un espacio vectorial real. Un producto interno en V es una función, denotada por $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

1. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
2. $(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ y $(\mathbf{w}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
3. $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \forall \mathbf{u} \in V$, y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si y sólo si \mathbf{u} es el vector nulo.

Dado un espacio con producto interno, se define la ortogonalidad de la siguiente manera

Definición 2.8 (Ortogonalidad). Sea V un espacio vectorial con producto interno (\cdot, \cdot) y \mathbf{u}, \mathbf{v} dos vectores en V que satisfacen $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Entonces \mathbf{u} y \mathbf{v} se denominan ortogonales.

En el caso en que dos vectores sean ortogonales $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, se cumple la igualdad

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2,$$

es decir, satisface el teorema de Pitágoras.

En este sentido, un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ se dice *ortogonal* si

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \forall i \neq j.$$

además, cualquier $\mathbf{x} \in V$ se puede expresar como combinación lineal de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, es decir

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n. \quad (2-5)$$

Para encontrar el valor de un α_i , se toma el producto interno en ambos lados de (2-5) con \mathbf{v}_i :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_i, \mathbf{x}) &= (\mathbf{v}_i, \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1) + \alpha_2(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_2) + \dots + \alpha_n(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i). \end{aligned}$$

Despejando α_i , se obtiene

$$\alpha_i = \frac{(\mathbf{v}_i, \mathbf{x})}{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Finalmente

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{v}_1, \mathbf{x})}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)} \mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{x})}{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{(\mathbf{v}_n, \mathbf{x})}{(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n)} \mathbf{v}_n.$$

Definición 2.9. Sea V un espacio vectorial, una norma sobre V es una función de valor real con dominio V , usualmente denotado por $\|\cdot\|$ o $\|\cdot\|_V$ y que satisface las siguientes propiedades:

1. $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$ y $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$ para todos los escalares α y todos los vectores $\mathbf{v} \in V$.
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

En esta definición, la última propiedad se denomina desigualdad triangular

Definición 2.10 (Forma Bilineal). Dado un espacio vectorial V , una función $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una forma bilineal si a es lineal con respecto a cada uno de sus argumentos. En otras palabras, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$, se tiene

$$a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = a(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + a(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}), \quad (2-6)$$

$$a(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (2-7)$$

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = a(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + a(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2), \quad (2-8)$$

$$a(\mathbf{v}, \alpha\mathbf{w}) = \alpha a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (2-9)$$

Teorema 2.11 (Teorema de proyección). Sea V un espacio con producto interno, W un subespacio de V de dimensión finita, y $\mathbf{v} \in V$. Entonces

1. Existe un único $\mathbf{u} \in W$ tal que

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \min_{\mathbf{w} \in W} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

Es decir, existe un único $\mathbf{u} \in W$ que es la mejor aproximación a \mathbf{v} en W , o \mathbf{u} se conoce como la proyección de \mathbf{v} sobre W , y se escribe

$$\mathbf{u} = \text{proj}_W \mathbf{v}.$$

2. Un vector $\mathbf{u} \in W$ es la mejor aproximación a \mathbf{v} en W si y sólo si

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{z} \in W \quad (2-10)$$

3. Si $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ es una base para W , entonces

$$\text{proj}_W \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i \quad (2-11)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es solución de

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad G_{ij} = (w_j, w_i), \quad b_i = (w_i, v). \quad (2-12)$$

4. Si $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ es una base ortogonal para W , entonces la mejor aproximación a \mathbf{v} en W es

$$\text{proj}_W \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{w}_i, \mathbf{v})}{(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i)} \mathbf{w}_i. \quad (2-13)$$

Si la base es ortonormal, se simplifica a

$$\text{proj}_W \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{w}_i, \mathbf{v}) \mathbf{w}_i. \quad (2-14)$$

En [42] se da la siguiente demostración de este teorema.

Demostración. En primer lugar se demuestra la segunda conclusión. Suponiendo que $\mathbf{u} \in W$, y \mathbf{z} es otro vector en W . Entonces $\mathbf{u} + t\mathbf{z} \in W$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pues W es cerrado para la adición vectorial y multiplicación escalar. Por otra parte, cualquier vector $\mathbf{w} \in W$ se puede escribir como $\mathbf{u} + t\mathbf{z}$ para algún $\mathbf{z} \in W$ y algún $t \in \mathbb{R}$ (tomando $\mathbf{z} = \mathbf{w} - \mathbf{u}$, $t = 1$). Por lo tanto, $\mathbf{u} \in W$ es el más cercano a \mathbf{v} si y sólo si

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v} - (\mathbf{u} + t\mathbf{z})\|, \quad \text{para todo } \mathbf{z} \in W, t \in \mathbb{R}, \quad (2-15)$$

Teniendo en cuenta que $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$, esta desigualdad es equivalente a

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) &\leq (\mathbf{v} - (\mathbf{u} + t\mathbf{z}), \mathbf{v} - (\mathbf{u} + t\mathbf{z})) \\ &= ((\mathbf{v} - \mathbf{u}) - t\mathbf{z}, (\mathbf{v} - \mathbf{u}) - t\mathbf{z}) \\ &= t^2(\mathbf{z}, \mathbf{z}) - 2t(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \end{aligned}$$

es decir

$$t^2(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + 2t(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}) \geq 0, \quad \text{para todo } \mathbf{z} \in W, t \in \mathbb{R}.$$

Si se considera \mathbf{z} fijo, entonces

$$t^2(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + 2t(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z})$$

es una cuadrática simple en t , y la desigualdad es cierta si y sólo si $(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}) = 0$. Resulta que la desigualdad se cumple para todo \mathbf{z} y todo t si y sólo si se satisface (2-10). Además, si $\mathbf{z} \neq 0$, la igualdad en (2-15) se cumple únicamente cuando $t = 0$. Es decir, si $w \in W$ y $w \neq u$, entonces

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$

Por lo tanto, si el problema de la mejor aproximación tiene solución, esta es única.

Si W es un subespacio de dimensión finita, entonces W tiene una base finita $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$. Un vector $\mathbf{u} \in W$ resuelve el problema de la mejor aproximación si y sólo si se cumple (2-10); sin embargo, resulta sencillo probar que (2-10) es equivalente a

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{w}_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2-16)$$

(ver ejercicio 5, capítulo 3, [42]). Cualquier vector $\mathbf{u} \in W$ se puede escribir como

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{w}_j \quad (2-17)$$

así, $\mathbf{u} \in W$ es solución si y sólo si satisface (2-17) y

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{w}_i) = \left(\mathbf{v} - \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

lo que se reduce a

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i) x_j = (\mathbf{w}_i, \mathbf{v}), \quad i = 1, \dots, n \quad (2-18)$$

Si definimos $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ por $G_{ij} = (\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i)$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ por $b_i = (\mathbf{w}_i, \mathbf{v})$, entonces (2-18) es equivalente a

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Se puede verificar que \mathbf{G} es una matriz no singular, así la única mejor aproximación a \mathbf{v} de W está dada por (2-17), donde \mathbf{x} resuelve $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Si ocurre que para el subespacio de dimensión finita W las base $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ es ortogonal entonces $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i) = 0$ para $i \neq j$. En este caso, \mathbf{G} resulta ser una matriz diagonal con entradas diagonales

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1), (\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2), \dots, (\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n),$$

y $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es equivalente a las n ecuaciones simples

$$(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i) x_i = (\mathbf{v}, \mathbf{w}_i), i = 1, 2, \dots, n,$$

es decir

$$x_i = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w}_i)}{(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Esto completa la demostración. □

Cabe notar que el teorema de proyección también se cumple si W es un subespacio de dimensión infinita cerrado de V como se ve en [43].

2.2.1. Métodos de Elementos Finitos

El método de elementos finitos es uno de los métodos mas potentes para aproximar soluciones a una EDP, pues este se puede aplicar a problemas con coeficientes variables, dimensión espacial múltiple y geometrías irregulares.

El método de elementos finitos es el método de Galerkin con los subespacios de dimensión finita conocidos (usualmente de funciones polinomiales). En este sentido, el método sigue tres etapas:

- Escribir la forma variacional (débil) del problema con valores inicial y en la frontera incluyendo implícitamente las condiciones de frontera.
- Aplicar el *método de Galerkin* para “resolver la ecuación sobre un subespacio de dimensión finita”.
- Elegir apropiadamente una base para el espacio de dimensión finita, con objeto que (en lo posible) el sistema de ecuaciones que resulte sea barata y rápida de resolver.

A modo de aplicación, consideramos el problema estacionario (Poisson) con valores en la frontera sobre el intervalo $I = [0, 1]$

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x), \quad 0 < x < 1; \quad (2-19)$$

$$u(0) = \mu; \quad (2-20)$$

$$u(1) = \tau. \quad (2-21)$$

En este caso la incógnita es una función, por lo que el espacio vectorial $L^2(I)$ es el espacio de las funciones cuadrado integrables:

$$L^2(I) = \left\{ f \text{ medible} : \int_0^1 f^2(x) dx < \infty \right\}$$

Con base en lo anterior, $L^2(I)$ es un espacio de Hilbert con respecto al siguiente producto interno

Definición 2.12. *El producto interno natural sobre $\mathcal{C}[a, b]$ es*

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx, \quad \forall f, g \in L^2(I). \quad (2-22)$$

y la norma

$$\|f\|_{L^2(I)} = \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^{1/2} \quad \forall f \in L^2(I). \quad (2-23)$$

Definición 2.13. *El soporte de una función continua f definida sobre \mathbb{R} es la clausura del conjunto de puntos en los que la función no es cero. Si ésta es acotada y está incluida en el interior del dominio I , entonces se dice que f tiene soporte compacto en I . [57]*

El espacio de las funciones \mathcal{C}^∞ que tienen soporte compacto en I , se denotará por $\mathcal{C}_C(I)$.

Se introduce el espacio de Sobolev $H^1(I)$

Definición 2.14. *El espacio de Sobolev $H^1(I)$ (o $W^{1,2}(I)$ en [16]) se define como*

$$H^1(I) = \left\{ v \in L^2(I) : \exists g \in L^2(I) \text{ tal que } \int_I v\phi' = - \int_I g\phi, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_C^1(I) \right\}$$

En la definición anterior, se dice que ϕ es una función test, porque si $\phi \in \mathcal{C}_C^1(I)$, entonces $\rho_n \star \phi \in \mathcal{C}_C^\infty(I)$ para n suficientemente grande y $\rho_n \star \phi \rightarrow \phi$ en \mathcal{C}^1 . Adicionalmente, el espacio $H_0^1((0, 1))$ es el espacio formado “aproximadamente” por las funciones de $H^1((0, 1))$ que son cero en los extremos, es decir

$$H_0^1((0, 1)) = \{ v \in H^1((0, 1)) | v(0) = 0, v(1) = 0 \}$$

Una definición más precisa se puede ver en [16].

Teniendo en cuenta lo anterior, se define la solución fuerte y solución débil de una ecuación diferencial

Definición 2.15. *Una solución clásica (fuerte) del problema (2-19) – (2-21) es una función $u \in \mathcal{C}^2(\overline{(0, 1)})$ que verifica el problema (2-19) – (2-21), en el sentido usual. Una solución débil de (2-19) – (2-21) es una función $u \in H_0^1((0, 1))$ que satisface*

$$\int_I u'(x) v'(x) dx + \int_I u(x) v(x) dx = \int_I f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(I). \quad (2-24)$$

Se dice entonces que toda solución fuerte es solución débil, debido a la fórmula de la integración por partes.

La formulación débil del problema (2-19)–(2-21), consiste en encontrar $u \in V$ tal que

$$\int_0^1 \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx \quad \text{para todo } v \in V. \quad (2-25)$$

Con esto, si una función u satisface (2-19)–(2-21), entonces u también satisface (2-25); y la función arbitraria v se denomina función de prueba o en inglés *test function*. Se puede probar además que las dos formas del problema son equivalentes, es decir, u satisface la forma débil si y sólo si satisface la forma fuerte, bajo ciertas condiciones de regularidad.

Definición 2.16. *Una forma bilineal $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ se dice*

(i) *continua si existe una constante C tal que*

$$|\mathbf{a}(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H$$

(ii) *coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\mathbf{a}(v, v) \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H.$$

A continuación se enuncia el teorema de Lax Milgram, que resulta ser una herramienta simple y eficiente para resolver problemas de valor en la frontera elípticos.

Teorema 2.17 (Lax-Milgram). *Sea H un espacio de Hilbert y $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua coerciva sobre H . Entonces, dado algún $\phi \in H^*$, existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$\mathbf{a}(u, v) = \langle \phi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Por otra parte, si \mathbf{a} es simétrica, entonces u está caracterizada por la propiedad

$$u \in H \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \mathbf{a}(u, u) - \langle \phi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{a}(v, v) - \langle \phi, v \rangle \right\}.$$

Demostración. Una demostración a este teorema se puede apreciar en [16] □

A continuación obtenemos una estimación para el error, por medio del siguiente teorema.

Teorema 2.18 (Lema de Céa). *Sea $V_h \subset H_0^1(I)$ un subespacio de dimensión finita de $H_0^1(I)$. Sean $u \in H_0^1(I)$ y $u_h \in V_h$, soluciones del problema (2-24) (en el sentido débil). Entonces*

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(I)} \leq \|u - v\|_{H_0^1(I)}, \quad \forall v \in V_h$$

Demostración. Se sabe que

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H_0^1(I)} &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(I), \\ \langle u_h, v \rangle_{H_0^1(I)} &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_h, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\langle u - u_h, v \rangle_{H_0^1(I)} = 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (2-26)$$

Tomando $w \in V_h$ arbitrariamente, definimos $v = u_h - w$. Entonces $v \in V_h$ y se tiene que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H_0^1(I)}^2 &= \langle u - u_h, u - u_h \rangle_{H_0^1(I)} \\ &= \langle u - u_h, u - u_h \rangle_{H_0^1(I)} + \langle u - u_h, v \rangle_{H_0^1(I)} \\ &= \langle u - u_h, u - u_h + v \rangle_{H_0^1(I)} \\ &= \langle u - u_h, u - w \rangle_{H_0^1(I)} \\ &= \|u - u_h\|_{H_0^1(I)} \|u - w\|_{H_0^1(I)}. \end{aligned}$$

Ahora dividiendo por $\|u - u_h\|_{H_0^1(I)} \neq 0$ se obtiene

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(I)} \leq \|u - v\|_{H_0^1(I)}, \quad \forall v \in V_h$$

□

El lema de Céa, brinda una condición suficiente para la convergencia del método de elementos finitos

2.2.2. Método DG para un Problema con Valores en la Frontera

Una forma simple de llevar un problema a su forma débil es escribir la ecuación diferencial (2-19)

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

multiplicar la ecuación por una función de prueba $v \in V$, obteniendo

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x)v(x) = f(x)v(x), \quad 0 < x < 1$$

Luego se integra a ambos lados entre 0 y 1:

$$\int_0^1 -\frac{d^2u}{dx^2}(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Integrando por partes el término de la izquierda,

$$-v(x)\frac{du}{dx}(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Finalmente al aplicar las condiciones de frontera (2-20) $v(0) = \mu$ y (2-21) $v(1) = \tau$, obteniendo la formulación débil

$$-\tau\frac{du}{dx}(1) + \mu\frac{du}{dx}(0) + \int_0^1 \frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

Esta formulación consiste de infinitas ecuaciones, cuando hay infinitas funciones de prueba $v \in V$.

La forma débil del problema permite aplicar el método de Galerkin, el cual reduce las infinitas ecuaciones a una colección finita de ecuaciones, cuya solución provee una solución aproximada del problema con valores en la frontera

El método de elementos finitos usa subespacios de polinomios continuos a trozos, la forma más simple utiliza funciones polinomiales lineales continuas a trozos.

Como se mencionó anteriormente, el método de Galerkin define una solución aproximada a un problema con valores en la frontera, restringiendo el problema a un subespacio de dimensión finita. Tomando el caso más fácil en el que $\tau = \mu = 0$ y se define una *forma bilineal* $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ como

$$\mathbf{a}(u, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x) dx;$$

Se obtiene una forma bilineal (debido a que es lineal con respecto a cada uno de sus argumentos) y simétrica, pues

$$\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{a}(v, u) \quad \text{para todo } u \in V.$$

Además, si la función se restringe a los vectores en $V = \mathcal{C}^2[0, 1]$, se obtiene

$$\mathbf{a}(u, u) \geq 0 \quad \text{para todo } u \in V$$

y

$$\mathbf{a}(u, u) > 0 \quad \text{para todo } u \in V, u \neq 0$$

Además de esto, por la definición se tiene

$$\mathbf{a}(u, u) = \int_0^1 (u_x(x))^2 dx$$

y como el integrando es no negativo, la integral de una función no negativa es cero únicamente cuando dicha función es cero; es decir

$$\left(\frac{du}{dx}(x) \right)^2 = 0, \quad 0 < x < 1$$

esto implica que

$$\frac{du}{dx}(x) = 0, \quad 0 < x < 1$$

así,

$$u(x) = C, \quad 0 < x < 1$$

donde C es una constante. Pero como $u(0) = 0$ y u es continua en $[0, 1]$ entonces $C = 0$, justo como se quería. Por lo tanto $a(\cdot, \cdot)$ define un producto interno en V .

Teniendo en cuenta lo anterior y el producto interno dado en (2-23), la formulación variacional de un problema con valores en la frontera se puede escribir como

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = (f, v) \text{ para todo } v \in V \quad (2-27)$$

El método de Galerkin consiste en elegir un subespacio de dimensión finita V_n de V ($\dim(V_n) = n$) y reducir la formulación variacional (2-28) a este subespacio, es decir

$$\text{Encontrar } u_n \in V_n \text{ tal que } a(u_n, v) = (f, v) \text{ para todo } v \in V_n. \quad (2-28)$$

En esta reducción, u_n puede ser discontinua en algunos puntos, entonces se utiliza la expresión \widehat{u}_n para relacionar los distintos valores de u_n en aquellos puntos que presenta discontinuidad. la expresión \widehat{u}_n se denomina *flujo numérico* o *traza numérica*. El método se completa cuando se define apropiadamente la cantidad \widehat{u}_n .

A continuación se aplicará un método de Galerkin discontinuo al problema (2-19)–(2-21), es decir, se desea encontrar una solución aproximada u_h (la mejor aproximación u_h) a la solución (débil) u de tal manera que u satisfaga las ecuaciones (2-19) - (2-21) y la formulación débil asociada al problema (2-19) que se obtiene al restringir el problema a un subespacio de

dimensión finita. Este método es discontinuo debido a que no se exigirá que haya continuidad entre los elementos.

El desarrollo de los métodos de Galerkin a los problemas elípticos, empezó con la idea de Nitsche [52] de incluir las condiciones de frontera débilmente, en lugar de imponerlas de forma explícita en el espacio de elementos finitos. Estas condiciones se imponen a través de términos de penalización en los lados de frontera en la formulación variacional.

Implementación

Consideremos $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ una partición ε_h ¹ del intervalo $[0, 1]$, denotamos por $I_n = (x_n, x_{n+1})$ el intervalo n -ésimo, y definimos lo siguiente

$$\begin{aligned} h_n &= x_{n+1} - x_n \\ h_{n-1,n} &= \max\{h_{n-1}, h_n\} \\ h &= \max_{0 \leq n \leq N-1} h_n \end{aligned}$$

Denotaremos ahora por $\mathcal{P}_k(\varepsilon_h)$ el espacio de polinomios discontinuos a trozos de grado k , esto es

$$\mathcal{P}_k(\varepsilon_h) := \{v : v|_{I_n} \in \mathbb{P}_k(I_n) \quad \forall n = 0, \dots, N-1\}$$

donde $\mathbb{P}_k(I_n)$ es el espacio de polinomios de grado k sobre el intervalo I_n . Escribiremos, de aquí en adelante,

$$\begin{aligned} v(x_n^+) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v(x_n + \epsilon) \\ v(x_n^-) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v(x_n - \epsilon) \end{aligned}$$

La discontinuidad entre los elementos produce un salto en un punto x_n , este lo definimos como

$$[v(x_n)] = v(x_n^-) - v(x_n^+) \quad \forall n = 1, \dots, N-1. \quad (2-29)$$

y la media (o promedio) entre los valores límites de v en el punto x_n como

$$\{v(x_n)\} = \frac{1}{2} (v(x_n^-) + v(x_n^+)) \quad \forall n = 1, \dots, N-1; \quad (2-30)$$

La media y el promedio se denominan usualmente *operadores de traza* (trace operators). Extendiendo la definición a los puntos de frontera se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [v(x_0)] &= -v(x_0^+) \\ [v(x_N)] &= v(x_N^-) \\ \{v(x_0)\} &= v(x_0^+) \\ \{v(x_N)\} &= v(x_N^-) \end{aligned}$$

¹ h indica está relacionado con el tamaño de la partición

Tomamos $v \in \mathcal{P}_k(\varepsilon_h)$ y multiplicamos la ecuación (2-19) por v , así, para todo $x \in (0, 1)$

$$-v u'' = v \cdot f$$

luego integramos sobre cada intervalo I_n y tenemos

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (-v(x)u''(x))dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \cdot f(x) dx \\ - \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)u''(x)dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

aplicando integración por partes en el segundo término de la izquierda, queda

$$- \left(\frac{du}{dx}(x)v(x) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x)dx \right) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \cdot f(x) dx.$$

Reescribiendo esta ecuación tenemos

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x)dx - \frac{\widehat{du}}{dx}(x_{n+1}) v(x_{n+1}^-) + \frac{\widehat{du}}{dx}(x_n) v(x_n^+) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \cdot f(x) dx.$$

donde $\frac{\widehat{du}}{dx}$ (flujo numérico) es una aproximación de $\frac{du}{dx}$ sobre los extremos de I_n .

Sumando las N ecuaciones,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x)dx \right) - \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\widehat{du}}{dx}(x_n) v(x_n) \right] = \int_0^1 v(x) \cdot f(x) dx \quad (2-31)$$

en el sentido de (2-29). Además, para $1 \leq n \leq N-1$ se cumple la igualdad

$$\left[\frac{\widehat{du}}{dx}(x_n) v(x_n) \right] = \left\{ \frac{\widehat{du}}{dx}(x_n) \right\} [v(x_n)] + \{v(x_n)\} \left[\frac{\widehat{du}}{dx}(x_n) \right]$$

De la misma manera que ocurre en la mayoría de los métodos de elementos finitos, el método es consistente si se puede reemplazar la solución aproximada u_h por la solución exacta u en la formulación débil. Se puede verificar que esto ocurre si y sólo si $\widehat{u} = u$, en este caso $\widehat{u}' = u'$, de manera que la solución u satisface

$$\left[\frac{\widehat{du}}{dx}(x_n) \right] = 0 \quad \text{para todo } 1 \leq n \leq N-1.$$

Con esto, la ecuación (2-31) se expresa como

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x)dx \right) - \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{\widehat{du}}{dx}(x_n) \right\} [v(x_n)] = \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \cdot f(x) dx \quad (2-32)$$

Teniendo en cuenta que la solución exacta u también es continua, es decir $[u(x)] = 0$; si u es solución de (2-19) - (2-21), entonces u satisface

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \widehat{\frac{du}{dx}}(x_n) \right\} [v(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^N \{v'(x_n)\} [u(x_n)] \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \cdot f(x) dx - \epsilon v'(x_0) u(x_0) + \epsilon v'(x_N) u(x_N) \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \cdot f(x) dx - \epsilon \mu(x_0) v'(x_0) + \epsilon \tau(x_N) v'(x_N) \end{aligned} \quad (2-33)$$

debido a que u es continua y satisface las condiciones de frontera (2-20) y (2-21). ϵ puede ser cualquier número real, sin embargo se tomará $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$. Esto se hace para incluir explícitamente los valores en la frontera del problema (2-20)- (2-21)

Se define entonces la forma bilineal DG $\mathbf{b}_\epsilon : \mathcal{P}_k(\varepsilon_h) \times \mathcal{P}_k(\varepsilon_h) \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$\mathbf{b}_\epsilon(w, v) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dw}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \widehat{\frac{dw}{dx}}(x_n) \right\} [v(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^N \{v'(x_n)\} [w(x_n)] \quad (2-34)$$

Cuando el problema es elíptico, las condiciones

$$\mathbf{a}(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \text{para todo } v \in V \text{ y } \alpha > 0 \quad (\text{Coercividad}) \quad (2-35)$$

$$\mathbf{a}(w, v) \leq \beta \|w\| \|v\| \quad \text{para todo } v, w \in V \text{ y } \beta > 0 \quad (\text{Continuidad}) \quad (2-36)$$

se cumplen, y la forma bilineal $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ define otro producto interno alterno sobre V . Este se denomina producto interno de la energía.

Ahora, introducimos el término salto de la solución, también llamado *término de penalización* o *penalización interior*:

$$J(v, w) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_2 \beta_2 [v(x_n)][w(x_n)].$$

donde el producto $\varepsilon_2 \beta_2$ es un número real no negativo, de hecho en [57] $\beta_2 = 1/h$, y como muestra Rivière allí, la elección de los parámetros $\varepsilon_2 \beta_2$ dan lugar a muchas variaciones del método DG que han surgido a lo largo del tiempo en la literatura. A continuación se mostrarán algunas definiciones de la forma bilineal.

Por la definición de \mathbf{b}_ϵ dada en (2-34), se tienen las siguientes propiedades

- Si $\epsilon = -1$, la forma es simétrica, es decir

$$\mathbf{b}_{-1}(v, w) = \mathbf{b}_{-1}(w, v)$$

además

$$\mathbf{b}_{-1}(v, v) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{dv}{dx}(x) \right)^2 dx \right) - 2 \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{dv}{dx}(x_n) \right\} [v(x_n)] + J_0(v, v)$$

- Si $\epsilon = 1$ la forma es no simétrica y se tiene

$$\mathbf{b}_{+1}(v, v) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{dv}{dx}(x) \right)^2 dx \right) + J_0(v, v) \geq 0$$

Como se muestra en [19], la forma bilineal no simétrica, no resulta ser más eficiente que la forma bilineal simétrica. De hecho, si $\epsilon = -1$ y $\epsilon_2 \beta_2$ está acotado inferiormente por una constante suficientemente grande, el método se denomina *método de Galerkin con penalización interior simétrica* o (SIPG) por sus siglas en inglés, fué introducido por [4] y [61] en la década del 70. Por otra parte, si $\epsilon = -1$ y $\epsilon_2 = 0$ el método se denomina *método del elemento global* introducido por Delves y Hall [36]. Sin embargo, la matriz asociada con la forma bilineal es indefinida y como la parte real de los valores propios no son todos positivos el método no resulta estable.

Un método DG para resolver el problema (2-19)-(2-21) es: Encontrar $u_h \in \mathcal{P}_k(\epsilon_h)$ tal que

$$\forall v \in \mathcal{P}_k(\epsilon_h), \quad \mathbf{b}_\epsilon(u_h, v) = L(v) \quad (2-37)$$

donde $L : \mathcal{P}_k(\epsilon_h) \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma lineal

$$L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx - \epsilon v'(x_0) \mu + \epsilon v'(x_N) \tau$$

En esta parte presentamos la discretización espacial, al aplicar el método DG considerando el subespacio de aproximación $\mathcal{P}_1(\epsilon_h)$, por lo que la base local es

$$\mathbb{P}_1(I_n) = \text{span}\{\phi_1^n, \phi_2^n\},$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1^n &= \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} \quad \text{si } x \in I_n \\ \phi_2^n &= \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} \quad \text{si } x \in I_n \end{aligned}$$

Para obtener la base global, se expande de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \phi_1^n(x) &= \begin{cases} \frac{1}{h_n}(x - x_n) & \text{si } x \in I_n \\ 0 & \text{si } x \notin I_n \end{cases} \\ \phi_2^n(x) &= \begin{cases} \frac{1}{h_n}(x_{n+1} - x) & \text{si } x \in I_n \\ 0 & \text{si } x \notin I_n \end{cases} \end{aligned}$$

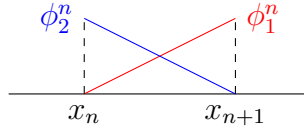


Figura 2-1: Base para el intervalo I_n

Esto indica que ϕ_i^n no es cero en el intervalo I_n .

$u_h(x)$ es de la forma

$$u_h(x) = \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n(x) \quad (2-38)$$

donde

$$u_h^n(x) = \alpha_1^n \phi_1^n(x) + \alpha_2^n \phi_2^n(x)$$

y cada α_i^m es una constante. Teniendo en cuenta que $u_h \approx u$, la ecuación (2-33) se expresa como

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du_h}{dx}(x) \frac{dv_h}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \widehat{\frac{du_h}{dx}}(x_n) \right\} [v_h(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^N \{v_h'(x_n)\} [u_h(x_n)] \\ = \int_0^1 v_h(x) \cdot f(x) dx - \epsilon \mu v_h'(x_0) + \epsilon \tau v_h'(x_N) \end{aligned} \quad (2-39)$$

Flujos numéricos

El método establece una relación entre los valores de $\frac{du}{dx}$ en intervalos diferentes sólo a través de $\widehat{\frac{du}{dx}}$. La elección del flujo numérico es crucial en la definición del método DG, pues de ello depende su consistencia, estabilidad y precisión, así como la simetría y la “esparcidad” de la matriz de rigidez. [7] y [34].

En [19], Bustinza comenta que los flujos numéricos garantiza la estabilidad del método y la calidad de la aproximación al incluir en su definición los términos definidos para el salto.

En [7], se muestra como se pueden elegir los flujos numéricos, además las propiedades de consistencia y conservación de los flujos se reflejan en la consistencia de la formulación primal. Allí también se muestra que los flujos numéricos son consistentes.

Como ejemplo, Bassi y Rebay en [13] definen de manera natural un flujo numérico como

$$\widehat{u} = \{u_h\} \text{ en } x_i \text{ con } 1 \leq n \leq N-1, \quad \widehat{u} = 0 \text{ en } x_1 \text{ y } x_N$$

Para el caso 1 dimensional.

Es necesario entonces expresar el flujo numérico en términos de u_h y su derivada. Con esto el flujo numérico se puede definir de la siguiente manera

$$\widehat{\frac{du}{dx}}(x_m) = \begin{cases} \left\{ \frac{du_h}{dx}(x_m) \right\} - \varepsilon_2 \beta_2 [u_h(x_m)] & \text{si } 1 \leq m \leq N-1 \\ \left\{ \frac{du_h}{dx}(x_m) \right\} - \varepsilon_2 \beta_2 [u_h(x_m) - u(x_m)] & \text{si } m \in \{0, N\} \end{cases} \quad (2-40)$$

tomando $\varepsilon_2 \in \{-1, +1\}$ y $\beta_2 \in \mathbb{R}$. La anterior definición tiene en cuenta las condiciones de frontera (2-20) y (2-21) y el producto $\varepsilon_2 \beta_2$ “penaliza” el salto de la solución aproximada u_h en todos los puntos definidos por la partición.

Ahora, tomando $v_h = \phi_i^n$, la formulación (2-39) es

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du_h}{dx} \frac{d}{dx} (\phi_i^n) dx \right) - \sum_{n=0}^N \widehat{\frac{du}{dx}}(x_n) [\phi_i^n(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^N \left\{ (\phi_i^n)'(x_n) \right\} [u_h(x_n)] \\ = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_i^n(x) \cdot f(x) dx - \epsilon \mu (\phi_i^n)'(x_0) + \epsilon \tau (\phi_i^n)'(x_N) \end{aligned} \quad (2-41)$$

la integral sobre el intervalo

Reemplazando la función u_h definida en (2-38) en la formulación DG (2-33), obtenemos un sistema lineal, en el que los coeficientes α_j^m son números reales desconocidos y forman un vector columna α de la forma

$$\alpha = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_1^{N-1}, \alpha_2^{N-1})^T \quad (2-42)$$

Antes de formar el sistema lineal, debemos construir la matriz global (o matriz de rigidez) asociada a dicho sistema. Para ello, reagrupamos de la siguiente manera

- Los términos que involucran integrales.
- Los términos que involucran nodos

Términos que involucran integrales

Los siguientes términos involucran integrales sobre todos los subintervalos, de la siguiente manera

$$\int_{I_n} \frac{d}{dx} u_h(x) \frac{d}{dx} \phi_i^n(x) dx \quad \forall i = 1, 2 \quad (2-43)$$

Por definición de u_h , (2-43) toma la siguiente forma

$$\sum_{j=1}^2 (\alpha_j^n) \int_{I_n} \frac{d\phi_j^n}{dx}(x) \frac{d\phi_i^n}{dx}(x) dx \quad \forall i = 1, 2$$

al final, como resultado, nos permite escribir un sistema lineal con vector local

$$\alpha^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \end{pmatrix},$$

y con matriz local

$$(K_n)_{ij} = \int_{I_n} (\phi_j^n)'(x) (\phi_i^n)'(x)$$

es decir

$$K_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{h_n} & \frac{1}{h_n} \\ -1 & 1 \\ \frac{1}{h_n} & \frac{1}{h_n} \end{bmatrix}.$$

Términos que involucran nodos

Estos términos resultan de evaluar el flujo numérico, los promedios y saltos en los nodos, entonces para los nodos interiores $1 \leq n \leq N - 1$ podemos escribir

$$-\widehat{\frac{du}{dx}}(x_n) [\phi_i^n(x_n)] + \epsilon \{(\phi_i^n)'(x_n)\} [u_h(x_n)] = b_n + c_n + d_n + e_n \quad (2-44)$$

donde los términos b_n, c_n, d_n, e_n toman los siguientes valores,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{du_h}{dx}(x_n^+) \right) (\phi_i^n(x_n^+)) + \varepsilon_2 \beta_2 u_h(x_n^+) \phi_i^n(x_n^+) - \frac{\epsilon}{2} u_h(x_n^+) (\phi_i^n)'(x_n^+) \\ c_n &= -\frac{1}{2} \left(\frac{du_h}{dx}(x_n^-) \right) (\phi_i^n(x_n^-)) + \varepsilon_2 \beta_2 u_h(x_n^-) \phi_i^n(x_n^-) + \frac{\epsilon}{2} u_h(x_n^-) (\phi_i^n)'(x_n^-) \\ d_n &= -\frac{1}{2} \left(\frac{du_h}{dx}(x_n^+) \right) (\phi_i^n(x_n^-)) - \varepsilon_2 \beta_2 u_h(x_n^+) \phi_i^n(x_n^-) - \frac{\epsilon}{2} u_h(x_n^+) (\phi_i^n)'(x_n^-) \\ e_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{du_h}{dx}(x_n^-) \right) (\phi_i^n(x_n^+)) - \varepsilon_2 \beta_2 u_h(x_n^-) \phi_i^n(x_n^+) + \frac{\epsilon}{2} u_h(x_n^-) (\phi_i^n)'(x_n^+) \end{aligned}$$

Al expandir u_h , los términos definidos anteriormente producirán matrices locales B_n, C_n, D_n, E_n , respectivamente. Por ejemplo

$$(B_n)_{ij} = \frac{1}{2} (\phi_j^n)'(x_n^+) (\phi_i^n(x_n^+)) + \varepsilon_2 \beta_2 \phi_j^n(x_n^+) \phi_i^n(x_n^+) - \frac{\epsilon}{2} \phi_j^n(x_n^+) (\phi_i^n)'(x_n^+)$$

Entonces B_n corresponde a las interacciones de las funciones de la base local del intervalo I_n , asimismo C_n corresponde a las interacciones de las funciones de la base local del intervalo I_{n-1} , mientras que las matrices D_n y E_n se encargan de acoplar los intervalos I_n e I_{n-1} . Las matrices son:

$$B_n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\epsilon}{2h_n} \\ \frac{1}{2h_n} & \frac{-1}{2h_n} + \varepsilon_2 \beta_2 + \frac{\epsilon}{2h_n} \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2h_{n-1}} + \varepsilon_2 \beta_2 + \frac{\epsilon}{2h_{n-1}} & \frac{1}{2h_{n-1}} \\ \frac{-\epsilon}{2h_{n-1}} & 0 \end{bmatrix},$$

Ahora, la forma lineal produce un vector dado por

$$L(v) = \int_0^1 f(x) \cdot v(x) dx - \epsilon \mu (v)'(x_0) + \epsilon \tau (v)'(x_N) + \varepsilon_2 \beta_2 (u(x_0)v(x_0) + u(x_{N-1})v(x_{N-1})),$$

tomando $v(x) = \phi_i^n(x)$, tenemos

$$L(\phi_i^n) = \int_0^1 f(x) \cdot \phi_i^n(x) dx - \epsilon \mu (\phi_i^n)'(x_0) + \epsilon \tau (\phi_i^n)'(x_N) + \varepsilon_2 \beta_2 (u(x_0)\phi_i^0(x_0) + u(x_N)\phi_i^{N-1}(x_N))$$

y gracias al soporte local de las ϕ_i^n , el operador L es

$$L(\phi_i^n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) \cdot \phi_i^n(x) dx \quad \text{si } 1 \leq n \leq N-2,$$

mientras que los demás son

$$L(\phi_i^0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \cdot \phi_i^0(x) dx - \epsilon \mu (\phi_i^0)'(x_0) + \epsilon \tau (\phi_i^0)'(x_N) + \varepsilon_2 \beta_2 (u(x_0)\phi_i^0(x_0))$$

y

$$L(\phi_i^n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) \cdot \phi_i^n(x) dx - \epsilon \mu (\phi_i^n)'(x_0) + \epsilon \tau (\phi_i^n)'(x_N) + \varepsilon_2 \beta_2 (u(x_N)\phi_i^{N-1}(x_N))$$

si $n = N$.

Para calcular las integrales, en general se utiliza un método de cuadratura, en este caso utilizamos la cuadratura de Simpson [18].

Esto produce un vector b en el que sus componentes deben seguir el mismo orden de las variables α_i^n , esto es

$$b = (b_1^0, b_2^0, b_1^1, b_2^1, \dots, b_1^{N-1}, b_2^{N-1})^T.$$

donde cada $b_i^n = L(\phi_i^n)$. Con esto, tenemos el sistema lineal

$$S\alpha = b$$

entonces, cada α_j^n se puede calcular, resolviendo el sistema lineal.

2.2.3. Existencia y unicidad de la solución DG

Cuando el problema es de dimensión finita, se puede verificar que la existencia de la solución implica la unicidad [57]. Suponiendo que w_1 y w_2 son soluciones de (2-37), haciendo $\psi = w_1 - w_2$, se tiene

$$\forall v \in \mathcal{P}_1(\varepsilon_h) \quad \mathbf{b}_\varepsilon(\psi, v) = \mathbf{b}_\varepsilon(w_1 - w_2, v) = \mathbf{b}_\varepsilon(w_1, v) - \mathbf{b}_\varepsilon(w_2, v) = L(v) - L(v) = 0$$

esto indica que $w_1 = w_2$.

La ecuación variacional (2-25) da el valor de $\mathbf{a}(u, v)$ para todo $v \in V$ (aún cuando se desconoce u):

Siguiendo el esquema anterior, la mejor aproximación a u en la norma de la energía, se obtiene al resolver el sistema $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, donde

$$K_{ij} = \mathbf{a}(w_j, w_i), \quad f_i = \mathbf{a}(u, w_i) = \ell(w_i), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

La formulación débil análoga para el subespacio W consiste en encontrar w

$$w \in W, \quad \mathbf{a}(w, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in W \quad (2-45)$$

la ecuación anterior es la forma en la que usualmente se presenta el método de Galerkin.

Considerando la ecuación (2-45), se puede probar directamente que la solución aproximada w existe en el subespacio W . por esta razón, como $W \subset V$, se cumple

$$\mathbf{a}(u, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in W \quad (2-46)$$

Además

$$\mathbf{a}(w, v) = \ell(v) \quad \text{para todo } v \in W \quad (2-47)$$

y restando las ecuaciones (2-46) y (2-47)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(u, v) - \mathbf{a}(w, v) &= \ell(v) - \ell(v) = 0 \quad \forall v \in W \\ \mathbf{a}(u - w, v) &= 0 \quad \forall v \in W \end{aligned}$$

donde la última ecuación es la condición de ortogonalidad que es suficiente y necesaria para que w sea la mejor aproximación del subespacio W a la solución real u (en la norma de la energía). Después de esto es necesario construir una sucesión de espacios W_h de dimensión finita en los que su dimensión aumenta cuando $h \rightarrow 0$, además en cada W_h es posible encontrar w_h , tal que $\mathbf{a}(u - w_h, v) = 0$, entonces w_h converge a u cuando $h \rightarrow 0$. Lo anterior se verifica en el siguiente teorema [21].

Teorema 2.19 (Galerkin - Ritz). *Sea $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$ una sucesión de espacios cerrados en un espacio de Hilbert H con unión densa. Sea $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, continua y coerciva, y sea $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua. Consideremos el problema de minimización del funcional*

$$J(v) := \frac{1}{2} \mathbf{a}(v, v) - f(v)$$

sobre el subespacio H_n y sea $u_n \in H_n$ su solución, es decir

$$\mathbf{a}(u_n, v) = f(v) \quad \forall v \in H_n.$$

Entonces la sucesión (u_n) converge hacia la solución u del problema de minimización de J en todo H .

Por el teorema anterior, método de Galerkin lleva a una solución aproximada w que satisface

$$w \in W, \|u - w\|_E = \min_{v \in W} \|u - v\|_E$$

donde u es la solución real a (2-25). En [62] se muestra la existencia y la unicidad de la solución de un problema de convección-difusión.

Si $v \in W$ entonces $v - w \in W$ pues W es subespacio de V . y como w es la mejor aproximación a u de W en el producto interno (de la energía), se satisface la condición de ortogonalidad

$$\mathbf{a}(u - w, u - w) = 0 \quad \text{para todo } v \in W$$

Por esta razón, para cualquier $v \in W$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(u - w, u - w) &= \mathbf{a}(u - w, u - v + v - w) \\ &= \mathbf{a}(u - w, u - v) + \mathbf{a}(u - w, v - w) \\ &= \mathbf{a}(u - w, u - v) \end{aligned}$$

y por las propiedades (2-35) y (2-36), para cualquier $v \in W$

$$\begin{aligned} \alpha \|u - w\|^2 &\leq \mathbf{a}(u - w, u - w) \\ \|u - w\| &\leq \alpha^{-1} \mathbf{a}(u - w, u - w) \\ &= \alpha^{-1} \mathbf{a}(u - w, u - v) \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha} \|u - w\| \|u - v\| \end{aligned}$$

es decir

$$\|u - w\| \leq \frac{\beta}{\alpha} \|u - v\| \quad \text{para todo } v \in W,$$

este es el llamado *teorema de Céa*.

Si bien, $\|u - w\|$ no necesita ser tan pequeño como sea posible, tampoco puede ser mayor que el más pequeño de los $\|u - v\|$ con $v \in W$. Este hecho es clave para el método de elementos finitos basados en una familia de subespacios de aproximación W_h . La formulación variacional del BVP se puede visualizar como la condición para el problema de optimización de reducir al mínimo la energía potencial del sistema físico que se está modelando como se hace en [43].

Originalmente, el método de Galerkin se utilizó para producir soluciones aproximadas de subespacios de menor dimensión elegidos inteligentemente.

2.2.4. Convergencia de DG

Ahora se abordarán aspectos sobre la elección de los parámetros de penalización, la definición del flujo numérico y la convergencia del método implementado.

Método de Penalización Interior

El método de Nitsche se extendió como un medio de forzar la continuidad entre elementos que comparten un mismo lado de la malla (un punto en dimensión 1), permitiendo el uso de un espacio de elementos finitos más natural, el espacio de polinomios discontinuos por elemento (a trozos). Este tipo de métodos es llamado *método de Penalización Interior*.

Posteriormente, surgieron variantes de los métodos de penalización interior (Interior Penalty methods (IP)), como la idea de Douglas y Dupont en [46] para problemas elípticos de segundo orden, y lo analizado por Arnold [4, 5] para problemas parabólicos lineales y no lineales.

Como se muestra en [19], al tratar de resolver un problema de convección-difusión el operador asociado resultaba ser no simétrico, esto motivó el desarrollo de una técnica diferente usando una forma bilineal no simétrica, aunque esta técnica no resulta ser más eficiente que un método DG con una forma bilineal simétrica. en [56] Rivière, Wheeler y Girault obtuvieron estimaciones de error óptimos para una clase de métodos DG, llamados NIPG (non-symmetric interior penalty Galerkin).

Implementación

Es posible verificar que si la solución exacta es suficientemente suave, el error numérico decrece cuando se incrementa el número de intervalos. Para calcular tal error utilizaremos una norma para el espacio de funciones.

Definición 2.20. *Dado un espacio vectorial V , la función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada norma si para todo $v, w \in V$ y $t \in \mathbb{R}$, se cumple*

- (i) $\|v\| \geq 0$.
- (ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
- (iii) $\|tv\| = |t|\|v\|$.
- (iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

La función anterior se denomina seminorma si cumple únicamente (i), (iii), (iv).

La norma para el espacio de funciones L^2 , se define como

$$\|e_h\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 (e_h(x))^2 dx \right)^{1/2} \quad (2-48)$$

y la seminorma (norma de la energía), definida como

$$\|e_h\|_\varepsilon = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (e'_h(x))^2 dx + J_0(e_h, e_h) \right)^{1/2} \quad (2-49)$$

donde $e_h(x) = u(x) - u_h(x)$.

Para ambas normas, el orden de aproximación se obtiene aplicando la siguiente fórmula

$$r = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{\|e_h\|}{\|e_{h/2}\|} \right) \quad (2-50)$$

2.3. Ejemplo Numérico

Consideremos el siguiente problema

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = -e^{x-1}; \quad (2-51)$$

$$u(0) = e^{-1} \quad (2-52)$$

$$u(1) = 1 \quad (2-53)$$

se sabe que la solución exacta es $u(x) = e^{x-1}$. Tomando $\beta_2 = 1/h$, se tienen las siguientes aproximaciones

	$\epsilon = 1, \varepsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \varepsilon_2 = 2$	
h	$\ e_h\ _{L^2}$	r_{L^2}	$\ e_h\ _{L^2}$	r_{L^2}
1/4	0.0131		0.0083	
1/8	0.0033	1.99	0.0016	2.33
1/16	0.0008	1.99	0.0003	2.28
1/32	0.0002	1.99	7.30×10^{-5}	2.21
1/64	5.17×10^{-5}	1.99	1.65×10^{-5}	2.14
1/128	1.29×10^{-5}	1.99	3.91×10^{-6}	2.08
1/256	3.23×10^{-6}	2	9.47×10^{-7}	2.04
1/512	8.08×10^{-7}	2	2.32×10^{-7}	2.02

Tabla 2-1: Error numérico y tasas de convergencia para el problema (2-51) - (2-53) con $\|e_h\|_{L^2}$

h	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
	$\ e_h\ _\epsilon$	r_ϵ	$\ e_h\ _\epsilon$	r_ϵ
1/4	0.0654		0.1450	
1/8	0.0288	1.18	0.0558	1.37
1/16	0.0132	1.12	0.0217	1.35
1/32	0.0062	1.07	0.0088	1.30
1/64	0.0030	1.04	0.0037	1.22
1/128	0.0015	1.02	0.0016	1.15
1/256	0.0007	1.01	0.0007	1.09
1/512	0.0003	1.00	0.0003	1.04

Tabla 2-2: Error numérico y tasas de convergencia para el problema (2-51) - (2-53) con $\|e_h\|_\epsilon$

2.4. Conclusiones

El método DG presenta los resultados esperados para problemas elípticos unidimensionales, al mantener una aproximación de segundo orden para la norma L^2 y un primer orden para la misma cuando se aplica la norma de la energía. Adicionalmente, no se encuentra evidencia que la elección del parámetro $\epsilon = -1$ sea más eficiente que la elección $\epsilon = 1$.

La estabilización del método utilizando los términos de penalización es muy importante, pues sin ellos se pierde el orden de convergencia, adicionalmente la inclusión de tales términos no presenta inconvenientes.

Es necesario tener cuidado en el cálculo de los términos para el ensamble de las matrices locales, así como la forma apropiada de construir la matriz global; Asimismo, la cuadratura empleada debe arrojar resultados bastante precisos, pues de ello dependen los resultados de la aproximación.

3 Implementación de un método DG para resolver la ecuación de convección-difusión

En este capítulo se implementa, en primera instancia, un método DG para resolver un problema del calor uno-dimensional; posteriormente se aplicará el método para resolver un problema de convección-difusión. En ambos casos, esta ecuación diferencial parcial resulta ser de tipo parabólica y el problema presenta valores iniciales y de frontera (IBVP). Debido a que este problema involucra dos variables: tiempo t y espacio x , se aplicará el método DG sobre el dominio espacial, esta discretización produce un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que dependen del tiempo. Esta formulación se denomina *formulación semidiscreta* o *formulación continua en tiempo*. Luego para resolver el sistema EDO resultante, se utilizará un método de diferencias finitas implícito.

3.1. DG para resolver la ecuación del calor

El siguiente problema modela de manera general la distribución de temperatura $u(x, t)$ en una barra delgada:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad 0 < x < 1, t > 0; \quad (3-1)$$

$$\gamma u(0, t) + \eta \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \psi(t) \quad t > 0; \quad (3-2)$$

$$\mu u(1, t) + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \chi(t) \quad t > 0; \quad (3-3)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 1. \quad (3-4)$$

Cuando $\eta = \lambda = 0$, $\gamma = \mu = 1$ las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet, mientras que si $\eta = \mu = 0$, $\gamma = \lambda = 1$ ó $\gamma = \lambda = 0$, $\eta = \mu = 1$ el problema tiene condiciones mixtas (Dirichlet-Neumann); en ambos casos, si existe solución para el problema, ésta es única. Una solución fuerte u pertenece a $\mathcal{C}^2(\Omega \times [0, T])$, donde $\Omega = [0, 1]$ y además u satisface las ecuaciones (3-1) - (3-4).

Como se había dicho anteriormente, se aplicará el método DG en el dominio espacial $[0, 1]$, esto indica que las funciones de prueba dependen únicamente de la variable espacial.

3.1.1. Discretización

Sea $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ una partición ε_h del intervalo $[0, 1]$, I_n , h_n , $h_{n-1,n}$, h tienen el mismo sentido que en el capítulo anterior

Tomando, de nuevo, $v \in \mathcal{P}_k(\varepsilon_h)$ y multiplicando la ecuación (3-1) por v , para todo $x \in (0, 1)$, se tiene

$$v u_t - v u_{xx} = v \cdot f$$

luego se integra sobre cada I_n y queda

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (v(x)u_t(x, t) - v(x)u_{xx}(x, t))dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) f(x) dx \\ \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)u_t(x, t)dx - \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)u_{xx}(x, t)dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) f(x) dx \end{aligned}$$

aplicando integración por partes en el segundo término de la izquierda

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)u_t(x, t)dx - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)v(x) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x)dx \right) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)f(x) dx$$

Reescribiendo esta ecuación,

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)u_t(x, t)dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x)dx \\ - \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_{n+1}, t) v(x_{n+1}^-) + \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) v(x_n^+) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) f(x) dx \end{aligned}$$

donde $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}$ representa el flujo numérico. Ahora, sumando las N ecuaciones,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)u_t(x, t)dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x)dx \right) - \sum_{n=0}^N \left[\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t)v(x_n) \right] \\ = \int_0^1 v(x) f(x) dx \quad (3-5) \end{aligned}$$

Además, para $1 \leq n \leq N - 1$ se cumple la igualdad

$$\left[\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n) v(x_n) \right] = \left\{ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n) \right\} [v(x_n)] + \{v(x_n)\} \left[\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n) \right]$$

Entonces la ecuación (3-5) se expresa como

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) u_t(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) \right\} [v(x_n)] \\ = \int_0^1 v(x) f(x) dx \end{aligned}$$

Ahora, si u es solución de (3-1) - (3-4) y el problema tiene condiciones tipo Dirichlet, entonces u satisface

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) u_t(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) \right\} [v(x_n)] \\ + \epsilon \sum_{n=0}^N \{v'(x_n)\} [u(x_n, t)] = \int_0^1 v(x) f(x) dx - \epsilon v'(x_0) u(x_0, t) + \epsilon v'(x_N) u(x_N, t) \\ = \int_0^1 v(x) f(x) dx - \epsilon \psi v'(x_0) + \epsilon \chi v'(x_N) \quad (3-6) \end{aligned}$$

donde $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$.

Pero si el problema tiene condiciones mixtas (digamos $\eta = \mu = 0, \gamma = \lambda = 1$) y u es solución de (3-1) - (3-4), entonces u satisface

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) u_t(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) \right\} [v(x_n)] \\ + \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \{v'(x_n)\} [u(x_n, t)] = \int_0^1 v(x) f(x) dx - \epsilon v'(x_0) u(x_0, t) \\ = \int_0^1 v(x) f(x) dx - \epsilon \psi v'(x_0) \quad (3-7) \end{aligned}$$

pues el dato $u(x_N, t)$ es desconocido.

La formulación débil (o variacional) del problema (3-1) - (3-4) se reduce a encontrar $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que u satisface la ecuación (3-6) para toda $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.

Se define la forma bilineal para el problema con condiciones Dirichlet

$\mathbf{b}_\epsilon : \mathcal{P}_k(\varepsilon_h) \times \mathcal{P}_k(\varepsilon_h) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\epsilon(w_h, v) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) (w_h)_t(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial w_h}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x) dx \right) \\ - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\widehat{\partial w_h}}{\partial x}(x_n, t) \right\} [v(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^N \{v'(x_n)\} [w_h(x_n, t)] \quad (3-8) \end{aligned}$$

y para el problema con condiciones mixtas

$\mathbf{b}_\epsilon : \mathcal{P}_k(\epsilon_h) \times \mathcal{P}_k(\epsilon_h) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbf{b}_\epsilon(w_h, v) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)(w_h)_t(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial w_h}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\widehat{\partial w_h}}{\partial x}(x_n, t) \right\} [v(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \{v'(x_n)\} [w_h(x_n, t)] \quad (3-9)$$

En ambos casos, $w_h(t) \in \mathcal{P}_k(\epsilon_h)$ para todo $t \geq 0$.

Para \mathbf{b}_ϵ , se cumplen las mismas propiedades que para (2-34). El método DG propuesto para resolver el problema (3-1) - (3-4) consiste en encontrar $u_h(t) \in \mathcal{P}_k(\epsilon_h)$ tal que

$$\forall v \in \mathcal{P}_k(\epsilon_h), \quad \mathbf{b}_\epsilon(u_h, v) = L(v)$$

donde $L : \mathcal{P}_k(\epsilon_h) \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma lineal

$$L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx - \epsilon \psi v'(x_0) + \epsilon \chi v'(x_N) \quad (3-10)$$

ó

$$L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx - \epsilon \psi v'(x_0) \quad (3-11)$$

Formulación Semidiscreta

En esta parte se aplica el método DG en el dominio espacial, considerando el subespacio de aproximación $\mathcal{P}_1(\epsilon_h)$, por lo que la base local es

$$\mathbb{P}_1(I_n) = \text{span}\{\phi_1^n, \phi_2^n\},$$

donde

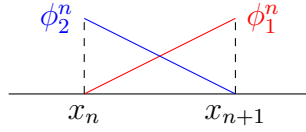
$$\phi_1^n = \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} \quad \text{si } x \in I_n$$

$$\phi_2^n = \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} \quad \text{si } x \in I_n$$

Para obtener la base global, expandemos de la siguiente forma

$$\phi_1^n(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_n}(x - x_n) & \text{si } x \in I_n \\ 0 & \text{si } x \notin I_n \end{cases}$$

$$\phi_2^n(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_n}(x_{n+1} - x) & \text{si } x \in I_n \\ 0 & \text{si } x \notin I_n \end{cases}$$



De nuevo, el objetivo es encontrar $u_h(x, t)$ de tal manera que

$$u_h(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n(x, t) \quad (3-12)$$

donde

$$u_h^n(x, t) = \alpha_1^n(t) \phi_1^n(x) + \alpha_2^n(t) \phi_2^n(x)$$

y cada $\alpha_i^m(t)$ es una variable.

Teniendo en cuenta que $u_h \approx u$, las ecuaciones (3-6) y (3-7) se expresan como

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v_h(x) \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u_h}{\partial x}(x, t) \frac{dv_h}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) \right\} [v_h(x_n)] \\ + \epsilon \sum_{n=0}^N \{v_h'(x_n)\} [u_h(x_n, t)] = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx - \epsilon \psi v_h'(x_0) + \epsilon \chi v_h'(x_N) \end{aligned} \quad (3-13)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v_h(x) \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u_h}{\partial x}(x, t) \frac{dv_h}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) \right\} [v_h(x_n)] \\ + \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \{v_h'(x_n)\} [u_h(x_n, t)] = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx - \epsilon \psi v_h'(x_0) \end{aligned} \quad (3-14)$$

respectivamente

Flujo Numérico

Para el flujo numérico, se tiene la siguiente igualdad

$$\left\{ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) \right\} = \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t). \quad (\text{Flujo numérico})$$

Se define ahora el flujo numérico para el problema con condiciones Dirichlet de la siguiente manera

$$\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_m, t) = \begin{cases} \left\{ \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_m, t) \right\} - \varepsilon_2 \beta_2 [u_h(x_m, t)], & \text{si } 1 \leq m \leq N - 1 \\ \left\{ \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_m, t) \right\} - \varepsilon_2 \beta_2 [u_h(x_m, t) - (\frac{N-m}{N} \psi + \frac{m}{N} \chi)], & \text{si } m \in \{0, N\} \end{cases} \quad (3-15)$$

mientras que para el problema con condiciones mixtas

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(x_m, t) = \begin{cases} \left\{ \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_m, t) \right\} - \varepsilon_2 \beta_2 [u_h(x_m, t)], & \text{si } 1 \leq m \leq N-1 \\ \left\{ \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_m, t) \right\} - \varepsilon_2 \beta_2 [u_h(x_m, t) - \psi], & \text{si } m = 0 \\ \chi, & \text{si } m = N \end{cases} \quad (3-16)$$

donde $\varepsilon_2 \in \{-1, +1\}$ y $\beta_2 \in \mathbb{R}$.

Con el flujo así definido, la formulación (3-13), es

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u_h}{\partial t} \phi_i^n dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{d}{dx} (\phi_i^n) dx \right) - \sum_{n=0}^N \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(x_n, t) [\phi_i^n(x_n)] \\ & + \epsilon \sum_{n=0}^N \left\{ (\phi_i^n)'(x_n) \right\} [u_h(x_n, t)] = \int_0^1 f(x) \phi_i^n(x) dx - \epsilon \psi (\phi_i^n)'(x_0) + \epsilon \chi (\phi_i^n)'(x_N) \end{aligned} \quad (3-17)$$

mientras que la formulación (3-14), queda

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u_h}{\partial t} \phi_i^n dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{d}{dx} (\phi_i^n) dx \right) - \sum_{n=0}^N \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(x_n, t) [\phi_i^n(x_n)] \\ & + \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ (\phi_i^n)'(x_n) \right\} [u_h(x_n, t)] = \int_0^1 f(x) \phi_i^n(x) dx - \epsilon \psi (\phi_i^n)'(x_0) \end{aligned} \quad (3-18)$$

Sistema EDO's

Reemplazando la función u_h definida en (3-12) en la formulación DG (3-18), se obtiene un sistema de EDO's, en el que los coeficientes α_j^m son indeterminadas que dependen del valor de t , y pueden ser ordenados en el siguiente vector

$$\alpha(t) = (\alpha_1^0(t), \alpha_2^0(t), \alpha_1^1(t), \alpha_2^1(t), \dots, \alpha_1^{N-1}(t), \alpha_2^{N-1}(t))^T \quad (3-19)$$

Antes de formar el sistema de EDO's, es necesario encontrar la matriz global asociada a dicho sistema. Para ello, se reagrupan los términos de la siguiente manera [57]

- Los términos que involucran integrales.
- Los términos que involucran nodos

Términos que involucran integrales

Los siguientes términos involucran integrales sobre todos los subintervalos, de la siguiente manera

$$\int_{I_n} \frac{\partial u_h}{\partial t} \phi_i^n(x) dx + \int_{I_n} \frac{\partial u_h}{\partial x} (\phi_i^n)'(x) dx \quad \forall i = 1, 2 \quad (3-20)$$

Por definición de u_h , (3-20) toma la siguiente forma

$$\sum_{j=1}^2 (\alpha_j^n)'(t) \int_{I_n} \phi_j^n(x) \phi_i^n(x) dx + \sum_{j=1}^2 (\alpha_j^n)(t) \int_{I_n} (\phi_j^n)'(x) (\phi_i^n)'(x) dx \quad \forall i = 1, 2$$

al final, como resultado, es posible escribir un sistema lineal con vectores locales

$$\alpha^n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^n(t) \\ \alpha_2^n(t) \end{pmatrix}, \quad (\alpha^n)'(t) = \begin{pmatrix} (\alpha_1^n)'(t) \\ (\alpha_2^n)'(t) \end{pmatrix},$$

y con matrices locales

$$(M_n)_{ij} = \int_{I_n} \phi_j^n(x) \phi_i^n(x) dx, \quad (K_n)_{ij} = \int_{I_n} (\phi_j^n)'(x) (\phi_i^n)'(x)$$

es decir

$$M_n = \begin{bmatrix} \frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix}, \quad K_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_n} & \frac{-1}{h_n} \\ \frac{-1}{h_n} & \frac{1}{h_n} \end{bmatrix}.$$

Términos que involucran nodos

Estos términos resultan de evaluar el flujo numérico, los promedios y saltos en los nodos, entonces para los nodos interiores podemos escribir

$$-\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) [\phi_i^n(x_n)] + \epsilon \{(\phi_i^n)'(x_n)\} [u_h(x_n, t)] = b_n + c_n + d_n + e_n \quad (3-21)$$

donde los términos b_n, c_n, d_n, e_n toman los siguientes valores

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_n^+, t) \right) (\phi_i^n(x_n^+)) + \varepsilon_2 \beta_2 u_h(x_n^+, t) \phi_i^n(x_n^+) - \frac{\epsilon}{2} u_h(x_n^+, t) (\phi_i^n)'(x_n^+) \\ c_n &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_n^-, t) \right) (\phi_i^n(x_n^-)) + \varepsilon_2 \beta_2 u_h(x_n^-, t) \phi_i^n(x_n^-) + \frac{\epsilon}{2} u_h(x_n^-, t) (\phi_i^n)'(x_n^-) \\ d_n &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_n^+, t) \right) (\phi_i^n(x_n^-)) - \varepsilon_2 \beta_2 u_h(x_n^+, t) \phi_i^n(x_n^-) - \frac{\epsilon}{2} u_h(x_n^+, t) (\phi_i^n)'(x_n^-) \\ e_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_n^-, t) \right) (\phi_i^n(x_n^+)) - \varepsilon_2 \beta_2 u_h(x_n^-, t) \phi_i^n(x_n^+) + \frac{\epsilon}{2} u_h(x_n^-, t) (\phi_i^n)'(x_n^+) \end{aligned}$$

Al expandir u_h , los términos definidos anteriormente producirán matrices locales B_n, C_n, D_n, E_n , respectivamente. Por ejemplo

$$(B_n)_{ij} = \frac{1}{2} (\phi_j^n)'(x_n^+) (\phi_i^n(x_n^+)) + \varepsilon_2 \beta_2 \phi_j^n(x_n^+) \phi_i^n(x_n^+) - \frac{\epsilon}{2} \phi_j^n(x_n^+) (\phi_i^n)'(x_n^+)$$

Entonces B_n corresponde a las interacciones de las funciones de la base local del intervalo I_n , asimismo C_n corresponde a las interacciones de las funciones de la base local del intervalo I_{n-1} , mientras que las matrices D_n y E_n se encargan de acoplar los intervalos I_n e I_{n-1} . Las matrices son:

$$B_n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\epsilon}{2h_n} \\ \frac{1}{2h_n} & \frac{-1}{2h_n} + \varepsilon_2\beta_2 + \frac{\epsilon}{2h_n} \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2h_{n-1}} + \varepsilon_2\beta_2 + \frac{\epsilon}{2h_{n-1}} & \frac{1}{2h_{n-1}} \\ \frac{-\epsilon}{2h_{n-1}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_n = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2h_n} & \frac{1}{2h_n} - \varepsilon_2\beta_2 - \frac{\epsilon}{2h_{n-1}} \\ 0 & \frac{\epsilon}{2h_{n-1}} \end{bmatrix}, \quad E_n = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{2h_{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{2h_{n-1}} - \varepsilon_2\beta_2 - \frac{\epsilon}{2h_n} & \frac{-1}{2h_{n-1}} \end{bmatrix},$$

A continuación se calculan ahora las matrices locales que surgen de las condiciones de frontera en x_0 y en x_N , de nuevo es necesario diferenciar entre el tipo de condición de frontera que tiene el problema.

Si las condiciones son de tipo Dirichlet,

$$h_0 = \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_0, t) \right) (\phi_i^0(x_0)) + \varepsilon_2\beta_2 u_h(x_0, t)\phi_i^0(x_0) - \epsilon u_h(x_0, t) (\phi_i^0)'(x_0) - \varepsilon_2\beta_2 \psi \phi_i^0(x_0)$$

$$h_N = - \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_N, t) \right) (\phi_i^{N-1}(x_N)) + \varepsilon_2\beta_2 u_h(x_N, t)\phi_i^{N-1}(x_N) + \epsilon u_h(x_N, t) (\phi_i^{N-1})'(x_N) - \varepsilon_2\beta_2 \chi \phi_i^{N-1}(x_N)$$

Estos términos producen las matrices

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\epsilon}{h_0} \\ \frac{1}{h_0} & -\frac{1}{h_0} + \varepsilon_2\beta_2 + \frac{\epsilon}{h_0} \end{bmatrix}, \quad H_N = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_{N-1}} + \varepsilon_2\beta_2 + \frac{\epsilon}{h_{N-1}} & \frac{1}{h_{N-1}} \\ \frac{-\epsilon}{h_{N-1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pero si las condiciones son mixtas,

$$h_0 = \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_0, t) \right) (\phi_i^0(x_0)) + \varepsilon_2\beta_2 u_h(x_0, t)\phi_i^0(x_0) - \epsilon u_h(x_0, t) (\phi_i^0)'(x_0) - \varepsilon_2\beta_2 \psi \phi_i^0(x_0)$$

$$h_N = -\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_N, t) [\phi_i^{N-1}(x_N)] = -\chi[\phi_i^{N-1}(x_N)]$$

Estos términos producen las matrices

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\epsilon}{h_0} \\ \frac{1}{h_0} & -\frac{1}{h_0} + \varepsilon_2\beta_2 + \frac{\epsilon}{h_0} \end{bmatrix}, \quad H_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de nuevo tomando $v(x) = \phi_i^n(x)$ con $i = 1, 2$ y $1 \leq n \leq N - 1$, se tiene

$$\int_0^1 u_h(x, 0) \phi_i^n(x) dx = \int_0^1 g(x) \phi_i^n(x) dx = \sum_n \int_{I_n} g(x) \phi_i^n(x) dx,$$

y por (3-12) $u_h^n(x, 0) = \alpha_1^n(0) \phi_1^n(x) + \alpha_2^n(0) \phi_2^n(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_h(x, 0) \phi_i^n(x) dx &= \int_{\Omega} (\alpha_1^n(0) \phi_1^n(x) + \alpha_2^n(0) \phi_2^n(x)) \phi_i^n(x) dx \\ &= \sum_n \int_{I_n} \sum_{j=1}^2 (\alpha_j^n(0) \phi_j^n(x)) \phi_i^n(x) dx \\ &= \sum_n \sum_{j=1}^2 \alpha_j^n(0) \int_{I_n} \phi_j^n(x) \phi_i^n(x) dx, \end{aligned}$$

donde

$$\int_{I_n} \phi_j^n(x) \phi_i^n(x) dx = (M_n)_{ij}$$

así, se forma el sistema lineal (localmente)

$$\begin{bmatrix} \frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^n(0) \\ \alpha_2^n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_n \int_{I_n} g(x) \frac{x-x_n}{h_n} dx \\ \sum_n \int_{I_n} g(x) \frac{x_{n+1}-x}{h_n} dx \end{bmatrix}$$

entonces cada $\alpha_j^n(0)$ se puede calcular, y el sistema de EDO's es de la siguiente forma

$$\begin{cases} M \frac{d\alpha}{dt}(t) + S\alpha(t) = b \\ \alpha(0) = \begin{bmatrix} \beta_1^1 \\ \vdots \\ \beta_2^{N-1} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Para obtener los vectores b y $\alpha(0)$ resulta conveniente aplicar un método de cuadratura, en este caso utilizamos la cuadratura de Simpson [18].

3.1.2. Discretización temporal

Para resolver problemas evolutivos en el tiempo, como la ecuación de calor o la ecuación de convección-difusión de dimensión uno, se aplica la *formulación semidiscreta*, obteniendo un sistema ODE, para resolver dicho sistema se utilizará un método de diferencias finitas implícito, como el método de Euler Implícito (Backward Euler) o el método de Crank-Nicholson

Discretización Euler hacia atrás

La discretización temporal con el método de Euler Implícito (Backward Euler) es

$$\alpha^{(i+1)} = (M + \Delta t K)^{-1} (M \alpha^{(i)} + \Delta t f(t_{i+1})).$$

donde α^i es el vector de variables y, debido a la coercividad de \mathbf{b}_ϵ , se tiene que $M + \Delta t K$ es definida positiva y en particular invertible. Así, existe una única solución en cada paso de tiempo. En este problema M se denomina *matriz de masa*, mientras K es la *matriz de rigidez*

En [57], Rivière demuestra que el error numérico para esta discretización es de primer orden en tiempo.

Discretización Crank-Nicholson

Por otra parte, la discretización de Crank-Nicholson es de la forma

$$\frac{\alpha^{(i+1)} - \alpha^{(i)}}{\Delta t} = M^{-1} \left(-\frac{1}{2} K (\alpha^{(i)} + \alpha^{(i+1)}) + f(t_{i+1/2}) \right),$$

donde

$$t_{i+1/2} = \frac{t_{i+1} + t_i}{2}.$$

Entonces, el sistema lineal resultante es

$$\alpha^{(i+1)} = (2M + \Delta t K)^{-1} \left((2M - \Delta t K) \alpha^{(i)} + 2\Delta t (f(t_{i+1/2})) \right)$$

Para esta discretización, el error numérico es de segundo orden.

Los métodos DG combinados con la discretización temporal Euler implícito o Crank-Nicholson para resolver problemas parabólicos se analizan en [4, 55]

Como se mencionó anteriormente, el sistema de EDO's resultante se resolverá aplicando dos métodos de diferencias finitas implícito (método de Euler implícito y método de Crank-Nicholson).

3.1.3. Cálculo del error

Para analizar el error utilizamos la norma L^2 definida por

$$\|e_h\|_{L^2(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|e_h(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2} \quad (3-24)$$

y la norma de la energía, definida como

$$\|e_h\|_\varepsilon = \left(\int_0^T \|e_h(t)\|_\varepsilon^2 dt \right)^{1/2} \quad (3-25)$$

donde $\|e_h(t)\|_V = \|u(x, t) - u_h(x, t)\|_V$ y $\|e_h(t)\|_\varepsilon = \|u(x, t) - u_h(x, t)\|_\varepsilon$.

3.1.4. Ejemplos

Ahora se implementará el método DG anterior a una serie de problemas homogéneos, no homogéneos y con diferente tipo de condiciones en la frontera

Ejemplo 1

El siguiente problema modela la distribución de temperatura $u(x, t)$ en una barra (o la concentración $u(x, t)$ de un químico en una solución) con fuente $f(x, t) = (x^2 - x + 1)e^{-t}$ y condiciones Dirichlet.

Su solución exacta es $u(x, t) = (-x^2 + x + 1)e^{-t}$.

$$u_t - u_{xx} = (x^2 - x + 1)e^{-t}, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (3-26)$$

$$u(0, t) = e^{-t}, \quad t > 0 \quad (3-27)$$

$$u(1, t) = e^{-t}, \quad t > 0 \quad (3-28)$$

$$u(x, 0) = -x^2 + x + 1, \quad 0 < x < 1 \quad (3-29)$$

En la literatura, generalmente se utilizan dos funciones auxiliares para homogeneizar los datos, encontrar la solución a los nuevos problemas y finalmente expresar la incógnita original como la suma de las nuevas. En este sentido, se busca una solución de la forma

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

de tal manera que v satisfaga las condiciones (3-27) y (3-28) y $v_{xx} = 0$, es decir

$$v_{xx}(x, t) = 0$$

$$v(0, t) = e^{-t}$$

$$v(1, t) = e^{-t}$$

de aquí, $v(x, t) = a(t)x + b(t)$, resolviendo el sistema tenemos $b(t) = e^{-t}$ y $a(t) = 0$, luego la solución es

$$v(x, t) = e^{-t}$$

y se puede escribir el problema (3-26) - (3-29) en términos de v y w así

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= v_t - v_{xx} + w_t - w_{xx} \\ e^{-t}(x^2 - x + 1) &= -e^{-t} + w_t - w_{xx} \\ e^{-t}(x^2 - x + 2) &= w_t - w_{xx} \end{aligned} \quad (3-30)$$

con condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) &= v(0, t) + w(0, t) \\ e^{-t} &= e^{-t} + w(0, t) \\ 0 &= w(0, t) \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned} u(1, t) &= v(1, t) + w(1, t) \\ e^{-t} &= e^{-t} + w(1, t) \\ 0 &= w(1, t) \end{aligned} \quad (3-32)$$

y con condición inicial

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v(x, 0) + w(x, 0) \\ -x^2 + x + 1 &= 1 + w(x, 0) \\ -x^2 + x &= w(x, 0) \end{aligned} \quad (3-33)$$

El problema (3-30)-(3-33), tiene solución

$$w(x, t) = (-x^2 + x)e^{-t}$$

y la aproximación u_h por el método DG a la función u será

$$u_h(x, t) = v(x, t) + w_h(x, t)$$

En primer lugar aplicamos el método DG al problema (3-30)-(3-33), así las matrices locales $M_n, K_n, B_n, C_n, D_n, E_n, H_0$ y H_N toman los mismos valores que el ejemplo anterior.

En este caso, el operador lineal es

$$\begin{aligned} L(v) &= \int_0^1 f(x)v(x) dx = \int_0^1 e^{-t}(x^2 - x + 2) v(x) dx \\ &= e^{-t} \int_0^1 (x^2 - x + 2) v(x) dx \end{aligned}$$

tomando $v(x) = \phi_i^n(x)$, y teniendo en cuenta el soporte local de ϕ_i^n , el operador L es

$$L(\phi_i^n) = e^{-t} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x^2 - x + 2) \phi_i^n(x) dx$$

y aplicando la cuadratura de Simpson formamos el vector b ,

$$b_1^n = L(\phi_1^n) = e^{-t} \frac{h}{6} \left(\frac{x_n^2}{2} + x_n x_{n+1} + \frac{3}{2} x_{n+1}^2 - x_n - 2x_{n+1} + 6 \right)$$

$$b_2^n = L(\phi_2^n) = e^{-t} \frac{h}{6} \left(\frac{3}{2} x_n^2 - 2x_n + 6 + \frac{x_{n+1}^2}{2} + x_{n+1} x_n - x_{n+1} \right)$$

Por otra parte la condición inicial de este problema es

$$w(x, 0) = -x^2 + x$$

y su implementación aproximada es

$$\int_0^1 w_h(x, 0) \phi_i^n(x) dx = \int_0^1 (-x^2 + x) \phi_i^n(x) dx$$

y de nuevo por el soporte de ϕ_i^n , nos queda

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} (-x^2 + x) \phi_i^n(x) dx$$

entonces tenemos el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^n(0) \\ \alpha_2^n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h}{6} \left(-\frac{x_n^2}{2} - x_n x_{n+1} - \frac{3}{2} x_{n+1}^2 + x_n + 2x_{n+1} \right) \\ \frac{h}{6} \left(-\frac{3}{2} x_n^2 - x_n x_{n+1} - \frac{x_{n+1}^2}{2} + 2x_n + x_{n+1} \right) \end{bmatrix}$$

en este caso, el sistema de EDO's es de la siguiente forma

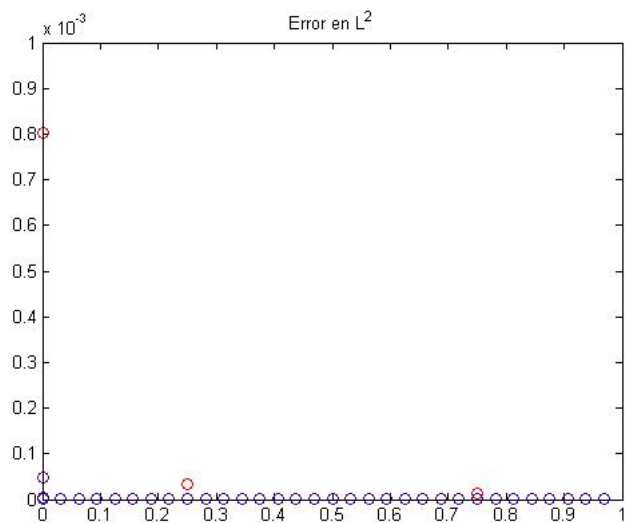
$$\begin{cases} M \frac{d\alpha}{dt}(t) + S\alpha(t) = b \\ \alpha(0) = \begin{bmatrix} \beta_1^1 \\ \vdots \\ \beta_2^{N-1} \end{bmatrix} \end{cases}$$

obteniendo las siguientes aproximaciones $\|e_h\|_{L^2}$

El error para la segunda columna de la tabla 3.1.4 ($\epsilon = -1$, $\varepsilon_2 = 2$) se representa gráficamente por la siguiente figura

	$\epsilon = 1, \varepsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \varepsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0167		0.009	
1/8	0.0043	1.94	0.0016	2.47
1/16	0.0011	1.86	0.0002	2.46
1/32	0.0003	1.75	8.35×10^{-5}	1.82
1/64	0.0001	1.59	4.61×10^{-5}	0.85
1/128	4.37×10^{-5}	1.41	2.60×10^{-5}	0.82
1/256	1.82×10^{-5}	1.25	1.38×10^{-5}	0.90
1/512	8.25×10^{-6}	1.14	7.16×10^{-6}	0.95

Tabla 3-1: Orden y error numérico para el problema (3-26)-(3-29) con discretización Euler implícito en tiempo y norma $\|e_h\|_{L^2}$



Los resultados anteriores muestran que con los parámetros elegidos, se mantiene el orden para los métodos de Euler implícito (primer orden) y Crank-Nicholson (segundo orden).

Por otra parte, con la norma $\|e_h\|_\epsilon$ se muestra la siguiente aproximación

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0153		0.0035	
1/8	0.0037	2.03	0.0011	1.61
1/16	0.0009	2.00	0.0003	1.91
1/32	0.0002	2.00	7.74×10^{-5}	1.97
1/64	5.79×10^{-5}	2.00	1.95×10^{-5}	1.99
1/128	1.44×10^{-5}	2.00	4.89×10^{-6}	1.99
1/256	3.62×10^{-6}	2	1.22×10^{-6}	1.99
1/512	9.05×10^{-7}	2	3.06×10^{-7}	1.99

Tabla 3-2: Orden y error numérico para el problema (3-26)-(3-29) con discretización Crank-Nicholson en tiempo y norma $\|e_h\|_{L^2}$

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0958		0.1616	
1/8	0.0392	1.28	0.0561	1.52
1/16	0.0174	1.17	0.0218	1.36
1/32	0.0081	1.09	0.0093	1.23
1/64	0.0039	1.05	0.0042	1.13
1/128	0.0019	1.02	0.0020	1.07
1/256	0.0009	1.01	0.0009	1.04
1/512	0.0004	1.00	0.0004	1.02

Tabla 3-3: Orden y error numérico para el problema (3-26)-(3-29) con discretización Euler implícito en tiempo y norma $\|e_h\|_\epsilon$

Con la norma de la energía, se obtienen aproximaciones de primer orden utilizando tanto el método de Euler implícito como el método de Crank-Nicholson.

Resolviendo el problema directamente (sin cambiar de variable), se tienen las siguientes aproximaciones

h	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0810		0.0647	
1/8	0.0338	1.25	0.0299	1.11
1/16	0.0151	1.15	0.0141	1.08
1/32	0.0071	1.09	0.0068	1.04
1/64	0.0034	1.04	0.0033	1.02
1/128	0.0016	1.02	0.0016	1.01
1/256	0.0008	1.01	0.0008	1.00
1/512	0.0004	1.00	0.0004	1.00

Tabla 3-4: Orden y error numérico para el problema (3-26)-(3-29) con discretización Crank-Nicholson en tiempo y norma $\|e_h\|_\epsilon$

h	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0227		0.0112	
1/8	0.0068	1.73	0.0027	2.03
1/16	0.0023	1.52	0.0012	1.15
1/32	0.0009	1.33	0.0006	0.92
1/64	0.0004	1.19	0.0003	0.94
1/128	0.0001	1.10	0.0001	0.97
1/256	9.13×10^{-5}	1.05	8.69×10^{-5}	0.98
1/512	4.47×10^{-5}	1.02	4.36×10^{-6}	0.99

Tabla 3-5: Orden y error numérico para el problema (3-26)-(3-29) aplicando el método directamente, con discretización Euler implícito y norma $\|e_h\|_{L^2}$

Las siguientes gráficas 3.1.4, 3.1.4, 3.1.4; muestran las aproximaciones con el método DG (línea verde) a la solución exacta (línea azul), tomando 8, 32 y 512 subintervalos.

La gráfica 3.1.4 muestra la aproximación obtenida al elegir de los parámetro $\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$, mientras que las gráficas 3.1.4 y 3.1.4 muestran las aproximación con parámetros $\epsilon = -1, \epsilon_2 = 3$ y $\epsilon = -1, \epsilon_2 = 3.5$, respectivamente.

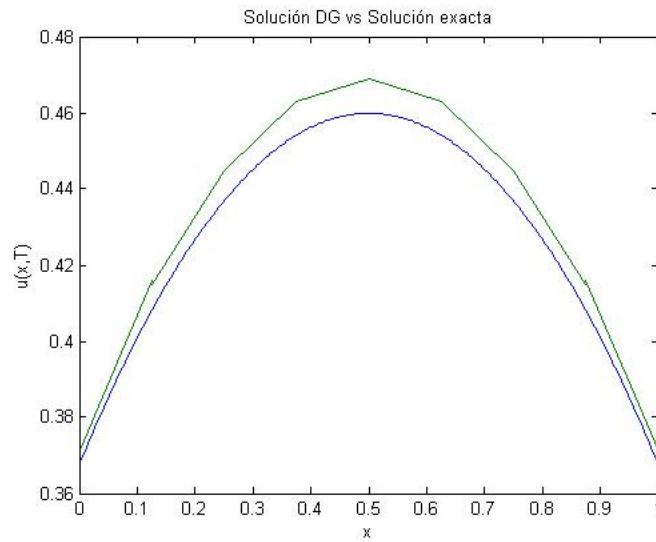


Figura 3-1: Aproximación DG con 8 subintervalos a la solución $u(x, t) = (-x^2 + x + 1)e^{-t}$ con $T = 1$

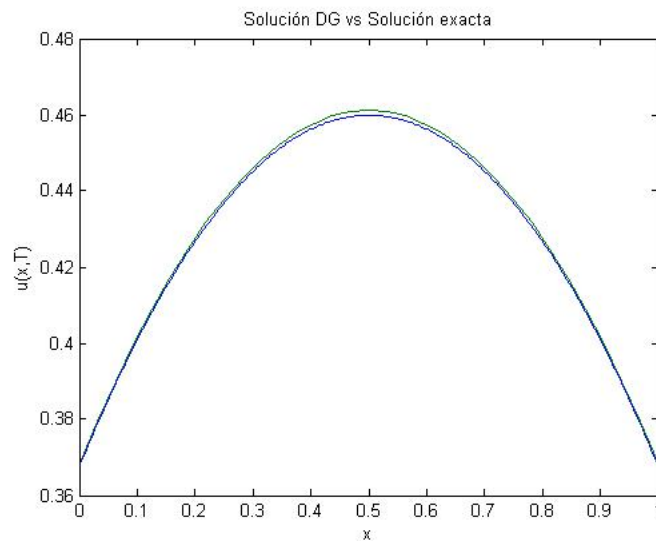


Figura 3-2: Aproximación DG con 32 subintervalos a la solución $u(x, t) = (-x^2 + x + 1)e^{-t}$

Con la norma $\|e_h\|_{L^2}$, nuevamente se obtienen aproximaciones de primer orden para la discretización de Euler y de segundo orden para la discretización de Crank-Nicholson.

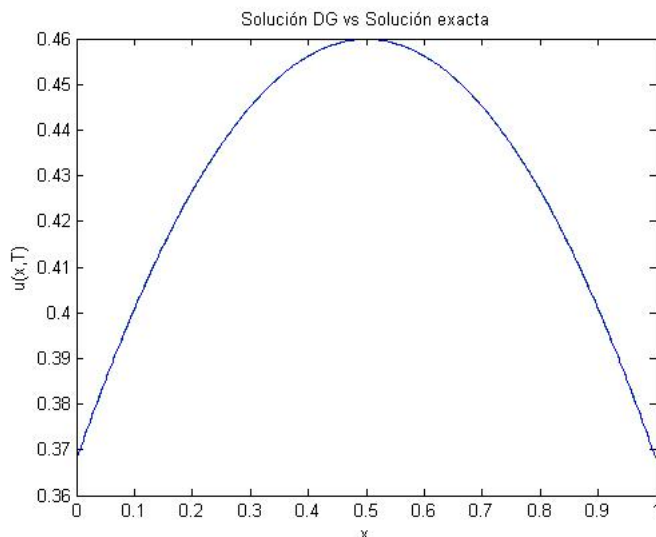


Figura 3-3: Aproximación DG con 512 subintervalos a la solución $u(x, t) = (-x^2 + x + 1)e^{-t}$

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.012		0.0045	
1/8	0.0029	2.02	0.0016	1.45
1/16	0.0007	1.99	0.0004	1.85
1/32	0.0001	1.99	0.0001	1.94
1/64	4.60×10^{-5}	1.99	3.06×10^{-5}	1.97
1/128	1.15×10^{-5}	1.99	7.70×10^{-6}	1.98
1/256	2.88×10^{-6}	1.99	1.93×10^{-6}	1.99
1/512	7.20×10^{-7}	1.99	4.84×10^{-7}	1.99

Tabla 3-6: Orden y error numérico para el problema (3-26)-(3-29) aplicando el método directamente, con discretización Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_{L^2}$

Con la norma de la energía se obtienen las aproximaciones:

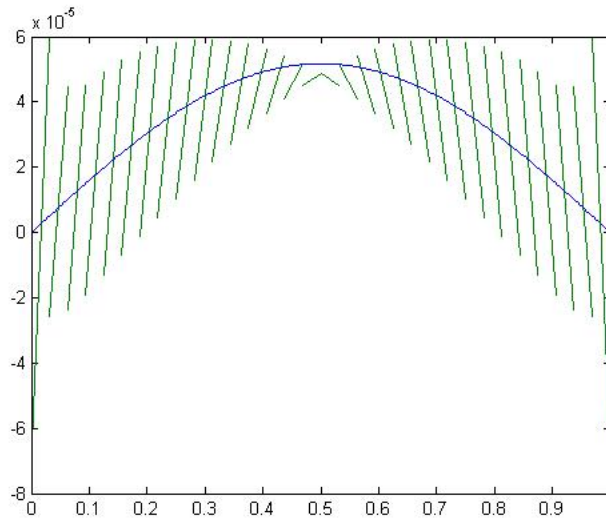


Figura 3-4: Aproximación DG a la solución $u(x,t) = (-x^2 + x + 1)e^{-t}$ $\epsilon = -1$, $\epsilon = 2$

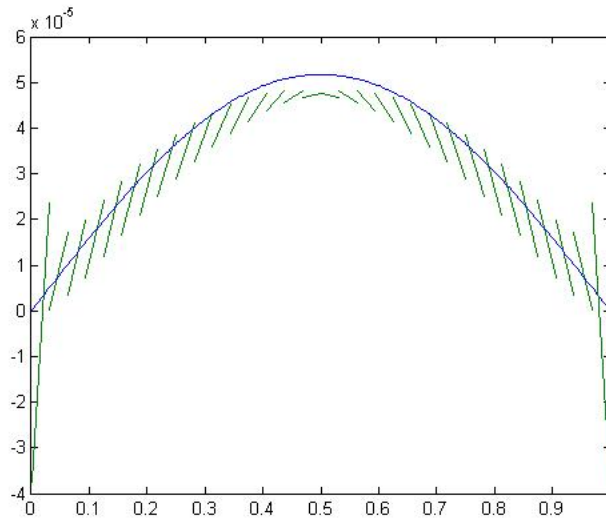


Figura 3-5: Aproximación DG a la solución $u(x,t) = (-x^2 + x + 1)e^{-t}$ $\epsilon = -1$, $\epsilon = 3$

Con la norma $\|e_h\|_\epsilon$, se obtiene primer orden de aproximación para el método, utilizando ambas discretizaciones.

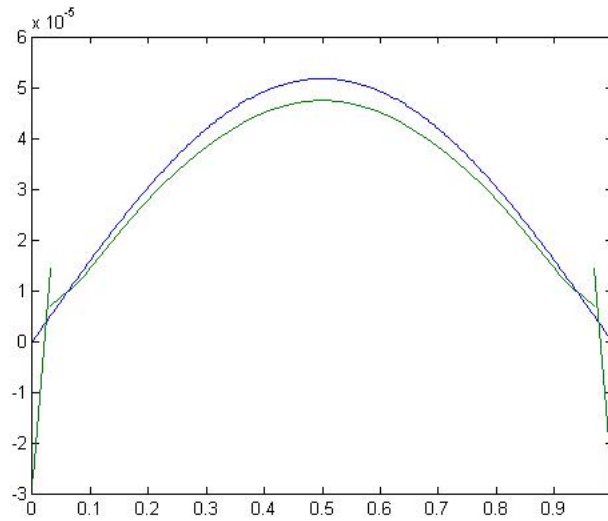


Figura 3-6: Aproximación DG a la solución $u(x, t) = (-x^2 + x + 1)e^{-t}$ $\epsilon = -1$, $\varepsilon = 3.5$

	$\epsilon = 1, \varepsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \varepsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0858		0.1588	
1/8	0.0355	1.27	0.0567	1.48
1/16	0.0159	1.16	0.0219	1.37
1/32	0.0074	1.08	0.0091	1.26
1/64	0.0036	1.04	0.0040	1.16
1/128	0.0017	1.02	0.0018	1.10
1/256	0.0008	1.01	0.0009	1.05
1/512	0.0004	1.00	0.0004	1.02

Tabla 3-7: Orden y error numérico para el problema (3-26)-(3-29) aplicando el método directamente, con discretización Euler implícito y norma $\|e_h\|_\varepsilon$

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0683		0.0625	
1/8	0.0303	1.16	0.0292	1.09
1/16	0.0142	1.09	0.0139	1.06
1/32	0.0068	1.04	0.0068	1.03
1/64	0.0033	1.02	0.0033	1.01
1/128	0.0016	1.01	0.0016	1.00
1/256	0.0008	1.00	0.0008	1.00
1/512	0.0004	1.00	0.0004	1.00

Tabla 3-8: Orden y error numérico para el problema (3-26)-(3-29) aplicando el método directamente, con discretización Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_\epsilon$

Ejemplo 2

El siguiente problema presenta condiciones homogéneas y fuente nula, es decir $f(x, t) = 0$; su solución analítica es $u(x, t) = \text{sen}(\pi x)e^{-\pi^2 t}$

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0; \quad (3-34)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0; \quad (3-35)$$

$$u(x, 0) = \text{sen} \pi x, \quad 0 < x < 1. \quad (3-36)$$

Aplicando el método DG, con $\beta_2 = 1/h$, y $T = 1$, se tienen las siguientes aproximaciones

h	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0059		0.0045	
1/8	0.0011	2.33	0.0010	2.10
1/16	0.0002	2.00	0.0002	1.89
1/32	9.41×10^{-5}	1.64	9.25×10^{-5}	1.60
1/64	3.65×10^{-5}	1.36	3.62×10^{-5}	1.35
1/128	1.59×10^{-5}	1.19	1.59×10^{-5}	1.18
1/256	7.45×10^{-6}	1.09	7.44×10^{-6}	1.09
1/512	3.60×10^{-6}	1.05	3.60×10^{-6}	1.04

Tabla 3-9: Orden y error numérico para el problema (3-34) - (3-36) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_{L^2}$

Para la elección de parámetros que se muestra en cada tabla y aplicando el método de Euler implícito en este ejemplo, se obtiene una aproximación de primer orden con la norma en L^2 o la norma de la energía.

Utilizando la discretización de Crank-Nicholson, con la misma combinación de parámetros y ambas normas se obtienen los siguientes resultados

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0180		0.0114	
1/8	0.0036	2.28	0.0031	1.85
1/16	0.0009	1.99	0.0008	1.84
1/32	0.0002	1.64	0.0002	1.59
1/64	0.0001	1.36	0.0001	1.34
1/128	5.02×10^{-5}	1.19	5.00×10^{-5}	1.18
1/256	2.34×10^{-5}	1.09	2.34×10^{-5}	1.09
1/512	1.13×10^{-5}	1.05	1.13×10^{-5}	1.04

Tabla 3-10: Orden y error numérico para el problema (3-34) - (3-36) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_\epsilon$

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0032		0.0139	
1/8	0.0002	3.35	0.0013	3.39
1/16	2.95×10^{-5}	3.23	0.0001	3.23
1/32	3.97×10^{-6}	2.89	1.61×10^{-5}	3.13
1/64	7.32×10^{-7}	2.44	2.01×10^{-6}	2.99
1/128	1.66×10^{-7}	2.14	2.98×10^{-7}	2.75
1/256	4.04×10^{-8}	2.03	5.64×10^{-8}	2.40
1/512	1.00×10^{-8}	2.00	1.27×10^{-8}	2.14

Tabla 3-11: Orden y error numérico para el problema (3-34) - (3-36) con el método de Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_{L^2}$

Con la discretización de Crank-Nicholson, se obtiene una aproximación de orden 2, aplicando tanto la norma en L^2 como la norma de la energía.

h	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0474		0.2552	
1/8	0.0089	2.39	0.0522	2.28
1/16	0.0019	3.19	0.0118	2.13
1/32	0.0004	2.10	0.0028	2.07
1/64	0.0001	2.05	0.0006	2.04
1/128	2.68×10^{-5}	2.02	0.0001	2.02
1/256	6.66×10^{-6}	2.01	4.17×10^{-5}	2.01
1/512	1.66×10^{-6}	1.99	1.04×10^{-5}	2.00

Tabla 3-12: Orden y error numérico para el problema (3-34) - (3-36) con el método de Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_\epsilon$

Ejemplo 3

Consideramos ahora el siguiente problema homogéneo, con condición inicial nula, pero con fuente $f(x, t) = x(1 - x) \cos(t) - 2 \sin(t)$.

$$u_t - u_{xx} = x(1 - x) \cos(t) - 2 \sin(t), \quad 0 < x < 1, t > 0; \tag{3-37}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0; \tag{3-38}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{3-39}$$

Su solución analítica es

$$u(x, t) = (x - x^2) \sin(t) \tag{3-40}$$

Tomando $\epsilon_2 = 1, \beta_2 = 1/h$, con $T = 0, 5$, la convergencia para el problema (3-37) - (3-39) arroja los siguientes resultados

	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0145		0.0229	
1/8	0.0035	2.04	0.0042	2.77
1/16	0.0007	2.14	0.0009	2.20
1/32	0.0001	2.31	0.0002	1.89
1/64	3.18×10^{-5}	2.33	8.20×10^{-5}	1.59
1/128	1.68×10^{-5}	0.92	3.31×10^{-5}	1.30
1/256	1.08×10^{-5}	0.62	1.50×10^{-5}	1.13
1/512	6.19×10^{-6}	0.81	7.23×10^{-5}	1.05

Tabla 3-13: Orden y error numérico para el problema (3-37) - (3-39) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_{L^2}$

	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0313		0.0201	
1/8	0.0078	1.99	0.0038	2.39
1/16	0.0019	2.00	0.0007	2.32
1/32	0.0004	2.00	0.0001	2.23
1/64	0.0001	2.00	3.65×10^{-5}	2.15
1/128	3.05×10^{-5}	2.00	8.59×10^{-6}	2.08
1/256	7.63×10^{-6}	2.00	2.07×10^{-6}	2.04
1/512	1.90×10^{-6}	2.00	5.10×10^{-7}	2.02

Tabla 3-14: Orden y error numérico para el problema (3-37) - (3-39) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_{L^2}$

Nuevamente las aproximaciones mantienen el orden tanto para el método de Euler como para el método de Crank-Nicholson.

Tomando $\varepsilon_2 = 1$, $\beta_2 = 1/h$, $T = 0,5$ tenemos la siguiente tabla de convergencia

La figura 3.1.4 muestra la aproximación a $u(x, t) = (x - x^2) \sin t$ con el método aplicado, utilizando 8 subintervalos y parámetro $\epsilon = -1$.

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.1573		0.3525	
1/8	0.0708	1.15	0.1345	1.38
1/16	0.0330	1.09	0.0523	1.36
1/32	0.0158	1.05	0.0214	1.28
1/64	0.0077	1.03	0.0092	1.20
1/128	0.0038	1.01	0.0042	1.13
1/256	0.0019	1.00	0.0020	1.07
1/512	0.0009	1.00	0.0009	1.04

Tabla 3-15: Orden y error numérico para el problema (3-37) - (3-39) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_\epsilon$

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.1612		0.3539	
1/8	0.0715	1.17	0.1334	1.40
1/16	0.0332	1.10	0.0519	1.36
1/32	0.0159	1.06	0.0212	1.28
1/64	0.0077	1.03	0.0092	1.20
1/128	0.0038	1.01	0.0042	1.12
1/256	0.0019	1.00	0.0020	1.07
1/512	0.0009	1.00	0.0009	1.04

Tabla 3-16: Orden y error numérico para el problema (3-37) - (3-39) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_\epsilon$

Por otra parte la 3.1.4 muestra la aproximación a $u(x, t) = (x - x^2) \sin t$ con el método aplicado, utilizando 8 subintervalos y parámetro $\epsilon = 1$.

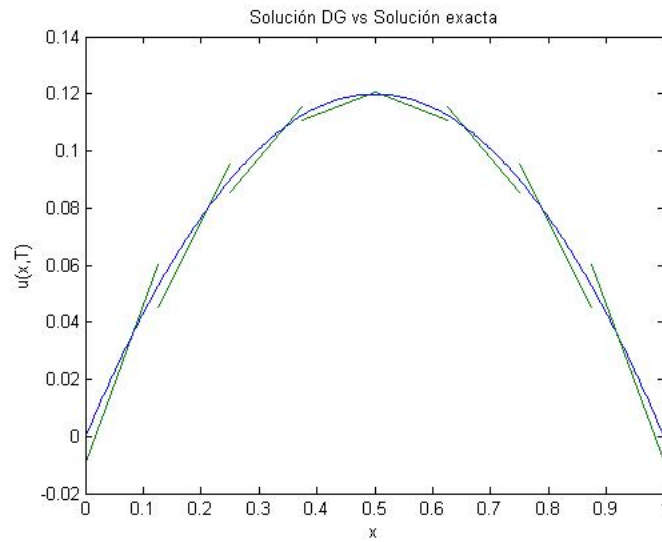


Figura 3-7: Aproximación DG a la solución $u(x, t) = (x - x^2) \sin(t)$, con $\epsilon = -1$

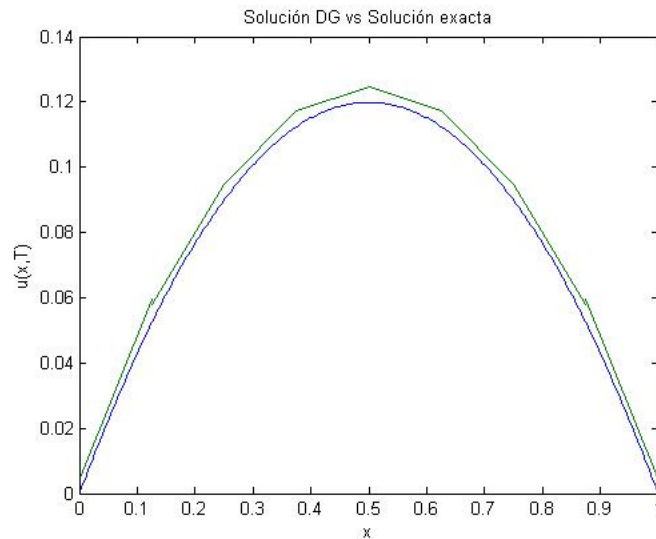


Figura 3-8: Aproximación DG a la solución $u(x, t) = (x - x^2) \sin(t)$, con $\epsilon = 1$

Con la norma de la energía, se obtiene una aproximación de primer orden utilizando Euler implícito y Crank-Nicholson

Ejemplo 4

Este ejemplo es de tipo Dirichlet no homogéneo, con fuente nula condición inicial $g(x) = \text{sen}(\pi x) + x$

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0; \tag{3-41}$$

$$u(0, t) = 0 \quad t > 0; \tag{3-42}$$

$$u(1, t) = 1 \quad t > 0; \tag{3-43}$$

$$u(x, 0) = \text{sen}(\pi x) + x, \quad 0 < x < 1. \tag{3-44}$$

La solución analítica de (3-41)-(3-44) está dada por

$$u(x, t) = \text{sen}(\pi x)e^{-\pi^2 t} + x.$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_i^n(x) u_t(x, t) dx - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \phi_i^n(x) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\phi_i^n}{dx}(x) dx \right) = 0.$$

Sumando las N ecuaciones, tenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) u_t(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(x_n, t) \right\} [v(x_n)] = 0$$

Y debido a que la solución exacta u también es continua, entonces $[u(x, t)] = 0$; además, si u es solución de (3-41) - (3-44), entonces u satisface las condiciones (3-42) y (3-43) y tenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) u_t(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \left\{ \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(x_n, t) \right\} [v(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^N \{v'(x_n)\} [u(x_n, t)] \\ = -\epsilon v'(x_0) u(x_0, t) + \epsilon v'(x_N) u(x_N, t) = \epsilon v'(x_N) \end{aligned} \tag{3-45}$$

donde $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$. La parte izquierda de la ecuación (3-45) hace referencia a la forma bilineal, mientras que la parte derecha se refiere al operador lineal

Para este caso definimos el flujo numérico

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(x_n, t) = \begin{cases} \left\{ \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_n, t) \right\} - \epsilon_2 \beta_2 [u_h(x_n, t)], & 1 \leq n \leq N - 1 \\ \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_n, t) - \epsilon_2 \beta_2 (u_h(x_n, t) - g(x_n)), & n \in \{0, N\} \end{cases}$$

y la formulación variacional para este problema es

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) u_t(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x) dx \right) - \sum_{n=0}^N \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) [v(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^N \{v'(x_n)\} [u(x_n, t)] = \epsilon v'(x_N),$$

Ahora, tomando u_h como en (3-12), podemos calcular las matrices locales M_n y K_n

$$(M_n)_{ij} = \int_{I_n} \phi_j^n(x) \phi_i^n(x) dx, \quad (K_n)_{ij} = \int_{I_n} (\phi_j^n)'(x) (\phi_i^n)'(x).$$

Ahora, los nodos interiores se determinan de la misma manera que para el problema (3-1)-(3-4) y toman los mismos valores

$$-\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) [\phi_i^n(x_n)] + \epsilon \{(\phi_i^n)'(x_n)\} [u_h(x_n, t)] = b_n + c_n + d_n + e_n$$

produciendo las mismas matrices locales B_n, C_n, D_n, E_n .

Las matrices locales que surgen de las condiciones de frontera en x_0 y en x_N serán

$$\begin{aligned} h_0 &= \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_0, t) \right) (\phi_i^0(x_0)) + \varepsilon_2 \beta_2 (u_h(x_0, t) - g(x_0)) \phi_i^0(x_0) - \epsilon u_h(x_0, t) (\phi_i^0)'(x_0) \\ &= \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_0, t) \right) (\phi_i^0(x_0)) + \varepsilon_2 \beta_2 u_h(x_0, t) \phi_i^0(x_0) - \epsilon u_h(x_0, t) (\phi_i^0)'(x_0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h_N &= - \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_N, t) \right) (\phi_i^{N-1}(x_N)) + \varepsilon_2 \beta_2 (u_h(x_N, t) - g(x_N)) \phi_i^{N-1}(x_N) \\ &\quad + \epsilon u_h(x_N, t) (\phi_i^{N-1})'(x_N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_N &= - \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_N, t) \right) (\phi_i^{N-1}(x_N)) + \varepsilon_2 \beta_2 (u_h(x_N, t) - 1) \phi_i^{N-1}(x_N) \\ &\quad + \epsilon u_h(x_N, t) (\phi_i^{N-1})'(x_N) \end{aligned}$$

Estos términos producen las matrices

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\epsilon}{h_0} \\ \frac{1}{h_0} & -\frac{1}{h_0} + \varepsilon_2 \beta_2 + \frac{\epsilon}{h_0} \end{bmatrix}, \quad H_N = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_{N-1}} + \varepsilon_2 \beta_2 + \frac{\epsilon}{h_{N-1}} & \frac{1}{h_{N-1}} \\ \frac{-\epsilon}{h_{N-1}} & 0 \end{bmatrix},$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u_h(x, 0) \phi_i^n(x) dx &= \int_{\Omega} (\alpha_1^n(0) \phi_1^n(x) + \alpha_2^n(0) \phi_2^n(x)) \phi_i^n(x) dx \\
&= \sum_n \int_{I_n} \sum_{j=1}^2 (\alpha_j^n(0) \phi_j^n(x)) \phi_i^n(x) dx \\
&= \sum_n \sum_{j=1}^2 \alpha_j^n(0) \int_{I_n} \phi_j^n(x) \phi_i^n(x) dx,
\end{aligned}$$

recordemos que

$$\int_{I_n} \phi_j^n(x) \phi_i^n(x) dx = (M_n)_{ij}$$

así, tenemos el sistema lineal (localmente)

$$\begin{bmatrix} \frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^n(0) \\ \alpha_2^n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\cos(\pi x_{n+1})}{\pi} + \frac{\sin(\pi x_{n+1}) - \sin(\pi x_n)}{h_n \pi^2} + \frac{h_n}{6} (x_n + 2x_{n+1}) \\ \frac{\cos(\pi x_n)}{\pi} - \frac{\sin(\pi x_{n+1}) - \sin(\pi x_n)}{h_n \pi^2} + \frac{h_n}{6} (2x_n + x_{n+1}) \end{bmatrix}$$

entonces cada $\alpha_j^n(0)$ se puede calcular, y el sistema de EDO's es de la siguiente forma

$$\begin{cases} M \frac{d\alpha}{dt}(t) + S\alpha(t) = b \\ \alpha(0) = \begin{bmatrix} \beta_1^1 \\ \vdots \\ \beta_2^{N-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3-46)$$

donde b es el vector que se obtiene al calcular

$$\begin{aligned}
b_i^n &= L(\phi_i^n) = \int_0^1 0 \phi_i^n(x) dx + \epsilon (\phi_i^n)'(x_N) + \varepsilon_2 \beta_2 \phi_i^{N-1}(x_N) \\
&= \epsilon (\phi_i^n)'(x_N) + \varepsilon_2 \beta_2 \phi_i^{N-1}(x_N)
\end{aligned}$$

y por el soporte de la función ϕ_i^n , las primeras $2N - 2$ componentes son cero y las últimas dos son

$$\begin{aligned}
b_1^{N-1} &= \frac{\epsilon}{h_{N-1}} + \varepsilon_2 \beta_2 \\
b_2^{N-1} &= \frac{-\epsilon}{h_{N-1}} + 0
\end{aligned}$$

Aplicando la norma $\|e_h\|_{L^2}$, con ambos métodos y tomando $\beta_2 = 1/h$ y $T = 1$, tenemos la siguiente tasa

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0059		0.0045	
1/8	0.0011	2.33	0.0010	2.10
1/16	0.0002	2.00	0.0002	1.89
1/32	9.41×10^{-5}	1.64	9.25×10^{-5}	1.60
1/64	3.65×10^{-5}	1.36	3.62×10^{-5}	1.35
1/128	1.59×10^{-5}	1.19	1.59×10^{-5}	1.18
1/256	7.45×10^{-6}	1.09	7.44×10^{-6}	1.09
1/512	3.60×10^{-6}	1.05	3.60×10^{-6}	1.04

Tabla 3-17: Orden y error numérico para el problema (3-41)-(3-44) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_{L^2}$

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0032		0.0139	
1/8	0.0002	3.53	0.0013	3.39
1/16	2.95×10^{-5}	3.23	0.0001	3.23
1/32	3.97×10^{-6}	2.89	1.61×10^{-5}	3.13
1/64	7.32×10^{-7}	2.44	2.01×10^{-6}	2.99
1/128	1.66×10^{-7}	2.14	2.98×10^{-7}	2.75
1/256	4.04×10^{-8}	2.03	5.64×10^{-8}	2.40
1/512	1.00×10^{-7}	2.00	1.27×10^{-8}	2.14

Tabla 3-18: Orden y error numérico para el problema (3-41)-(3-44) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_{L^2}$

Con la norma $\|e_h\|_{\epsilon}$, se consiguen las siguientes aproximaciones

Las gráficas 3.1.4 y 3.1.4 muestran una comparación entre las aproximaciones por el método DG, utilizando las dos comparaciones de parámetros

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0181		0.0114	
1/8	0.0037	2.28	0.0031	1.85
1/16	0.0009	1.99	0.0008	1.84
1/32	0.0003	1.64	0.0002	1.59
1/64	0.0001	1.36	0.0001	1.34
1/128	5.02×10^{-5}	1.19	5.00×10^{-5}	1.18
1/256	2.34×10^{-6}	1.09	2.34×10^{-6}	1.09
1/512	1.13×10^{-6}	1.05	1.13×10^{-6}	1.04

Tabla 3-19: Orden y error numérico para el problema (3-41)-(3-44) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_\epsilon$

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0474		0.2552	
1/8	0.0089	2.39	0.0522	2.28
1/16	0.0019	2.19	0.0118	2.13
1/32	0.0004	2.10	0.0028	2.07
1/64	0.0001	2.05	0.0006	2.04
1/128	2.68×10^{-5}	2.02	0.0001	2.02
1/256	6.66×10^{-6}	2.01	4.17×10^{-5}	2.01
1/512	1.66×10^{-6}	1.99	1.04×10^{-5}	2.00

Tabla 3-20: Orden y error numérico para el problema (3-41)-(3-44) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_\epsilon$

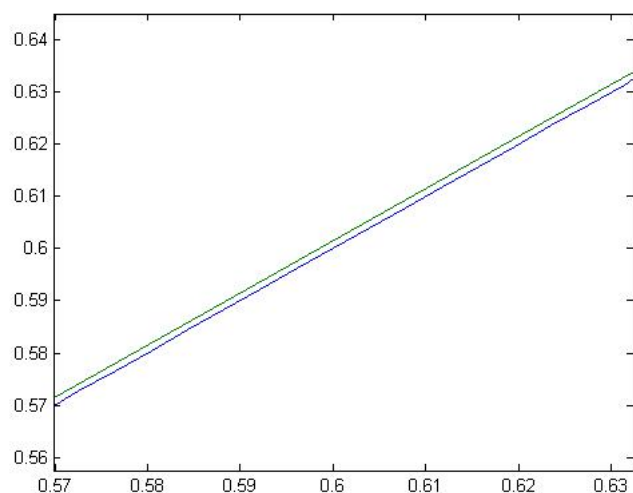


Figura 3-9: Aproximación DG a la solución $u(x, t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t} + x$ $\epsilon = -1$, $\epsilon = 2$

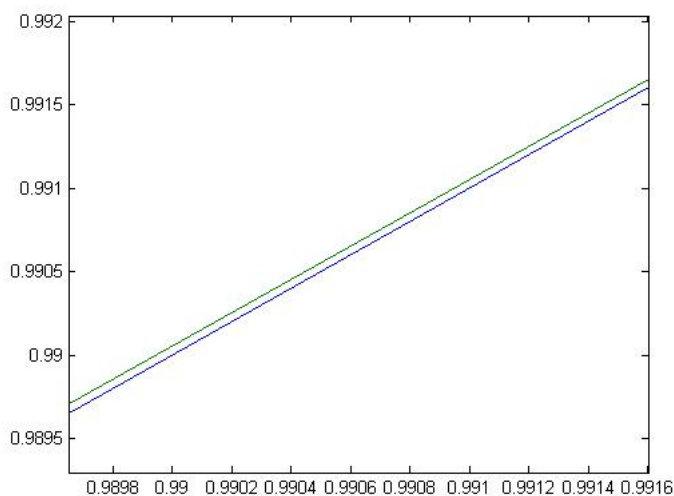


Figura 3-10: Aproximación DG a la solución $u(x, t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t} + x$ $\epsilon = 1$, $\epsilon = 1$

Ejemplo 5

Se presenta a continuación un problema de tipo Dirichlet no homogéneo, con fuente $f(x, t) = e^{-x^2}(\cos(t) - 2(2x^2 - 1)\sin(t))$ y condición inicial nula.

$$u_t - u_{xx} = e^{-x^2}(\cos(t) - 2(2x^2 - 1)\sin(t)), \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (3-47)$$

$$u(0, t) = \sin(t), \quad t > 0 \quad (3-48)$$

$$u(1, t) = e^{-1}\sin(t), \quad t > 0 \quad (3-49)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (3-50)$$

la solución exacta de este problema es $e^{-x^2} \text{sen}(t)$.

Este problema también se puede resolver tomando dos funciones auxiliares v, w , tales que

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (3-51)$$

donde v debe satisfacer las condiciones (3-48) y (3-49) del problema anterior, entonces v depende de x y t ; por otra parte v es solución del problema

$$\begin{aligned} v_{xx}(x, t) &= 0 \\ v(0, t) &= \text{sen}(t) \\ v(1, t) &= e^{-1} \text{sen}(t) \end{aligned}$$

esto indica que $v(x, t) = a(t)x + b(t)$, donde $a(t) = (e^{-1} - 1) \text{sen}(t)$ y $b(t) = \text{sen}(t)$, es decir

$$v(x, t) = ((e^{-1} - 1) \text{sen}(t)) x + \text{sen}(t)$$

Ahora, por la ecuación (3-51) y suponiendo que $u_t - u_{xx} = F(x, t)$ tenemos el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= w_t - w_{xx} + v_t - v_{xx} \\ F(x, t) &= w_t - w_{xx} + (e^{-1} - 1)x \cos(t) + \cos(t) \\ w_t - w_{xx} &= F(x, t) - \cos(t) ((e^{-1} - 1)x + 1) \end{aligned} \quad (3-52)$$

con condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) &= w(0, t) + v(0, t) \\ \text{sen}(t) &= w(0, t) + \text{sen}(t) \\ 0 &= w(0, t) \end{aligned} \quad (3-53)$$

$$\begin{aligned} u(1, t) &= w(1, t) + v(1, t) \\ e^{-1} \text{sen}(t) &= w(1, t) + e^{-1} \text{sen}(t) \\ 0 &= w(1, t) \end{aligned} \quad (3-54)$$

y con condición inicial

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= w(x, 0) + v(x, 0) \\ 0 &= w(x, 0) + ((e^{-1} - 1)x + 1) \text{sen}(0) \\ 0 &= w(x, 0) \end{aligned} \quad (3-55)$$

El problema (3-52) - (3-55) queda así

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= e^{-x^2} (\cos(t) - 2(2x^2 - 1) \text{sen}(t)) - \cos(t) ((e^{-1} - 1)x + 1) \\ w(0, t) &= 0 \\ w(1, t) &= 0 \\ w(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

y su solución exacta es

$$w(x, t) = u(x, t) - v(x, t) \quad \text{es decir}$$

$$w(x, t) = e^{-x^2} \text{sen}(t) - ((e^{-1} - 1)x + 1) \text{sen}(t)$$

Tomando $T = \pi$, y aplicando la norma $\|e_h\|_{L^2}$, se tienen los siguientes resultados

h	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0181		0.0157	
1/8	0.004	2.05	0.0035	2.15
1/16	0.0011	1.96	0.0007	2.18
1/32	0.0002	2.11	0.0002	1.79
1/64	6.33×10^{-5}	2.01	8.26×10^{-5}	1.43
1/128	2.22×10^{-5}	1.50	3.20×10^{-5}	1.36
1/256	1.14×10^{-5}	0.95	1.47×10^{-5}	1.11
1/512	6.17×10^{-6}	0.89	7.08×10^{-6}	1.05

Tabla 3-21: Orden y error numérico para el problema (3-47)-(3-50) con Euler implícito con norma $\|e_h\|_{L^2}$

h	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0206		0.0161	
1/8	0.005	2.03	0.0032	2.33
1/16	0.0012	1.96	0.0006	2.33
1/32	0.0003	2.01	0.0001	2.24
1/64	7.861×10^{-5}	2.02	3.058×10^{-5}	2.12
1/128	2.008×10^{-5}	1.96	6.77×10^{-6}	2.17
1/256	5.012×10^{-6}	2.00	1.62×10^{-6}	2.05
1/512	1.24×10^{-6}	2.00	4.013×10^{-7}	2.01

Tabla 3-22: Orden y error numérico para el problema (3-47)-(3-50) con Crank-Nicholson con norma $\|e_h\|_{L^2}$

Para este ejemplo, las gráficas 3.1.4 y 3.1.4 muestran las aproximaciones a la solución $u(x,t) = e^{-x^2} \operatorname{sen} t$ con $\varepsilon_2 = 1$ y $\varepsilon_2 = 2$ respectivamente (en ambos casos $\epsilon = -1$ y se toman 8 subintervalos)

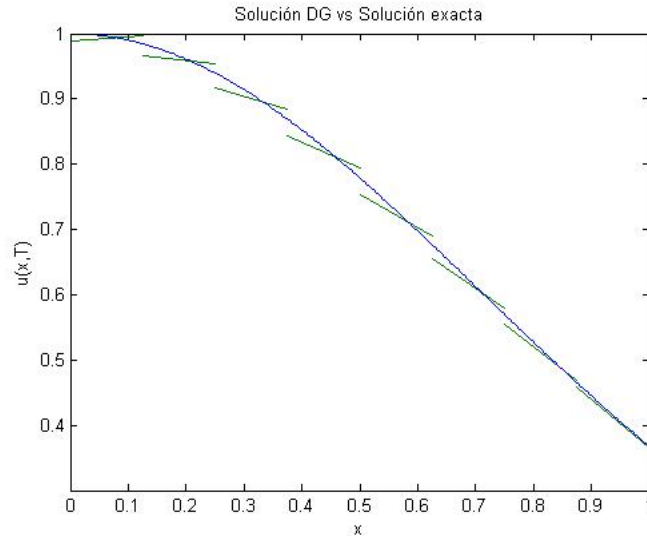


Figura 3-11: Aproximación DG a la solución $u(x,t) = e^{-x^2} \operatorname{sen} t$ $\epsilon = -1$, $\varepsilon = 1$

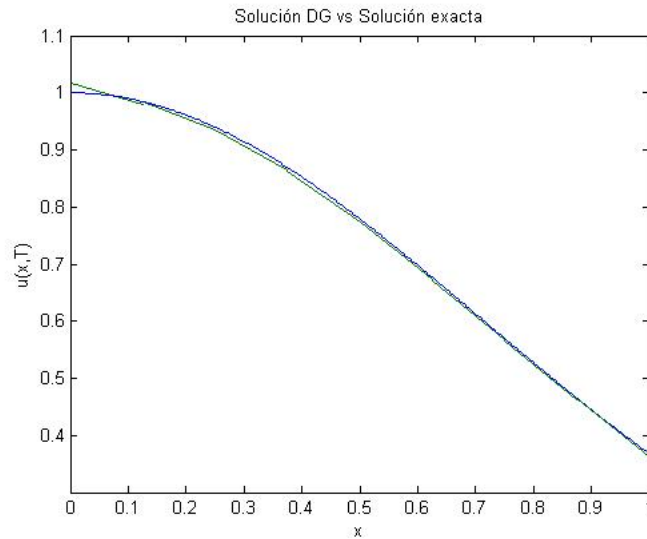


Figura 3-12: Aproximación DG a la solución $u(x,t) = e^{-x^2} \operatorname{sen} t$ $\epsilon = -1$, $\varepsilon = 2$

Y aplicando la norma $\|e_h\|_\varepsilon$, se obtienen los siguientes resultados

	$\epsilon = 1, \varepsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \varepsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.1250		0.2739	
1/8	0.0540	1.21	0.1121	1.28
1/16	0.0245	1.14	0.0435	1.36
1/32	0.0115	1.09	0.0172	1.33
1/64	0.0055	1.05	0.0072	1.26
1/128	0.0027	1.02	0.0032	1.18
1/256	0.0013	1.01	0.0015	1.11
1/512	0.0007	1.00	0.0007	1.06

Tabla 3-23: Orden y error numérico para el problema (3-47)-(3-50) con Euler implícito con norma $\|e_h\|_\varepsilon$

	$\epsilon = 1, \varepsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \varepsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.1298		0.2792	
1/8	0.0548	1.24	0.1118	1.31
1/16	0.0246	1.15	0.0433	1.36
1/32	0.0115	1.09	0.0172	1.33
1/64	0.0055	1.05	0.0071	1.26
1/128	0.0027	1.02	0.0031	1.18
1/256	0.0013	1.01	0.0015	1.11
1/512	0.0007	1.00	0.0007	1.06

Tabla 3-24: Orden y error numérico para el problema (3-47)-(3-50) con Crank-Nicholson con norma $\|e_h\|_\varepsilon$

Aplicando el método directamente, se tiene

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0167		0.0167	
1/8	0.004	2.03	0.0051	1.70
1/16	0.0016	1.32	0.0022	1.16
1/32	0.0008	0.9	0.0010	1.08
1/64	0.0004	0.86	0.0005	1.01
1/128	0.0002	0.89	0.0002	0.97
1/256	0.0001	0.96	0.0001	1.00
1/512	6.62×10^{-6}	0.98	6.71×10^{-5}	1.00

Tabla 3-25: Orden y error numérico para el problema (3-47)-(3-50) con Euler implícito con norma $\|e_h\|_{L^2}$

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0202		0.0152	
1/8	0.0051	1.98	0.0032	2.21
1/16	0.0013	1.89	0.0005	2.52
1/32	0.00034	2.00	0.0001	2.26
1/64	7.75×10^{-5}	2.14	3.18×10^{-5}	1.9
1/128	2.34×10^{-5}	1.72	5.62×10^{-6}	2.50
1/256	5.88×10^{-6}	1.99	1.30×10^{-6}	2.10
1/512	1.43×10^{-6}	2.04	3.1×10^{-7}	2.07

Tabla 3-26: Orden y error numérico para el problema (3-47)-(3-50) con Crank-Nicholson con norma $\|e_h\|_{L^2}$

Y aplicando $\|e_h\|_\epsilon$, se tiene

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.1247		0.2762	
1/8	0.0541	1.20	0.1135	1.28
1/16	0.0248	1.12	0.0447	1.34
1/32	0.0117	1.07	0.0178	1.32
1/64	0.0057	1.03	0.0074	1.25
1/128	0.0028	1.01	0.0032	1.17
1/256	0.0014	1.01	0.0015	1.11
1/512	0.0007	1.00	0.0007	1.06

Tabla 3-27: Orden y error numérico para el problema (3-47)-(3-50) con Euler implícito con norma $\|e_h\|_\epsilon$

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.1290		0.2708	
1/8	0.0551	1.22	0.1131	1.25
1/16	0.0244	1.17	0.0418	1.43
1/32	0.0114	1.09	0.0167	1.31
1/64	0.0055	1.04	0.0071	1.22
1/128	0.0027	1.03	0.0031	1.20
1/256	0.0013	1.01	0.0014	1.10
1/512	0.0006	1.00	0.0006	1.05

Tabla 3-28: Orden y error numérico para el problema (3-47)-(3-50) con Crank-Nicholson con norma $\|e_h\|_\epsilon$

Ejemplo 6

El siguiente problema tiene condiciones mixtas homogéneas, fuente $f(x, t) = 2e^{-2t}(x^2 - 2x + 1)$ y condición inicial $g(x) = 2x - x^2$,

$$u_t - u_{xx} = 2e^{-2t}(x^2 - 2x + 1), \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (3-56)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3-57)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3-58)$$

$$u(x, 0) = 2x - x^2, \quad 0 < x < 1 \quad (3-59)$$

la solución exacta a este problema es $u(x, t) = (2x - x^2)e^{-2t}$.

Tomando $\phi_i^n \in \mathcal{P}_1(\varepsilon_h)$ y multiplicando por la ecuación (3-56) e integrando por partes, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_i^n(x)(u_t(x, t)) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\phi_i^n)'(x)(u_x(x, t)) dx \\ - \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_{n+1}, t) \phi_i^n(x_{n+1}^-) + \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) \phi_i^n(x_n^+) \\ = \int_{x_n}^{x_{n+1}} 2e^{-2t} \phi_i^n(x) (x^2 - 2x + 1) dx \end{aligned} \quad (3-60)$$

Ahora, incluyendo el término de penalización y teniendo en cuenta el soporte de ϕ_i^n , además que el flujo numérico es conservativo, la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_i^n(x)(u_t(x, t)) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\phi_i^n)'(x)(u_x(x, t)) dx \right) \\ - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) \right\} [\phi_i^n(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \{v_h'(x_n)\} [u_h(x_n, t)] \\ = 2e^{-2t} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_i^n(x) (x^2 - 2x + 1) dx \end{aligned}$$

Definimos, para el caso (3-56)-(3-59), el flujo numérico como

$$\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_m, t) = \begin{cases} \left\{ \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_m, t) \right\} - \varepsilon_2 \beta_2 [u_h(x_m, t)] & 0 \leq m \leq N-1 \\ 0 & m = N \end{cases}$$

debido a que el dato en x_0 es Dirichlet y en x_N es Neumann.

De la misma manera que en los ejercicios anteriores, las matrices locales M_n, K_n tienen la misma forma. Así mismo sucede con las matrices locales que involucran los nodos interiores B_n, C_n, D_n, E_n .

Para las matrices locales en los que intervienen los nodos de frontera tenemos

$$h_0 = \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_0, t) \right) (\phi_i^0(x_0)) + \varepsilon_2 \beta_2 u_h(x_0, t) \phi_i^0(x_0) - \epsilon u_h(x_0, t) (\phi_i^0)'(x_0)$$

$$h_N = 0$$

luego

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\epsilon}{h_0} \\ \frac{1}{h_0} & -\frac{1}{h_0} + \varepsilon_2 \beta_2 + \frac{\epsilon}{h_0} \end{bmatrix}, \quad H_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Entonces, en la matriz global S , las submatrices A y A_0 tienen los mismos valores, mientras que $A_N = K_N + B_{N-1}$.

Ahora la parte de la derecha de la ecuación (3-60), es el operador lineal $L(\phi_i^n)$

$$L(\phi_i^n) = 2e^{-2t} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_i^n(x) (x^2 - 2x + 1),$$

y aplicando la cuadratura de Simpson, tenemos lo siguiente

$$L(\phi_1^n) = e^{-2t} \left(\frac{h}{3} \right) \left(\frac{3}{2} x_{n+1}^2 + x_{n+1} x_n + \frac{x_n^2}{2} - 4x_{n+1} - 2x_n + 3 \right)$$

$$L(\phi_2^n) = e^{-2t} \left(\frac{h}{3} \right) \left(\frac{3}{2} x_n^2 + x_{n+1} x_n + \frac{x_{n+1}^2}{2} - 2x_{n+1} - 4x_n + 3 \right)$$

La condición inicial (3-59), se implementa aproximadamente como

$$\int_{\Omega} u_h(x, 0) \phi_i^n(x) dx = \int_{\Omega} (2x - x^2) \phi_i^n(x) dx$$

$$= \sum_n \int_{I_n} (2x - x^2) \phi_i^n(x) dx,$$

Entonces para $i = 1$, tenemos

$$\int_{\Omega} u_h(x, 0) \phi_1^n(x) dx = \sum_n \frac{h}{6} \left[2x_n + 4x_{n+1} - x_n x_{n+1} - \frac{x_n^2}{2} - \frac{3}{2} x_{n+1}^2 \right]$$

mientras que para $i = 2$

$$\int_{\Omega} u_h(x, 0) \phi_2^n(x) dx = \sum_n \frac{h}{6} \left[4x_n + 2x_{n+1} - x_n x_{n+1} - \frac{3}{2} x_n^2 - \frac{x_{n+1}^2}{2} \right]$$

Tenemos las siguientes tablas de errores numéricos

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0454		0.0356	
1/8	0.0213	1.08	0.0186	0.93
1/16	0.0103	1.05	0.0095	0.96
1/32	0.0050	1.03	0.0048	0.98
1/64	0.0024	1.01	0.0024	0.99
1/128	0.0012	1.00	0.0012	0.99
1/256	0.0006	1.00	0.0006	0.99
1/512	0.0003	1.00	0.0003	0.99

Tabla 3-29: (3-56)-(3-59) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_{L^2}$

	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0057		0.0070	
1/8	0.0013	2.08	0.0017	1.98
1/16	0.0003	2.03	0.0004	2.00
1/32	8.23×10^{-5}	2.01	0.0001	2.00
1/64	2.04×10^{-5}	2.00	2.75×10^{-5}	2.00
1/128	5.11×10^{-6}	2.00	6.86×10^{-6}	2.00
1/256	1.27×10^{-6}	2.00	1.71×10^{-6}	2.00
1/512	3.19×10^{-7}	2.00	4.28×10^{-7}	2.00

Tabla 3-30: (3-26)-(3-29) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_{L^2}$

h	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0872		0.0657	
1/8	0.0417	1.06	0.0351	0.90
1/16	0.0203	1.03	0.0186	0.91
1/32	0.0100	1.01	0.0096	0.95
1/64	0.0049	1.01	0.0048	0.97
1/128	0.0024	1.00	0.0024	0.98
1/256	0.0012	1.00	0.0012	0.99
1/512	0.0006	1.00	0.0006	0.99

Tabla 3-31: (3-56)-(3-59) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_\epsilon$

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0342		0.0531	
1/8	0.0138	1.30	0.0201	1.39
1/16	0.0059	1.21	0.0079	1.33
1/32	0.0027	1.13	0.0033	1.26
1/64	0.0012	1.07	0.0014	1.18
1/128	0.0006	1.04	0.0006	1.11
1/256	0.0003	1.02	0.0003	1.06
1/512	0.0001	1.01	0.0001	1.03

Tabla 3-32: (3-26)-(3-29) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_\epsilon$

Ejemplo 7

Este último ejemplo tiene condiciones mixtas, fuente $f(x, t) = -1$ y condición inicial $g(x) = \frac{x^2}{2} + \cos \pi x$

$$u_t - u_{xx} = -1, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (3-61)$$

$$u(0, t) = e^{-\pi^2 t}, \quad t > 0 \quad (3-62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 1, \quad t > 0 \quad (3-63)$$

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{2} + \cos \pi x, \quad 0 < x < 1 \quad (3-64)$$

La solución exacta a este problema es $u(x, t) = \frac{x^2}{2} + (\cos \pi x) e^{-\pi^2 t}$.

Tomando $\phi_i^n \in \mathcal{P}_1(\varepsilon_h)$ y multiplicando por la ecuación (3-61) e integrando por partes, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_i^n(x)(u_t(x, t)) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\phi_i^n)'(x)(u_x(x, t)) dx \\ - \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_{n+1}, t) \phi_i^n(x_{n+1}^-) + \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) \phi_i^n(x_n^+) \\ = \int_{x_n}^{x_{n+1}} -\phi_i^n(x) dx \quad (3-65) \end{aligned}$$

Ahora, incluyendo el término de penalización y teniendo en cuenta el soporte de ϕ_i^n , la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_i^n(x)(u_t(x, t)) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\phi_i^n)'(x)(u_x(x, t)) dx \right) \\ - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) \right\} [\phi_i^n(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \{ (\phi_i^n)'(x_n) \} [u_h(x_n, t)] \\ = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_i^n(x) dx + \epsilon (\phi_i^n)'(x_0) e^{-\pi^2 t} \end{aligned}$$

Definimos, para el caso (3-61)-(3-64), el flujo numérico como

$$\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_m, t) = \begin{cases} \left\{ \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_m, t) \right\} - \varepsilon_2 \beta_2 [u_h(x_m, t) - g_D(x_0, t)] & 0 \leq m \leq N-1 \\ g_N(x_m) & m = N \end{cases}$$

debido a que el dato en x_0 es Dirichlet y en x_N es Neumann.

De la misma manera que en los ejercicios anteriores, las matrices locales M_n, K_n tienen la misma forma. Así mismo sucede con las matrices locales que involucran los nodos interiores B_n, C_n, D_n, E_n .

Para las matrices locales en los que intervienen los nodos de frontera tenemos

$$\begin{aligned} h_0 &= \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_0, t) \right) (\phi_i^0(x_0)) + \varepsilon_2 \beta_2 (u_h(x_0, t) - g_D(x_0)) \phi_i^0(x_0) - \epsilon u_h(x_0, t) (\phi_i^0)'(x_0) \\ &= \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_0, t) \right) (\phi_i^0(x_0)) + \varepsilon_2 \beta_2 \left(u_h(x_0, t) - e^{-\pi^2 t} \right) \phi_i^0(x_0) - \epsilon u_h(x_0, t) (\phi_i^0)'(x_0) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} h_0 &= \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_0, t) \right) (\phi_i^0(x_0)) + \varepsilon_2 \beta_2 (u_h(x_0, t)) \phi_i^0(x_0) - \epsilon u_h(x_0, t) (\phi_i^0)'(x_0) \\ &\quad - \varepsilon_2 \beta_2 e^{-\pi^2 t} \phi_i^0(x_0) \end{aligned}$$

donde el término $-\varepsilon_2 \beta_2 e^{-\pi^2 t} \phi_i^0(x_0)$, se debe ubicar al lado derecho. Por otra parte

$$h_N = -\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(x_N, t) [\phi_i^{N-1}(x_N)] = -g_N(x_N) [\phi_i^{N-1}(x_N)]$$

en general este valor puede depender de t , entonces se ubica en el vector a lado derecho

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\epsilon}{h_0} \\ \frac{1}{h_0} & -\frac{1}{h_0} + \varepsilon_2 \beta_2 + \frac{\epsilon}{h_0} \end{bmatrix}, \quad H_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Ahora la parte de la derecha de la ecuación (3-60), es el operador lineal $L(\phi_i^n)$

$$\begin{aligned} L(\phi_i^n) &= - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_i^n(x) dx - \epsilon (\phi_i^n)'(x_0) u(x_0, t) + \varepsilon_2 \beta_2 g_D(x_0) (\phi_i^0(x_0)) \\ &\quad + g_N(x_N) [\phi_i^{N-1}(x_N)] \end{aligned}$$

y aplicando la cuadratura de Simpson, tenemos para los nodos en la frontera

$$L(\phi_1^0) = -\frac{h}{2} - \frac{\epsilon}{h} e^{-\pi^2 t}$$

$$L(\phi_2^0) = -\frac{h}{2} + \frac{\epsilon}{h} e^{-\pi^2 t} + \varepsilon_2 \beta_2 e^{-\pi^2 t}$$

y

$$L(\phi_1^0) = -\frac{h}{2} + g_N(x_N)(1)$$

$$L(\phi_2^0) = -\frac{h}{2} + g_N(x_N)(0)$$

y los demás términos son

$$L(\phi_1^n) = -\frac{h}{2}$$

$$L(\phi_2^n) = -\frac{h}{2}$$

La condición inicial (3-59), se implementa aproximadamente como

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_h(x, 0) \phi_i^n(x) dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \cos \pi x \right) \phi_i^n(x) dx \\ &= \sum_n \int_{I_n} \left(\frac{x^2}{2} + \cos \pi x \right) \phi_i^n(x) dx, \end{aligned}$$

Entonces para $i = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_h(x, 0) \phi_1^n(x) dx &= \\ \sum_n \frac{h}{12} \left[\frac{x_n^2}{2} + x_n x_{n+1} + \frac{3}{2} x_{n+1}^2 \right] &+ \frac{\text{sen}(\pi x_{n+1})}{\pi} + \frac{\cos(\pi x_{n+1}) - \cos(\pi x_n)}{\pi^2 h} \end{aligned}$$

mientras que para $i = 2$

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_h(x, 0) \phi_2^n(x) dx &= \\ \sum_n \frac{h}{12} \left[\frac{x_{n+1}^2}{2} + x_n x_{n+1} + \frac{3}{2} x_n^2 \right] &- \frac{\text{sen}(\pi x_n)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x_n) - \cos(\pi x_{n+1})}{\pi^2 h} \end{aligned}$$

Para este ejemplo tenemos las siguientes tablas de errores numéricos

	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0469		0.0329	
1/8	0.0227	1.04	0.0186	0.82
1/16	0.0109	1.04	0.0099	0.90
1/32	0.0053	1.03	0.0051	0.95
1/64	0.0026	1.01	0.0025	0.98
1/128	0.0013	1.01	0.0013	0.99
1/256	0.0006	1.00	0.0006	0.99
1/512	0.0003	1.00	0.0003	0.99

Tabla 3-33: (3-56)-(3-59) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_{L^2}$

	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0591		0.0364	
1/8	0.0148	1.99	0.0077	2.24
1/16	0.0029	2.31	0.0014	2.39
1/32	0.0005	2.38	0.0002	2.45
1/64	0.0001	2.35	4.877×10^{-5}	2.45
1/128	2.311×10^{-5}	2.28	9.087×10^{-6}	2.42
1/256	5.039×10^{-6}	2.19	1.757×10^{-6}	2.37
1/512	1.156×10^{-6}	2.12	3.581×10^{-7}	2.29

Tabla 3-34: (3-26)-(3-29) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_{L^2}$

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.1040		0.1476	
1/8	0.0513	1.01	0.0611	1.27
1/16	0.0251	1.02	0.0275	1.15
1/32	0.0124	1.02	0.0130	1.08
1/64	0.0061	1.00	0.0063	1.04
1/128	0.0030	1.00	0.0031	1.02
1/256	0.0015	1.00	0.0015	1.01
1/512	0.0007	1.00	0.0007	1.00

Tabla 3-35: (3-56)-(3-59) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_\epsilon$

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.8926		0.4401	
1/8	0.4475	0.99	0.1862	1.24
1/16	0.1764	1.34	0.0709	1.39
1/32	0.0645	1.45	0.0261	1.43
1/64	0.0231	1.47	0.0098	1.41
1/128	0.0083	1.47	0.0038	1.36
1/256	0.0030	1.44	0.0015	1.28
1/512	0.0011	1.40	0.0006	1.19

Tabla 3-36: (3-26)-(3-29) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_\epsilon$

3.2. DG para resolver el problema de Convección-Difusión

A continuación se implementará el método DG para un problema parabólico, el cual modela el proceso de convección-difusión que presenta una sustancia química, con concentración $u(x, t)$ en una solución.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad 0 < x < 1, t > 0; \quad (3-66)$$

$$\gamma u(0, t) + \eta \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \psi(t) \quad t > 0; \quad (3-67)$$

$$\mu u(1, t) + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \chi(t) \quad t > 0; \quad (3-68)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 1. \quad (3-69)$$

De la misma manera que para el problema del calor, cuando $\eta = \lambda = 0$, $\gamma = \mu = 1$ las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet, mientras que si $\eta = \mu = 0$, $\gamma = \lambda = 1$ ó $\gamma = \lambda = 0$, $\eta = \mu = 1$ el problema tiene condiciones mixtas (Dirichlet-Neumann).

En este caso el parámetro b es el coeficiente de difusión y a es el coeficiente de convección. Este problema difiere de (3-1) - (3-4) en la adición del término convectivo au_x .

La discretización para el problema (3-74) - (3-76) se realizará siguiendo el mismo esquema que para el problema del calor dada en el capítulo anterior.

Sea $v \in \mathcal{P}_k(\varepsilon_h)$, al multiplicar (3-74) por v , se tiene

$$vu_t + vau_x = vbu_{xx}$$

integrando sobre cada I_n

$$\begin{aligned} & \int_{x_n}^{x_{n+1}} (v(x)u_t(x, t) + av(x)u_x(x, t))dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} bv(x)u_{xx} dx \\ & \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)u_t(x, t)dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} av(x)u_x - bv(x)u_{xx}(x, t)dx = 0 \\ & \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x)u_t(x, t)dx - \int_{x_n}^{x_{n+1}} bv(x)u_{xx}(x, t)dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} av(x)u_x(x, t) dt = 0, \end{aligned}$$

aplicando integración por partes, sumando las N ecuaciones y teniendo en cuenta que el flujo numérico es conservativo

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} u_t(x, t)v(x)dx + b \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{dv}{dx}(x)dx \right) \\ & - b \sum_{n=0}^N \left\{ \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(x_n, t) \right\} [v(x_n)] + a \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)v(x) dx = 0. \end{aligned}$$

agrupando los términos

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} u_t(x, t)v(x)dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \left(b \frac{dv}{dx}(x) + av(x) \right) dx \right) \\ & - b \sum_{n=0}^N \left\{ \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(x_n, t) \right\} [v(x_n)] = 0. \end{aligned}$$

Además, la solución u es continua, entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} u_t(x, t) v(x) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \left(b \frac{dv}{dx}(x) + av(x) \right) dx \right) \\ & - b \sum_{n=0}^N \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) [v(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^N \{v'(x_n)\} [u(x_n, t)] = -\epsilon v'(x_0) u(x_0, t) + \epsilon v'(x_N) u(x_N, t) \\ & = -\epsilon v'(x_0) g_1(t) + \epsilon v'(x_N) g_2(t). \end{aligned} \quad (3-70)$$

Para este problema la forma bilineal $\mathbf{b}_\epsilon : \mathcal{P}_k(\varepsilon_h) \times \mathcal{P}_k(\varepsilon_h) \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(w_h, v) = & \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) (w_h)_t(x, t) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial w_h}{\partial x}(x, t) \left(b \frac{dv}{dx}(x) + av(x) \right) dx \right) \\ & - b \sum_{n=0}^N \frac{\widehat{\partial w_h}}{\partial x}(x_n, t) [v(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^N \{v'(x_n)\} [w_h(x_n, t)] \end{aligned} \quad (3-71)$$

donde $w_h(t) \in \mathcal{P}_k(\varepsilon_h)$ para todo $t \geq 0$.

Por otra parte, la forma lineal L es

$$L(v) = -\epsilon g_1(t) v'(x_0) + \epsilon g_2(t) v'(x_N) \quad (3-72)$$

Para el problema (3-74)-(3-76), se define el flujo numérico como

$$\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_m, t) = \begin{cases} \left\{ \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_m, t) \right\} - \varepsilon_2 \beta_2 [u_h(x_m, t)], & \text{si } 1 \leq m \leq N-1 \\ \left\{ \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_m, t) \right\} - \varepsilon_2 \beta_2 \left[u_h(x_m, t) - \left(\frac{N-m}{N} g_1(t) + \frac{m}{N} g_2(t) \right) \right], & \text{si } m \in \{0, N\} \end{cases} \quad (3-73)$$

tomando $\phi_i^n \in \mathcal{P}_k(\varepsilon_h)$ y reemplazando $v = \phi_i^n$, la ecuación (3-70) queda

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} u_t(x, t) \phi_i^n(x) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) (b(\phi_i^n)'(x) + a\phi_i^n(x)) dx \right) \\ & - b \sum_{n=0}^N \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x}(x_n, t) [\phi_i^n(x_n)] + \epsilon \sum_{n=0}^N \{(\phi_i^n)'(x_n)\} [u(x_n, t)] = -\epsilon (\phi_i^n)'(x_0) g_1(t) + \epsilon (\phi_i^n)'(x_N) g_2(t). \end{aligned}$$

Para formar el sistema de EDO's, de nuevo se reagrupan los términos que involucran integrales y los términos que involucran nodos.

Los términos que involucran integrales son

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} u_t(x, t) \phi_i^n(x) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) (b(\phi_i^n)'(x) + a\phi_i^n(x)) dx \right) \quad \forall i = 1, 2$$

y por definición de u_h , éstos términos son

$$\sum_{j=1}^2 (\alpha_j^n)'(t) \int_{I_n} \phi_j^n(x) \phi_i^n(x) dx + \sum_{j=1}^2 (\alpha_j^n)(t) \int_{I_n} (\phi_j^n)'(x) (b(\phi_i^n)'(x) + a(\phi_i^n)(x)) dx \quad \forall i = 1, 2$$

Estos términos producen matrices locales

$$(M_n)_{ij} = \int_{I_n} \phi_j^n(x) \phi_i^n(x) dx, \quad (K_n)_{ij} = \int_{I_n} (\phi_j^n)'(x) (b(\phi_i^n)'(x) + a(\phi_i^n)(x)) dx$$

es decir

$$M_n = \begin{bmatrix} \frac{h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix}, \quad K_n = \begin{bmatrix} \frac{b}{h_n} + \frac{a}{2} & \frac{-b}{h_n} - \frac{a}{2} \\ \frac{-b}{h_n} + \frac{a}{2} & \frac{b}{h_n} - \frac{a}{2} \end{bmatrix}.$$

Los términos que involucran nodos resultan de evaluar el flujo numérico, los promedios y saltos en los nodos; como estos términos resultan ser iguales a los dados para el problema del calor, las matrices resultantes son iguales, esto es

$$B_n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\epsilon}{2h_n} \\ \frac{1}{2h_n} & \frac{-1}{2h_n} + \epsilon_2\beta_2 + \frac{\epsilon}{2h_n} \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2h_{n-1}} + \epsilon_2\beta_2 + \frac{\epsilon}{2h_{n-1}} & \frac{1}{2h_{n-1}} \\ \frac{-\epsilon}{2h_{n-1}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_n = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2h_n} & \frac{1}{2h_n} - \epsilon_2\beta_2 - \frac{\epsilon}{2h_{n-1}} \\ 0 & \frac{\epsilon}{2h_{n-1}} \end{bmatrix}, \quad E_n = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{2h_{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{2h_{n-1}} - \epsilon_2\beta_2 - \frac{\epsilon}{2h_n} & \frac{-1}{2h_{n-1}} \end{bmatrix},$$

Por otra parte, las matrices locales que surgen de las condiciones de frontera en x_0 y en x_N son

$$h_0 = \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_0, t) \right) (\phi_i^0(x_0)) + \epsilon_2\beta_2 u_h(x_0, t) \phi_i^0(x_0) - \epsilon u_h(x_0, t) (\phi_i^0)'(x_0) - \epsilon_2\beta_2 g_1(t) \phi_i^0(x_0)$$

$$h_N = - \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_N, t) \right) (\phi_i^{N-1}(x_N)) + \epsilon_2\beta_2 u_h(x_N, t) \phi_i^{N-1}(x_N) + \epsilon u_h(x_N, t) (\phi_i^{N-1})'(x_N) - \epsilon_2\beta_2 g_2(t) \phi_i^{N-1}(x_N)$$

Ejemplo 8

Este ejemplo modela un proceso de convección-difusión, con condiciones Dirichlet homogéneas, fuente $f(x, t) = \pi e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x)$ y condición inicial $g(x) = \text{sen } \pi x$, $x \in (0, 1)$

$$u_t + u_x - u_{xx} = \pi e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x); \quad (3-74)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0; \quad (3-75)$$

$$u(x, 0) = \text{sen } \pi x, \quad x \in (0, 1). \quad (3-76)$$

Aplicando el método DG, tenemos

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0062		0.0004	
1/8	0.0012	2.36	0.0008	2.17
1/16	0.0002	2.02	0.00002	1.86
1/32	9.43×10^{-5}	1.65	8.29×10^{-5}	1.56
1/64	3.65×10^{-5}	1.36	3.31×10^{-5}	1.32
1/128	1.59×10^{-5}	1.19	1.46×10^{-5}	1.17
1/256	7.46×10^{-6}	1.09	6.90×10^{-6}	1.08
1/512	3.60×10^{-6}	1.05	3.34×10^{-6}	1.04

Tabla 3-37: Orden y error numérico para el problema (3-74)-(3-76) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_{L^2}$

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.097		0.0269	
1/8	0.0017	2.46	0.0041	2.70
1/16	0.0003	2.18	0.0007	2.38
1/32	9.25×10^{-5}	2.07	0.0001	2.19
1/64	2.25×10^{-5}	2.03	4.01×10^{-5}	2.09
1/128	5.58×10^{-6}	2.01	9.74×10^{-6}	2.04
1/256	1.38×10^{-6}	2.00	2.43×10^{-6}	2.00
1/512	3.46×10^{-7}	2.00	6.38×10^{-7}	1.92

Tabla 3-38: Orden y error numérico para el problema (3-74)-(3-76) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_{L^2}$

h	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.0179		0.0094	
1/8	0.0036	2.28	0.0025	1.91
1/16	0.0009	1.99	0.0007	1.76
1/32	0.0002	1.64	0.0002	1.53
1/64	0.0001	1.36	0.0001	1.31
1/128	5.00×10^{-5}	1.19	4.57×10^{-5}	1.16
1/256	2.33×10^{-5}	1.09	2.15×10^{-5}	1.08
1/512	1.12×10^{-5}	1.04	1.04×10^{-5}	1.04

Tabla 3-39: Orden y error numérico para el problema (3-74)-(3-76) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_\epsilon$

h	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
	error	orden	error	orden
1/4	0.1543		0.4950	
1/8	0.00615	1.32	0.1656	1.57
1/16	0.0288	1.09	0.0686	1.27
1/32	0.0140	1.03	0.0313	1.13
1/64	0.0069	1.01	0.015	1.06
1/128	0.0034	1.00	0.0073	1.03
1/256	0.0017	1.00	0.0036	1.01
1/512	0.0008	1.00	0.0018	1.00

Tabla 3-40: Orden y error numérico para el problema (3-74)-(3-76) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_\epsilon$

Ejemplo 9

Para el siguiente problema de convección-difusión

$$u_t + au_x = bu_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0; \quad (3-77)$$

$$u(0, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{\left(-\frac{a^2(1+t)}{4b}\right)} \quad t > 0; \quad (3-78)$$

$$u(1, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{\left(-\frac{(1-a(1+t))^2}{4b(1+t)}\right)} \quad t > 0; \quad (3-79)$$

$$u(x, 0) = e^{\left(-\frac{(x-a)^2}{4b}\right)}, \quad 0 < x < 1. \quad (3-80)$$

la solución analítica dada en [1] es $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{\left(-\frac{(x-a(1+t))^2}{4b(1+t)}\right)}$.

Aplicando el método tenemos las siguientes aproximaciones

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0012		0.0009	
1/8	0.0004	1.32	0.0004	1.01
1/16	0.0002	1.09	0.0002	1.00
1/32	0.0001	1.02	0.0001	1.01
1/64	5.63×10^{-5}	1.00	5.65×10^{-5}	1.00
1/128	2.81×10^{-5}	1.00	2.81×10^{-5}	1.00
1/256	1.40×10^{-5}	1.00	1.4×10^{-6}	1.00
1/512	7.02×10^{-6}	1.00	7.02×10^{-6}	1.00

Tabla 3-41: Orden y error numérico para el problema (3-77)-(3-80) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_{L^2}$

	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.097		0.0269	
1/8	0.0017	2.46	0.0041	2.70
1/16	0.0003	2.18	0.0007	2.38
1/32	9.25×10^{-5}	2.07	0.0001	2.19
1/64	2.25×10^{-5}	2.03	4.01×10^{-5}	2.09
1/128	5.58×10^{-6}	2.01	9.74×10^{-6}	2.04
1/256	1.38×10^{-6}	2.00	2.43×10^{-6}	2.00
1/512	3.46×10^{-7}	2.00	6.38×10^{-7}	1.92

Tabla 3-42: Orden y error numérico para el problema (3-77)-(3-80) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_{L^2}$

con la norma $\|e_h\|_{L^2}$, el error de aproximación del método es de primer orden con el método de Euler implícito, mientras que es de segundo orden con el método de Crank-Nicholson.

Con la norma de la energía $\|e_h\|_{\epsilon}$, el método es de primer orden para las dos discretizaciones en el tiempo.

	$\epsilon = 1, \epsilon_2 = 1$		$\epsilon = -1, \epsilon_2 = 2$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.0179		0.0094	
1/8	0.0036	2.28	0.0025	1.91
1/16	0.0009	1.99	0.0007	1.76
1/32	0.0002	1.64	0.0002	1.53
1/64	0.0001	1.36	0.0001	1.31
1/128	5.00×10^{-5}	1.19	4.57×10^{-5}	1.16
1/256	2.33×10^{-5}	1.09	2.15×10^{-5}	1.08
1/512	1.12×10^{-5}	1.04	1.04×10^{-5}	1.04

Tabla 3-43: Orden y error numérico para el problema (3-77)-(3-80) con Euler implícito y norma $\|e_h\|_\epsilon$

	$\epsilon = 1$		$\epsilon = -1$	
h	error	orden	error	orden
1/4	0.1543		0.4950	
1/8	0.00615	1.32	0.1656	1.57
1/16	0.0288	1.09	0.0686	1.27
1/32	0.0140	1.03	0.0313	1.13
1/64	0.0069	1.01	0.015	1.06
1/128	0.0034	1.00	0.0073	1.03
1/256	0.0017	1.00	0.0036	1.01
1/512	0.0008	1.00	0.0018	1.00

Tabla 3-44: Orden y error numérico para el problema (3-77)-(3-80) con Crank-Nicholson y norma $\|e_h\|_\epsilon$

3.3. Conclusiones

La aplicación del método DG a los ejemplos de la ecuación de calor en este capítulo, mantienen el orden de convergencia para la discretización temporal, esto es, 1 para el método de Euler y 2 para el método de Crank-Nicholson, siempre que se calculen los errores con la norma $\|e_h\|_{L^2}$.

Por otra parte las aproximaciones obtenidas utilizando la norma de la energía mantienen por lo menos el primer orden en ambos métodos de discretización en tiempo, estos son Euler implícito y Crank-Nicholson.

El método DG aplicado al problema de convección difusión, también mantiene el orden para la discretización temporal de Euler y para la de Crank-Nicholson, siempre que dicha aproximación se calcule con la norma $\|e_h\|_{L^2}$. Cuando se aplica la norma de la energía se logra conseguir el primer orden tanto para Euler implícito como para Crank-Nicholson.

4 Conclusiones

Este trabajo se realiza como un primer acercamiento a la solución del problema de Convección-Difusión utilizando el método DG, por parte del grupo de investigación “Cálculo Científico y Modelamiento Matemático”. Por esta razón, este trabajo es el punto de partida para desarrollar o implementar los métodos DG en futuras investigaciones, en la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.

En este trabajo, se implementó un método de Galerkin Discontinuo (DG) para resolver un problema de Convección-Difusión de dimensión uno siguiendo tres etapas. La primera de ellas corresponde a resolver el problema elíptico de dimensión uno dado por las ecuaciones (2-19)–(2-21), utilizando el método DG con una base de polinomios lineales a trozos y un flujo numérico dado por la ecuación (2-40). Luego se muestra la forma de calcular los términos de la formulación variacional discreta para formar las matrices locales que se incluirán en la matriz global.

En la segunda y tercera parte, se realiza una extensión del método anterior para el problema parabólico de dimensión uno, primero aplicado al problema de calor (difusión) y posteriormente al problema de Convección-Difusión.

4.1. Conclusiones del método

El método DG implementado conserva el orden del error numérico para el método de diferencias finitas, es decir, si se aplica la discretización temporal con Euler implícito, el error numérico de la aproximación es de primer orden; mientras que para la discretización con Crank-Nicholson, el error numérico para la aproximación puede ser de segundo orden (para una elección adecuada de los términos de penalización).

El método implementado presenta una aproximación numérica satisfactoria, además de tener eficiencia computacional y el error numérico conserva el orden que se muestra en la literatura, como en [57]. Por esta razón, el método DG es completamente consistente y estable; adicionalmente, para los valores de los parámetros elegidos se mantiene por lo menos el primer orden en el error numérico.

4.2. Futuros trabajos

En esta línea de investigación se puede extender la implementación del método a las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, además de discretizar el dominio temporal utilizando otros métodos para problemas de valor inicial, como el de Runge-Kutta, Runge-Kutta-Fehlberg o el mismo DG en tiempo.

Por otra parte se pueden implementar diferentes bases para los elementos como polinomios de orden mayor o igual a 2, o incluso generar métodos adaptativos; se puede implementar el método para ecuaciones con coeficientes de difusión o convección no constantes y, profundizando un poco más, implementar este tipo de método en problemas de dimensión 2.

Bibliografía

- [1] ACOSTA, Carlos D. ; MEJIA, Carlos E.: Stabilization of explicit methods for convection diffusion equations by discrete mollification. En: *An International Journal computers & mathematics with applications* vol. 55 (2008), p. 368–380
- [2] ADJERID, Slimane ; BACCOUCH, Mahboub: A Superconvergent Local Discontinuous Galerkin Method for Elliptic Problems. En: *Journal of Scientific Computing* 52 (2012), Nr. 1, p. 113–152. – ISSN 0885–7474
- [3] AIZINGER, Vadym ; DAWSON, Clint ; COCKBURN, Bernardo ; CASTILLO, Paul. *The Local Discontinuous Galerkin Method for Contaminant Transport*. 2000
- [4] ARNOLD, D.: An Interior Penalty Finite Element Method with Discontinuous Elements. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 19 (1982), Nr. 4, p. 742–760
- [5] ARNOLD, D. N.: *An Interior Penalty Finite Element Method with Discontinuous Elements*. Chicago, IL, The University of Chicago, Tesis de Grado, 1979
- [6] ARNOLD, D. N. ; BREZZI, F. ; COCKBURN, B. ; MARINI, L. D.: Mixed Discontinuous Galerkin Methods for Darcy Flow. En: *SIAM J. Numer. Anal.* (2002)
- [7] ARNOLD, D. N. ; BREZZI, F. ; COCKBURN, B. ; MARINI, L. D.: Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems. En: *SIAM J. Numer. Anal.* 39 (2002), p. 1749–1779
- [8] BAAIJENS, Frank P.: Application of low-order Discontinuous Galerkin methods to the analysis of viscoelastic flows. En: *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 52 (1994), Nr. 1, p. 37 – 57. – ISSN 0377–0257
- [9] BABUSKA, I. ; BAUMANN, C. E. ; ODEN, J. T.: A Discontinuous *hp* Finite Element Method for Diffusion Problems: 1-D Analysis. En: *An International Journal computers & mathematics with applications* (2002)
- [10] BAHAR, A. ; BARANGER, J. ; SANDRI, D.: Galerkin discontinuous approximation of the transport equation and viscoelastic fluid flow on quadrilaterals. En: *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 14 (1998), Nr. 1, p. 97–114. – ISSN 1098–2426

-
- [11] BAKER, Garth A.: Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. En: *Math. Comp* 31, Nr. 137
- [12] BASSI, F. ; REBAY, S.: A high-order accurate discontinuous finite element for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. En: *J. Comput. Phys.* 131 (1997), p. 267–279
- [13] BASSI, F. ; REBAY, S.: High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equations. En: *J. Comput. Phys.* 138 (1997), p. 251–285
- [14] BAUMANN, C. ; ODEN, J.: A discontinuous hp-finite element method for Navier-Stokes equations. En: *Proceedings of the 10th International Conference on Finite Element in Fluids*, 1998
- [15] BAUMANN, C. ; ODEN, J.: A discontinuous hp-finite element method for the solution of the Euler equation of gas dynamics. En: *Proceedings of the 10th International Conference on Finite Element in Fluids*, 1998
- [16] BREZIS, Haim: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. 233 Spring Street, New York, NY 10013 : Springer, (1988)
- [17] BREZZI, F. ; MANZINI, G. ; MARINI, D. ; PIETRA, P. ; RUSSO, A.: Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems. En: *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 16 (2000), Nr. 4, p. 365–378. – ISSN 1098–2426
- [18] BURDEN, Richard L. ; FAIRES, J. D.: *Análisis Numérico*. Calle 39 No. 24-09, Bogotá, Colombia : Thomson Learning, 2002
- [19] BUSTINZA, Rommel A.: *Análisis Numérico de Problemas de Transmisión con Discontinuidades*. Concepción-Chile, Universidad de Concepción, Tesis de Doctorado en Ingeniería Matemática con mención en Ciencias Aplicadas, Junio (2004)
- [20] CARRANZA, F.L. ; HABER, R.B.: An Adaptive Discontinuous Galerkin Model for Coupled Viscoplastic Crack Growth and Chemical Transport. En: COCKBURN, Bernardo (Ed.) ; KARNIADAKIS, GeorgeE. (Ed.) ; SHU, Chi-Wang (Ed.): *Discontinuous Galerkin Methods* Vol. 11. Springer Berlin Heidelberg, 2000. – ISBN 978–3–642–64098–8, p. 277–283
- [21] CASCALES, B. ; MIRA, J.M. ; ORIHUELA, J. ; RAJA, M.: *Análisis Funcional*. Ediciones Electolibris. – ISBN 9788494068829
- [22] CASTILLO, Paul ; COCKBURN, Bernardo ; PERUGUA, Ilaria ; SCHÖTZAU, Dominik: An A Priori Error Analysis Of The Local Discontinuous Galerkin Method For Elliptic Problems. En: *SIAM J. Numer. Anal.* 38 (2000), p. 1676 – 1706
- [23] CHEN, Zhangxin ; COCKBURN, Bernardo ; GARDNER, Carl L. ; JEROME, Joseph W.:

- Quantum Hydrodynamic Simulation of Hysteresis in the Resonant Tunneling Diode. En: *Journal of Computational Physics* 117 (1995), Nr. 2, p. 274 – 280. – ISSN 0021–9991
- [24] CHEN, Zhangxin ; COCKBURN, Bernardo ; JEROME, Joseph W. ; SHU, C. W.: Mixed-RKDG finite element methods for the 2-D hydrodynamic model for semiconductor device simulation. En: *VLSI Des.* 3 (1995), p. 145 – 158
- [25] COCKBURN, B.: Discontinuous Galerkin methods. En: *ZAMM* vol. 11 (2003), p. 731–754
- [26] COCKBURN, B. ; KANSCHAT, G. ; PERUGIA, I. ; SCHÖTZAU, D.: Superconvergence of the Local Discontinuous Galerkin Method for Elliptic Problems on Cartesian Grids. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 39 (2001), Nr. 1, p. 264–285
- [27] COCKBURN, B. ; SHU, C. W.: The Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws V: Multidimensional systems. En: *J. Comput. Phys.* 141 (1998), p. 199–224
- [28] COCKBURN, Bernardo: An introduction to the Discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems. En: QUARTERONI, Alfio (Ed.): *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations* Vol. 1697. Springer Berlin Heidelberg, 1998. – ISBN 978–3–540–64977–9, p. 151–268
- [29] COCKBURN, Bernardo ; DAWSON, Clint. *Some Extensions Of The Local Discontinuous Galerkin Method For Convection-Diffusion Equations In Multidimensions.* 1999
- [30] COCKBURN, Bernardo ; DAWSON, Clint: Approximation of the Velocity by Coupling Discontinuous Galerkin and Mixed Finite Element Methods for Flow Problems. En: *Computational Geosciences* 6 (2002), Nr. 3-4, p. 505–522. – ISSN 1420–0597
- [31] COCKBURN, Bernardo ; KANSCHAT, Guido ; SCHÖTZAU, Dominik: The local discontinuous Galerkin method for the Oseen equations. En: *Math. Comp* 73 (2002), Nr. 246, p. 569–593
- [32] COCKBURN, Bernardo ; KANSCHAT, Guido ; SCHÖTZAU, Dominik: Local discontinuous Galerkin method for the Stokes systems. En: *SIAM Numer. Anal.* 40 (2002), p. 319–343
- [33] COCKBURN, Bernardo ; KARNIADAKIS, GeorgeE. ; SHU, Chi-Wang: The Development of Discontinuous Galerkin Methods. En: COCKBURN, Bernardo (Ed.) ; KARNIADAKIS, GeorgeE. (Ed.) ; SHU, Chi-Wang (Ed.): *Discontinuous Galerkin Methods* Vol. 11. Springer Berlin Heidelberg, 2000. – ISBN 978–3–642–64098–8, p. 3–50
- [34] COCKBURN, Bernardo ; SHU, Chi-Wang: The Local Discontinuous Galerkin Method for Time Dependent Convection-Diffusion System. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* (1998)

- [35] DAWSON, Clint ; AIZINGER, Vadym ; COCKBURN, Bernardo: The Local Discontinuous Galerkin Method for Contaminant Transport Problems. En: COCKBURN, Bernardo (Ed.) ; KARNIADAKIS, GeorgeE. (Ed.) ; SHU, Chi-Wang (Ed.): *Discontinuous Galerkin Methods* Vol. 11. Springer Berlin Heidelberg, 2000. – ISBN 978–3–642–64098–8, p. 309–314
- [36] DELVES, L. ; HALL, C.: An implicit matching principle for global element calculations. En: *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications* 23 (1979)
- [37] DOLEJSI, V.: *hp*-DGFEM for nonlinear convection-diffusion problems with applications in compressible flow. En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2011)
- [38] DÍAZ, Héctor G.: Una nueva formulación para el problema del transporte por convección-difusión / Universidad de A Coruña. – Informe de Investigación
- [39] FALK, R. ; RICHTER, G.: Explicit Finite Element Methods for Symmetric Hyperbolic Equations. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 36 (1999), Nr. 3, p. 935–952
- [40] ; FARIAS, H. D. (Ed.) ; BREA, J. D. (Ed.) ; CAZENUEVE, R. (Ed.): *Método de Galerkin discontinuo para la solución de la evolución de un lecho erosionable*. 2005
- [41] FORTIN, M. ; FORTIN, A.: New approach for the finite element method simulation of viscoelastic flows. En: *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 32 (1989), p. 295–310
- [42] GOCKENBACH, Mark S.: *Partial Differential Equations, Analytical and Numerical Methods*. Houghton, Michigan : Society for Industrial and Applied Mathematics, (2002)
- [43] GOCKENBACH, Mark S.: *Understanding and Implementing the Finite Element Method*. Houghton, Michigan : Society for Industrial and Applied Mathematics, (2006)
- [44] GREMAUD, Pierre A. ; MATTHEWS, John V.: Simulation of Gravity Flow of Granular Materials in Silos. En: COCKBURN, Bernardo (Ed.) ; KARNIADAKIS, George E. (Ed.) ; SHU, Chi-Wang (Ed.): *Discontinuous Galerkin Methods* Vol. 11. Springer Berlin Heidelberg, 2000. – ISBN 978–3–642–64098–8, p. 125–134
- [45] GREMAUD, Pierre A. ; MATTHEWS, John V.: On the Computation of Steady Hopper Flows: I. Stress Determination for Coulomb Materials. En: *Journal of Computational Physics* 166 (2001), Nr. 1, p. 63 – 83. – ISSN 0021–9991
- [46] J. DOUGLAS, Jr ; DUPONT, T.: Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. En: *Springer-Verlag* 58 (1976)
- [47] KLÖCKNER, A. ; WARBURTON, T. ; BRIDGE, J. ; HESTHAVEN, J. S.: Nodal Discontinuous Galerkin Methods on Graphics Processors. En: *Preprint submitted to Elsevier* (2009)
- [48] LESAINTE, P. ; RAVIART, P. A.: On a finite element method for solving the neutron

- transport equation. En: *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations* (1974), p. 89–145
- [49] LIN, Q. ; ZHOU, A. H.: Convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. En: *Acta Math. Sci* 13 (1993), p. 207–210
- [50] LOMTEV, I. ; KARNIADAKIS, G.: A discontinuous Galerkin method for the Navier-Stokes equations. En: *J. Numer. Methods Fluids* 29 (1999), p. 587–603
- [51] LOMTEV, I. ; QUILLEN, C. ; KARNIADAKIS, G.: Spectral / hp methods for viscous compressible flows on unstructured 2D meshes. En: *J. Comput. Phys.* 144 (1998), p. 325–357
- [52] NITSCHKE, J.: Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. En: *Abh. Math. Sem. Univ Hamburg* 36 (1971), p. 9–15
- [53] PETERSON, T.: A Note on the Convergence of the Discontinuous Galerkin Method for a Scalar Hyperbolic Equation. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 28 (1991), Nr. 1, p. 133–140
- [54] In: REED, W.H. ; HILL, T.R.: *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*. 1973
- [55] RIVIÈRE, B. ; WHEELER, M. F.: A discontinuous Galerkin method applied to nonlinear parabolic equations. En: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* 11 (2000), p. 231–244
- [56] RIVIÈRE, B. ; WHEELER, M. F. ; GIRAULT, V.: Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. En: *Part I. Comput. Geosc* (1999), p. 337–360
- [57] RIVIÈRE, Béatrice: *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations*. Houston, Texas : Society for Industrial and Applied Mathematics, (2008)
- [58] SEWELL, Granville: *The Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*. En: *Academic Press* (1998)
- [59] SOLÍS, Maria Luisa S.: *Métodos Iterativos Eficientes para Problemas de Convección-Difusión transitorios*. Barcelona, UPC, Tesis de Grado, May 2006
- [60] WARBURTON, T. ; KARNIADAKIS, G.: A discontinuous Galerkin methods for the viscous MHD equations. En: *J. Comput. Phys* 152 (1999), p. 1–34
- [61] WHEELER, M.: An Elliptic Collocation-Finite Element Method with Interior Penalties. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 15 (1978), Nr. 1, p. 152–161

-
- [62] ZHENG ZHANG, Zuo ; QING XIE, Zi ; TAO, Xia: A Robust Discontinuous Galerkin Method for Solving Convection-diffusion Problems. En: *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* (2008)
- [63] ZHOU, A. H. ; LIN, Q.: Optimal and superconvergence estimates of the finite element method for a scalar hyperbolic equation. En: *Acta Math. Sci* 14 (1994), p. 90–94