

*Partición de la volatilidad para series de precios bursátiles:
Una nueva aproximación*

IVAN ALEXIS FONSECA DIAZ

ESTADÍSTICO

CÓDIGO:



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
BOGOTÁ, D.C.
ABRIL DE 2016

*Partición de la volatilidad para series de precios bursátiles:
Una nueva aproximación*

IVAN ALEXIS FONSECA DIAZ

ESTADÍSTICO

CÓDIGO:

DISERTACIÓN PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS ESTADÍSTICA

DIRECTOR

EDILBERTO CEPEDA

DOCTOR EN ESTADÍSTICA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

BOGOTÁ, D.C.

ABRIL DE 2016

Título en español

Partición de la volatilidad para series de precios bursátiles: Una nueva aproximación

Title in English

Partition of volatility in stock prices series : A new approach

Resumen: En este trabajo de tesis se comparan cuatro modelos autorregresivos condicionales heterocedásticos (ARCH), los cuales han sido comunmente usados en la selección de portafolios y gestión de activos, así como en la valoración de activos primarios y secundarios. Estos modelos se ajustarán a series de precios bursátiles intradiarios. Esta comparación se hará a través de sus curvas de impacto de retorno, su habilidad para predecir la volatilidad en mercados financieros y los efectos de cada uno de estos modelos en el marco de la valoración de opciones. Adicionalmente, presentamos un modelo de difusión, el cual permite particionar la volatilidad en sus componentes estacionales. Nuestros resultados sugieren que el modelo de difusión propuesto, provee una mejor descripción de la varianza condicional y su predicción. .

Abstract: This thesis compares four autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) type models, which are used often for portfolio selection and asset management, as well as for the pricing of primary and derivative assets. We estimate these models with daily stock return data. The comparison is done through their news impact curves, their ability to predict financial market volatility and the effects of each of these models, in the pricing options framework. Our results suggest a diffusion model, provides a better description of the conditional variance, and its predictions.

Palabras clave: Opciones, acciones, retornos, volatilidad, in the money, out the money, moneyness

Keywords: Options, stock, return, volatility, in the money, out the money, moneyness

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

“Mención ”

Jurado

Jurado

Jurado

Director

Codirector

Bogotá, D.C., Abril de 2016

Índice general

Índice general	I
Índice de tablas	III
Índice de figuras	IV
1. Medición de la volatilidad en series de precios de alta frecuencia	1
1.1. Introducción	1
1.2. Modelos Generalizados Autorregresivos Condicionales Heterocedasticos . .	2
1.3. Modelos GARCH asimétricos	2
1.4. Estimación	4
2. Nueva Aproximación: Modelo FD-GARCH	15
2.1. Introducción	15
2.2. Presentación del modelo	15
2.3. Estimación	19
3. Valoración de activos primarios y derivados	22
3.1. Introducción	22
3.2. Proceso de valoración de activos bajo volatilidad constante	22
3.3. Modelo de valoración de activos bajo volatilidad heteroscedástica	24
3.4. Simulación de Martingalas Empíricas	26
3.5. Modelo de valoración de Opciones HN-GARCH	27
3.6. Aplicación	30
3.6.1. Valoración de Opciones para retornos diarios	30
3.6.2. Valoración de opciones con retornos intradiarios	36
4. Conclusiones	38

5. Referencias Bibliográficas

Índice de tablas

1.1. Parámetros estimados para el modelo EGARCH	5
1.2. Estadística Q sobre los Residuales Estandarizados para el modelo EGARCH	6
1.3. Estadística Q sobre los Residuales Cuadrados Estandarizados para el modelo EGARCH	6
1.4. Prueba del Signo del Sesgo para el modelo EGARCH	7
1.5. Parámetros estimados para el modelo GJR-GARCH	8
1.6. Prueba del Signo del Sesgo para el modelo GJR-GARCH	9
1.7. Estadística Q sobre los Residuales Estandarizados para el modelo GJR-GARCH	10
1.8. Estadística Q sobre los Residuales Cuadrados Estandarizados para el modelo GJR-GARCH	10
1.9. Parámetros estimados para el modelo GARCH	11
1.10. Estadística Q sobre los Residuales Estandarizados para el modelo GARCH .	11
1.11. Estadística Q sobre los Residuales Cuadrados Estandarizados para el modelo GARCH	12
1.12. Prueba del Signo del Sesgo para el modelo GARCH	12
2.1. Parámetros estimados del nuevo modelo	20

Índice de figuras

1.1. Series de precios y retornos bursátiles de AMZN and Goog	4
1.2. Curva de Nuevos Impactos	13
2.1. Autocorrelación de la volatilidad en retornos intradiarios	16
2.2. Volatilidad realizada	17
2.3. Distribución condicional empírica de los retornos	17
2.4. Media de la distribución condicional de los retornos	18
2.5. Curva de Nuevos Impactos	21
3.1. Desviación estándar condicional simulada	30
3.2. Volatilidad implícita BS	31
3.3. Volatilidad implícita para el modelo EGARCH	32
3.4. Volatilidad implícita para el modelo GJR-GARCH	33
3.5. Volatilidad implícita para el modelo HN-GARCH	34
3.6. Volatilidad implícita para el modelo GARCH	35
3.7. Volatilidad implícita a un mes de maduración	36
3.8. Volatilidad implícita para retornos intradiarios	37

Medición de la volatilidad en series de precios de alta frecuencia

1.1. Introducción

Los modelos de valoración de opciones presentaron una primera aproximación con Black-Scholes-Merton(1973), quien desarrolló su fórmula bajo el supuesto de que el precio del activo subyacente sigue un Movimiento Browniano Geométrico de varianza constante. Sin embargo, se sabe que las series de precios de activos financieros tienen un comportamiento heteroscedástico, el cual depende de los valores históricos de los precios del activo. Por esta razón se han desarrollado modelos de valoración de opciones que incorporan modelos de volatilidad estocástica y modelos de la familia GARCH.

Empíricamente han sido encontrados algunos factores estilizados presentes en las series de retornos, los cuales son de especial interés para muchos modelos. Entre estos factores se tiene que la distribución de los retornos es de colas pesadas, lo cual tiene fuertes implicaciones en la estimación de parámetros. Hall&Yao(2003) presentaron un desarrollo formal alrededor de la inferencia en modelos GARCH. Otra importante característica, sobre la cual nosotros centraremos nuestra atención es el efecto de asimetría o Efecto Leverage, descubierto por Black(1976). Este dice que una caída inesperada en los precios (retorno negativo) incrementa la volatilidad en una mayor proporción que un incremento en los precios (retorno positivo) de similar magnitud. En Bouchaud, Matacz&Potters(2008), son investigadas cuantitativamente estas características de la volatilidad. Sin embargo, los modelos GARCH y ARCH no capturan el Efecto Leverage. Por esta razón, comenzó el nacimiento de una familia de modelos que capturan este efecto asimétrico. En este artículo indagaremos alrededor del modelo GARCH exponencial, conocido como modelo EGARCH, propuesto por Nelson(1989), el modelo GJR-GARCH, propuesto en Glosten-Jagannatha-Runkle(1993) y el modelo GARCH de Heston y Nandi,(HN-GARCH), presentado en Heston&Nandi(2003).

En el desarrollo de valoración de opciones, la relación de valoración localmente neutral al riesgo presentada en Duan(1995) es usada para la familia de modelos GARCH, con excepción del modelo HN-GARCH. En Heston&Nandi(2003), es usado un modelo de valoración de opciones, el cual permite el cálculo analítico del precio de una opción *Call* bajo el modelo HN-GARCH. Esta solución ofrece grandes ventajas, desde que para otros modelos, la solución analítica no es posible de obtener, pues la distribución condicional sobre más de un período no puede ser derivada. Por esta razón, se empleará el procedimiento de simulación de Monte Carlo propuesto en Duan&Simonato(1995), el cual hace

referencia a la Simulación de Martingalas Empíricas (SME). Ese procedimiento garantiza que el precio estimado por la simulación satisface el límite racional de valoración de opciones.

1.2. Modelos Generalizados Autorregresivos Condicionales Heterocedásticos

Sea $\{a_t\}$ con $-\infty < t < \infty$ un proceso estocástico discreto de valor real, y Θ el conjunto de información a través del tiempo t . Entonces un modelo GARCH(p,q) es definido como:

$$a_t | \Theta \sim N(0, \sigma_t^2) \quad a_t = \epsilon_t \sigma_t \quad (1.1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (1.2)$$

donde ϵ_t es un ruido blanco, $p \geq 0$, $q > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, p$, y $\beta_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, q$.

Este proceso es estacionario con $E(a_t) = 0$, $Var(a_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$ y $Cov(a_t, a_s) = 0$, para todo $t \neq s$ si y solo si:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1 \quad (1.3)$$

Bajo la condición 1.3, en Hall&Yao(2003) es presentada una solución alternativa de 1.2:

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_j \beta_j} + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{j_1} \dots \beta_{j_k} a_{t-i-j_1-\dots-j_k}^2 \quad (1.4)$$

En la práctica se tiene una muestra del proceso $\{a_t\}$, así que $1 \leq t \leq n$. Por lo tanto, es necesario tener aproximaciones para la expresión 1.4, y otros derivados de esta. Una expresión truncada para 1.4 es:

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_j \beta_j} + \sum_{i=1}^{\min(p, t-1)} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{j_1} \dots \beta_{j_k} a_{t-i-j_1-\dots-j_k}^2 \quad (1.5)$$

$$\times I(t - i - j_1 - \dots - j_k \geq 1)$$

1.3. Modelos GARCH asimétricos

A fin de modelar el efecto *Leverage* intrínscico en las series de retornos financieros, se han propuesto varias versiones asimétricas del modelo GARCH, como veremos a continuación.

El modelo GARCH Asimétrico propuesto en Engle Robert F & Ng, V.(1993), es definido como:

$$\sigma_t = \omega + \alpha\sigma_{t-1}f(a_t) + \beta\sigma_{t-1} \quad (1.6)$$

$$f(a_t) = |a_t - b| - c(a_t - b)$$

Esta expresión da al modelo dos características de asimetría que pueden ser vistas en la curva de impactos de retorno introducida por Hentschel(1994). La primera de estas características es la magnitud de cambio, la cual es controlado por el parámetro b , y la segunda es la rotación, la cual permite dar a la curva diferentes pendientes a ambos lados del origen. En la expresión 1.6, esta característica está dada por el parámetro c . Sin embargo, siguiendo la transformación de Box&Cox(1964) de la desviación estandar condicional, es obtenida la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_t^\lambda - 1}{\lambda} = \omega' + \alpha\sigma_{t-1}^\lambda f^v(a_t) + \beta\frac{\sigma_{t-1}^\lambda - 1}{\lambda} \quad (1.7)$$

Aquí, el parámetro λ determina la forma de la transformación. De esta manera, para $\lambda < 1$, la transformación es cóncava, mientras que si $\lambda > 1$ esta es cóncava. Por otro lado, el parámetro v , solo transforma la función de impactos $f(\cdot)$, dando una forma cóncava cuando $0 < v < 1$, y cóncava para $v \geq 1$. A partir de la expresión 1.7, son obtenidos algunos procesos relevantes para modelar la estructura asimétrica de los retornos.

Tomando b igual a cero, v igual a cero, y λ tendiendo a cero, obtenemos el modelo GARCH Exponencial (EGARCH) propuesto por Nelson(1991):

$$\log(\sigma_t^2) = 2\omega'' + 2(|a_t| - E|a_t| - ca_t) + \beta\log(\sigma_{t-1}^2) \quad (1.8)$$

Donde la expresión para $f(a_t)$ es remplazada por $f(a_t) - E(f(a_t))$. Es posible adicionar el parámetro b sustituyendo en la expresión 1.8, $a_t - b$ por a_t . Cuando λ y v toman un valor igual a dos, y c igual a cero, se obtiene el modelo:

$$\sigma_t^2 = 2\omega'' + 2\alpha\sigma_{t-1}^2(a_t - b)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (1.9)$$

El cual fue presentado en Engle&Ng(1993), como el modelo GARCH no lineal asimétrico.

En Glosten-Jagannatha-Runkle(1993), es presentado el modelo (GJR)GARCH, en el cual $\lambda = v = 2$, pero $b = 0$:

$$\sigma_t^2 = \omega'' + 2\alpha\sigma_{t-1}^2((1 + c^2)a_t^2 - 2c|a_t|a_t) + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (1.10)$$

Rescribiendo la expresión como sigue:

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} \omega'' + 2\alpha(1 + c)^2\sigma_{t-1}^2 a_t^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, & a_t < 0 \\ \omega'' + 2\alpha(1 - c)^2\sigma_{t-1}^2 a_t^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, & a_t \geq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

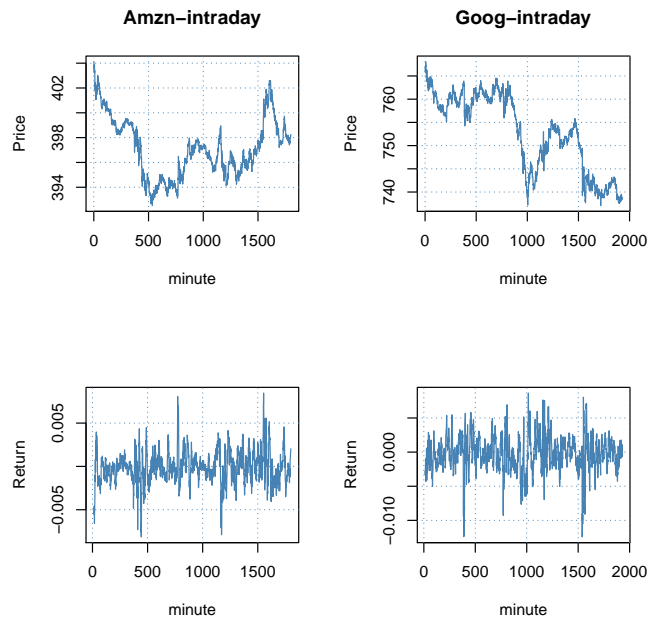
Es posible observar que cuando $c > 0$, el impacto de $f(a_t)$ cuando a_t toma valores negativos sobre la volatilidad condicional es mayor que cuando estos son positivos.

1.4. Estimación

Las series de precios de las acciones de Amazon (AMZN) y Google (Goog) corresponden a dos de los activos más transados en Estados Unidos. En nuestro análisis son empleados sus valores intradiarios entre agosto de 2013 y agosto de 2014. Para este conjunto de datos fueron ajustados los modelos de volatilidad expuesto, GARCH, EGARCH y GJR-GARCH.

En la siguiente figura, son presentados las series de precios y retornos por minuto para cada compañía. Se observa algunos cluster de alta volatilidad, seguidos por periodos donde la volatilidad tiende a estabilizarse alrededor de un valor medio. De esta manera, esta gráfica brinda una evidencia empírica de la reversión a la media de la volatilidad. Sin embargo, también se observa que altos cluster de volatilidad no se asocian con una tendencia en particular de los precios, lo cual nos da una primera aproximación hacia el cambio del conocimiento que se tiene del efecto *Leverage*.

FIGURA 1.1. Series de precios y retornos bursátiles de AMZN and Goog



Para los precios intradiarios de AMZN y GOOG se estimó un modelo EGARCH, con ecuación de la media dada por un proceso ARMA. Los parámetros estimados son presentados en la siguiente tabla:

TABLA 1.1. Parámetros estimados para el modelo EGARCH

AMZN				
	Estimación	Error Estand	t	$Pr(> t)$
$ar1$	0.741226	0.016490	44.95066	0.00000
ω	-0.265030	0.017060	-15.53528	0.00000
α	0.005562	0.013433	0.41403	0.67885
β	0.981302	0.001281	765.97184	0.00000
γ	0.201873	0.002807	71.91800	0.00000

GOOG				
	Estimación	Error Estand	t	$Pr(> t)$
$ar1$	0.753866	0.016155	46.6643	0.000000
ω	-1.229777	0.182846	-6.7258	0.000000
α	0.042586	0.018370	2.3183	0.020434
β	0.909429	0.013231	68.7362	0.000000
γ	0.374185	0.033872	11.0471	0.000000

Para verificar la bondad del ajuste del modelo, es empleado el estadístico de Ljung Box sobre la serie de retornos estandarizados:

$$\tilde{a}_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$$

donde a_t es el retorno en el tiempo t , y σ_t es su volatilidad. De esta manera, sobre las series $\{\tilde{a}_t^2\}$ y $\{\tilde{a}_t\}$, es juzgada la hipótesis nula de ausencia de correlación serial. Mientras esta hipótesis no sea rechazada, las ecuaciones de media y volatilidad son adecuadas.

En Ljung&Box(1987) se presenta la Q-estadística,

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

Donde, $\hat{\rho}_k$ es la autocorrelación de rezago k , K es el máximo rezago observado, y n es el número de datos. La hipótesis nula juzgada es $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$ frente a la hipótesis alternativa $H_1 : \rho_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, \dots, K\}$.

A partir de la siguiente tabla, con un nivel de significancia de 1%, es confirmado que para la ecuación de volatilidad la estructura de correlación ha sido explicada por el modelo satisfactoriamente para los rezagos 1 y 2. Sin embargo, es claro que la ecuación de la media no describe correctamente la dinámica de los retornos.

TABLA 1.2. Estadística Q sobre los Residuales Estandarizados para el modelo EGARCH

AMZN		
	Estadístico	p
Rezago 1	0.210	6.468e-01
Rezago 2	9.851	1.991e-09
Rezago 5	85.866	0.000e+00

GOOG		
	Estadístico	p
Rezago 1	4.942	2.621e-02
Rezago 2	7.368	1.291e-06
Rezago 5	78.005	0.000e+00

TABLA 1.3. Estadística Q sobre los Residuales Cuadrados Estandarizados para el modelo EGARCH

AMZN		
	Estadístico	p
Rezago 1	1.956	0.161942
Rezago 2	7.688	0.035205
Rezago 5	15.602	0.002555

GOOG		
	Estadístico	p
Rezago 1	0.09136	0.7625
Rezago 2	1.35209	0.7762
Rezago 5	3.33864	0.7020

En Engle&Ng(1993), son presentadas tres pruebas de diagnóstico, las cuales son basadas en la Curva de Nuevos Impactos: la prueba del sesgo de la muestra, la prueba del sesgo negativo, y la prueba del sesgo positivo. Estas consisten en juzgar el impacto de los retornos positivos y negativos en la volatilidad no predicha por el modelo $\sigma_{0t}(\theta_0 x_{0t})$, con θ_0 un vector de parámetros y x_{0t} un vector de variables explicativas. Estos test son realizados a través de la siguiente ecuación de regresión, de $v_t^2 = a_t/h_{0t}$, sobre x_{0t}^* , y la constante de impacto del choque de signo:

$$v_t^2 = a + bS_{t-1}^- + \zeta x_{0t}^* + e_t$$

$$v_t^2 = a + bS_{t-1}^- \epsilon_{t-1} + \zeta x_{0t}^* + e_t$$

$$v_t^2 = a + bS_{t-1}^+ \epsilon_{t-1} + \zeta x_{0t}^* + e_t$$

donde $S_{t-1}^- = 1$ si $a_{t-1} < 0$ y $S_{t-1}^- = 0$ si $a_{t-1} \geq 0$

$x_{0t}^* = \sigma_{0t}^{-1} \partial \sigma_{0t} / \partial \theta_0$, $S_{t-1}^+ = 1 - S_{t-1}^-$, a y b son parámetros, ζ es un vector de parámetros y e_t es el residual. El valor t para el coeficiente b en cada ecuación es el estadístico para la prueba del sesgo de la muestra, la prueba del sesgo negativo, y la prueba del sesgo

positivo, respectivamente. Sin embargo, para realizar estos tres test conjuntamente, se considera la siguiente regresión:

$$v_t^2 = a + b_1 S_{t-1}^- + b_2 S_{t-1}^- \epsilon_{t-1} + b_3 S_{t-1}^+ \epsilon_{t-1} + \zeta x_{0t}^* + e_t$$

donde a , b_1 , b_2 y b_3 son coeficientes constantes, ζ es un vector de coeficientes, y e_t es el residual. La estadística test es computada como,

$$\chi_{LM} = T \cdot R^2$$

Si el modelo de volatilidad es adecuado, entonces $b_1 = b_2 = b_3 = \zeta = 0$, y e_t es i.i.d. En particular, la estadística test sigue una distribución chi-cuadrado con tres grados de libertad.

A continuación son presentadas estas tres pruebas de diagnóstico.

TABLA 1.4. Prueba del Signo del Sesgo para el modelo EGARCH

AMZN		
	t	prob sig
Signo del Sesgo	0.4254	0.6706
Signo Negativo del Sesgo	0.1135	0.9097
Signo Positivo del Sesgo	0.2110	0.8329
Efecto Conjunto	0.1982	0.9779
GOOG		
	t	prob sig
Signo del Sesgo	1.0942	0.2740
Signo Negativo del Sesgo	0.1027	0.9182
Signo Positivo del Sesgo	0.4662	0.6411
Efecto Conjunto	1.4772	0.6875

De esta manera, dado que los valores p son altos, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, y el modelo EGARCH describe adecuadamente el impacto de los retornos positivos y negativos sobre la volatilidad.

Ahora, para el mismo conjunto de datos, se estimó un modelo GJR-GARCH. Los parámetros estimados son presentados son:

TABLA 1.5. Parámetros estimados para el modelo GJR-GARCH
AMZN

	Estimación	Error Estand	t	$Pr(> t)$
$ar1$	-0.13362	0.026866	-4.97342	0.000001
$ar2$	0.70790	0.021113	33.52903	0.000000
$ma1$	0.83615	0.026817	31.18024	0.000000
ω	0.00000	0.000000	3.30890	0.000937
α	0.06283	0.010069	6.24022	0.000000
β	0.91450	0.010419	87.77156	0.000000
γ	0.01444	0.016757	0.86172	0.388842

GOOG

	Estimación	Error Estand	t	$Pr(> t)$
$ar1$	0.719121	0.020979	34.2786	0.000000
$ma1$	0.057661	0.032834	1.7561	0.079067
ω	0.000000	0.000000	5.6924	0.000000
α	0.287679	0.043782	6.5707	0.000000
β	0.714471	0.032097	22.2594	0.000000
γ	-0.123539	0.040950	-3.0168	0.002554

Note que el parámetro de asimetría, denotado como α es más grande que γ , lo cual hace que el impacto de los retornos negativos en la volatilidad futura sea mayor. De esta manera, empleando la curva de impactos expuesta en Engle&Ng(1993), en efecto es posible observar este patrón.

La ecuación para la curva de impactos del modelo EGARCH es:

$$\begin{aligned} A \exp\left[\frac{(\gamma+\alpha)}{\sigma}\epsilon_{t-1}\right] & \quad \epsilon_{t-1} > 0 \\ A \exp\left[\frac{(\gamma-\alpha)}{\sigma}\epsilon_{t-1}\right] & \quad \epsilon_{t-1} < 0 \end{aligned}$$

donde $A = \sigma^{2\beta} \exp(\omega - \alpha \sqrt{2/\pi})$, y σ es la desviación estandar no condicional. De esta manera, para la serie de precios de AMZN, los parámetros estimados de la anterior expresión son:

$$\begin{aligned} 0.00000148e^{168.84\epsilon_{t-1}} & \quad \epsilon_{t-1} > 0 \\ 0.00000148e^{159.78\epsilon_{t-1}} & \quad \epsilon_{t-1} < 0 \end{aligned}$$

Así, se obtiene una importante conclusión del modelo EGARCH estimado para nuestro conjunto de datos, altos retornos positivos tienden a hacer que la volatilidad sea más grande que la causada por retornos negativos.

Por otro lado, para el modelo GJR-GARCH, la ecuación de la curva de impactos es,

$$\begin{aligned} A + \alpha\epsilon_{t-1}^2 & \quad \epsilon_{t-1} > 0 \\ A + (\alpha + \gamma)\epsilon_{t-1}^2 & \quad \epsilon_{t-1} < 0 \end{aligned}$$

donde $A = \omega + \beta\sigma^2$, con $\sigma = 0.01228$ la desviación estándar no condicional del modelo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0.0000013792 + 0.06283\epsilon_{t-1}^2 & \quad \epsilon_{t-1} > 0 \\ 0.0000013792 + 0.07683\epsilon_{t-1}^2 & \quad \epsilon_{t-1} < 0 \end{aligned}$$

Efectivamente, este modelo es ajustado de tal manera que los retornos positivos generan una baja volatilidad un periodo adelante, e incrementos negativos causan que la volatilidad crezca.

En la siguiente tabla son presentados los valores p para cada prueba de sesgo,

TABLA 1.6. Prueba del Signo del Sesgo para el modelo GJR-GARCH

AMZN		
	t	prob sig
Signo del Sesgo	1.3366	0.1815
Signo Negativo del Sesgo	0.3291	0.7421
Signo Positivo del Sesgo	1.2719	0.2036
Efecto Conjunto	2.2741	0.5175
GOOG		
	t	prob sig
Signo del Sesgo	0.80554	0.4206
Signo Negativo del Sesgo	0.09117	0.9274
Signo Positivo del Sesgo	0.42960	0.6675
Efecto Conjunto	0.94150	0.8154

De acuerdo a la prueba de sesgo, ambos modelos describen satisfactoriamente el impacto de retornos positivos y negativos sobre la volatilidad. Sin embargo, hemos encontrado que la descripción de cada modelo de la curva de impactos es diferente. Por lo tanto es necesario utilizar estas diferencias para escoger el mejor modelo, por esta razón, se usaran los valores p para este fin. Antes de ello, continuaremos revisando algunas otras propiedades de cada modelo.

A continuación se muestra la estadística de Ljung-Box para los residuales estandarizados y los residuales cuadrados estandarizados, la cual nos confirma que las ecuaciones de media y volatilidad son adecuadas.

TABLA 1.7. Estadística Q sobre los Residuales Estandarizados para el modelo GJR-GARCH

AMZN		
	Estadístico	p
Rezago 1	9.919	0.001636
Rezago 2	168.529	0.000000
Rezago 5	238.998	0.000000

GOOG		
	Estadístico	p
Rezago 1	1.507	0.2196
Rezago 2	76.036	0.0000
Rezago 5	183.117	0.0000

TABLA 1.8. Estadística Q sobre los Residuales Cuadrados Estandarizados para el modelo GJR-GARCH

AMZN		
	Estadístico	p
Rezago 1	1.575	0.209473
Rezago 2	7.606	0.036882
Rezago 5	15.168	0.003257

GOOG		
	Estadístico	p
Rezago 1	0.07003	0.7913
Rezago 2	0.93784	0.8736
Rezago 5	2.26032	0.8718

Finalmente, ajustamos un modelo GARCH sobre nuestros datos.

TABLA 1.9. Parámetros estimados para el modelo GARCH

AMZN				
	Estimación	Error Estand	t	$Pr(> t)$
$ar1$	-0.123276	0.026410	-4.6678	0.000003
$ar2$	0.713967	0.021155	33.7498	0.000000
$ma1$	0.829223	0.026662	31.1013	0.000000
ω	0.000000	0.000000	3.4970	0.000471
α	0.073343	0.009087	8.0713	0.000000
$\beta1$	0.905010	0.012178	74.3167	0.000000
GOOG				
	Estimación	Error Estand	t	$Pr(> t)$
$ar1$	1.38822	0.161520	8.5947	0.000000
$ar2$	-0.51818	0.129629	-3.9974	0.000064
$ma1$	-0.56214	0.123249	-4.5610	0.000005
ω	0.00000	0.000000	1.9622	0.049742
α	0.15989	0.096180	1.6624	0.096425
$\beta1$	0.77863	0.089426	8.7069	0.000000

TABLA 1.10. Estadística Q sobre los Residuales Estandarizados para el modelo GARCH

AMZN		
	Estadístico	p
Rezago 1	9.329	0.002256
Rezago 2	170.701	0.000000
Rezago 5	242.475	0.000000
GOOG		
	Estadístico	p
Rezago 1	0.6512	0.4197
Rezago 2	159.9867	0.0000
Rezago 5	224.9332	0.0000

TABLA 1.11. Estadística Q sobre los Residuales Cuadrados Estandarizados para el modelo GARCH

AMZN		
	Estadístico	p
Rezago 1	1.093	0.295883
Rezago 2	6.445	0.070551
Rezago 5	14.356	0.005108
GOOG		
	Estadístico	p
Rezago 1	0.01495	0.9027
Rezago 2	0.39200	0.9730
Rezago 5	0.96959	0.9875

Finalmente las pruebas de sesgo son:

TABLA 1.12. Prueba del Signo del Sesgo para el modelo GARCH

AMZN		
	t	prob sig
Signo del Sesgo	0.91559	0.3600
Signo Negativo del Sesgo	0.06008	0.9521
Signo Positivo del Sesgo	0.84085	0.4005
Efecto Conjunto	1.12833	0.7702
GOOG		
	t	prob sig
Signo del Sesgo	0.89208	0.3725
Signo Negativo del Sesgo	0.01824	0.9854
Signo Positivo del Sesgo	0.12428	0.9011
Efecto Conjunto	1.83752	0.6068

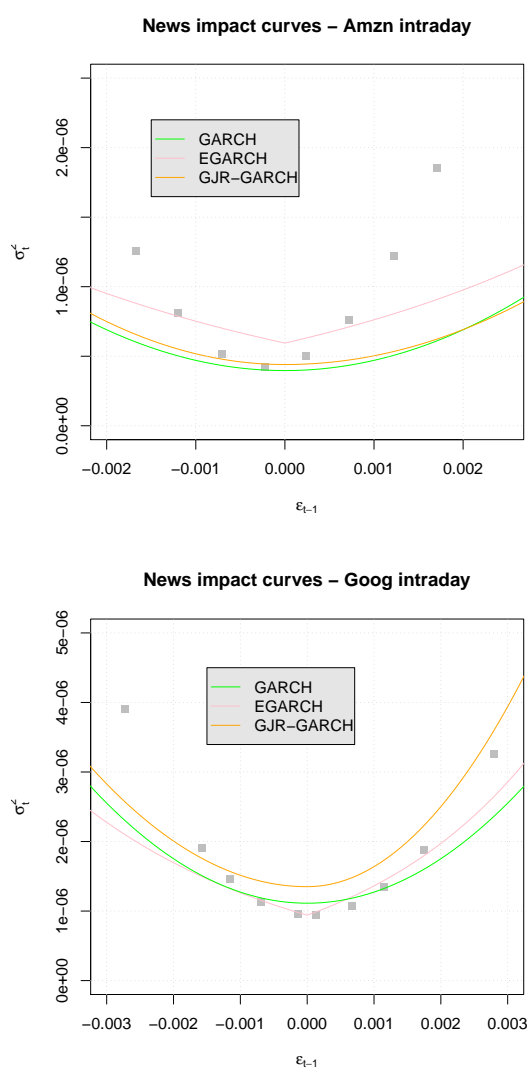
Luego de obtener las anteriores estimaciones y juzgamientos de hipótesis, inicialmente se podría considerar que los modelos describen adecuadamente el impacto de los retornos sobre la volatilidad futura. Sin embargo en Engle&NG(1993) se demuestra numéricamente que la potencia de estos test es baja para tamaños de muestras pequeños, lo cual es de esperar dado que el efecto asimétrico y la variación en el tiempo de la varianza son difíciles de detectar en muestras pequeñas. De esta manera, se emplearan los valores p como ayuda para detectar posibles diferencias entre los modelos.

Se observa que los valores p en las pruebas de sesgo no necesariamente parecen ser considerablemente superiores para los modelos asimétricos que para el modelo GARCH. Sin embargo, los valores p para los test individuales y conjuntos, nos permiten detectar inicialmente que la medida del impacto de los retornos negativos en la volatilidad futura parece ser mejor descrita por el modelo EGARCH en la serie de retornos de AMZN y por el modelo GJR-GARCH para GOOG. Estas observaciones preliminares parecen indicar que

aunque los test no rechazan ningún modelo, se requieren otras herramientas estadísticas que permitan entender las diferencias en la explicación de la volatilidad por cada modelo, y así escoger el mejor.

A continuación, se define la varianza realizada como un estimador aproximadamente insesgado de la volatilidad, el cual es calculado mediante los retornos intradiarios. Esta es usado para describir el desarrollo empírico de la volatilidad futura con respecto al valor de los retornos a través de la curva de impactos de cada modelo.

FIGURA 1.2. Curva de Nuevos Impactos



De la anterior figura, se nota que los modelos EGARCH y GJR-GARCH resultan dar una mejor aproximación para las series de precios de AMZN y GOOG respectivamente. El ajuste de los modelo a la volatilidad de AMZN es bueno para valores de retornos alrededor de cero, sin embargo para valores superiores en valor absoluto a 0.001, los modelos implementados **sobreestiman** la volatilidad.

Adicionalmente, a partir del desarrollo empírico de la volatilidad, es posible observar un efecto simétrico en retornos de poca magnitud, y la presencia de asimetría positiva o negativa en retornos de mayor magnitud. De esta manera, es posible sentar la hipótesis de que la asimetría de la curva de impactos de los retornos sobre la volatilidad no solo está ligada al signo del retorno, sino que esta puede estar asociada a otros factores que encierran la dinámica propia de el mercado accionario. En el siguiente capítulo se presentaran resultados empíricos que apoyan esta idea, y nos permitiran proponer un nuevo modelo de estimación de volatilidad.

Nueva Aproximación: Modelo FD-GARCH

2.1. Introducción

Muchos modelos estadísticos buscan ajustar los diferentes factores estilizados presentes en series de tiempo financieras. En el presente documento se ha hecho referencia a algunos de estos factores y se han presentado algunos modelos que buscan capturarlos. No obstante, entre estos factores, se ha encontrado evidencia de comportamientos estacionales en los precios de diversos activos financieros, lo cual han generado controversia en diversos autores, pues esto iría en contra de la hipótesis económica de mercados eficientes.

En este capítulo, se presentará un nuevo factor de estacionalidad en cual relaciona la volatilidad futura con la magnitud y el rezago del retorno, y a partir de ello se pondrá una nueva perspectiva del efecto de asimetría y por lo tanto una nueva propuesta de medición de este.

2.2. Presentación del modelo

Siguiendo a Perelló&Masoliver(2003), se usa un modelo de difusión para describir la dinámica de los precios accionarios. Así, para $S(t)$, el proceso de precios, se define el siguiente proceso de difusión:

$$\frac{\partial S(t)}{S(t)} = \mu \partial t + \sigma \partial \Omega_1(t)$$

Donde $\partial \Omega_1(t)$ es un proceso de Wiener, tal que $\partial \Omega_1(t) = \epsilon(t) \partial t$ y $\epsilon(t)$ es un ruido blanco gaussiano, con media cero y volatilidad igual a la unidad.

De esta manera, el proceso de media cero para los retornos es definido por:

$$\partial X(t) = \frac{\partial S(t)}{S(t)} - \mu \partial t = \sigma(t) \partial \Omega_1(t) \quad (2.1)$$

La dinámica de la volatilidad es medida como un proceso de difusión de Ornstein-Uhlenbeck(OU):

$$\partial \sigma(t) = -\alpha(\sigma(t) - m) \partial t + k \partial \Omega_2(t) \quad (2.2)$$

donde $\alpha > 0$, $k > 0$ y m es el nivel al cual converge la volatilidad.

Sin embargo, este modelo no captura la dinámica característica de la volatilidad, tal como la estacionalidad diaria, observable en las autocorrelaciones de los retornos. En la siguiente Figura se presenta el diagrama de autocorrelaciones, en el cual se observa un comportamiento en U, con estaciones de alrededor de 400 minutos (un día). El modelo de Perelo(2003), usa en su construcción el supuesto de una caída exponencial en el desarrollo de las autocorrelaciones, por lo tanto no captura el patrón estacional presentado.

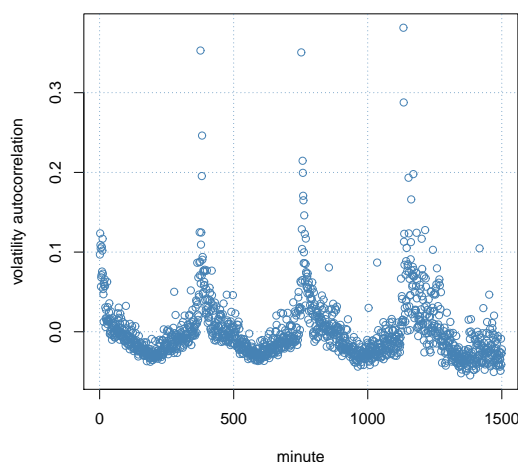


FIGURA 2.1. Autocorrelación de la volatilidad en retornos intradiarios

Adicionalmente, este y otros modelos, tales como los de la familia GARCH, son soportados sobre la concepción del efecto Leverage, la cual como explicamos anteriormente, dice que caídas en los precios de los activos, generan mayores incrementos en la volatilidad. Sin embargo, como mostramos en el anterior capítulo, existen ciertos escenarios donde el impacto sobre la volatilidad es mayor en retornos positivos.

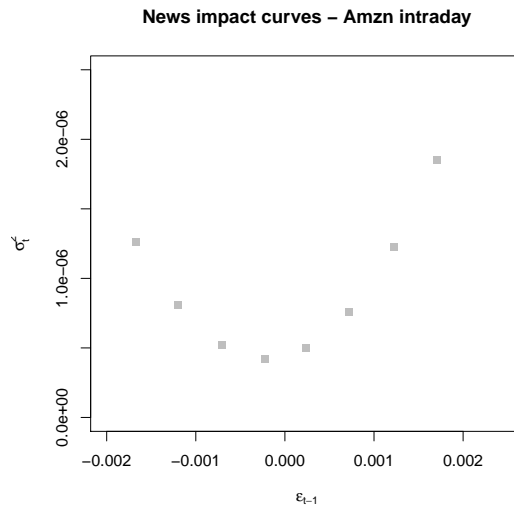


FIGURA 2.2. Volatilidad realizada

Empíricamente hemos observado que el efecto de asimetría de los retornos sobre la volatilidad futura esta más relacionado con su dinámica y no solo con su magnitud y signo. En nuestra propuesta partimos del hecho de que el valor de la volatilidad en el tiempo $t + h$, esta relacionada de manera armónica con los valores de los retornos pasados. En la siguiente Figura se presenta la distribución empírica de los retornos futuros condicionada a retonos de alta magnitud para la serie de precios de AMZN. Esta nos permite observar el desplazamiento de la distribución para distintos valores de h , conservando una clara tendencia a ubicarse alrededor de cero.

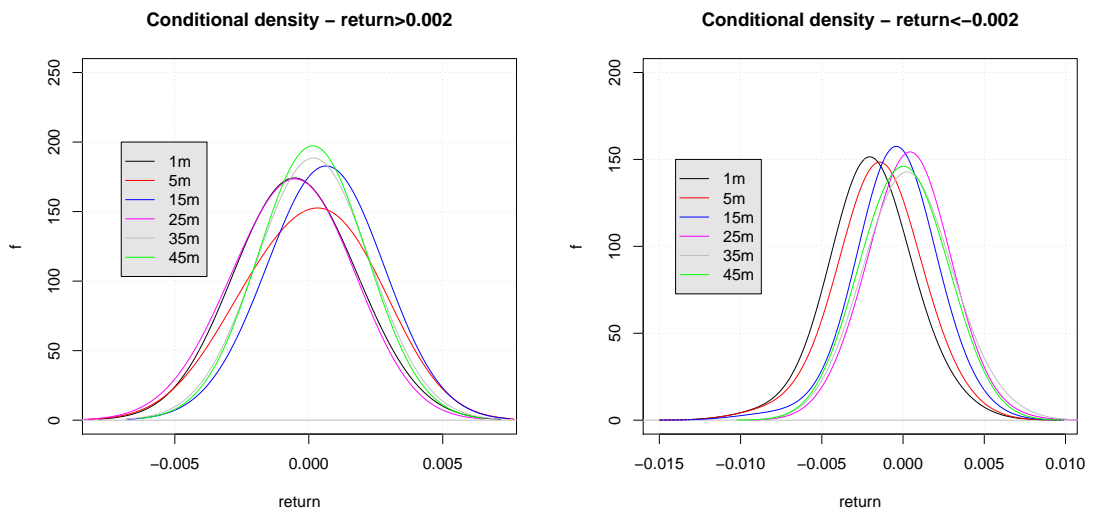


FIGURA 2.3. Distribución condicional empírica de los retornos

Esta tendencia armónica puede ser vista mas facilmente a partir de la siguiente figura, en la cual es presentado el valor esperado de cada distribución.

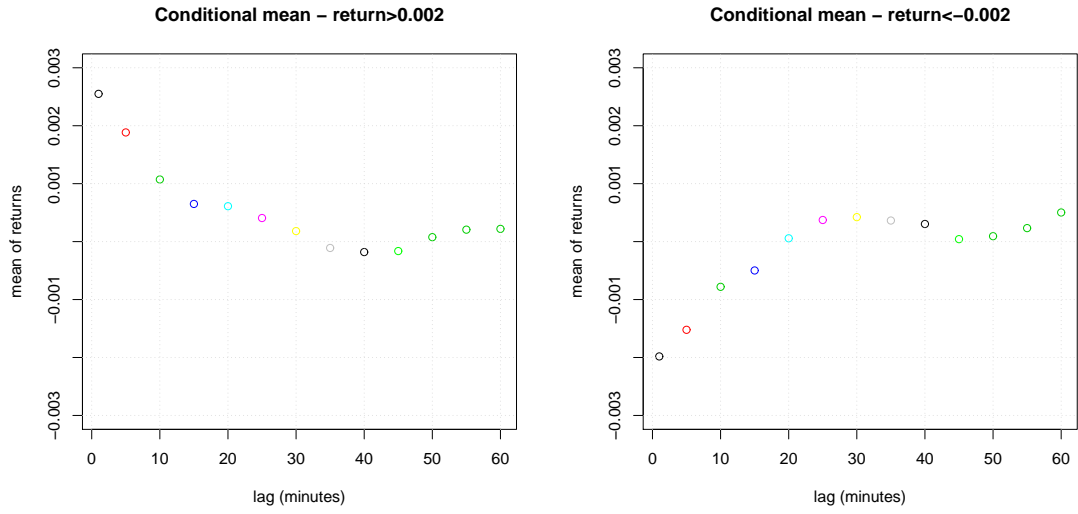


FIGURA 2.4. Media de la distribución condicional de los retornos

Es así como la distribución condicional de los retornos presenta un comportamiento estacional, asociado al rezago de tiempo, magnitud y signo de los retornos pasados, pues se observa una convergencia armónica del valor medio de la distribución condicional a su valor medio global (cero). Teniendo en cuenta lo anterior, se propone el siguiente proceso de difusión, el cual captura el comportamiento observado.

$$\frac{\partial S(t)}{S(t)} = \sigma_t \partial \Omega_1(t) \quad (2.3)$$

$$\partial \sigma_t = -\alpha(\sigma_t - m) \partial t + G(t) \sigma_t \partial \Omega_1(t) \quad (2.4)$$

donde la función $G(\cdot)$ esta dada por:

$$G(t) = \sin(\vartheta_1 t) + \cos(\vartheta_2 t) \quad (2.5)$$

y ϑ_1 y ϑ_2 son parámetros constantes, $\partial \Omega_1(t)$ es un proceso de Wiener, tal que $\partial \Omega_1(t) = \epsilon_t \partial t$ y ϵ_t es un ruido blanco gaussiano, con media cero y volatilidad igual a uno.

De esta manera, la función G describe el factor estacional de la volatilidad asociada a la dinámica de los retornos.

Al tomar la expresión 2.4 y dividirla por la desviación σ_t :

$$\frac{\partial \sigma_t}{\sigma_t} = -\alpha \left(1 - \frac{m}{\sigma_t} \right) \partial t + G(t) \partial \Omega_1(t) \quad (2.6)$$

Supongamos que el proceso comienza en un tiempo infinito pasado $t_1 \rightarrow -\infty$, con lo cual es de esperar que en el tiempo t la volatilidad alcance su estado estacionario. Siguiendo la convención de Ito, tenemos que:

$$\frac{m}{\sigma_t} = 1 + \int_{-\infty}^t G(t)e^{\alpha(t-s)} \partial\Omega_1(s) \quad (2.7)$$

La anterior expresión corresponde a la definición de la volatilidad estandarizada. Ahora, supongamos que la distribución condicional de los retornos es estacional en períodos de tamaño h , y la volatilidad ha alcanzado su estado estacionario en el tiempo t , haciendo algunas operaciones algebraicas adicionales, finalmente tenemos:

$$\sigma_t = m - \int_{t-h}^t G(t)e^{\alpha(t-s)} \partial\Omega_1(s) \sigma_s \quad (2.8)$$

En el caso de tiempo discreto, la expresión 2.8 es equivalente a:

$$\sigma_t = m - \sum_{i=t-h}^t G(i)e^{\alpha(t-i)} r_i \quad (2.9)$$

Así, la expresión para la volatilidad es presentada en forma aditiva por el valor al cual revierte y la sumatoria de cada retorno ponderada por la función G , la cual combina en su estructura el impacto del rezago, el signo y la magnitud del retorno.

2.3. Estimación

Ahora, se aplicará la aproximación obtenida para las series de precios intradiarios de AMZN y GOOG. Para ello se utilizará la siguiente expresión:

$$\sigma(t+1) = m + \sum_{i=t-h}^t (\sin(\vartheta_1 i) + \cos(\vartheta_2 i)) e^{\alpha(t-i)} r_i \quad (2.10)$$

Empleando un proceso ARMA como ecuación de la media de los retornos, y la expresión 2.10 para el cálculo de la volatilidad, se obtienen las siguientes estimaciones:

TABLA 2.1. Parámetros estimados del nuevo modelo
AMZN

	Estimación	Error Estand	t	$Pr(> t)$
$ar1$	-0.1415	0.020943	-6.7515	0.000000
$ar2$	0.7036	0.019444	36.5018	0.000000
$ma1$	0.8331	0.025760	37.1527	0.000000
m	2.642e-04	1.774e-05	14.89	0.000000
ϑ_1	-1.476e+00	2.021e-02	-73.02	0.000000
ϑ_2	-1.206e+02	1.956e-02	-6163.61	0.000000

GOOG

	Estimación	Error Estand	t	$Pr(> t)$
$ar1$	0.7737	0.0144	-5.9235	0.000000
m	1.883e-01	2.638e-02	7.139	0.000000
ϑ_1	-5.151e+00	9.512e-03	-541.555	0.000000
ϑ_2	-1.189e+02	9.353e-03	-12709.313	0.000000

Como se puede observar, los parámetros involucrados resultan ser significativos en ambas estimaciones. A continuación presentamos el desarrollo empírico de la volatilidad futura con respecto a los retornos, y contrastaremos la aproximación propuesta frente a la obtenida con los modelos de la familia GARCH expuestos en el capítulo anterior.

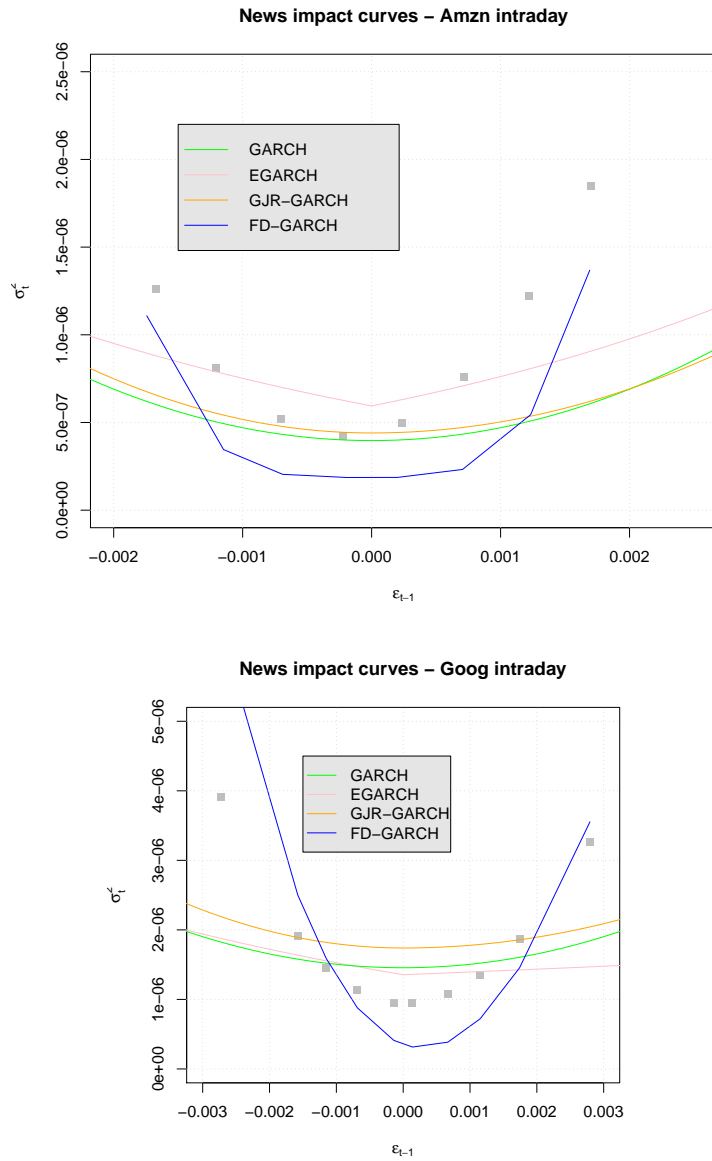


FIGURA 2.5. Curva de Nuevos Impactos

En la figura 2.5 se puede apreciar un mejor ajuste del modelo propuesto a la dinámica observada de la volatilidad, especialmente en el impacto causado por retornos de alta magnitud positivos y negativos.

Valoración de activos primarios y derivados

3.1. Introducción

Los modelos de valoración de opciones tuvieron una aproximación inicial con Black-Scholes-Merton(1973), quienes desarrollaron su fórmula bajo el supuesto de que los precios de los activos subyacentes siguen un Movimiento Browniano Geométrico, con varianza constante. Sin embargo, se sabe que las series de tiempo financieras tienen un comportamiento heteroscedástico, el cual depende de los valores históricos de los precios del activo. Por esta razón, varios autores han desarrollado métodos de valoración que incorporan modelos de volatilidad estocástica y modelos de la familia GARCH.

A fin de desarrollar la valoración de opciones, se usa la relación de valoración neutral al riesgo local (LRNVR) presentada en Duan (1995) junto con el modelo GARCH y los modelos GARCH asimétricos EGARCH y GJR-GARCH. En Heston&Nandi(2000), es desarrollado un modelo de valoración de opciones, el cual permite calcular analíticamente el valor de una opción call bajo el modelo HN-GARCH. Esta solución cerrada para valoración de opciones, es de gran ventaja desde que para otros modelos una solución analítica no es posible, dado que la distribución condicional sobre más de un período no puede ser analíticamente derivada. Por esta razón, se empleará el proceso de simulación modificado de Monte Carlo propuesto en Duan&Simonato(1995), al cual se hace referencia como la simulación de Martingalas Empíricas (EMS). Este procedimiento asegura que los precios estimados por simulación satisfacen los límites racionales de la valoración de opciones.

3.2. Proceso de valoración de activos bajo volatilidad constante

Inicialmente, se asume que la volatilidad es constante en un proceso de precios continuo en el tiempo. Luego, siguiendo la metodología de Duan(1995), estos resultados son generalizados al caso discreto y heteroscedástico. Supongamos que los precios de los activos siguen un movimiento Browniano Geométrico, bajo una medida de probabilidad P :

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t \quad (3.1)$$

donde W_t es un movimiento Browniano, definido sobre $[0, T]$, $\mu \in \mathbb{R}$, S_t y $\sigma \in \mathbb{R}^+$. A partir de la fórmula de Ito, es encontrada la siguiente solución:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \quad (3.2)$$

Tomando el proceso con un factor de descuento, $S_t^* = e^{-rt}S_t$, se deriva la siguiente expresión:

$$S_t^* = S_0 \exp\left(\left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \quad (3.3)$$

y usando nuevamente la formula de Ito,

$$dS_t^* = (\mu - r)S_t^*dt + \sigma S_t^*dW_t \quad (3.4)$$

De esta manera, $(\mu - r)S_t^*$ representa la tendencia para el proceso S_t^* , la cual causa que el proceso no sea una martingala. Así, empleado el Teorema de Girsanov, para encontrar una medida de probabilidad neutral al riesgo, de tal manera que el proceso sea una martingala. Se define:

$$u = \frac{(\mu - r)S_t^*}{\sigma S_t^*} = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (3.5)$$

$$M_t = \exp(-uW_t - u^2t)$$

Así es definida la medida de probabilidad neutral al riesgo:

$$dQ = M_T dP$$

Bajo esta medida, se obtiene el siguiente movimiento Browniano:

$$W_t^* = ut + W_t \quad (3.6)$$

Finalmente, empleando este proceso, el precio de los activos pueden ser expresado a partir de la siguiente martingala:

$$dS_t^* = \sigma S_t^* dW^* \quad (3.7)$$

En Duan(1995), se define la medida de riesgo localmente neutral. Formalmente, se dice que una medida Q, satisface la relación de valoración neutral al riesgo si esta es absolutamente continua con respecto a P y:

$$E^Q \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) | \Theta_{t-1} \right] = r \quad (3.8)$$

$$Var^Q \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) | \Theta_{t-1} \right] = Var^P \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) | \Theta_{t-1} \right]$$

Como el proposito de este documento, es presentar esta teoria alrededor de algunos modelos condicionales heteroscedasticos, tales como el modelo GARCH, acontinuación presentaremos una expresión analoga a 3.3 en tiempo discreto.

Supongamos que el precio de un activo es medido en tiempos igualmente espaciados, de tal manera que con algunas sustituciones en 3.3, se obtiene la siguiente expresión equivalente:

$$S_t^* = S_{t-1}^* \exp \left[- \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t-1) - \sigma W_{t-1} \right] \\ \times \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right]$$

Dado que $W_t - W_{t-1} \sim W_1$, y $W_1 \sim N(0, 1)$, puede ser empleada una variable aleatoria Θ_{t-1} medible, ϵ_t , tal que $\epsilon_t | \Theta_{t-1} \sim^N (0, 1)$. Por lo tanto, el precio del activo un período adelante en tiempo discreto es:

$$S_t^* = S_{t-1}^* \exp \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 + \sigma \epsilon_t \right) \quad (3.9)$$

Tomando $\lambda = \frac{\mu-r}{\sigma}$, alternativamente, el precio del activo aplicando el factor de descuento es :

$$S_t^* = S_{t-1}^* \exp \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 + \lambda \sigma + \sigma \epsilon_t \right) \quad (3.10)$$

3.3. Modelo de valoración de activos bajo volatilidad heteroscedástica

Sea σ_t^2 , la varianza condicional, para un proceso GARCH, EGARCH o GJR-GARCH. Tomando los resultados de Duan(1995), bajo una medida P ,

$$S_t = S_{t-1} \exp \left(r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \lambda \sigma_t + \sigma_t \epsilon_t \right) \quad (3.11)$$

De esta manera, el logaritmo de la razón de los retornos esta condicionalmente distribuido lognormal bajo la medida de probabilidad P , tal que:

$$\log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \sim N \left(r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \lambda \sigma_t, \sigma_t^2 \right)$$

Para la metodología de valoración de opciones, son empleado los modelos GARCH en media, con modelo de media dado por la expresión 3.11, o equivalentemente por:

$$\log \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \epsilon_t \quad (3.12)$$

Es importante notar la presencia del parámetro de premio al riesgo λ , presente en el modelo de la media, pues este da una relación directa entre el retorno esperado y el riesgo al cual un inversor esta expuesto, causado por la volatilidad natural del retorno del precio del activo. El premio al riesgo puede ser expresado como:

$$\lambda\sigma_t = (\mu - r)\frac{\sigma_t}{\sigma}$$

Por lo tanto, el premio del inversor aumenta mientras la volatilidad condicional sobre la volatilidad incondicional incrementa, de esta forma es evitado el arbitraje, porque, cuando la varianza condicional es cero, el valor esperado del retorno es la razón libre de riesgo r .

Así, para aplicar la metodología de valoración expuesta en Duan(1995), son presentados tres modelos para la volatilidad condicional, el GARCH, EGARCH y GJR-GARCH. En la siguiente sección, será presentado otro modelo de valoración alternativo, el llamado modelo de Heston y Nandi GARCH (HN-GARCH).

Para un modelo GARCH, bajo la medida P , es asumido que ϵ_t sigue un proceso GARCH. Sin embargo, bajo la medida Q , la cual satisface la relación de valoración neutral al riesgo local, la ecuación del valor medio para los retornos es:

$$\log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t \quad (3.13)$$

donde $\xi_t|\Theta_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$, y

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1(\xi_{t-1} - \lambda\sigma_{t-1})^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 \quad (3.14)$$

Ahora, supongamos que ϵ_t sigue un proceso EGARCH bajo la medida P . Sea Q una medida de probabilidad que satisface la relación de valoración neutral al riesgo local. La expresión para la volatilidad condicional será:

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \theta\left(\frac{\xi_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - \lambda\right) + \gamma\left(\left|\frac{\xi_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - \lambda\right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + \beta\log(\sigma_{t-1}^2) \quad (3.15)$$

$$\xi_t|\Theta_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

Finalmente, para el modelo GJR-GARCH, la varianza condicional bajo la medida neutral al riesgo Q , es:

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2\sigma_{t-1}^2(\xi_{t-1} - \lambda)^2 + \beta_3\sigma_{t-1}^2\max(0, -\xi_{t-1} + \lambda)^2 \quad (3.16)$$

$$\xi_t|\Theta_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

El precio terminal del activo es derivado en Duan(1995) como sigue:

$$S_T = S_t \exp\left[(T-t)r - \frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s\right] \quad (3.17)$$

Una opción Call Europea, con precio de ejercicio X y $T-t$ tiempo para madurar es calculada como:

$$C_t^{EGA} = e^{-(T-t)r} E^Q [\max(S_T - X, 0) | \Theta_t] \quad (3.18)$$

3.4. Simulación de Martingalas Empíricas

Para activos con precios bajo riesgo financiero, tal como una acción que no paga dividendos, su precio puede ser calculado bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo Q :

$$S_t = S_0 \exp \left[rt - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 + \int_0^t \sigma_s dW_s \right] \quad (3.19)$$

donde σ_s es la desviación estandar instantanea del retorno del activo y W_s es un movimiento Browniano estándar.

Puede ser demostrado que el precio descontado $e^{-rt} S_t$ es una Q -martingale, así para $0 < \tau < t$:

$$E^Q[e^{-rt} S_t | \Theta_\tau] = e^{-r\tau} S_\tau \quad (3.20)$$

En Duan&Simonato(1995), es demostrado que la simulación de Monte Carlo, no sigue esta característica en muestras simuladas, lo cual tiene consecuencias tales como el incumplimiento del siguiente límite racional de valoración de opciones:

$$C_0(t) > \max(S_0 - Ke^{-rt}, 0) \quad (3.21)$$

donde:

$$C_0(t) = e^{-rt} E[\max(S_t - K, 0) | \Theta_0] \quad (3.22)$$

Considerando la siguiente aproximación para una opción *call*, *in-the-money*, con K/S_0 pequeño:

$$C_0(t) \approx e^{-rt} [E^Q(S_t | \Theta_0) - K] \quad (3.23)$$

Se define el promedio descontado de la simulación de precios del activo en el tiempo t como:

$$\hat{S}(t, n) = \frac{1}{n} e^{-rt} \sum_{i=1}^n \hat{S}_i(t) \quad (3.24)$$

donde $\hat{S}_i(t)$ es el i -ésimo precio simulado en el tiempo t . El precio simulado de la opción por Monte Carlo es:

$$\hat{C}_0(t, n) = \frac{1}{n} e^{-rt} \sum_{i=1}^n \max[\hat{S}_i(t) - K, 0] \quad (3.25)$$

por lo tanto para una opción *call*, *in-the money*, esta expresión puede ser aproximada por:

$$\hat{C}_0(t, n) \approx \hat{S}(t, n) - Ke^{-rt} \quad (3.26)$$

Así, si la muestra simulada presenta valores $\hat{S}_0(t, n)$ mas pequeños que S_0 , podría violarse la expresión 3.21.

Para mejorar la eficiencia de la anterior simulación, es usado un método de control variable. Este involucra el uso de valores terminales simulados mediante el computo de algunas derivadas, las cuales también tienen una solución analítica. De esta manera, si la muestra simulada sobrevalora o subvalora el precio de una opción calculada por el modelo EGARCH, es de esperar que otra expresión que emplea la misma muestra simulada, tal como el precio de la opción por la metodología de Monte Carlo - Black Schole describa dicha sobrevaloración o subvaloración.

Teniendo en cuenta lo anterior, la estimación simulada mejorada es:

$$C_t(n)^{EGA*} = C_t^{EGA}(n) - q(n)[C_t^{BSM}(n) - C_t^{BSM*}] \quad (3.27)$$

$$q(n) = \frac{Cov(C_t^{EGA}(n), C_t^{BSM}(n))}{Var(C_t^{BSM}(n))}$$

En Duan&Simonato(1995), es presentada una corrección al procedimiento de simulación estándar de Monte Carlo. El precio del activo es calculado mediante la siguiente expresión:

$$S_i^*(t_j, n) = S_0 \frac{Z_i(t_j, n)}{Z_0(t_j, n)} \quad (3.28)$$

$$Z_i(t_j, n) = S_i^*(t_{j-1}, n) \frac{\hat{S}_i(t_j)}{\hat{S}_i(t_{j-1})}$$

$$Z_0(t_j, n) = \frac{1}{n} e^{-rt_j} \sum_{i=1}^n Z_i(t_j, n)$$

con $j = 1, 2, \dots, m$. A través de este algoritmo, se garantiza que la muestra simulada tenga impuesta la propiedad de martingala y no sea violado el límite racional dado por 3.21.

3.5. Modelo de valoración de Opciones HN-GARCH

En Heston&Nandi(2000), es desarrollada una formula para la valoración de opciones, la cual incorpora volatilidad estocástica a través de un modelo GARCH asimétrico. De esta manera, se busca capturar el efecto *Leverage*, y dar errores de valoración *out-of-sample* más pequeños que otros modelos, tal como el modelo de Black y Scholes.

Usando procesos GARCH en contraste a los modelos estocásticos continuos en el tiempo, es posible calcular la volatilidad directamente de los valores históricos de los retornos del activo.

Esta metodología consiste en suponer que el precio al contado del activo, el cual incluye dividendos, sigue un proceso GARCH asimétrico:

$$\log(S(t)) = \log(S(t+h)) + r + \lambda\sigma_t^2 + \sigma_t\epsilon_t \quad (3.29)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-ih}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\epsilon_{t-ih} - \gamma_i \sqrt{\sigma_{t-ih}^2})^2$$

donde r representa una tasa de interés continuamente compuesta en el intervalo de tiempo h . Por lo tanto σ_t^2 representa la varianza condicional de los log retornos entre $t-h$ y t , y esta es usada en la expresión de la media por la incorporación del parámetro de premio al riesgo, $\lambda\sigma_t^2$.

Por facilidad en la interpretación y en la simulación, tomamos el caso simple en el cual $p = q = 1$. Por lo tanto el proceso es estacionario con media y varianza finita, mientras se cumpla que:

$$\beta_1 + \alpha_1 \gamma_1^2 < 1.$$

Rescribiendo la anterior expresión como sigue:

$$\sigma_{t+h} = \omega + \beta_1 \sigma_t^2 + \alpha_1 \frac{(\log(S(t)) - \log(S(t-h)) - r - \lambda\sigma_t^2 - \gamma_1 \sigma_t^2)^2}{\sigma_t^2} \quad (3.30)$$

Es posible notar que el parámetro α_1 y γ_1 determinan la curtosis de la distribución para la varianza condicional, y la asimetría de la distribución de los log-retornos respectivamente. Así, para retornos negativos de mayor magnitud la volatilidad es más grande que con retornos positivos de igual magnitud. Esta característica es fácilmente observable a partir de la siguiente expresión:

$$\text{Cov}_{t-h}(\sigma_{t+h}^2, \log(S(t))) = -2\alpha_1 \gamma_1 \sigma_t^2 \quad (3.31)$$

Es así como para valores positivos de α_1 y γ_1 , es modelado el efecto *Leverage*.

Sin embargo, para el cálculo de valoración de opciones es necesario conocer la distribución neutral al riesgo de los precios del activo. Esta es obtenida tomando:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_t &= \epsilon_t + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\sigma_t^2} \\ \dot{\gamma}_1 &= \gamma_1 + \lambda + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y reemplazando esta expresión en 3.29 por ϵ_t y γ_1 como sigue:

$$\log(S(t)) = \log(S(t-h)) + r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \sqrt{\sigma_t^2} \dot{\epsilon}_t \quad (3.32)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-ih} + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\epsilon_{t-ih} - \gamma_i \sqrt{\sigma_{t-ih}^2})^2 + \alpha_1 (\hat{\epsilon}_{t-h} - \gamma_1 \sqrt{\sigma_{t-h}^2})^2 \quad (3.33)$$

la cual representa la versión neutral al riesgo.

Este modelo para la valoración de opciones, también asume el supuesto de que el valor de una opción *call* con un período para su expiración, obedece la formula de Black-Scholes-Rubenstein. Esto con el fin de asegurar que si ϵ_t tiene distribución normal estandar, $\hat{\epsilon}_t$ también tendrá esta distribución, y de esta manera si la formula de Black-Scholes es fijada para un solo período, entonces la distribución neutral al riesgo del precio del activo es lognormal con media, $S(t-h)e^r$ (Black&Scholes 1973).

Siguiendo la metodología de Heston&Nandy(1995), finalmente para calcular el precio de una opción, la cual usa la función generadora de un proceso GARCH:

$$f(\phi) = S(t)^\phi \exp(A(t; T, \phi) + \sum_{i=1}^p B_i(t; T, \phi) \sigma_{t+2h-ih}^2) \quad (3.34)$$

$$+ \sum_{i=1}^{q-1} C_i(t; T, \phi) (z(t+h-ih) - \gamma_i \sqrt{\sigma_{t+h-ih}^2})^2$$

donde

$$A(t; T, \phi) = A(t+h; T, \phi) + \phi r + B_1(t+h; T, \phi) \omega - \frac{1}{2} \log(1 - 2\alpha_1 B_1(t+h; T, \phi)) \quad (3.35)$$

$$B_1(t; T, \phi) = \phi(\lambda + \gamma_1) - \frac{1}{2} \gamma_1^2 + \beta_1 B_1(t+h; T, \phi) + \frac{1/2(\phi - \gamma_1)^2}{1 - 2\phi B_1(t+h; T, \phi)} \quad (3.36)$$

Es proceso para derivar estos coeficientes es presentado en Heston&Nandy(1995).

Sea $f(i\phi)$, la función característica del logaritmo del precio del activo, entonces el valor esperado descontado de la ganancia $Max(S(T) - K, 0)$, con K el precio de ejercicio, es:

$$E_t(Max(S(T) - K, 0)) = f(1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{K^{-i\phi} f(i\phi + 1)}{i\phi f(1)} \right) d\phi \right) \quad (3.37)$$

$$- K \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{K^{-i\phi} f(i\phi)}{i\phi} \right) d\phi \right)$$

donde $Re()$ denota la parte real de un número complejo.

El valor de una opción es calculado de la anterior expresión usando la función característica $f^*(i\phi)$.

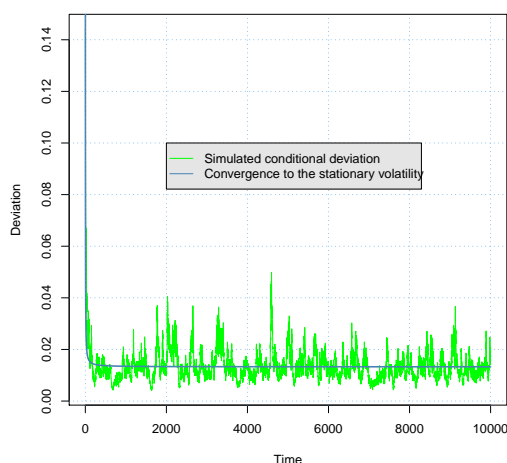
3.6. Aplicación

3.6.1. Valoración de Opciones para retornos diarios

En esta sección comparamos los modelos expuestos a través de su aplicación en valoración de opciones. En los gráficos de volatilidad implícita frente al precio de ejercicio, comunmente dos patrones pueden ser observados: la sonrisa de la volatilidad y su asimetría. La sonrisa de la volatilidad es asociada con un patrón en forma de U, en el cual se aprecia que opciones *at-the-money* tienden a tener volatilidad implícita más pequeña.

Para valoración de opciones, haremos simulaciones de los modelos escogidos, y de esta manera se derivará el precio terminal del activo de acuerdo con la expresión 3.17. En esta metodología el valor de la opción esta fuertemente condicionado a la elección de la varianza condicional inicial. Se sabe que una baja varianza condicional inicial, causa que las opciones sean de menor valor, mientras que un alto valor inicial hace que la opción tome valores más altos. La volatilidad tiene un nivel normal al cual tiende a regresar. El pronóstico de largo tiempo tiende a converger a este nivel. En la siguiente figura se muestra esta convergencia para el modelo EGARCH, cuando un valor inicial alto es escogido.

FIGURA 3.1. Desviación estándar condicional simulada



La curva es obtenida ajustando la ecuación:

$$\tilde{\sigma}_t = \beta \frac{\sigma_{initial}}{t} + \sigma$$

donde $\tilde{\sigma}_t$ es la desviación estándar simulada del proceso EGARCH, $\sigma_{initial}$ la elección de valor inicial, β y σ y son parámetros para estimar, (el último representa la desviación estacionaria). Empleando estimaciones de mínimos cuadrados no lineales, con nivel de significancia 5%, $\hat{\sigma} \approx 0.01472$.

Se usará para nuestro cálculo la varianza estacionaria como valor inicial para cada modelo.

En esta sección analizaremos el desarrollo de los precios de las opciones a través de la interpretación de la curva de volatilidad implícita. La clase más popular de volatilidad implícita es la llamada volatilidad implícita de Black Scholes (BS). Esta es definida como la varianza obtenida cuando igualamos el valor de la opción de mercado a su valor BS.

La volatilidad implícita para cada modelo es derivada para diferentes valores de *moneyness* y tiempo para la maduración T . En la siguiente expresión, es usada la formula de Black-Scholes para invertir los precios calculados a tarves del modelo EGARCH. Numéricamente obtenemos la volatilidad implícita a través de esta expresión. El mismo procedimiento es hecho para los otros modelos.

$$C^{EGA} = C^{BS}(\sigma_{EGA,imp}, m, r, T)$$

donde, m es la *moneyness*, r es la tasa libre de riesgo, T es el tiempo para la madurez y $\sigma_{EGA,imp}$ es la volatilidad implícita para el modelo de valoración EGARCH. Este emplea la volatilidad estacionaria σ de cada modelo como volatilidad estimada para el modelo de precios de Black-Scholes.

Se sabe que cuando nace una opción *out the money*, es de esperar que en los siguientes días, retornos positivos de gran magnitud sean generados. Altos retornos positivos, son asociados a baja volatilidad, por lo tanto de acuerdo a la expresión 3.17 se espera que el precio del activo crezca rápidamente. El precio del activo y de la opción puede ser sobreestimado o subestimado, si el modelo de volatilidad no es correcto.

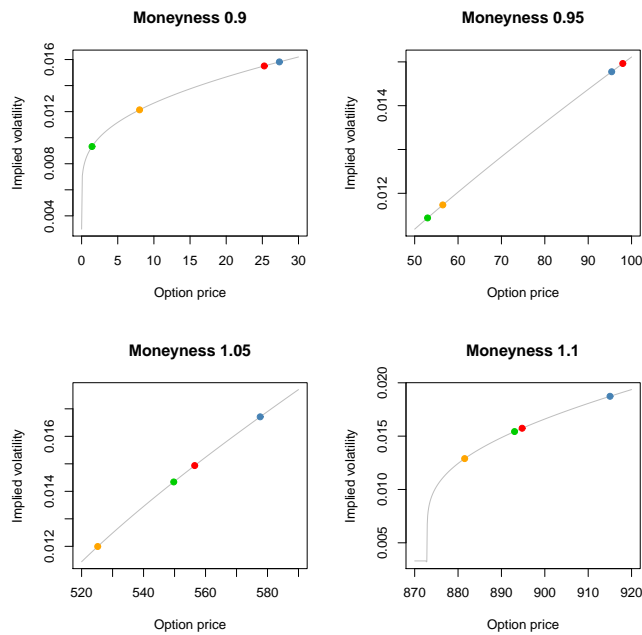


FIGURA 3.2. Volatilidad implícita BS

La volatilidad implícita BS, presenta un comportamiento fácilmente visible en la Figura 3.2, pues se observa que esta crece debido al incremento del precio de la opción. En esta gráfica la curva gris representa la volatilidad implícita para un rango de precios de opciones, los puntos verdes, son los precios de la opción bajo el modelo HN-GARCH, los puntos naranja son para el modelo GJR-GARCH, y los puntos rojo y azul representan el modelo EGARCH y GARCH respectivamente.

Para opciones *out the money*, el precio de la opción y la volatilidad implícita son similares para lo modelos GARCH y EGARCH. De igual manera el modelo HN-GARCH da resultados similares al modelo GJR-GARCH.

Por otro lado, para opciones *in the money*, los precios y la volatilidad implícita son similares entre los modelos HN-GARCH y EGARCH. Estos son bajos para el modelo GJR-GARCH, y altos para el modelo GARCH. Sin embargo, podemos observar que mientras el valor de *moneyness* sea más alto, (lo cual dice que el comprador de una opción esta en una posición favorable), la volatilidad GARCH crece rápidamente y el precio de la opción es mucho más alto. Este comportamiento es producto del efecto *Leverage*, desde que opciones *in the money* requieren retornos negativos, para el modelo GARCH, estos causan períodos de más alta volatilidad en los cuales el precio del activo subyacente crece rápidamente.

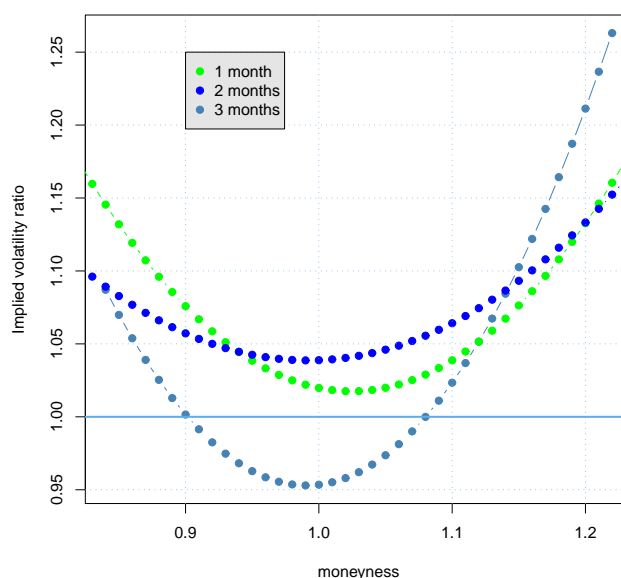


FIGURA 3.3. Volatilidad implícita para el modelo EGARCH

En la Figura 3.3, es mostrado el efecto de la madurez sobre la volatilidad a través de la razón de volatilidad implícita (IVR) del modelo EGARCH y el modelo de Black Scholes. Esta es definida como,

$$IVR = \frac{\sigma_{EGA,imp}}{\sigma}$$

En esta Figura es posible observarse que, la volatilidad decrece cuando las maduraciones crecen. El patrón de sonrisa es claro, y el efecto *leverage* no genera ningún efecto de asimetría en las opciones de un mes de maduración. Sin embargo, la asimetría se muestra dominante con el incremento de la maduración.

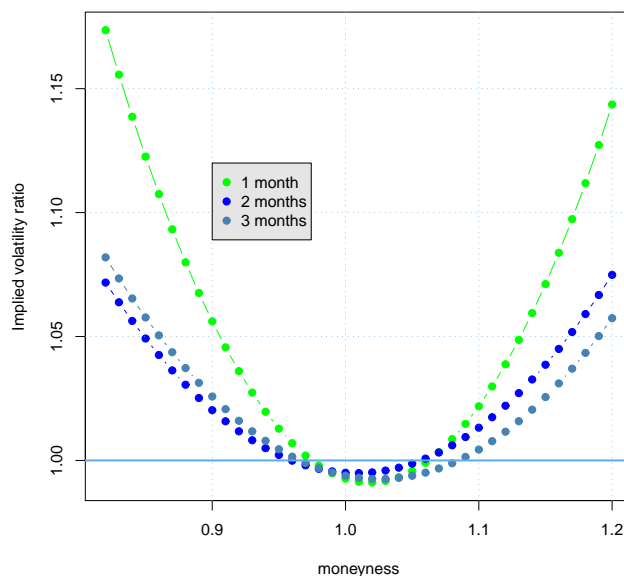


FIGURA 3.4. Volatilidad implícita para el modelo GJR-GARCH

De manera semejante, en la Figura 3.4, se presentan la curva de volatilidad implícita para el modelo GJR-GARCH. Esta gráfica presenta algunas características importantes, tales como las bajas volatilidades de las opciones *at the money* en todas las maduraciones, las cuales son muy similares entre sí y claramente son más bajas que la volatilidad de BS (esta por definición es igual a uno). Para opciones *in the money* y *out the money*, cuando tienen maduraciones de un mes, la volatilidad es más alta, y tiene un ligero sesgo que da más volatilidad a las opciones *out the money*. Para maduraciones de dos y tres meses, el patrón de asimetría tiende a desaparecer, y el efecto de sonrisa tiende a ser similar en forma y valor, mostrando bajas volatilidades implícitas. Dado que el patrón de sesgo es pequeño, el desarrollo para opciones *out the money* es diferente al observado en el modelo EGARCH. Para estas opciones la volatilidad es alta, por lo tanto bajos precios del activo y retornos positivos son generados por la simulación. De esta manera el modelo es ligeramente optimista, para valores externos *out the money*.

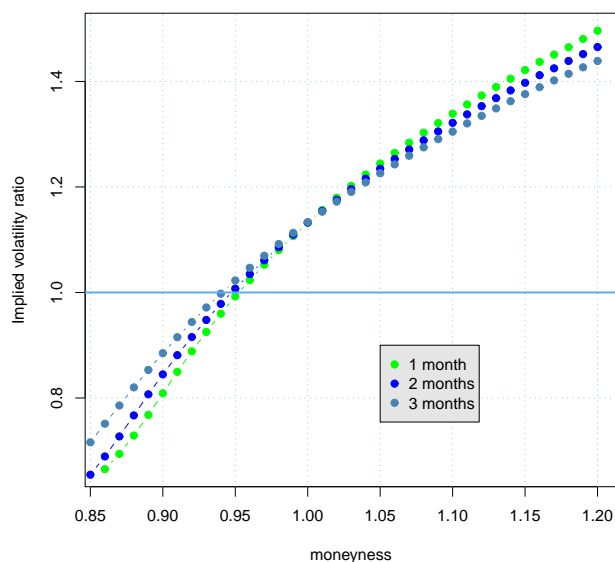


FIGURA 3.5. Volatilidad implícita para el modelo HN-GARCH

Para el modelo de valoración de opciones HN-GARCH, de acuerdo a la Figura 3.5, el efecto de sesgo es claramente dominante, mostrando un patrón totalmente distinto al observado en los anteriores modelos.

Para opciones *out the money* la volatilidad implícita es menor que la volatilidad de largo plazo. Adicionalmente, mientras el precio del activo decrece, la volatilidad implícita también lo hace. Esto es consistente con el análisis previo, dado que en el rango de retornos de 0 a 0.5, la volatilidad es muy pequeña y decreciente, así mientras mayor sea el retorno positivo, menor es la volatilidad. De esta manera, el proceso genera pequeños retornos positivos y negativos, como resultado de la baja volatilidad estacionaria, y el decrecimiento de la volatilidad causado por los retornos positivos. Para opciones *out the money* esto implica un lento crecimiento del precio terminal. Otra característica importante de este modelo, es que la estructura de volatilidad implícita no cambia con el período hasta la maduración de la opción, de esta manera el modelo es 'conservador' en sus expectativas a través del tiempo.

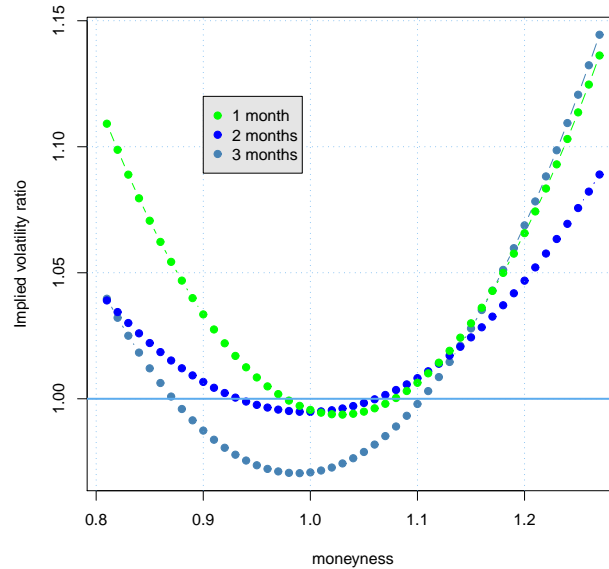


FIGURA 3.6. Volatilidad implícita para el modelo GARCH

Para el modelo de valoración de opciones GARCH, la curva de volatilidad implícita es presentada en la Figura 3.6. De esta gráfica se puede observar que la volatilidad tiene un comportamiento similar a la del modelo EGARCH en *out the money*, tendiendo a decrecer cuando la madurez incrementa. En el caso de opciones *at the money* la volatilidad para las tres maduraciones es menor que la empleada por el modelo BS. Aunque este modelo no describe la correlación entre los retornos y la volatilidad, es importante notar que la volatilidad implícita presenta un patrón de sesgo similar al del modelo EGARCH. Así, para opciones *out the money*, la respuesta del modelo es generar altos retornos positivos, implicando una sobreestimación.

Ahora se comparará la volatilidad implícita de cada uno de los diferentes modelos con opciones de un mes maduración.

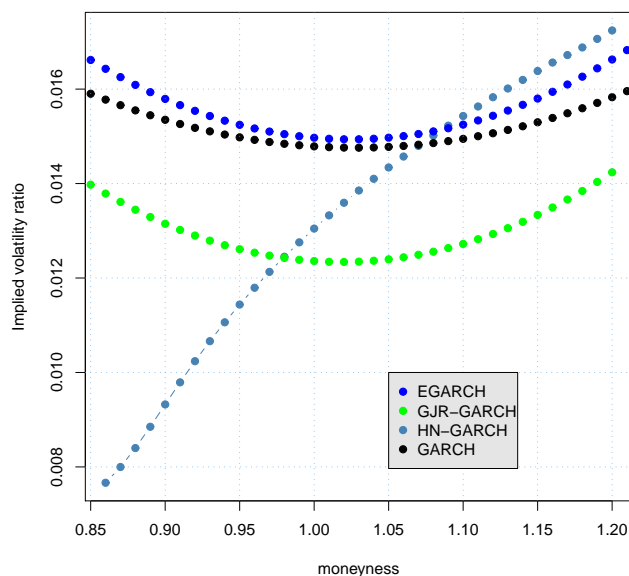


FIGURA 3.7. Volatilidad implícita a un mes de maduración

En la Figura 3.7 es posible observar que para las opciones *out the money*, el modelo HN-GARCH presenta la menor volatilidad, pero para *in the money*, este es muy similar al modelo EGARCH. El modelo GJR-GARCH, describe volatilidades más bajas que las de los modelos EGARCH y GARCH. Con excepción de la maduración de tres meses, en donde las volatilidades de las opciones *at the money* calculadas por el modelo EGARCH son más bajas que las del modelo GARCH, la volatilidad es mayor.

3.6.2. Valoración de opciones con retornos intradiarios

En esta sección se realizará el cálculo del precio y la volatilidad intradiaria de opciones a partir de los retornos intradiarios del activo. Para ello implementaremos los modelos expuestos anteriormente y la nueva aproximación. En el capítulo anterior, se observó que los modelos tradicionales de la familia GARCH, no describen adecuadamente la dinámica de la volatilidad intradiaria, ante lo cual, se propuso un nuevo modelo que busca describir esta a partir del conocimiento de los impactos estacionales de los retornos sobre la volatilidad futura.

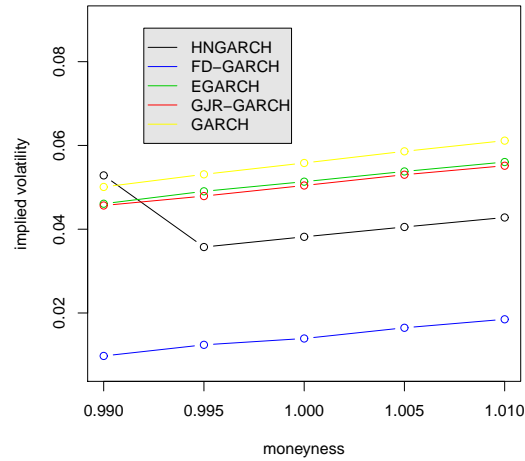


FIGURA 3.8. Volatilidad implícita para retornos intradiarios

En la Figura 3.8, se presenta la volatilidad implícita para *moneyness* entre 0.99 y 1.01. Dado que, nuestras series de precios están dadas minuto a minuto, grandes cambios de los precios no son muy probables, por este motivo, no se hace necesario calcular otras *moneyness*.

Como se puede observar, la volatilidad implícita para retornos intradiarios sigue un patrón diferente al observado en retornos diarios. La volatilidad implícita descrita por el modelo propuesto tiende a ser más baja, lo cual se puede deber a que el modelo describe mejor la volatilidad causada por retornos de alta magnitud. Por tal motivo, dado que para los otros modelos la volatilidad en retornos altos estaba siendo subestimada, el precio de la opción calculada por el nuevo modelo debe ser menor, pues detecta un nivel de riesgo mayor.

Conclusiones

Se compararon algunos modelos de volatilidad ampliamente usados en el contexto de valoración de opciones, en cuanto a la habilidad que poseen para pronosticar y describir la varianza característica de las series de precios bursátiles intradiarias. Encontramos, que para este tipo de series, se observa un comportamiento asimétrico que no es plenamente descrito en el marco de la definición del Efecto *Leverage*, según el cual, los retornos negativos generan un mayor crecimiento de volatilidad. Empíricamente, se encontró que para ciertos rezagos de tiempo y magnitudes de retornos, el impacto en la volatilidad podría ser grande también en retornos positivos. Teniendo en cuenta lo anterior, al ajustar los modelos GARCH, EGARCH y GJR-GARCH, se observó una clara sobrestimación de la volatilidad inherente de las series.

Dadas las falencias detectadas en la estimación de la volatilidad al ajustar los modelos anteriormente mencionados, y los hallazgos empíricos de un comportamiento estacional de la distribución condicional de los retornos, se propone una nueva aproximación, siguiendo la estructura de un modelo de difusión estocástica. Nuestros resultados evidencian un mejor ajuste en la descripción del comportamiento de la volatilidad.

Al aplicar los estos modelos para el cálculo de los precios de opciones *call*, **observamos** que para opciones *out-the-money*, el modelo HN-GARCH presenta los mas bajos precios. Esto se puede deber a que esta posición financiera requiere altos retornos positivos, los cuales son subestimados por este modelo. Para opciones *in the money*, el comportamiento es similar.

Al evaluar los modelos clásicos de valoración de opciones y contrástar sus resultados con los obtenidos **mediante** nuestra aproximación para el caso de opciones intradiarias, **este da** una estimación de precios considerablemente mas baja que los modelos GARCH tradicionales. Esto podría tener grandes implicaciones en la forma como actualmente se estan valorando este tipo de derivados financieros.

Referencias Bibliográficas

1. Black, F., and M. Scholes, 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.
2. Black, F., 1976, Studies of Stock Price Volatility Changes, "Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, 177-181.
3. Bollerslev, T., 1986, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
4. Bollerslev, T., AND J. M. Wooldridge, 1992. Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances. *Econometric Reviews*, 11, 143-172.
5. Box G.E.P and D.R Cox, 1964. An analysis of transformations, *Journal of the Royal Statistical Society B* 26, 211-243.
6. Christoffense P.&Jacobs, K. Which GARCH Model for Option Valuation. *Management Science* 50, 1204-1221.
7. Duan, J., 1995, The GARCH Option Pricing Model, *Mathematical Finance*, 5, 13-32.
8. Duan, J.-C., Simonato, J.-G., 1995. Empirical martingale simulation for asset prices. Working paper, Faculty of Management, McGill University, Montreal, Canada.
9. Engle Robert F & Ng, V. 1993. Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance* 48, 1749-1778.
10. Engle, 2001, "GARCH101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics", *Journal of Economic Perspectives*, 15, 157-168
11. Glosten, Lawrence, Ravi Jagannathan and David Runkle, 1993. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance* 48, 1779-1801.
12. Hall, P. & Yao, Q., 2003. Inference in ARCH and GARCH models with heavy-tailed errors. *Econometrica* 71, 285-317.
13. Hentschel, L. (1995). All in the family Nesting symmetric and asymmetric GARCH models. *Journal of Finance Economics* 39, 71-104.

14. Heston, S.& Nandi, S., 2000. A closed-form GARCH option value model. *Review of Financial Studies* 13,585-625.
15. Heston, S., 1993. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility, with Applications to Bond and Currency Options *Review of Financial Studies*, 6, 327-343.
16. J. P. Bouchaud, A. Matacz and M. Potters, 2001. *Phys. Rev. Lett.* 87, 228701.
17. J. Perello and J. Masoliver, 2003, *Phys. Rev. E* 67, 037102.
18. Ljung, Greta M. and George E.P Box, 1978. On a measure of lag of fit in time series models, *Biometrika* 67, 297-303.
19. Nelson, Danie, 1990. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica* 59, 347-370.
20. Pagan, A.& Schwert, G., 1990. Alternative models for conditional stock volatility. *Journal of Econometrics* 45, 267-290.
21. Peng, L. & Yao, Q, 2003. Least absolute deviations estimations for ARCH and GARCH models. *Biometrika* 90, 4, pp. 967-975.
22. Santana, E. , 1991. Quadratic ARCH models: A potential reinterpretation of ARCH models as second-order Taylor approximation.
23. Tsay, Ruey S. , 2002. *Analysis of financial time series*, Wiley Series in Probability and Statistics.