UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

MÓDULOS DE ZAVADSKIJ

Cesar Ivan Espinosa Romero

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2017

MÓDULOS DE ZAVADSKIJ

Cesar Ivan Espinosa Romero

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D. Agustín Moreno Cañadas

Línea de Investigación:Teoría de Representaciones
Grupo de Investigación TERENUFIA-UNAL

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2017

Director
Profesor Agustín Moreno Cañadas

Jurado No. 1

Dedicado a

A Dios por la vida, bendiciones, fortaleza y su continua presencia a lo largo de este camino. A mis padres y hermana por su apoyo incondicional en el sueño de ser un excelente profesional.

Agradecimientos

Doy en primer lugar gracias a Dios quien me ha dado capacidad y me ha fortalecido en todo momento.

A mis padres y hermana por su apoyo incondicional a lo largo de este camino.

Al profesor Agustín Moreno Cañadas. Director del proyecto; quien aportó significativamente con sus conocimientos y experiencias, importantes para la elaboración del mismo. Además por confiar en mis capacidades para dirigirme en este trabajo final.

Índice general

Índice general I

Resumen II

Introducción III

1. Algoritmo de Diferenciación respecto a una pareja conveniente de puntos 1
   1.1. Definiciones y notaciones iniciales de representaciones de posets. 2
   1.2. El Símbolo de Zavadskij 12
   1.3. Teorema principal 16

2. Módulos de Zavadskij 21

3. Generalización del algoritmo de diferenciación de Zavadskij a órdenes generales 30

4. Ejemplos de Módulos de Zavadskij en diferentes tipos de álgebras 44

Resumen

Resumen: Los módulos de Zavadskij fueron introducidos por W. Rump [18], quien dio una generalización a órdenes generales del algoritmo de Zavadskij [27,29] respecto a una pareja conveniente de puntos. Se describe las principales propiedades de dichos módulos, dando algunos ejemplos de su existencia en diferentes tipos de álgebras; en particular en álgebras seriales a derecha, álgebras de Nakayama y Álgebras hereditarias tipo Dynkin.

Palabras Claves: Algoritmo de Diferenciación respecto a una pareja conveniente de puntos, Módulos de Zavadskij, Órdenes generales, Álgebras seriales a derecha, Álgebras de Nakayama, Álgebras hereditarias tipo Dynkin.

Abstract: The Zavadskij's modules were introduced by W. Rump [18], who gave a generalization to general orders of the Zavadskij's [27,29] algorithm with respect to a suitable pair of points. We describe the main properties of such modules, giving some examples of its existence in different types of algebras; in particular in right serial algebras, Nakayama algebras, and Dynkin-type hereditary algebras

Keywords: Differentiation algorithm with respect to a suitable pair of points, Zavadskij's Modules, General orders, Right serial algebras, Nakayama algebras, Dynkin-type hereditary algebras.

Introducción

Los módulos de Zavadskij fueron introducidos por Rump [18], quien se apoyó de ellos para dar una generalización a órdenes generales del algoritmo de Zavadskij respecto a una pareja conveniente de puntos y de las otras versiones del mismo. De esta manera este algoritmo y sus diferentes formas son unificadas y extendidas a la teoría de representación de órdenes generales [18].

Debido a que la generalización de Rump [18] relaciona los algoritmos de Zavadskij, se dará a continuación un breve panorama sobre los algoritmos de diferenciación y su importancia en la teoría de representación de posets.

Las representaciones de posets de tipo finito fueron introducidas por Nazarova y Roiter en 1972 [14] para estudiar representaciones de álgebras de dimensión finita, ellos construyeron un algoritmo de diferenciación respecto a un punto maximal, el cual es de vital importancia en esta esta teoría. Dicho algoritmo fue utilizado por Kleiner [11, 12] para hallar el criterio de representación de tipo finito junto a una lista de las representaciones indescomponibles sinceras de posets de dimensión finita. Posteriormente Nazarova [15] lo usa para describir posets de tipo de representación manso y salvaje. La teoría mencionada es importante en el estudio de la teoría de representación de álgebras de dimensión finita, retículos sobre órdenes y en la clasificación de grupos abelianos libres de torsión, entre otros temas [2, 6, 16, 22].

El algoritmo respecto a una pareja conveniente de puntos es llamado también diferenciación respecto a un par conveniente de puntos [27] . Éste fue ideado y propuesto por Zavadskij [27] y usado de forma amplia en la teoría de representación de posets mansos. El algoritmo antedicho ha permitido obtener: una prueba más simple del criterio de mansedumbre de Nazarova, la demostración del criterio de crecimiento finito, el auge y desarrollo de la teoría de representación de posets de crecimiento finito [25].

Desde los años 80 la técnica de diferenciación se ha venido desarrollando, dando lugar a algoritmos de diferenciación de algunas clases, tales como los algoritmos I-V para posets con involución [25] o VII-XVII para posets equipados con involución [32], así mismo se han dado paso a generalizaciones en la teoría de módulos del mencionado algoritmo para órdenes generales [17, 18] [25].

Los algoritmos de diferenciación conducen a una equivalencia categórica que relaciona una categoría inicial y otra obtenida por derivación de los objetos y morfismos de la primera. Como se verá posteriormente, esta equivalencia relaciona categorías cociente. En los casos mencionados en este trabajo, referentes a Zavadskij [29] y Rump [18], se puede identificar la preocupación de dichos autores por mostrar la equivalencia mencionada.

En lugar de un par de puntos a, b en un poset, Rump [18] considera un monomorfismo $u : P \to I$ de Λ-retículos con $KP = KI$, en donde Λ es un orden sobre una K -álgebra de dimensión finita, con K un campo algebraicamente cerrado. para dicho u, él asigna a cada Λ-retículo E un par $\partial_u E = \binom{E^+}{E_-}$ de Λ-retículos con $E_- \subset E \subset E^+$. En donde E_- denota el subretículo maximal de E con $f(E_-) \subset P$ para cada homomorfismo $f : E \to I$, y E^+ es definido de forma similar. Cuando u satisface la condición $I^+ = I$ y $P_- = P$, esto es, $\partial_u P = \partial_u I = \binom{I}{P}$ [18]

entonces Λ^+ es un superorden de Λ y por dualidad $u^* : I^* \to P^*$ genera un superorden Λ^- de Λ, así se puede armar el órden derivado

$$\delta_u\Lambda := \begin{pmatrix} \Lambda^+ & \Lambda^+\Lambda^- \\ \Lambda_- & \Lambda^- \end{pmatrix} \subset M_2(A) \text{ de } \Lambda$$

y se puede construir el funtor ∂_u

$$\partial_u : \Lambda\textbf{-lat} \to \delta_u\Lambda\textbf{-lat}$$

de Λ y $\delta_u\Lambda$-retículos [18]

Cuando u es hereditario se obtiene la equivalencia de categorías cociente siguiente

$$\widetilde{\partial}_u : \Lambda\textbf{-lat}/\left[H_u\right] \to \delta_u\Lambda\textbf{-lat}/\left[\binom{I}{P}\right]$$

En donde $[C]$ denota el ideal de morfismos que se factorizan a través de una suma directa finita de objetos de C, con C una clase de objetos en una categoría aditiva. add C es la subcategoría plena de sumandos directos de sumas directas finitas de objetos isomorfos a aquellos en C. Si H es un Λ-retículo entre P e I, entonces

$\partial_u H = \binom{I}{P}$, se define $H_u :=$ add $\{H \in \Lambda\text{-}\mathbf{lat} : P \subset H \subset I\}$ [18]. El hecho que el Λ/Λ_- - módulo I/P es de Zavadskij (Proposición 3.9) es importante para demostrar que el funtor $\widetilde{\partial_u}$ es pleno (Teorema 3.14). Rump [18] considera la $R/\wp$ álgebra de dimensión finita $B := \Lambda/\Lambda_-$, con $\wp=$ Rad$R$ el radical de Jacobson. Con esta consideración se llega a que el B - módulo I/P cumple la condición de ser de Zavadskij por la Proposición 3.9 y de esta manera I^s/P^s, con $s \in \mathbb{N}$ también es un módulo de Zavadskij, gracias a la Proposición 2.3. Esto último es importante para demostrar la plenitud del funtor $\widetilde{\partial_u}$ en el Teorema 3.14. Para tal fin Rump usa el hecho de la Proposición 3.8 que garantiza que a partir de un endomorfismo de I^s/P^s existe otro en I^s [18].

De esta manera y partiendo de un homomorfismo f de $\delta_u\Lambda$ - retículos, Rump [18] encuentra otro f' entre ellos, resultando que el homomorfismo $f - f'$ es un homomorfismo entre Λ - retículos y de esta manera el funtor $\widetilde{\partial_u}$ es pleno [18].

El objetivo principal de este escrito es presentar algunos ejemplos de módulos de Zavadskij en diferentes tipos de álgebras, en particular en álgebras de caminos, ya que los mencionados ejemplos no se encuentran explícitamente en la literatura. Es conveniente considerar módulos en álgebras de dimensión finita en los ejemplos, ya que estas álgebras en particular son anillos noetherianos a izquierda y artinianos a derecha, y por esto último semiperfectos, lo cual se relaciona con las caracterizaciones de módulos de Zavadskij hechas por Rump [18]. También se pretende exponer de manera introductoria y sistemática algunos temas de la teoría de representación, en especial relativas al algoritmo de diferenciación de dos puntos para posets y a la generalización hecha por Rump [18] de este último.

El presente trabajo se divide en cuatro partes; inicialmente se presentan nociones básicas relativas a los conceptos generales sobre representaciones de posets de tipo finito, se introduce el símbolo de Zavadskij y propiedades categóricas del mismo necesarias para probar la equivalencia categórica que induce el algoritmo de diferenciación de Zavadskij respecto a una pareja conveniente de puntos (DI), dicho algoritmo y la equivalencia correspondiente también se mencionan. Posteriormente, se enuncia la teoría de los Módulos de Zavadskij. En el capítulo 3 se da a conocer la equivalencia categórica encontrada por Rump [18] para retículos sobre órdenes generales, que consiste en la generalización del algoritmo de diferenciación de Zavadskij en estas estructuras. Finalmente se presentan diferentes ejemplos de módulos de Zavadskij en diferentes tipos de álgebras; más precisamente en álgebras de Nakayama y álgebras hereditarias tipo Dynkin. Se concluye con resultados originales como los siguientes: criterios que permiten establecer cuándo un álgebra de Nakayama es un álgebra de Zavadskij y cómo poder encontrar módulos de Zavadskij en estas álgebras, también se da un criterio que establece que en una K álgebra básica de dimensión finita serial a derecha sin ciclos los morfismos de mansedumbre definidos por Rump[18] son inyectivos para sus módulos proyectivos indescomponibles, también se da un criterio similar para sus módulos inyectivos indescomponibles. Una consecuencia inmediata de lo anterior es que algunas álgebras de Nakayama son álgebras de Zavadskij. Además se sigue que en las álgebras hereditarias y seriales a derecha tipo Dynkin todos sus módulos indescomponibles proyectivos son de Zavadskij, se tiene un resultado también para los módulos inyectivos indescomponibles. Otro corolario es que para las álgebras de tipo A_n y seriales a derecha todos sus módulos indescomponibles proyectivos y todos sus módulos indescomponibles inyectivos son de Zavadskij excepto tal vez uno de ellos.

CAPÍTULO 1

Algoritmo de Diferenciación respecto a una pareja conveniente de puntos

Los algoritmos de diferenciación más importantes para posets ordinarios corresponden a la diferenciación respecto a un punto maximal (descubierta por Nazarova-Roiter) [14] y la diferenciación respecto a una pareja conveniente de puntos (descubierta por Zavadskij) [27,28,30,31,33]. Estos algoritmos son funtores entre cierta categoría inicial y su categoría derivada; estos permiten utilizar inducción sobre la dimensión de las representaciones, así pueden utilizarse en la obtención de los criterios de tipo de representación finito, de tipo manso y en la clasificación de las representaciones indescomponibles de los posets correspondientes.

Es de suma importancia el hecho que los algoritmos de diferenciación conducen a una equivalencia categórica que relaciona una categoría inicial y otra obtenida por derivación de los objetos y morfismos de la primera. Como se verá a continuación, esta equivalencia relaciona más precisamente categorías cociente. En los casos mencionados en este trabajo, referentes a Zavadskij [29] y Rump [18], se puede identificar la preocupación de dichos autores por mostrar esta equivalencia. Es así como ellos conducen sus esfuerzos en [29,18] para este fin. En [29] Zavadskij se centra en mostrar la equivalencia consecuencia de su algoritmo en representaciones de posets ordinarios y en [18] Rump se enfoca en la equivalencia para ordenes generales.

El símbolo de Zavadskij fue importante en la obtención de una demostración de la equivalencia de categorías cociente enunciada en el teorema 1.29; dicho teorema surge del hecho que el siguiente diagrama es un retículo

$$\begin{array}{ccccc} & & R'(U',V') & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ R(U,V) & & & & \Omega'(U',V') \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & \Omega(U,V) & & \end{array}$$

En consecuencia $R(U,V)+\Omega'(U',V') = R'(U',V')$ y $R(U,V)\cap\Omega'(U',V') = \Omega(U,V)$

en donde $R = \text{rep}\ \mathcal{P}$, $R' = \text{rep}\ \mathcal{P}'$, $\Omega = \langle K(a), K(a,c_1), ..., K(a,c_n)\rangle_R$ y $\Omega' = \langle K(a)\rangle_{R'}$, con $\mathcal{P}$ un poset con una pareja conveniente de puntos para diferenciación, $\mathcal{P}'$ su poset derivado, rep $\mathcal{P}$ la categoría de representaciones de $\mathcal{P}$ y rep $\mathcal{P}'$ la categoría de representaciones de $\mathcal{P}'$. Los ideales $\Omega = \langle K(a), K(a,c_1), ..., K(a,c_n)\rangle_R$ y $\Omega' = \langle K(a)\rangle_{R'}$ son los generados por los morfismos identidad de los objetos $K(a), K(a,c_1), ..., K(a,c_n)$ en rep $\mathcal{P}$ y $K(a)$ en rep $\mathcal{P}'$ respectivamente.

Con base en lo anterior se obtiene el teorema mencionado, para el cual evidentemente son de importancia los lemas 1.25-1.27, que se demuestran partir de algunas propiedades del símbolo de Zavadskij en [29].

En este capítulo se introduce algunas definiciones y notaciones de representaciones de posets tomadas de [4,13,29,34]; en segunda instancia se expone el símbolo de Zavadskij [5,29,34] y algunas de sus propiedades; posteriormente se esboza el algoritmo de diferenciación de Zavadskij respecto a una pareja conveniente de puntos; finalmente se presenta como teorema principal la equivalencia categórica que induce este algoritmo. Los resultados y notación siguientes se atribuyen a Zavadskij [29,34].

1.1. Definiciones y notaciones iniciales de representaciones de posets.

En esta sección se presentan nociones básicas de la teoría clásica de representación de posets de tipo finito, considerando así conjuntos parcialmente ordenados (posets) ordinarios, es decir, sin estructuras adicionales. La notación y los resultados ulteriores se deben a Zavadskij [29], también se incluye información presente en [13] y [34]. Se inicia la sección con conceptos básicos y necesarios de categorías que se tomaron de [4].

El problema principal de la teoría clásica de representación de posets es clasificar las clases no isomorfas de representaciones indescomponibles de un poset dado sobre un campo K y los morfismos irreducibles. Para ello, Nazarova y Roiter descubrieron que dicha clasificación se reduce a hallar las formas canónicas indescomponibles de un problema matricial asociado a un poset.

Para un conjunto X, $|X|$ denota el **cardinal** de X. Dados dos conjuntos A, B denotamos por $A \subset B$ la contenencia (no necesariamente estricta); la diferencia conjuntista de los conjuntos A, B se denota $A \setminus B$.

Una **categoría** [23] digamos R, es una clase de objetos junto con los siguientes datos

(a) Una regla que asigna a cada pareja de objetos (U, V) en R, un conjunto $R(U, V)$, cuyos elementos se llaman morfismos de U hacia V .

(b) Una aplicación de composición para cada tripla de objetos (U, V, W) en R,

$$\begin{array}{ccc} R(V,W) \times R(U,V) & \to & R(U,W) \\ (g,f) & \to & g \circ f \end{array}$$

la cual es asociativa, en el sentido que si $g \in R(U, V)$, $f \in R(V, W)$ y $e \in R(W, X)$ entonces $e \circ (f \circ g) = (e \circ f) \circ g$ y admite elementos identidad en el sentido que cada conjunto $R(U, U)$, contiene un elemento 1_U, tal que $1_U \circ f = f$, para cada $f \in R(U, V)$ y $g \circ 1_U = g$, para cada $g \in R(U, W)$. gf es otra forma de notar la composición entre dos morfismos $f \in R(U, V)$ y $g \in R(V, W)$, [2,6]. Frecuentemente, el hecho que un objeto U (morfismo f) pertenezca a una categoría R, lo notaremos $U \in R$ ($f \in R$) y escribimos $U \xrightarrow{f} V$ para designar un elemento $f \in R(U, V)$ [4].

Un morfismo $f \in R(U, V)$ es un **isomorfismo** si y solamente si existe un único morfismo $g \in R(V, U)$, tal que $gf = 1_U$ y $fg = 1_V$, si este es el caso diremos que los objetos U y V son **isomorfos** y notamos $U \simeq V$ [4].

Si K es un anillo conmutativo, una K**-categoría** es una categoría R cuyos conjuntos de morfismos $R(U, V)$, tienen estructura de K-módulos tales que los morfismos de composición son K-bilineales [6,16]. Esto es, si $\varphi, \varphi', \varphi''$ y ψ, ψ', ψ'' son morfismos y las sumas y composiciones están definidas, tendremos:

$(a'\psi' + a''\psi'')\varphi = a'\psi'\varphi + a''\psi''\varphi$, para todo $a', a'' \in K$

$\psi(b'\varphi' + b''\varphi'') = b'\psi\varphi' + b''\psi\varphi''$, para todo $b', b'' \in K$

Si R es una K-categoría y $U, V \in R$, entonces el **coproducto** de los objetos U y V en R, es una quintupla (S, i, j, p, q), que consta de un objeto $S \in R$ y morfismos

$U \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} S \underset{q}{\overset{j}{\rightleftarrows}} V$ tales que $pi = 1_U$, $qj = 1_V$ y $ip + jq = 1_S$ [6]. Tal coproducto es único salvo isomorfismos, por lo que si existe un coproducto entre los objetos U y V, supondremos que uno canónico ha sido elegido. El objeto S, se denomina la **suma** de U y V en R y se nota $U \oplus V$. Los morfismos p, q se llaman **proyecciones** y los morfismos i, j se llaman **inmersiones** [4].

Se dice que una K-categoría R es **aditiva** si $U \oplus V$ existe para cada par de objetos $U, V \in R$ y contiene un **objeto nulo** o inicial 0, tal que $1_0 = 0$ [6,16]. Por ejemplo, la clase de K-espacios vectoriales de dimensión finita es una K-categoría aditiva, para la cual los morfismos son transformaciones K-lineales. En este caso el objeto $U = U_1 \oplus ... \oplus U_n$, es la suma directa usual de espacios vectoriales, con inmersiones $i_j : U_j \to U$, dadas por $i_j(u_j) = (0, ..., u_j, ..., 0)$ [4].

Un objeto $U \neq 0$ en una categoría aditiva R es **indescomponible** si $U \simeq U_1 \oplus U_2$, implica $U_1 = 0$ o $U_2 = 0$. R es finita si para todo $U, V \in R$, los K-módulos, $R(U, V)$ son de dimensión finita (esto es, $\dim_k R(U, V) < \infty$) y posee un número finito de clases de isomorfismos de objetos indescomponibles [4].

Una K-categoría aditiva R es una **categoría Krull-Schmidt** si todos los idempotentes son escindientes lo cual es equivalente a decir que ellos son partibles (esto es, si $e = e^2 \in R(U, U)$ es un idempotente entonces existen morfismos $f : V \to U$, $g : U \to V$ tales que $gf = 1_V$ y $fg = e$) o de forma equivalente una K-categoría aditiva R es Krull-Schmidt si el anillo de endomorfismos End U de cada objeto indescomponible U de R es un anillo local. En [16] se establece que una categoría Krull-Schmidt R tiene la propiedad de descomposición única (resultado este, obtenido por Krull, Remak y Schmidt) lo cual significa que si U_i, V_j son objetos indescomponibles en R, con $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq t$, tales que $\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} U_i \cong \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} V_j$ entonces $s = t$ y existe una permutación π de $\{1, ..., s\}$ tal que $U_i \cong V_{\pi(i)}$ para cada i [4].

Las K-categorías generalizan K- álgebras (en el sentido que cada K- álgebra A da lugar a una K-categoría la cual tiene un único objeto Ω, el mismo para toda A y satisface Hom (Ω,Ω) $= A$) y esta generalización da lugar al concepto de ideales (bilaterales), [6]. Un **ideal**, J de una K-categoría R es una familia de subgrupos $J(U, V) \subset R(U, V)$ tales que $f \in J(U, V)$ implica $gfe \in J(W, Z)$, para todo $e \in R(W, U)$ y $g \in R(V, Z)$. Cada ideal J da lugar a su vez a una **categoría cociente** R/J cuyos objetos son aquellos de la categoría R y satisface

$(R/J)(U, V) = R(U, V)/J(U, V)$, para cada $U, V \in R$ [4]

Si R y R' son dos categorías entonces un **funtor** entre estas categorías, es una aplicación $F : R \to R'$, que asigna a cada objeto $U \in R$, un objeto $F(U) \in R'$ y a cada morfismo $g \in R(U, V)$ un morfismo $F(g) \in R'(F(U), F(V))$, de forma tal que:

$F(1_U) = 1_{F(U)}$, para cada objeto $U \in R$ y

$F(gf) = F(g)F(f)$; para todo $f \in R(U,V)$ y $g \in R(V,W)$ [4].

El funtor F es una **equivalencia**, si para cualquier par de objetos $U, V \in R$, la aplicación de conjuntos $F(U,V) : R(U,V) \to R'(F(U),F(V))$, dada por $F(U,V)(g) = F(g)$ es biyectiva y cada objeto $V \in R'$ es isomorfo a $F(U)$, para algún objeto $U \in R$ (un funtor que satisface la segunda condición se denomina **denso**). Dos categorías se llaman **equivalentes** si existe una equivalencia entre ellas. F es un funtor **fiel** (**pleno**), si para todo par de objetos $U, V \in R$, la aplicación de conjuntos $F(U,V)$ es inyectiva (sobreyectiva). Un funtor F entre dos K-categorías S y S' es un funtor **aditivo**, si las aplicaciones $F(U,V) : S(U,V) \to S'(F(U),F(V))$, son K-lineales, para todo $U, V \in S$ [4].

Una categoría A es una **subcategoría** de la categoría B si existe un funtor inclusión de A en B. Esto es, cada objeto U de A es un objeto de la categoría B y $A(U,V) \subset B(U,V)$, para todo $U, V \in A$. Además una subcategoría A de una categoría B es **plena** si $A(X,Y) = B(X,Y)$, para todo par de objetos $X, Y \in A$ (lo cual significa que si i es un funtor inclusión que puede ser definido entre ellas entonces i es pleno) y si B es una categoría Krull-Schmidt entonces A es también Krull-Schmidt si es cerrada para sumas directas y sumandos directos [16] [4].

Definición 1.1 (**Conjunto parcialmente ordenado**). *Un* ***conjunto ordenado****,* ***conjunto parcialmente ordenado*** *o* ***poset*** *es una pareja ordenada* $(\mathcal{P}, \leq)$ *que consta de un conjunto* $\mathcal{P}$ *y una relación binaria* $\leq$ *contenida en* $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$*, denominada el* ***orden*** *(o el* ***orden parcial****) sobre* $\mathcal{P}$*, tal que :*

(a) La relación $\leq$ *es* ***reflexiva****. Esto es, para cada* $x \in \mathcal{P}$*,* $x \leq x$*.*

(b) La relación $\leq$ *es* ***antisimétrica****. Esto es, para cada pareja* $x, y \in \mathcal{P}$

$$x \leq y \quad \text{y} \quad y \leq x \text{ implica } x = y.$$

(c) La relación $\leq$ *es* ***transitiva****. Esto es, para toda tripla* $x, y, z \in \mathcal{P}$

$$x \leq y \quad \text{y} \quad y \leq z \text{ implica } x \leq z \text{ [4]}.$$

Nota 1.2. *Si no hay confusión, la relación de orden no se menciona explícitamente cuando se habla de un conjunto parcialmente ordenado. De tal manera que frases como "Dado un poset $\mathcal{P}$", normalmente quiere decir que al conjunto $\mathcal{P}$ se le ha dotado de una relación de orden la cual usualmente se nota $\leq$ [4].*

Escribimos $x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$, en cuyo caso diremos que la relación entre x y y es **estricta**. Una relación $\leq$ sobre un conjunto $\mathcal{P}$ que es reflexiva y transitiva pero no necesariamente antisimétrica se llama un **pre-orden**.

Definición 1.3. *Un poset es finito (infinito) si y solamente si el conjunto subyacente $\mathcal{P}$ es finito (infinito).*

Definición 1.4. *Si $(\mathcal{P}, \leq)$ es un poset finito, entonces podemos representarlo gráficamente con un sistema de círculos (representando los elementos de $\mathcal{P}$) y líneas conectándolos (indicando una relación entre los puntos). La construcción de esta representación gráfica cumple con las siguientes reglas :*

(a) A cada punto $x \in \mathcal{P}$, se le asocia un punto $p(x)$ del plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, representándolo con un pequeño circulo con centro en $p(x)$.

(b) a cada relación $x < y$ en $\mathcal{P}$, para la cual no existe $t \in \mathcal{P}$ tal que $x < t < y$ se le asigna un segmento de recta $l(x, y)$, conectando el circulo con centro en $p(x)$ y el circulo con centro en $p(y)$.

(c) Los pasos (a), (b) se llevan a cabo de forma tal que:

   (1) Si $x < y$ y no existe $t \in \mathcal{P}$ tal que $x < t < y$ entonces $p(x)$ debe quedar por debajo de $p(y)$ (esto es, la segunda coordenada de $p(x)$ es estrictamente menor que la de $p(y)$).

   (2) El círculo con centro en $p(z)$ no intersecta el segmento de recta $l(x, y)$ si $z \neq x$ y $z \neq y$ [4].

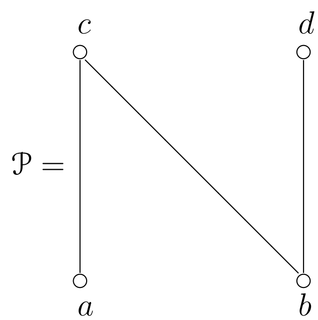
Una configuración de círculos y líneas satisfaciendo (a)-(c) se llama un ***diagrama de Hasse*** de $\mathcal{P}$.

Nota 1.5. *Los diagramas de Hasse comúnmente se definen para conjuntos ordenados finitos. En general no es posible representar completamente un conjunto ordenado infinito por medio de un diagrama, pero si su estructura es suficientemente regular éste puede ser sugerido gráficamente [4].*

Ejemplo 1.6 (Conjuntos parcialmente ordenados.)**.** *Algunos sencillos ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados son:*

- *El conjunto de los números naturales con su orden usual.*
- *El conjunto de partes de un conjunto X, ordenado por inclusión.*
- *El conjunto de subespacios de un espacio vectorial, ordenado por inclusión.*
- *El conjunto de topologías de un conjunto finito, ordenado por inclusión.*

Ejemplo 1.7 (Diagrama de Hasse de un poset.)**.** *Sea* $(\mathcal{P}, \leq)$ *con* $\mathcal{P} = \{a, b, c, d\}$ *y* $a < c$*,* $b < c$*,* $b < d$*.*



Si P es un poset y $x, y \in P$, se usan las notaciones xy, $x + y$ para indicar $\text{Inf}\{x, y\}$ y $\text{Sup}\{x, y\}$ respectivamente en el caso que existan [19]. Además si $S \subset P$, $\prod_{s \in S} s$, $\sum_{s \in S} s$ denotan respectivamente Inf S y Sup S respectivamente si ellos existen. Si P es un conjunto ordenado no vacío y para cada $x, y \in P$, xy, $x + y$ existen entonces P se denomina un **retículo**. P es un **retículo completo** si para cada subconjunto $S \subset P$ existen $\prod_{s \in S} s$ y $\sum_{s \in S} s$ [4].

Un poset P se llama **filtrante a derecha** (filtrante a izquierda) si y solamente si para cada par de elementos $x, y \in P$, existe $z \in P$, tal que $x \leq z$ $(z \leq x)$ y $y \leq z$ $(z \leq y)$. Esto es, todos sus subconjuntos con dos elementos son acotados superiormente (inferiormente). Un retículo L es **modular** si $x \geq z$ implica $x(y + z) = (xy) + z$, para cada $x, y, z \in L$ [4].

Ahora describimos la categoría de representaciones de un poset finito $\mathcal{P}$.

Sean $\mathcal{P}$ un poset y K un campo arbitrario. Una **representación** de $\mathcal{P}$ sobre K es una colección $U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$, en donde U_0 es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K, U_x es subespacio de U_0 para todo $x \in \mathcal{P}$, y $U_x \subset U_y$, si $x < y$ en $\mathcal{P}$. Un **morfismo** $\varphi : U \to V$ entre dos representaciones U, V de $\mathcal{P}$ sobre K es una transformación K-lineal $\varphi : U_0 \to V_0$ tal que $\varphi(U_x) \subset V_x$, para todo

$x \in \mathcal{P}$. De los objetos y morfismos antes definidos se obtiene la categoría aditiva y Krull Schmidt $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, K) = \operatorname{rep} \mathcal{P}$ de representaciones de $\mathcal{P}$ sobre K en donde las identidades $1_U : U \to U$ están dadas por las transformaciones lineales identidades $1_{U_0} : U_0 \to U_0$ y la composición de morfismos es la composición de transformaciones lineales.

Un morfismo $\varphi : U \to V$ en $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, K)$ es un **isomorfismo** si $\varphi : U_0 \to V_0$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y además $\varphi(U_x) = V_x$, para todo $x \in \mathcal{P}$; en este caso escribimos $U \simeq V$. El conjunto de morfismos $f : U \to U$ se denota End U.

La **suma directa** de dos representaciones U, V en $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, K)$ es la representación $U \oplus V = (U_0 \oplus V_0, U_x \oplus V_x : x \in \mathcal{P})$. Una representación W es **indescomponible** si $W \simeq U \oplus V$ implica $U = 0$ o $V = 0$; en caso contrario, W se dice **descomponible**.

La **dimensión** de una representación $U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$ es el vector $d = \underline{\dim}\, U = (d_0, d_x : x \in \mathcal{P})$, en donde $d_0 = \underline{\dim}\, U_0$, $d_x = \underline{\dim}\, U_x/U_{-x}$, con $U_{-x} = \sum\limits_{x<y} U_y$.

Observación 1.8. *Se dice $U \in \operatorname{rep} \mathcal{P}$ es X-libre, donde $X \subset \operatorname{rep} \mathcal{P}$, si U no tiene sumandos directos isomorfos a objetos en X.*

Dada una representación U de $\mathcal{P}$ y un subespacio $W_0 \subset U_0$, se define la subrepresentación $U \cap W_0$ y la representación cociente $(U + W_0)/W_0$ de $\mathcal{P}$ por las fórmulas

$U \cap W_0 = (W_0, U_x \cap W_0/x \in \mathcal{P})$

$(U + W_0)/W_0 = (U_0/W_0, (U_x + W_0)/W_0/x \in \mathcal{P})$

Nota 1.9. *El problema principal de la teoría de representación de posets es obtener la clasificación completa (salvo isomorfismo) de los objetos en* $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, K)$ *y los morfismos irreducibles. Gracias al hecho que dicha categoría es Krull Schmidt, basta con obtener la clasificación de las representaciones indescomponibles.*

En lo que sigue, denotamos por $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, K)$ (o, simplemente $\operatorname{Ind} \mathcal{P}$) a la colección de (clases de isomorfía de) representaciones indescomponibles de $\mathcal{P}$ sobre K.

Sean $X_1, ..., X_n$ subconjuntos de $\mathcal{P}$ con $X_i \cap X_j = \emptyset$, para todos $i \neq j$; entonces, la unión $X_1 \cup ... \cup X_n$ se denota $X_1 + ... + X_n$ y se denomina la **suma** de $X_1, ...X_n$. Si $x \in \mathcal{P}$, el **cono superior** de x es el conjunto $x^{\triangledown} = \{y \in \mathcal{P} : x \leq y\}$ y el **cono inferior** de x es el conjunto $x_{\vartriangle} = \{y \in \mathcal{P} : y \leq x\}$. Si $X \subset \mathcal{P}$, los conos superior e inferior de X están dados por $X^{\triangledown} = \bigcup\limits_{x \in X} x^{\triangledown}$, $X_{\vartriangle} = \bigcup\limits_{x \in X} x_{\vartriangle}$ respectivamente. El conjunto de puntos minimales (respectivamente maximales) de X lo denotamos por $\min X$ (respectivamente $\max X$).

Un subconjunto $A \subset \mathcal{P}$ es llamado un **cono superior** (un **cono inferior**) si $A = A^{\nabla}(A = A_{\Delta})$. Obviamente, A es un cono superior si y sólo si $B = \mathcal{P} \setminus A$ es un cono inferior, y en este caso los conos A y B son llamados mutuamente **complementarios**.

Si $x \in \mathcal{P}$, denotamos por $\mathrm{inc}(x)$ al conjunto de puntos de $\mathcal{P}$ incomparables con x. Si $y \in \mathrm{inc}(x)$, escribimos $x - y$. Si $X, Y \subset \mathcal{P}$, escribimos $X - Y$ (respectivamente $X < Y$) si $x - y$ (respectivamente $x < y$), para todos $x \in X$, $y \in Y$. Una suma $X + Y$ es **cardinal** (respectivamente **ordinal**) si $X - Y$ (respectivamente $X < Y$ o $Y < X$). Una **anticadena** en $\mathcal{P}$ es un conjunto de puntos mutuamente incomparables. Una **cadena** en $\mathcal{P}$ es un conjunto de puntos linealmente ordenados.

Una **díada (tríada)** es una anticadena con dos (tres) puntos. El **ancho** del poset $\mathcal{P}$, denotado $\omega(\mathcal{P})$, es el máximo número de puntos mutuamente incomparables en $\mathcal{P}$; en otras palabras, el máximo de los cardinales de las anticadenas en $\mathcal{P}$.

Una representación U es **trivial** si $U_0 = K$ (una representación trivial es inmediatamente indescomponible). Para un subconjunto arbitrario $X \subset \mathcal{P}$, denotamos $K(X)$ la representación trivial de la forma $(K, U_x : x \in \mathcal{P})$, en donde:

$$U_x = \begin{cases} K & \text{si } x \in X^{\nabla}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.10. Para un poset $\mathcal{P}$ arbitrario, $K(\emptyset) = (K, 0, ..., 0)$ con $\underline{\dim}\, K(\emptyset) = (1, 0, ..., 0)$ y $K(\mathcal{P}) = K(\min \mathcal{P}) = (K, K, ..., K)$ con $\underline{\dim}\, K(\mathcal{P}) = (1, d_x : x \in \mathcal{P})$, en donde $d_x = 1$ si $x \in \min X$ y $d_x = 0$, en caso contrario.

Se escribe con frecuencia $K(X_1, ..., X_n)$ en lugar de $K(X_1 \cup ... \cup X_n)$, además, si algún $X_i = \{x\}$ es un conjunto de un elemento, entonces se escribe simplemente x en lugar de $\{x\}$. En particular, $K(A, b) = K(A \cup \{b\})$.

Como es usual, se considerará para un K-espacio U_0, el **espacio dual** $U_0^* = \mathrm{Hom}_K(U_0, K)$ y para cualquier transformación K-lineal $\varphi : U_0 \to V_0$ la **transformación dual** $\varphi^* : V_0^* \to U_0^*$ tal que $\varphi^*(f) = f\varphi$ para $f \in V_0^*$. Asignando a cada subespacio $X \subset U_0$ su **complemento ortogonal** $X^{\perp} \subset U_0^*$ dado por $X^{\perp} = \{f \in U_0^* / f(X) = 0\}$, se obtiene un antiisomorfismo entre los retículos modulares de subespacios en U_0 y U_0^* . Nótese que $(\mathrm{Im}\, \varphi)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, \varphi^*$ y $(\mathrm{Ker}\, \varphi)^{\perp} = \mathrm{Im}\, \varphi^*$.

Se usa la K-**dualidad** estándar

$$* : \mathrm{rep}\ \mathcal{P} \to \mathrm{rep}\ \mathcal{P}^{op}$$

La cual asigna a cada representación U de $\mathcal{P}$ su K-dual U^* de $\mathcal{P}^{op}$ con U_0^* siendo como antes, $U_x^* = U_x^{\perp}$, y a cada morfismo φ su K-dual φ^*. Se aceptan las identificaciones canónicas $U_0^{**} = U_0$, $X^{**} = X$, $U^{**} = U$ y $\varphi^{**} = \varphi$.

Observación 1.11. *U_x^* significa $(U^*)_x$ pero no $(U_x)^*$, excepto para $x = 0$.*

Nótese que si $\mathcal{P} = A^{\triangledown} + B_{\Delta}$, entonces $(K(A))^* = K(B^{op})$, en particular $(K(\mathcal{P}))^* = K(\phi)$. Equivalentemente, para cualquier anticadena $\{a_1, ..., a_n\}$ en $\mathcal{P}$, se tiene que $(K(a_1, ..., a_n))^* = K(b_1, ..., b_m)$ donde $\{b_1, ..., b_m\} = max(\mathcal{P} \setminus \{a_1, ..., a_n\}^{\triangledown})$.

Se denota por U^m (respectivamente φ^m) la suma directa de m copias de una representación o un espacio U (de un morfismo o una transformación lineal φ). Se escribe $K^m(A)$ en lugar de $(K(A))^m$.

Para un subconjunto $A \subset \mathcal{P}$ y una representación U de $\mathcal{P}$, se denota $U_A^- = \bigcap\limits_{x\in A} U_x$ y $U_A^+ = \sum\limits_{x\in A} U_x$ (por definición $U_{\phi}^- = U_0$ y $U_{\phi}^+ = 0$). Es trivial que, $U_A^- = U_{\text{mín}\, A}^-$ y $U_A^+ = U_{MaxA}^+$. Se satisface también $(U_A^+)^{\perp} = (U^*)_{A^{op}}^-$.

El ideal de la categoría $R = \text{rep}\ \mathcal{P}$, generado por los morfismos identidad de algunos objetos dados $U_1, ..., U_n$, se denota por $< U_1, ..., U_n >_R$. Consiste de todos aquellos morfismos en R que se factorizan con sumas directas $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_i^{m_i}$ para algún m_i, en particular para $A \subset \mathcal{P}$, el ideal $< k(A) >_R$ está formado por todos los morfismos compuestos $U \to k^m(A) \to V$, donde U y V son objetos de R y $m \geq 1$.

Considere un poset de subespacios de algún espacio vectorial U_0 de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & & & U_0 \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & & A+B \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & & W \arrow[dl, no head] \\
 & A \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & & B \arrow[dl, no head] & \\
E \arrow[dr, no head] & & A\cap B \arrow[dl, no head] & & \\
 & 0 & . & &
\end{tikzcd}$$

El par de subespacios (E, W) es llamado una (A, B)-**separación** si el poset anterior es un retículo, i.e todos los cuadrados dibujados son retículos (automáticamente esto es verdad para el cuadrado del medio). se verifica fácilmente que un par (E, F) es una (A, B)-separación si y sólo si $U_0 = E + W$ y $A = E + (A \cap B)$, $B = W \cap (A + B)$.

Se denota por $L = L(\mathcal{P})$ al **retículo modular** generado por un poset $\mathcal{P}$ (con las notaciones para las operaciones de retículo . y +) el cual se entiende como el retículo de las correspondientes clases de equivalencia de términos no vacíos formados por elementos de $\mathcal{P}$. Cada representación $U = (U_0, U_x/x \in \mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ induce naturalmente una representación $U_L = (U_0, U_x/x \in L)$ del retículo L con la convención de que $U_{x+y} = U_x + U_y$ y $U_{xy} = U_x \cap U_y$ para cualquier $x, y \in L$.

Sea $\widetilde{L} = L + \{\perp, \top\}$ el **retículo modular ampliado** generado por $\mathcal{P}$, el cual se obtiene de L adhiriendo dos elementos adicionales: el **ínfimo** $\perp$ y el **supremo** $\top$ con la propiedad $\perp < x < \top$ para cualquier $x \in L$ (y por supuesto, $\perp < \top$ si $\mathcal{P} = \phi$).

La representación $U_{\widetilde{L}} = (U_0, U_x/x \in \widetilde{L})$ del retículo ampliado $\widetilde{L}$, inducida por una representación U de $\mathcal{P}$, coincide con U_L cuando restringimos a L, y siempre satisface las condiciones $U(\perp) = 0$ y $U(\top) = U_0$ (i.e. de hecho L y $\widetilde{L}$ tienen las mismas representaciones, aunque formalmente no).

Para cada subconjunto $A \subset \widetilde{L}(\mathcal{P})$, tal que $max\, A (min\, A)$ es finito, sea $A^+ = \sum\limits_{x \in \text{máx } A} x$ y $A^- = \prod\limits_{x \in \text{mín } A} x$. Si $A = \phi$, entonces por definición $\phi^+ = \perp$, $\phi^- = \top$. $K\{e_1, ..., e_n\}$ denota el espacio vectorial sobre un campo K generado por los vectores dados $e_1, ..., e_n$.

A continuación se menciona el teorema de Dilworth junto con su demostración, el cual es un hecho importante en la teoría de conjuntos ordenados y en la teoría de representación de Posets.

Teorema 1.12. *(Teorema de Dilworth).* Sea $\mathcal{P}$ un poset con $\omega(\mathcal{P}) = m$. Entonces $\mathcal{P}$ es suma de m cadenas, $P = C_1 + \cdots + C_m$.

Demostración Procedemos por inducción sobre $|\mathcal{P}|$. Si $\mathcal{P}$ contiene una única anticadena A de m elementos, entonces $w(\mathcal{P} \setminus a) = m - 1$, para cada $a \in A$; por hipótesis de inducción, $\mathcal{P} \setminus a$ es suma de $m - 1$ cadenas: $\mathcal{P} \setminus a = C_1 + ... + C_{m-1}$ y así, $\mathcal{P} = C_1 + ... + C_{m-1} + a$. Si $\mathcal{P}$ contiene solamente dos anticadenas A, B de cardinal m, entonces existe una cadena $\{a, b\}$ en $\mathcal{P}$, tal que $a \in A \setminus B, b \in B \setminus A$; entonces $w(\mathcal{P} \setminus \{a, b\}) = m - 1$ y, por hipótesis de inducción, $\mathcal{P} \setminus \{a, b\}$ es suma de $m - 1$ cadenas: $\mathcal{P} \setminus \{a, b\} = C_1 + ... + C_{m-1}$ y así, $\mathcal{P} = C_1 + ... + C_{m-1} + \{a, b\}$. Finalmente, si $\mathcal{P}$ contiene tres o más anticadenas con m elementos, entonces existe una anticadena

$A = \{a_1, ..., a_m\}$ que contiene un punto no maximal de $\mathcal{P}$ y un punto no minimal de $\mathcal{P}$; por lo tanto, $A^\nabla \neq \mathcal{P} \neq A_\triangle$ y, por hipótesis de inducción, $A^\nabla, A_\triangle$ son suma de m cadenas $C_i, D_i, i \in \overline{1,m}$, respectivamente, en donde $a_i \in C_i \cap D_i, i \in \overline{1,m}$; de aquí concluimos que $\mathcal{P} = (C_1 \cup D_1) + ... + (C_m \cup D_m)$. □

1.2. El Símbolo de Zavadskij

En esta sección se mencionan algunas propiedades del símbolo de Zavadskij [29,34], las cuales son de vital importancia en la prueba de la equivalencia categórica inducida por su algoritmo de diferenciación, presentada más adelante; dicha prueba es consecuencia inmediata de los lemas 1.25-1.27, los cuales se deducen del símbolo de Zavadskij. En resumen este símbolo es relevante para mostrar propiedades categóricas del algoritmo de diferenciación mencionado. Los resultados y notación siguientes se atribuyen a Zavadskij [29,34].

Definición 1.13 (**Símbolo de Zavadskij**). *Para cualesquiera dos K-espacios fijos de dimensión finita U_0, V_0 y cualquieras de sus subespacios $X \subset U_0$, $Y \subset V_0$, denótese por $[X, Y]$ al subespacio en $Hom_K(U_0, V_0)$ formado por todos los morfismos φ que satisfacen las condiciones*

$X \subset \operatorname{Ker} \varphi$ *y* $\operatorname{Im} \varphi \subset Y$. *el símbolo* $[,]$ *es el* ***símbolo de Zavadskij***.

Por tanto $[X, Y]$ está formado por los morfismos $\varphi \in Hom_K(U_0, V_0)$, tales que anulan a X y su imagen no es más grande que Y.

Obviamente, si $X \supset X'$ y $Y \supset Y'$, entonces $[X, Y] \subset [X', Y']$.

En lo que sigue $\varphi, \psi \in Hom_K(U_0, V_0)$ son algunos morfismos, $X, X_i \subset U_0$ y $Y, Y_i \subset V_0$ son algunos subespacios.

Las propiedades que se enuncian a continuación indican cómo un morfismo en $[X, Y]$, que cumple algunas otras condiciones respecto a otros subespacios de U_0 y V_0, se puede ver como suma (se puede particionar) de otros morfismos formados por el símbolo de Zavadskij con los últimos subespacios mencionados.

Lema 1.14. *Si $\varphi \in [X, Y]$ y $\varphi(X_1) \subset Y_1$, entonces $\varphi \in [X + X_1, Y] + [X, Y \cap Y_1]$.*

Demostración

Sea (E, F) cualquier (X_1, X)-separación y $e, f \in End_K U_0 = End_K(E \oplus F)$ los correspondientes idempotentes que escinden de los sumandos E, F. Entonces, para los morfismos $\varphi' = \varphi e$ y $\varphi'' = \varphi f$, se satisface $\varphi' \in [X, Y \cap Y_1]$ y $\varphi'' \in [X + X_1, Y]$ (Nótese que $\varphi''(X_1 + X) = \varphi''(E \oplus X) = \varphi(X) = 0$). Además $\varphi = \varphi' + \varphi''$. □

Corolario 1.15. *Si $\varphi \in [X, Y]$ y $\varphi(X_i) \subset Y_i$ para todo $i \in I = \{1, ..., n\}$ y además, $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_n$ o $Y_1 \subset Y_2 \subset ... \subset Y_n$, entonces*

$$\varphi \in \sum_{J \subset I} [X + X_J^+, Y \cap Y_{J'}^-]$$

en donde la suma es considerada para todos los subconjuntos finitos $J \subset I$ (incluyendo el conjunto vacío), $J' = I \setminus J$ y $X_J^+ = \sum\limits_{j \in J} X_j$, $Y_{J'}^- = \bigcap\limits_{j \in J'} Y_j$ (con $X_\phi^+ = 0$ y $Y_\phi^- = V_0$).

Demostración

Por inducción sobre n. Para $n = 1$, El corolario es el mismo Lema 1.14. Considérese cierto el corolario para un $n \geq 1$ y que la condición $Y_1 \subset Y_2 \subset ... \subset Y_{n+1}$ se satisface. Tómese $\varphi = \sum\limits_{J \subset I} \varphi_J$ donde $|I| = n$ y $\varphi_J \in [X + X_J^+, Y \cap Y_{J'}^-]$. Entonces $\varphi = \varphi_I + \sum\limits_{J \neq I} \varphi_J$, y como $\varphi(X_{i+1}) \subset Y_{i+1}$ y también $\operatorname{Im} \varphi_J \subset Y_{n+1}$ para $J \neq I$, se satisface también $\varphi_I(X_{i+1}) \subset Y_{i+1}$. Aplicando una vez más el Lema 1.14. respecto a cada morfismo $\varphi_J (J \subset I)$ y el nuevo par (X_{n+1}, Y_{n+1}) (sustituido por el par (X_1, Y_1)). Se obtiene inmediatamente la fórmula deseada para un conjunto de índices más amplio $I' = I \cup \{n + 1\}$ de cardinalidad $n + 1$ (el caso $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_n$ es dual al caso considerado $Y_1 \subset Y_2 \subset ... \subset Y_n$). □

un caso especial del Corolario 1.15. es importante en lo que sigue.

Corolario 1.16. *Si $\varphi \in [X, Y]$ y $\varphi(X_i) \subset Y_i$ para todo $i \in I = \{1, ..., n\}$ y además, $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_n$ y $Y_1 \subset Y_2 \subset ... \subset Y_n$, entonces*

$$\varphi \in \sum_{i=1}^{n+1} [X + X_{i-1}, Y \cap Y_i]$$

(con las convenciones $X_0 = 0$, $Y_{n+1} = V_0$).

Demostración

Si en el Corolario 1.15, se satisface $i > i'$ para alguna partición $I = J + J'$ y algunos índices $i \in J, i' \in J'$, entonces se tiene $[X+X_J^+, Y\cap Y_{J'}^-] \subset [X+X_{(J\setminus i)+i'}^+, Y\cap Y_{(J'\setminus i')+i}^-]$. Así, es suficiente considerar las restricciones $I = J + J'$ tales que $J = \phi$, o $J' = \phi$, o $(maxJ, minJ') = (i-1, i)$, para las cuales $X_J^+ = X_{i-1}$ y $Y_{J'}^- = Y_i$. $\square$

En particular, para $n = 2$ del Corolario 1.15 $\varphi \in [X, Y \cap Y_1 \cap Y_2] + [X + X_1, Y \cap Y_2] + [X + X_2, Y \cap Y_1] + [X + X_1 + X_2, Y]$, y del Corolario 1.16. $\varphi \in [X, Y \cap Y_1] + [X + X_1, Y \cap Y_2] + [X + X_2, Y]$.

Lema 1.17. *Si $\psi(X \cap X_1) \subset Y_1$ y $\psi(X_1) \subset Y + Y_1$, entonces existe un morfismo $\omega \in [X, Y]$ tal que $(\psi - \omega)(X_1) \subset Y_1$.*

Demostración

Sea (E, F) una (X_1, X)-separación de subespacios U_0 y (E', F') una (Y, Y_1)-separación en V_0. Para las sumas directas $U_0 = E \oplus F$ y $V_0 = E' \oplus F'$, sea $e \in End_K U_0$ y $e' \in End_K V_0$ los idempotentes escindidos de los sumandos E y E' respectivamente. Entonces, para una transformación lineal $\omega = e'\psi e$, se satisface $X \subset F \subset \operatorname{Ker}\omega$ y $\operatorname{Im}\omega \subset E' \subset Y$, i.e. $\omega \in [X, Y]$. Como $X_1 = (X_1 \cap X) \oplus E$ y $Y + Y_1 = Y_1 \oplus E'$, se obtiene como consecuencia de la construcción $(\psi - \omega)(X_1) \subset Y_1$. $\square$

Corolario 1.18. *Si $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_n$ y $Y_1 \subset Y_2 \subset ... \subset Y_n$ y (para todo $i = 1, ..., n$) $\psi(X \cap X_i) \subset Y_i$ y $\psi(X_i) \subset Y + Y_i$, entonces existe un morfismo $\omega \in [X, Y]$ tal que $(\psi - \omega)(X_i) \subset Y_i$ para todo i.*

Demostración

Inducción sobre n. Para $n = 1$, se satisface el Lema 1.17. Asuma que el corolario es cierto para $n \geq 1$, entonces existe un morfismo $\varepsilon \in [X, Y]$ tal que $\psi'(X_i) \subset Y_i$ para todo $i \leq n$ donde $\psi' = \psi - \varepsilon$. Ahora tómese el espacio $X' = X + X_n$ para el cual se satisface $\psi'(X' \cap X_{n+1}) \subset Y_{n+1}$ y $\psi'(X_{n+1}) \subset Y + Y_{n+1}$. Aplicando el Lema 1.17 respecto al morfismo ψ' y el conjunto de subespacios $(X', X_{n+1}, Y, Y_{n+1})$, en lugar de ψ y (X, X_1, Y, Y_1), se obtiene el morfismo $\varepsilon' \in [X', Y] \subset [X, Y]$ tal que $(\psi' - \varepsilon')(X_{n+1}) \subset Y_{n+1}$. Además, $(\psi' - \varepsilon')(X_i) \subset Y_i$ para $i \leq n$ puesto que $X_n \subset \operatorname{Ker}\varepsilon'$. Por tanto, $(\psi - \omega)(X_i) \subset Y_i$ para todo $i \leq n+1$, donde $\omega = \varepsilon + \varepsilon' \in [X, Y]$.$\square$

A continuación se mencionan hechos de interés relativos a representaciones de posets ordinarios.

Lema 1.19. *Sean U, V representaciones de un poset $\mathcal{P}$ de la forma $\mathcal{P} = A^{\triangledown} + B_{\Delta}$ y $R = \text{rep}\ \mathcal{P}$. Entonces para cualquier morfismo $\varphi \in Hom_K(U_0, V_0)$ lo siguiente es verdad*

$$\varphi \in \langle K(A) \rangle_R \longleftrightarrow \varphi \in [U_B^+, V_A^-]$$

Demostración

La implicación $\rightarrow$ es obvia. Para probar $\leftarrow$, sea $\varphi \in [U_B^+, V_A^-]$ y $I = \text{Im}\varphi$. Entonces V contiene una subrepresentación $K^m(A) = W$ con $W_0 = W_x = I$ para $x \in A^{\triangledown}$ y $W_x = 0$ para $x \in B_{\Delta}$ ($m = \dim I$). Como $\varphi(U_x) \subset W_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$, se puede representar φ como un producto $U_0 \xrightarrow{\alpha} W_0 \xrightarrow{\beta} V_0$ de dos morfismos en R, donde α es inducido por φ y β es la inclusión. $\square$

Lo siguiente es un caso particular del Lema 1.19.

Lema 1.20. *si U, V son objetos en $R = \text{rep}\ \mathcal{P}$ y $\varphi \in Hom_K(U_0, V_0)$, entonces se satisfacen las dos equivalencias siguientes*

$$\text{(i) } \varphi \in \langle K(\phi) \rangle_R \longleftrightarrow U_{\mathcal{P}}^+ \subset \text{Ker}\,\varphi$$
$$\text{(ii) } \varphi \in \langle K(\mathcal{P}) \rangle_R \longleftrightarrow \text{Im}\varphi \subset V_{\mathcal{P}}^-$$

Es claro, que si $U_{\mathcal{P}}^+ \neq U_0$ ($V_{\mathcal{P}}^- \neq 0$), entonces $U(V)$ contiene sumandos directos $K(\phi)(K(\mathcal{P}))$. En consecuencia, por el lema 1.20 $Hom_R(U, K(\phi)) = 0$ ($Hom_R(K(\mathcal{P}), V) = 0$) para cada indescomponible $U \neq K(\phi)$ ($V \neq K(\mathcal{P})$). En otras palabras, se cumple:

Lema 1.21. *Para $R = \text{rep}\ \mathcal{P}$, la categoría cociente $R/\langle K(\phi) \rangle$ (respectivamente $R/\langle K(\mathcal{P}) \rangle$) es equivalente a la subcategoría plena R' de R formada por todos los objetos $K(\phi)$-libres (respectivamente $K(\mathcal{P})$-libres).*

En un caso especial, la subcategoría mencionada R' puede ser presentada en la forma $R' = \text{rep}\ \mathcal{P}'$ para algún subposet $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}$ contiene el único punto maximal $b = max\,\mathcal{P}$, entonces para un funtor pleno y denso

$$F^{(\phi,b)} : \text{rep}\ \mathcal{P} \rightarrow \text{rep}\,(\mathcal{P} \setminus b)$$

definido por $U \to U'$, donde $U'_0 = U_b$, $U'_x = U_x$ para $x \neq b$ y $\varphi \to \varphi' = \varphi \mid U_b$, se tiene que $U' = 0$ si y sólo si $U_b = U^+_{\mathcal{P}} = 0$, i.e. $U = K^m(\phi)$.

De forma dual, si $a = min\,\mathcal{P}$ es el único punto minimal de $\mathcal{P}$, entonces se tiene un funtor pleno y denso

$$F_{(a,\phi)} : \text{rep}\ \mathcal{P} \to \text{rep}\,(\mathcal{P} \setminus a)$$

definido por $U \to U'$ con $U'_0 = U_0/U_a$, $U'_x = U_x/U_a$ para $x \neq a$ y $\varphi \to \varphi'$, donde $\varphi' : U_0/U_a \to V_0/V_a$ es inducido canónicamente por $\varphi : U \to V$. El cual posee la propiedad dual $U' = 0$ si y sólo si $U_a = U^-_{\mathcal{P}} = U_0$, i.e. $U = K^m(\mathcal{P})$. En consecuencia se cumple lo siguiente.

Lema 1.22. *Si $\mathcal{P} = b_\Delta$ (respectivamente $\mathcal{P} = a^\triangledown$) es un poset con el único punto maximal b (punto minimal a) entonces el funtor $F^{(\phi,b)}$ (respectivamente $F_{(a,\phi)}$) induce una equivalencia* rep $\mathcal{P}/\langle K(\phi)\rangle \xrightarrow{\sim}$ rep $(\mathcal{P} \setminus b)$ *(respectivamente.* rep $\mathcal{P}/\langle K(a)\rangle \xrightarrow{\sim}$ rep $(\mathcal{P} \setminus a)$*).*

1.3. Teorema principal

En este apartado se ilustra la forma de realizar la diferenciación respecto a una pareja conveniente de puntos en un poset ordinario. Se introduce y estudia el funtor de diferenciación. Se finaliza con el teorema 1.29 y un corolario, dicho teorema establece que el funtor de diferenciación induce la equivalencia de categorías cociente [27,33] $R/\Omega \xrightarrow{\sim} R'/\Omega'$, en donde $\mathcal{P} = a^\nabla + b_\Delta + \{c_1 < ... < c_n\}$ es un poset con una pareja conveniente de puntos para diferenciación (a, b), $R =$ rep $\mathcal{P}$, $\Omega =< K(a), K(a, c_1), ..., K(a, c_n) >$, $R' =$ rep $\mathcal{P}'_{(a,b)}$ y $\Omega' =< K(a) >$. Esta equivalencia (y el algoritmo de diferenciación referido) es generalizada por Rump [18] para órdenes generales. La equivalencia antedicha tiene una repercusión importante en el estudio de los objetos indescomponibles en la categoría de representaciones de posets ordinarios. Los resultados y notación siguientes se atribuyen a Zavadskij [29].

Es de relevancia notar que cada uno de los puntos $c_i^- = c_i b$, $c_i^+ = a + c_i$ heredan todas las relaciones de orden previas del punto paterno c_i con los puntos del subposet $\mathcal{P} \setminus \{c_1 < ... < c_n\}$. Cabe mencionar también que los puntos de los conjuntos $\mathcal{P} \setminus \{c_1 < ... < c_n\}$ y $\mathcal{P}'_{(a,b)} \setminus \{c_i^-\} + \{c_i^+\}$ se identifican [29].

Definición 1.23. *Una pareja de puntos* $(a,b) \in \mathcal{P}$ *es* ***conveniente*** *si*

$$\mathcal{P} = a^{\nabla} + b_{\vartriangle} + C$$

En donde $C = \{c_1 < c_2 < \ldots < c_n\}$ *es una cadena de puntos incomparable con* a *y con* b.

El ***poset derivado*** $\mathcal{P}'_{(a,b)}$ *consta de dos cadenas adicionales a* a^{∇} *y* $b_{\vartriangle}$*:*

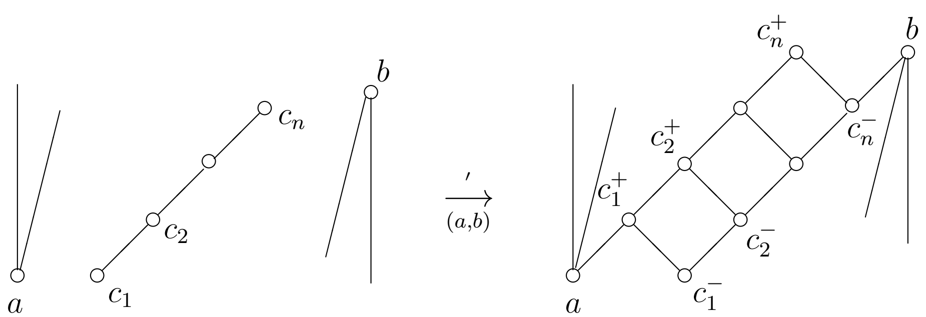
$$c^{+} = c_1^{+} < c_2^{+} < \cdots < c_n^{+}, \text{ una cadena con } c_i^{+} = a + c_i \text{ y}$$

$$c^{-} = c_1^{-} < c_2^{-} < \cdots < c_n^{-}, \text{ una cadena con } c_i^{-} = bc_i$$

En particular, $a < c_i^{+}$, $c_i^{-} < b$, $c_i^{-} < c_i^{+}$, *para cada* i *con* $1 \leq i \leq n$, *además los puntos de las cadenas* c^{-} *y* c^{+} *heredan las relaciones que tenían los puntos de* $\mathcal{P} \backslash C$ *con los puntos de* C, *esto es:*

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{(a,b)} = a^{\nabla} + b_{\vartriangle} + c^{-} + c^{+}.$$

A continuación se ilustra esta diferenciación por medio de los diagramas de Hasse:



Definición 1.24. *El funtor diferenciación se nota* $D_{(a,b)}$ *y es tal que*

$$D_{(a,b)} : rep\ \mathcal{P} \rightarrow rep\ \mathcal{P}'_{(a,b)}$$

con

$$\begin{aligned}
U'_0 &= U_0, \\
U'_{c_i^{+}} &= U_a + U_{c_i}, \;\; \text{para todo } 1 \leq i \leq n \\
U'_{c_i^{-}} &= U_b \cap U_{c_i}, \;\; \text{para todo } 1 \leq i \leq n \\
U'_x &= U_x, \;\; \text{para los demás puntos } x \in \mathcal{P}' \\
\varphi' &= \varphi \;\; \text{Para todo } K\text{-morfismo lineal,} \varphi : U \rightarrow V, \text{ en donde } U, V \in rep\ \mathcal{P}, \text{ con} \\
U &= (U_0, U_x | x \in \mathcal{P}) \text{ y } V = (V_0, V_x | x \in \mathcal{P}).
\end{aligned}$$

El funtor es autodual, i.e. $(U'_{(a,b)})^* = (U^*)'_{(b,a)}$. Se satisface también $(U \oplus V)' \cong U' \oplus V'$.

Denótese por $R = \operatorname{rep} \mathcal{P}$, $R' = \operatorname{rep} \mathcal{P}'$. Entonces (debido al hecho de que $\varphi' = \varphi$) se obtienen inclusiones naturales $R(U,V) \subset R'(U',V')$ para todos los objetos U, V en R. Considerando ideales de las categorías R y R' de la forma

$$\Omega = \langle K(a), K(a,c_1), ..., K(a,c_n) \rangle_R \text{ y } \Omega' = \langle K(a) \rangle_{R'}$$

Teniendo en cuenta que $(K(a))' = (K(a,c_i))' = K(a)$, se obtiene la inclusión $\Omega(U,V) \subset \Omega'(U',V')$ para todo U, V en R.

En consecuencia, para cada par de objetos U, V en R, obtenemos un diagrama de inclusiones

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & R'(U',V') \arrow[dr] & \\
R(U,V) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Omega'(U',V') \\
 & \Omega(U,V) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

A continuación se muestra que el diagrama anterior es un retículo, en consecuencia se obtiene de forma inmediata por este hecho la equivalencia de categorías cociente $R/\Omega \overset{\sim}{\to} R'/\Omega'$. La equivalencia antedicha tiene una repercusión importante en el estudio de los objetos indescomponibles en la categoría de representaciones de posets ordinarios, como lo indica el corolario 1.31.

Lema 1.25. $R(U,V) + \Omega'(U',V') = R'(U',V')$.

Demostración.

Sea $\psi \in R'(U',V')$. Entonces $\psi(U_x) \subset V_x$ para $x \in \mathcal{P} \setminus C$, $\psi(U_b \cap U_{c_i}) \subset V_b \cap V_{c_i} \subset V_{c_i}$ y $\psi(U_{c_i}) \subset \psi(U_a + U_{c_i}) \subset V_a + V_{c_i}$ para todo i. Aplicando a ψ el Corolario 1.18 en la situación $(X, X_i, Y, Y_i) = (U_b, U_{c_i}, V_a, V_{c_i})$, se obtiene un morfismo $\omega \in [U_b, V_a]$ tal que $\varphi(U_{c_i}) \subset V_{c_i}$ para todo i, donde $\varphi = \psi - \omega$. Además $\varphi(U_x) \subset V_x$ para cada $x \in \mathcal{P} \setminus C$, i.e. $\varphi \in R(U,V)$. Por el Lema 1.19 $\omega \in \langle K(a) \rangle_{R'} = \Omega'$, y así $\psi = \varphi + \omega \in R(U,V) + \Omega'(U',V')$. $\square$

Lema 1.26. $R(U,V) \cap \Omega'(U',V') = \Omega(U,V)$.

Demostración.

Sea $\varphi \in R(U,V) \cap \Omega'(U',V')$. Entonces $\varphi \in [U_b, V_a]$ y $\varphi(U_x) \subset V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$. Aplicando el Corolario 1.16. al caso $(X, X_i, Y, Y_i) = (U_b, U_{c_i}, V_a, V_{c_i})$, se tiene $\varphi = \Sigma_{i=1}^{n+1} \varphi_i$ donde $\varphi_i \in [U_b + U_{c_{i-1}}, V_a \cap V_{c_i}]$ (con $U_{c_0} = 0$ y $V_{c_{n+1}} = V_0$). Por el Lema 1.19, se concluye $\varphi_i \in \langle K(a,c_i) \rangle_R$ para $i \leq n$ y $\varphi_{n+1} \in \langle K(a) \rangle_R$ i.e. $\varphi \in \Omega(U,V)$. □

Lema 1.27. *Para cada objeto W en R', existe un objeto U en R tal que $U' \cong W \oplus K^m(a)$ para algún $m \geq 0$.*

Demostración.

Considérese al espacio $W_{c_i^+}$ de la siguiente manera $W_{c_i^+} = \underset{-}{W}_{c_i^+} \oplus F_i \oplus H_i$, donde F_i y H_i son algunos complementos tales que $F_i \subset W_b$ y $H_i \cap W_b = 0$. Sea la base $f_1^i, ..., f_{m_i}^i$ en cada espacio F_i. Elíjanse nuevos símbolos $e_1^i, ..., e_{m_i}^i$ y supóngase que ellos forman una base de un nuevo K-espacio E_i. Sea $E_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ y defínase la representación U de $\mathcal{P}$ de la siguiente manera

$U_0 = W_0 \oplus E_0$

$U_x = W_x \oplus E_0$ si $x \in a^{\triangledown}$

$U_x = W_x$ si $x \in b_{\vartriangle}$

$U_{c_i} = U_{c_{i-1}} + W_{c_i^-} + H_i + K\left\{e_1^i + f_1^i, ..., e_{m_i}^i + f_{m_i}^i\right\}$

(con $U_{c_0} = 0$). Usando la definición del funtor de diferenciación, se verifica fácilmente que $U' \cong W \oplus K^m(a)$ para algún $m \geq 0$, con $m = dimE_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i$. □

Observación 1.28. *Si W no contiene sumandos directos triviales $K(a)$ (i.e. $W_a \subset W_b$), entonces $m_i = dim(W_{c_i^+ b}/W_{c_{i-1}^+ b + c_i^-})$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ (asumiendo $c_0^+ = a$), en particular, $m_i = dim(W_{c_1^+ b}/W_{a + c_1^-})$. Para el objeto $W = K(a)$, se satisface $F_i = 0$ para todo i y $E_0 = 0$, i.e. $U = K(a)$.*

Se sigue inmediatamente de los Lemas 1.25-1.27 que el funtor $'$: $R \to R'$ induce una equivalencia $R/\Omega \xrightarrow{\sim} R'/\Omega'$. De esta manera se tiene el siguiente resultado, presentado originalmente en [27,33] (y generalizado en [18] para órdenes generales).

Teorema 1.29. *Sea* $\mathcal{P} = a^{\nabla} + b_{\Delta} + \{c_1 < ... < c_n\}$ *un poset con una pareja conveniente de puntos para diferenciación* (a, b)*. Entonces el funtor de diferenciación* $D_{(a,b)} : \text{rep } \mathcal{P} \to \text{rep } \mathcal{P}'_{(a,b)}$,

induce una equivalencia de categorías cociente:

$$\text{rep } \mathcal{P}/ < K(a), K(a, c_1), ..., K(a, c_n) > \to \text{rep } \mathcal{P}'_{(a,b)}/ < K(a) >$$

en particular biyecciones entre indescomponibles

$$\text{Ind } \mathcal{P} \setminus \{K(a), K(a, c_1), ..., K(a, c_n)\} \rightleftarrows \text{Ind } \mathcal{P}'_{(a,b)} \setminus K(a)$$

Observación 1.30. *Las afirmaciones del teorema son auto duales porque* $(K(a))^* = K(b, c_n), (K(a, c_i))^* = K(b, c_{i-1})$ *para* $i \in \{2, ..., n\}$ *y* $(K(a, c_1))^* = K(b)$.

Corolario 1.31. $|\text{Ind } \mathcal{P}| = \left|\text{Ind } \mathcal{P}'_{(a,b)}\right| + n.$

CAPÍTULO 2

Módulos de Zavadskij

Los módulos de Zavadskij fueron introducidos por W. Rump [18], quien se apoyó de ellos para dar una generalización a órdenes generales del algoritmo de Zavadskij respecto a una pareja conveniente de puntos y de las otras versiones de este algoritmo. De esta manera este algoritmo y sus diferentes formas son unificadas y extendidas a la teoría de representación de órdenes generales [18].

Para dar un panorama de lo dicho, Rump [18] toma un un monomorfismo hereditario de Λ - retículos, con Λ un orden sobre una K álgebra de dimensión finita, en donde K es un campo algebraicamente cerrado respecto a una valuación discreta R. Él denota a dicho monomorfismo como $u : P \to I$ (Los Λ - retículos P y I toman el lugar de la pareja conveniente de puntos para diferenciación en el algoritmo de Zavadskij). Luego define un orden derivado $\delta_u\Lambda$ y un funtor ∂_u entre Λ y $\delta_u\Lambda$ retículos, el cual induce una equivalencia de categorías cociente $\widetilde{\partial_u}$ [18].

Continuando con la argumentación de la importancia de los módulos de Zavadskij para la prueba de la equivalencia $\widetilde{\partial_u}$ mencionada, cabe decir que Rump [18] considera la $R/\wp$ álgebra de dimensión finita $B := \Lambda/\Lambda_{-}$, con $\wp = \mathrm{Rad}R$ el radical de Jacobson. Con esta consideración se llega a que el B - módulo I/P cumple la condición de ser de Zavadskij por la Proposición 3.9 y de esta manera I^s/P^s, con $s \in \mathbb{N}$ también es un módulo de Zavadskij, gracias a la Proposición 2.3. Esto último es importante para demostrar la plenitud del funtor $\widetilde{\partial_u}$ en el Teorema 3.14. Para tal fin Rump usa el hecho de la Proposición 3.8 que garantiza que a partir de un endomorfismo de I^s/P^s existe otro en I^s [18].

De esta manera y partiendo de un homomorfismo f de $\delta_u\Lambda$ - retículos, Rump [18] encuentra otro f' entre ellos, resultando que el homomorfismo $f - f'$ es un homomorfismo entre Λ - retículos y de esta manera el funtor $\widetilde{\partial_u}$ es pleno [18]. En el capítulo 3 se especificará con más detalle lo esbozado anteriormente.

A continuación se exponen las caracterizaciones de los módulos de Zavadskij finitamente generados establecidas por Rump [18] sobre anillos Noetherianos y semiperfectos, entre otras propiedades; los resultados y notación siguientes se atribuyen a Rump [18]. Son de destacar en este capítulo las caracterizaciones mencionadas, vitales para los resultados del capítulo 4.

Un módulo P se llama **proyectivo** si para cualquier epimorfismo $\varphi : M \to N$ y para cualquier homomorfismo $\psi : P \to N$ hay un homomorfismo $h : P \to M$ tal que $\psi = \varphi h$. Un módulo Q se llama **inyectivo** si para cualquier monomorfismo $\varphi : M \to N$ y para cualquier homomorfismo $\psi : M \to Q$ existe un homomorfismo $h : N \to Q$ tal que $\psi = h\varphi$ [7]. Un A - módulo es **biyectivo** si es proyectivo e inyectivo.

Si N es un submódulo de un A - módulo M, se dirá que M es una **extensión** de N. Un submódulo N de M se llama **esencial** (o grande) en M si éste tiene intersección no nula con todo submódulo no nulo de M. En este caso se dice que M es una **extensión esencial** de N [7]. Es sabido que un módulo Q es inyectivo si y sólo si no tiene extensiones esenciales propias [7]. Un módulo Q se denomina **envoltura inyectiva** de un módulo M si es a la vez una extensión esencial de M y un módulo inyectivo. Cada módulo M tiene una envoltura inyectiva, que es única salvo isomorfismo [7]. La envoltura inyectiva de un módulo M se denota por $E(M)$.

Un epimorfismo $f : N \to M$ es un **epimorfismo esencial** si para cada secuencia de A - módulos $X \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} M$ tal que fg es un epimorfismo, implica que g es epimorfismo. Una **cubierta proyectiva** de un módulo M es un módulo proyectivo P junto con un epimorfismo esencial $P \to M$ [7].

El Rad A **radical** (de Jacobson) de un anillo A es la intersección de todos los ideales maximales izquierdos de A. Un A módulo M es **fiel** si para cada $a \in A$ existe algún m en M tal que $ma = 0$.

Un módulo M se llama **semisimple** (o completamente reducible) si puede ser descompuesto en una suma directa de módulos simples. Un anillo A se llama **semisimple derecho** (resp. Izquierdo) si es semisimple como un módulo derecho (resp. Izquierdo) sobre sí mismo. Dado que A tiene una identidad y cualquier submódulo derecho de A es un ideal derecho, A es semisimple a derecha si A es una suma directa de un número finito de ideales derechos simples. Un anillo A se llama **semiperfecto** si $A/\mathrm{Rad}(A)$ es un anillo semisimple y si además todo idempotente en $A/\mathrm{Rad}(A)$ se eleva a un idempotente en A [7].

Sea $X \subset M$ un subconjunto, con M un A - módulo, entonces el conjunto $N = \{x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_ka_k : x_i \in X,\ a_i \in A \text{ para cada } i\}$ es un submódulo de M y es llamado el **submódulo generado** por el conjunto X. Si $M = N$, entonces X es llamado el conjunto de **generadores** de M. Si un A-módulo M tiene un conjunto finito de generadores entonces se dice que es **finitamente generado**. En este caso existe un conjunto de elementos $X = \{m_1, m_2, ..., m_n\} \subset M$ tales que todo elemento $m \in M$ puede ser escrito como $m = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$ para algunos $a_i \in A$ [7].

Un papel importante en la teoría de anillos y módulos es desempeñado por las condiciones de cadena en los submódulos e ideales. Se dice que un módulo M satisface la **condición de cadena descendente** (o d.c.c.) si no existe una cadena infinitamente descendente

$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ...$

de submódulos de M. Algunas veces la siguiente formulación equivalente de esta condición es útil: un módulo M satisface la condición de cadena descendente (o d.c.c.) si cada cadena descendente de submódulos de M: $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ...$ contiene sólo un número finito de elementos, es decir, existe un número entero n tal que $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = ...$ un módulo M es **artiniano** si satisface la condición de cadena descendente [7].

De manera análoga, se dice que un módulo M satisface la **condición ascendente de cadena** (o a.c.c.) si no existe una cadena infinita estrictamente ascendente

$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset ...$

de submódulos de M. La formulación equivalente de esta condición es la siguiente: un módulo M satisface la condición de cadena ascendente (o a.c.c.) si cada cadena ascendente de submódulos de M: $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset ...$ contiene sólo un número finito de elementos, es decir, existe un número entero n tal que $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = ...$ Un módulo M es **Noetheriano** si satisface la condición de cadena ascendente [7].

Un anillo A se llama **Artiniano** (**Noetheriano**) derecho (izquierdo) si el módulo regular derecho A_A (módulo regular izquierdo ${}_AA$) es Artiniano (Noetheriano). Un anillo A se llama Artiniano (Noetheriano) si es Artiniano (Noetheriano) derecho e izquierdo [7].

Una cadena finita de submódulos de un módulo M, $0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = M$ se llama una **serie de composición** para M si todos los módulos cociente M_{i+1}/M_i son simples ($i = 0, 1, ..., n-1$). Los módulos cociente M_{i+1}/M_i se llaman los **factores** de esta serie y n es la longitud de la misma [7].

Un módulo se llama **uniserial** si sus submódulos forman una cadena. Un anillo conmutativo se llama **uniserial** si el conjunto de sus ideales es linealmente ordenado, es decir es una cadena. Un A - módulo M es un **módulo de longitud finita** si M es **Artiniano** y **Noetheriano**. La longitud de su serie de composición se llama la **longitud del módulo** M. los factores de la serie de composición se llaman los **factores simples** de M [7].

Un anillo A es **hereditario a derecha** (a izquierda) si cada uno de sus ideales derechos (izquierdos) son proyectivos. Si un anillo A es hereditario a derecha e izquierda, diremos que A es un anillo hereditario [7].

Sea B un anillo arbitrario. Para cualquier B-módulo M, un B-módulo Q es **M-proyectivo** si para cada epimorfismo $M \to N$ de B-módulos, el homomorfismo inducido $Hom_B(Q, M) \to Hom_B(Q, N)$ es sobreyectivo. Similarmente, Q es **M-inyectivo** si para cada monomorfismo $N \to M$, el homomorfismo inducido $Hom_B(M, Q) \to Hom_B(N, Q)$ es sobreyectivo. Si M en sí mismo es M-inyectivo, entonces M es **quasi-inyectivo**.

Definición 2.1. *Un B-módulo M es un **Módulo de Zavadskij** si cada submódulo es M-**proyectivo**, y cada módulo factor es M-**inyectivo**.*

Nótese que lo anterior dice que para cada homomorfismo $\overline{f} : U \to W$ de un submódulo U a un módulo factor W de M, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \uparrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\overline{f}} & W \end{array}$$

se puede completar con un endomorfismo f de M. Es decir, para que M sea un módulo de Zavadskij es suficiente verificar que cada submódulo es M-proyectivo y M en sí mismo es quasi-inyectivo.

Mod-B denota la categoría de B-módulos

Proposición 2.2. *$M \in$ **Mod**-B es un módulo de Zavadskij si y sólo si para cada isomorfismo $\overline{h} : U/U' \to V/V'$ con submódulos U, U', V, V' de M, existe un endomorfismo h de M con $h(U) \subset V$ y $h(U') \subset V'$ inducido por $\overline{h}$.*

Demostración

Lo anterior es de verificación inmediata si el morfismo $\overline{f}$ en el diagrama precedente se descompone de la siguiente manera $\overline{f} : U \to U/U' \overset{\sim}{\to} V/V' \to M/V' = W$. $\square$

Claramente la propiedad de módulos de Zavadskij se traslada a los sumandos directos. Pero ésta no es invariante en la formación de sumas directas. Por ejemplo, si K es un campo, y B es el anillo de matrices triangulares $T_2(K) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ K & K \end{pmatrix}$, entonces los dos módulos proyectivos indescomponibles son de Zavadskij, pero ${}_BB$ no es quasi-inyectivo. Sin embargo, se tiene:

Proposición 2.3. *Si $M \in$ **Mod**-B es un módulo de Zavadskij; entonces toda suma directa finita M^s es nuevamente un módulo de Zavadskij.*

Para probar la proposición anterior se necesita del siguiente

Lema 2.4. *Sea $M \in$ **Mod**-B un módulo de Zavadskij. Entonces todo submódulo U de $M \oplus M$ es isomorfo a algún $U_1 \oplus U_2$ con submódulos U_1, U_2 de M.*

Demostración

La proyección $M \to M \oplus M$ sobre el primer sumando envía U a un submódulo U_0 de M. Como U_0 es M-proyectivo, es también $(M \oplus M)$-proyectivo, y así U-proyectivo ([1, 16.12]). Por consiguiente, el epimorfismo $U \to U_0$ escinde, y por tanto U es una suma directa de submódulos de M. $\square$

Demostración de la Proposición 2.3

Es suficiente probar la afirmación para $s = 2$. Por Lema 2.4, todo submódulo de $M \oplus M$ es $(M \oplus M)$-proyectivo. Por otro lado, $M \oplus M$ es M-inyectivo, en consecuencia quasi-inyectivo ([1, 16.13]). Esto prueba la proposición. $\square$

Lema 2.5. *Un módulo factor M de un módulo de Zavadskij es indescomponible si y sólo si su envoltura inyectiva $E(M)$ es indescomponible. A saber, Si $E(M) = E_1 \oplus E_2$, entonces $M = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2)$.*

Demostración.

Como M es quasi-inyectivo ([1, 16.13]), el teorema de Johnson y Wong [10] implica que M es completamente invariante en su envoltura inyectiva. Por tanto, cualquier descomposición de $E(M)$ descompone M. □

Se asumirá que B sea noetheriano izquierdo y semi-perfecto. En este caso, es posible dar una caracterización precisa de módulos de Zavadskij finitamente generados. Primero se consideran los indescomponibles.

Lema 2.6. *Un módulo de Zavadskij indescomponible finitamente generado M sobre un anillo semi-perfecto es uniserial.*

Demostración

Por el dual del teorema de Johnson-Wong ([24, Proposición 2.2]), el kernel de una cubierta proyectiva $P \to M$ es completamente invariante en P. En consecuencia, P es indescomponible y así M es local, i.e. $M/\mathrm{Rad}M$ es simple. Supóngase ahora que U, V son submódulos incomparables de M con $W := U \cap V$. Entonces M/W tiene dos submódulos no nulos U/W y V/W con intersección nula. Así, el Lema 2.5 implica que M/W es descomponible. Por otro lado, M/W es local, una contradicción. En conclusión, M debe ser uniserial. □

Sea M un B-módulo uniserial con submódulos $0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = M$ y factores de composición $U_i = M_i/M_{i-1}$. Entonces existen homomorfismos de anillos

$$End_B(M) \to End_B(U_i) \quad (1)$$

Los cuales son inyectivos si los factores U_i son no-isomorfos dos a dos. En este caso, los morfismos (1) son monomorfismos entre anillos de división. Un B-módulo de longitud finita y uniserial M será llamado **manso** si los factores U_i son mutuamente no isomorfos y los morfismos (1) son isomorfismos.

Proposición 2.7. *Sea B un anillo noetheriano a izquierda y semi-perfecto. Un B-módulo finitamente generado M es un módulo de Zavadskij indescomponible si y sólo si M es un módulo de longitud finita, manso y uniserial.*

Demostración.

Por el Lema 2.6 un módulo de Zavadskij indescomponible finitamente generado es uniserial. Suóngase que existen submódulos $U' \subset U \subset V' \subset V$ con $U/U' \cong V/V'$ simple.

Por la Proposición 2.2, esto implica la existencia de un morfismo h de M con $h(U) = V \supsetneqq U$. Entonces $U \subset h(U) \subset h^2(U) \subset ...$ es una cadena de submódulos estrictamente creciente, en contraste con la propiedad de Noether de M. Por tanto se ha mostrado que M es de longitud finita con factores de composición dos a dos no-isomorfos. La mansedumbre de M se sigue de la Proposición 2.2. Por otra parte , si M satisface las condiciones de la proposición, y $\overline{h} : U/U' \to V/V'$ es un isomorfismo de subcocientes no nulos de M, entonces $U = V$ y $U' = V'$. De donde $\overline{h}$ induce un automorfismo de $U/\mathrm{Rad}U$ que se levanta por mansedumbre un automorfismo h de M. Entonces h induce $\overline{h}$, En consecuencia M es un módulo de Zavadskij. $\square$

Si M es un módulo de Zavadskij finitamente generado sobre un anillo noetheriano a izquierda, entonces la dimensión de Goldie de M es finita, i. e. su envoltura inyectiva tiene una descomposición finita $E(M) = E_1 \oplus ... \oplus E_n$ con E_i indecomponible. Por tanto, el Lema 2.5 implica que M tiene también una descomposición finita

$$M = M_1^{n_1} \oplus ... \oplus M_r^{n_r} \ (2)$$

con indescomponibles dos a dos no-isomorfos $M_1, ..., M_r$. Entonces $M_1 \oplus ... \oplus M_r$ será llamada la parte reducida de M. Por la Proposición 2.3 se tiene:

Proposición 2.8. *Un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano a izquierda B es un módulo de Zavadskij si y sólo si su parte reducida es un módulo de Zavadskij.*

Un módulo (2) que coincide con su parte reducida se llama **módulo reducido**. A continuación se da una caracterización completa de módulos de Zavadskij finitamente generados:

Teorema 2.9. *Sea B un anillo noetheriano a izquierda y semi-perfecto. Un B-módulo M finitamente generado es un módulo de Zavadskij si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) M es de longitud finita.

(b) M puede descomponerse en módulos mansos uniseriales.

(c) Dos sumandos directos indescomponibles de M con un factor de composición común son isomorfos.

Demostración.

Para la necesidad, basta probar (c). Sea M_1 y M_2 sumandos directos indescomponibles de M con un factor de composición común. Entonces existen submódulos $U_i \subsetneqq V_i$ de M_i, $i \in \{1, 2\}$, y un isomorfismo $\overline{h} : V_1/U_1 \xrightarrow{\sim} V_2/U_2$ que se extiende por la Proposición 2.2 a un endomorfismo de M. Por tanto existe un homomorfismo $h : M_1 \to M_2$ que induce $\overline{h}$. Esto implica que $h(V_1) = V_2$. Si se reemplaza $\overline{h}$ por su inverso, se obtiene un homomorfismo $h' : M_2 \to M_1$ con $h'(V_2) = V_1$. En consecuencia, hh' y $h'h$ son isomorfismos, y así $M_1 \cong M_2$.

Para la suficiencia, supongamos que se satisfacen las condiciones (a)-(c). Entonces el módulo reducido M' de M es una suma directa $M_1 \oplus ... \oplus M_r$ de módulos de Zavadskij indescomponibles, y se tiene que mostrar que M' es un módulo de Zavadskij. Como todos los factores de composición de M' tienen multiplicidad uno, cada submódulo N de M' es completamente invariante, por tanto de la forma $N = N_1 \oplus ... \oplus N_r$ con submódulos N_i de M_i. De donde, por la Proposición 2.2 se tiene que M' es un módulo de Zavadskij. □

Corolario 2.10. *Sea B un anillo noetheriano a izquierda y semi-perfecto y $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ un módulo de Zavadskij finitamente generado sobre B. entonces todo submódulo U de M es isomorfo a $U_1 \oplus ... \oplus U_n$ con submódulos U_i de M_i.*

Demostración.

Por el Lema 2.4 e inducción, la afirmación se cumple para $M_1 \cong ... \cong M_n$ con n una potencia de 2, en consecuencia también para un n arbitrario. Así por el Teorema 2.9 (c) resta considerar el caso donde los M_i no tienen factores de composición comunes. Pero entonces $U = (U \cap M_1) \oplus ... \oplus (U \cap M_n)$. □

Ejemplo 2.11. *Si Λ es un orden hereditario sobre un dominio cerrado de valuación discreta R con campo cociente K, entonces $K\Lambda$ es un módulo de Zavadskij sobre Λ que no es finitamente generado.*

Para cualquier anillo D, denótese por $T_n(D)$ al anillo de matrices triangulares

$$T_n(D) = \begin{pmatrix} D & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & & & . & . & . \\ . & & & & . & . \\ . & & & & . & 0 \\ D & . & . & . & . & D \end{pmatrix} \quad (3)$$

de tamaño n. Los anillos artinianos con un módulo de Zavadskij fiel son un análogo finito de órdenes hereditarios:

Proposición 2.12. *Para un anillo artiniano izquierdo B las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) B tiene un módulo de Zavadskij fiel.

(b) B es hereditario izquierdo con un módulo biyectivo fiel.

(c) B es Morita equivalente al producto $\Pi_{i=1}^{r} T_{n_i}(D_i)$ de anillos de matrices triangulares sobre anillos de división D_i.

Si dichas condiciones se satisfacen, entonces, salvo isomorfismo existe un único módulo de Zavadskij fiel y reducido, sea $M_1 \oplus ... \oplus M_r$, con $\{M_1, ..., M_r\}$ un sistema representativo de B-módulos indescomponibles biyectivos.

Demostración

(a)$\rightarrow$(c): Por la Proposición 2.3, existe un monomorfismo ${}_BB \rightarrow M$ en un módulo de Zavadskij M. Como B es artiniano izquierdo, M tiene una cubierta proyectiva ([1, 28.8]) $P \rightarrow M$ con un kernel completamente invariante [24], y así M es una suma directa de módulos de Zavadskij locales ([1, 27.11]). En consecuencia, M puede ser considerado finitamente generado, y el corolario del Teorema 2.9 implica que ${}_BB$ se descompone en submódulos de módulos de Zavadskij indescomponibles. Por tanto, si $M_1 \oplus ... \oplus M_r$ es el módulo reducido de M con M_i de longitud n_i, entonces la suma directa P de todos los submódulos de los M_i es un progenerador para B ([1, 16.12]). Por la Proposición 2.7, el anillo de endomorfismos de P es de la estructura dada en (c), con $D_i^{op} = End_B(M_i)$. Las otras implicaciones son triviales. $\square$

CAPÍTULO 3

Generalización del algoritmo de diferenciación de Zavadskij a órdenes generales

En lugar de un par de puntos a, b en un poset, Rump [18] considera un monomorfismo $u : P \to I$ de Λ-retículos con $KP = KI$, en donde Λ es un orden sobre una K -álgebra de dimensión finita, con K un campo algebraicamente cerrado. para dicho u, él asigna a cada Λ-retículo E un par $\partial_u E = \binom{E^+}{E_-}$ de Λ-retículos con $E_- \subset E \subset E^+$. En donde E_- denota el subretículo maximal de E con $f(E_-) \subset P$ para cada homomorfismo $f : E \to I$, y E^+ es definido de forma similar. Cuando u satisface la condición $I^+ = I$ y $P_- = P$, esto es, $\partial_u P = \partial_u I = \binom{I}{P}$ [18]

entonces Λ^+ es un superorden de Λ y por dualidad $u^* : I^* \to P^*$ genera un superorden Λ^- de Λ, así se puede armar el órden derivado

$\delta_u \Lambda := \begin{pmatrix} \Lambda^+ & \Lambda^+\Lambda^- \\ \Lambda_- & \Lambda^- \end{pmatrix} \subset M_2(A)$ de Λ

y se puede construir el funtor ∂_u (nótese la similaridad con lo dicho en el capítulo 1 respecto al algoritmo de diferenciación de Zavadskij)

$$\partial_u : \Lambda\text{-}\mathbf{lat} \to \delta_u\Lambda\text{-}\mathbf{lat}$$

de Λ y $\delta_u\Lambda$-retículos [18]

Cuando u es hereditario se obtiene la equivalencia de categorías cociente siguiente(De nuevo obsérvese la semejanza con lo mencionado en el capítulo 1 respecto al algoritmo de diferenciación de Zavadskij)

$$\widetilde{\partial}_u : \Lambda\text{-}\mathbf{lat}/\,[H_u] \to \delta_u\Lambda\text{-}\mathbf{lat}/\,\left[\binom{I}{P}\right]$$

En donde $[C]$ denota el ideal de morfismos que se factorizan a través de una suma directa finita de objetos de C, con C una clase de objetos en una categoría aditiva. add C es la subcategoría plena de sumandos directos de sumas directas finitas de objetos isomorfos a aquellos en C. Si H es un Λ-retículo entre P e I, entonces $\partial_u H{=}\binom{I}{P}$, se define $H_u :=$ add $\{H \in \Lambda\text{-}\mathbf{lat} : P \subset H \subset I\}$ [18]. Como ya se mencionó, el hecho que el Λ/Λ_- - módulo I/P sea de Zavadskij (Proposición 3.9) es importante para demostrar que el funtor $\widetilde{\partial}_u$ es pleno (Teorema 3.14).

Rump [18] establece también que existe un superorden generalizado $\widetilde{\delta_u}\Lambda$ de $\delta_u\Lambda$ respecto a $\binom{I}{P}$. Por lo tanto, el teorema implica una biyección entre indescomponibles

$$\text{Ind } \Lambda \setminus \{H_1, ..., H_m\} \widetilde{\to} \text{Ind } \widetilde{\delta_u}\Lambda$$

donde $H_1, ..., H_m$ son los sumandos directos indescomponibles de Λ-retículos entre P e I .

En este capítulo se exponen resultados debidos a Rump [18], los cuales conducen a la generalización del algoritmo de diferenciación de Zavadskij a órdenes generales, atribuida a este autor. La siguiente notación y resultados se deben a Rump [18].

Sea R un dominio de valuación discreta cerrado con campo cociente K, radical de Jacobson $\wp$:=Rad$R$, y campo residual $k := R/\wp$, y sea Λ un R-**orden** en una K-álgebra A de dimensión finita. Esto quiere decir que Λ es una R-subalgebra de A la cual es finitamente generada sobre R tal que $K\Lambda = A$. Un Λ submódulo E de un A-módulo izquierdo M es un Λ-**retículo completo** en M si $_RE$ es finitamente generado y $KE = M$. Como M puede ser identificado con $K \otimes_R E$, el embebimiento $E \to M$ es asociado naturalmente con el Λ-módulo E, el cual en sí mismo es llamado también un Λ- retículo. Todo homomorfismo $f : E \to F$ de Λ-retículos tiene una única extensión A lineal $KE \to KF$ la cual se denota también por f. Por esta razón, la imagen inversa $f^{-1}(F)$ será considerada como un Λ-submódulo de KE la cual debe estrictamente contener E, La categoría de Λ-retículos es denotada por Λ-**lat**.

Para una clase C de objetos en una categoría aditiva, sea $[C]$ el ideal de morfismos que se factorizan a través de una suma directa finita de objetos de C. add C es la subcategoría plena de sumandos directos de sumas directas finitas de objetos isomorfos a aquellos en C. Ind Λ (Ind(Λ-**lat**)) denota un sistema representativo de clases de isomorfía de Λ-retículos indescomponibles.

En el resto de esta sección, se supone que R es un anillo de valuación discreta cerrado. Por ejemplo, (R, K) es $(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ o $(k[[x]], k((x)))$ para un campo k. Es sabido que Λ-**lat** forma una categoría Krull - Schmidt [9].

Sea Γ otro R orden. Γ es un superorden de Λ si $A \supset \Gamma \supseteq \Lambda$ se satisface. En términos más generales, Γ es un superanillo de Λ si $A/I \supset \Gamma \supseteq (\Lambda + I)/I$ se cumple para algún ideal I de A. Entonces el morfismo natural $\Lambda \to \Gamma$ induce un funtor fiel y pleno Γ-**lat**$\to$ Λ-**lat**. Así Γ-**lat** puede considerarse como una subcategoría plena de Λ-**lat**, e Ind(Γ-**lat**) forma un subconjunto de Ind(Λ-**lat**). Se denota por $D_0(\Lambda)$ (resp. $D(\Lambda)$) al conjunto de superórdenes (resp. superanillos) de Λ. Se introduce un orden parcial $\subseteq$ en $D(\Lambda)$ como sigue: Para $\Gamma_i \in D(\Lambda)$ $(i = 1, 2)$, defínase $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ si y solo si $\Gamma'_1 \subseteq \Gamma'_2$ se mantiene como subconjuntos de A para el pull-back Γ'_i de Γ_i a A. Entonces la correspondencia $\Gamma \to$Ind(Γ-**lat**) da una inyección $D(\Lambda) \to 2^{\mathrm{Ind}(\Lambda\text{-}\mathbf{lat})}$, que invierte el orden parcial $\subseteq$[8]. Un R orden Λ con $D_0(\Lambda) = \{\Lambda\}$ Se llama máximo [9].

Ejemplo 3.1.

Sea $\Lambda := \begin{pmatrix} R & R \\ J_R^n & R \end{pmatrix} \subset A := M_2(K)$ $(n \geq 0)$. Entonces $D(\Lambda) = D_0(\Lambda)$ es dado como sigue. (Por simplicidad sea $n = 2$) [9].

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \begin{pmatrix} R & J_R^{-2} \\ J_R^2 & R \end{pmatrix} & & & & & \\
 & \cup & & & & & \\
 & \begin{pmatrix} R & J_R^{-1} \\ J_R^2 & R \end{pmatrix} & \subset & \begin{pmatrix} R & J_R^{-1} \\ J_R & R \end{pmatrix} & & & [9] \\
 & \cup & & & & & \\
\Lambda = & \begin{pmatrix} R & R \\ J_R^2 & R \end{pmatrix} & \subset & \begin{pmatrix} R & R \\ J_R & R \end{pmatrix} & \subset & \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix} &
\end{array}$$

Los subconjuntos correspondientes de Ind(Λ-**lat**) son como sigue.

$$
\begin{array}{ccccc}
\left\{\begin{pmatrix} R \\ J_R^2 \end{pmatrix}\right\} & & & & \\
\cap & & & & \\
\left\{\begin{pmatrix} R \\ J_R^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ J_R \end{pmatrix}\right\} & \supset & \left\{\begin{pmatrix} R \\ J_R \end{pmatrix}\right\} & & \\
\cap & & \cap & & \\
\left\{\begin{pmatrix} R \\ J_R^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ J_R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right\} & \supset & \left\{\begin{pmatrix} R \\ J_R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right\} & \supset & \left\{\begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right\}
\end{array}
\quad [9]
$$

Ejemplo 3.2.

Sea $\Lambda = \Lambda_n := \{(x,y) \in R \times R \ / \ x - y \in J_R^n\} \subset A := K \times K$ $(n \geq 0)$. Entonces $D(\Lambda) = D_0(\Lambda) \cup \{0 \times R, R \times 0\}$ es dado como sigue [9].

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \times R \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup \\
\Lambda_n \subset \Lambda_{n-1} \subset ... \subset \Lambda_2 \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_0 = R \times R \subset R \times 0 \ [9]
\end{array}
$$

Los subconjuntos correspondientes de Ind(Λ-**lat**) son como sigue [9].

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & \{0 \times R\} \\
 & & & & & & & & & & \cap \\
\left\{\begin{matrix} \underset{(1 \leq i \leq n)}{\Lambda_i} \\ R \times 0 \\ 0 \times R \end{matrix}\right\} & \supset & \left\{\begin{matrix} \underset{(1 \leq i \leq n-1)}{\Lambda_i} \\ R \times 0 \\ 0 \times R \end{matrix}\right\} & \supset & ... & \supset & \left\{\begin{matrix} \Lambda_1, \Lambda_2 \\ R \times 0 \\ 0 \times R \end{matrix}\right\} & \supset & \left\{\begin{matrix} \Lambda_1 \\ R \times 0 \\ 0 \times R \end{matrix}\right\} & \supset & \left\{\begin{matrix} R \times 0 \\ 0 \times R \end{matrix}\right\} \\
 & & & & & & & & & & \cup \\
 & & & & & & & & & & \{R \times 0\}
\end{array}
$$

Sea $u : P \to I$ un monomorfismo de Λ-retículos con $KP = KI$. Para cualquier Λ-retículo E se define la u-**traza** y la u-**cotraza**:

$$trc_u E := \sum \{f(I) : f \in Hom_\Lambda(P, E)\}$$
$$ctr_u E := \cap \{f^{-1}(P) : f \in Hom_\Lambda(E, I)\}$$

Entonces $trc_u E$ es R-finita, y $ctr_u E$ es completa en KE, es decir $K(ctr_u E) = KE$. Por tanto

$$E^+ := E + trc_u E;\ E_- := E \cap ctr_u E \quad (4)$$

son Λ-retículos en KE con $E_- \subset E \subset E^+$. Dualmente, respecto al monomorfismo $u^* : I^* \to P^*$ de Λ^{op}-retículos, donde $()^* := Hom_R(\_; R)$, se escoge para un Λ^{op}-retículo F:

$$F^- := F + trcu^* F;\ F_+ := F \cap ctr_{u^*} F \quad (5)$$

Donde $F_+ \subset F \subset F^-$. También se cumplen las ecuaciones

$$(E^+)^* = (E^*)_+;\ (E_-)^* = (E^*)^- \quad (6)$$

Como todo homomorfismo $\Lambda_\Lambda \to I$ es de la forma $a \to ax$ con $x \in I$, se obtiene $\Lambda_- = \{a \in \Lambda : aI \subset P\} = \{a \in \Lambda : P^* a \subset I^*\}$ y así

$$\Lambda_- = \Lambda_+ \ (7)$$

el cual es un ideal bilátero de Λ.

Lema 3.3. *Para cada Λ-retículo E, existen Λ-retículos H, L con $P^s \subset H \subset I^s$ y $P^t \subset L \subset I^t$ para $s, t \in \mathbb{N}$, y cuadrados conmutativos*

$$\begin{array}{ccccccc} I^s & \to & E^+ & & E & \to & L \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H & \to & E & & E_- & \to & P^t \end{array}$$

Los cuales inducen isomorfismos $I^s/H \xrightarrow{\sim} E^+/E$, $E/E_- \xrightarrow{\sim} L/P^t$.

Demostración

Como E^+/E es de longitud finita, existe un homomorfismo $f : P^s \to E$ con $f(I^s) + E = E^+$. Si $H := f^{-1}(E) \cap I^s$, el primer cuadrado conmutativo surge. El segundo cuadrado se obtiene de forma análoga. □

La siguiente condición de clausura será importante de aquí en adelante:

$$\text{(C) } I^+ = I,\ P_- = P.$$

Proposición 3.4. *Si* $I^+ = I$ *(respectivamente* $P_- = P$*), entonces* Λ^+ *(respectivamente* Λ^-*) es un superorden de* Λ *y para cualquier* Λ*-retículo* E*, se tiene* $E^+ = \Lambda^+ E^+$ *(respectivamente* $E_- = \Lambda^- E_-$*). Además, (C) implica* $\Lambda_- E^+ \subset E_-$*.*

Por lo tanto, Los signos $+$ y $-$ en (4), (5) tienen otra motivación: estos indican Λ^+- y Λ^--retículos (a izquierda o derecha).

Demostración.

Para probar que Λ^+ es un superorden con $E^+ = \Lambda^+ E^+$, es suficiente mostrar que $\Lambda^+ E^+ \subset E^+$ para $E \in \Lambda$-**lat**. Lo cual significa que todo homomorfismo $h :_\Lambda \Lambda \to E^+$ se extiende a Λ^+. Por el Lema 3.3, existe un epimorfismo $p : E \oplus I^s \to E^+$ con $p\,|_E$: $E \to E^+$ y $p(P^s) \subset E$. Como los Λ-retículos (4) son funtoriales, cada homomorfismo $\Lambda \to E$ se extiende a $\Lambda^+ \to E^+$, de donde $\Lambda^+ E \subset E^+$. Así $I^+ = I$ implica $\Lambda^+ E^+ = p(\Lambda^+ E \oplus I^s) \subset E^+$. Dualmente, si $P_- = P$, entonces $(P^*)^- = P^*$ implica $(E^*)^- \Lambda^- = (E^*)^-$, esto es, $(E_-)^* \Lambda^- \subset (E_-)^*$. Por tanto $\Lambda^- E_- \subset E_-$. Finalmente, todo homomorfismo $E \to I$ mapea $\Lambda_- E$ en $\Lambda_- I \subset P$, y así $\Lambda_- E \subset E_-$. Por consiguiente, $\Lambda_- E^+ = p(\Lambda_- E \oplus \Lambda_- I^s) \subset p(E_- \oplus P^s) \subset E_-$ ya que cada $f \in Hom_\Lambda(P, E)$ lleva $P = P_-$ en E_-. □

Como la identidad $1 : P \to P$ lleva I a I , se tiene $I \subset P^+$. Por otra parte, $P \to I$ implica $P^+ \subset I^+$. Por lo tanto, la condición (C) implica:

$$P^+ = I,\, I_- = P \text{ (8)}$$

Además, la Proposición 3.4 muestra que si se satisface (C), entonces se puede formar el R-orden

$$\delta_u\Lambda := \begin{pmatrix} \Lambda^+ & \Lambda^+\Lambda^- \\ \Lambda_- & \Lambda^- \end{pmatrix} \subset M_2(A) \text{ (9)}$$

El cual se llama el **orden derivado** respecto a u.

Como consecuencia, se muestra que el lema de rechazo para Λ-retículos biyetivos es verdadero para órdenes en un álgebra no necesariamente semisimple. Para este fin, se define un superorden generalizado de Λ como un R-orden Γ junto con un homomorfismo de anillos $\Lambda \to \Gamma$ con cokernel con R-torsión . Precisamente hablando, se tiene que considerar una clase de homomorfismos de anillos, y dos de tales homomorfismos $\gamma_i : \Lambda \to \Gamma_i$, $i \in \{1,2\}$, definen el mismo superorden generalizado de Λ si y sólo si hay un isomorfismo $\omega : \Gamma_1 \widetilde{\to} \Gamma_2$ con $\omega\gamma_1 = \gamma_2$. Entonces tenemos lo siguiente:

Proposición 3.5. *(Lema de rechazo). Para cada Λ-retículo biyetivo B; existe un superorden generalizado Γ de Λ tal que un Λ-retículo está en Γ-**lat** si y sólo si éste no tiene un sumando directo no nulo en add $\{B\}$.*

Demostración.

Por inducción podemos suponer que B es indescomponible. Consideremos el monomorfismo $u : JB \to B$ con $J =$RadΛ.

Caso 1: $B \ncong JB$. Entonces $(JB)_- = JB$, y por la Proposición 3.4, esto implica que Λ^- es un superorden de Λ con $\Lambda^- E_- \subset E_-$ para cada Λ retículo E. Se afirma que $\Gamma = \Lambda^-$ cumple los requerimientos. En efecto, si E no tiene un sumando directo isomorfo a B, entonces la proyectividad de B implica que no existe un epimorfismo $E \to B$, de donde $E = E_- \in \Lambda^-$**-lat**. Para la afirmación recíproca, tenemos que demostrar que B en sí no es un Λ^-**-** retículo. Como B es inyectivo, existen homomorfismos $B \xrightarrow{j} \Lambda^* \xrightarrow{q} B$ con $qj = 1$. Por consiguiente, si B es un Λ^-**-** retículo, entonces cada homomorfismo $\Lambda \to B^*$ de Λ - retículos derechos se extiende a Λ^-, de donde $j(B) \subset (\Lambda^-)^* = (\Lambda^*)_-$ y así $qj(B) \subset B_- = JB$, una contradicción.

Caso 2: $B \cong JB$. Entonces $\bigcap J^i B = 0$ implica que para cada Λ submódulo-F no nulo de B existe un $i \in \mathbb{N}$ con $F \subset J^i B$ y $F \nsubseteq J^{i+1}B$. Por lo tanto $F = J^i B$ por el lema de Nakayama. Por lo tanto, KB es simple, y los Λ- retículos en KB forman una cadena. Ahora sea E un Λ- retículo cualquiera sin sumandos directos isomorfos a B. Entonces para cada homomorfismo no nulo $f : E \to B$, la imagen sería proyectiva, es decir, f se dividiría. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_\Lambda(E, B) = 0$, y por dualidad, $\mathrm{Hom}_\Lambda(B, E) = 0$. Por lo tanto, $\Lambda = \Lambda_0 \times \Gamma$ con un orden maximal Λ_0 tal que ${}_\Lambda(\Lambda_0) \cong B^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. □

Definición 3.6. *Un monomorfismo $u : P \to I$ de Λ-retículos con cokernel de torsión es* ***hereditario*** *si P es proyectivo, I inyectivo, $Ext_\Lambda(I/P, I) = Hom_\Lambda(P, I/P) = 0$, y $Ext_\Lambda(H, L) = 0$ para todos los Λ-retículos H, L entre P e I.*

Debido a que P es proyectivo, la condición $Hom_\Lambda(P, I/P) = 0$ es equivalente a $P_- = P$. Dualmente, como I es un retículo inyectivo, se tiene una sucesión exacta

$$Hom_\Lambda(I, I) \to Hom_\Lambda(P, I) \to Ext_\Lambda(I/P, I)$$

lo cual muestra que $Ext_\Lambda(I/P, I) = 0$ es equivalente a $I^+ = I$. Por tanto (C) se satisface cuando u es hereditario, y el orden derivado (9) existe en este caso. En lo que sigue, se asume que u es hereditario. entonces los retículos (4) pueden ser caracterizados en términos de Λ^+ y Λ^-.

Proposición 3.7. *Sea E un Λ-retículo. Entonces $E^+ = \Lambda^+ E$, y E_- es el Λ^- subretículo maximal de E.*

Demostración.

Claramente, $\Lambda^+ E \subset E^+$. Considérese un epimorfismo $p : \Lambda^n \to E$. Entonces cada homomorfismo $f : P \to E$ se factoriza a través de p, así $f = pg$. Por lo tanto $f(I) = pg(I) \subset p((\Lambda^+)^n) \subset \Lambda^+ E$, y así $E^+ \subset \Lambda^+ E$. La segunda afirmación se obtiene de forma dual. □

Proposición 3.8. *Existe una sucesión exacta natural*

$$Hom_\Lambda(I, P) \to End_\Lambda(I) \to End_\Lambda(I/P) \ \textit{(10)}$$

Con $End(I/P)$ una k-algebra semisimple. En particular, $\wp \subset \Lambda_-$ i.e. Λ/Λ_- es una k-algebra de dimensión finita.

Demostración.

Como $Ext_\Lambda(I,P)=0$, la sucesión exacta corta $P\to I\overset{v}{\to} I/P$ induce otra sucesión exacta corta

$$Hom_\Lambda(I,P)\to Hom_\Lambda(I,I)\to Hom_\Lambda(I,I/P)\ (11)$$

Por otra parte, $Hom_\Lambda(P,I/P)=0$ implica que $v^*: Hom_\Lambda(I/P,I/P)\to Hom_\Lambda(I,I/P)$ es un isomorfismo. Por lo tanto (11) implica (10). Para probar que $End_\Lambda(I/P)$ es semisimple, se tiene que mostrar que el radical de $End_\Lambda(I)$ está contenido en el ideal $Hom_\Lambda(I,P)$. Sea $f\in$RadEnd$_\Lambda(I)$, entonces $H:=P+f(I)$ y $L:=I\cap f^{-1}(P)$ son Λ-retículos entre P e I , y los morfismos $f:I\to H$ y $v:P\to H$ generan la sucesión exacta corta

$$L\to I\oplus P\overset{(f,v)}{\to} H$$

la cual escinde porque u es hereditario. En consecuencia, existe una sección $\binom{s}{t}:H\to I\oplus P$ con $fs+vt=1$. Debido a que $P^+=H^+=I$, esta puede ser considerada como una relación entre morfismos de I . Así vt es invertible, y entonces $H=P$, i.e. $f\in Hom_\Lambda(I,P)$. En particular, $\wp 1\subset$RadEnd$(I)\subset Hom_\Lambda(I,P)$, i.e. $\wp\subset\Lambda_-$, Por tanto Λ/Λ_- y $End_\Lambda(I/P)$ son k-álgebras. □

Ahora se enfoca la atención sobre el k-álgebra Λ/Λ_-.

Proposición 3.9. *I/P módulo de Zavadskij fiel sobre Λ/Λ_-.*

Demostración.

Por la definición de Λ_-, el módulo I/P es fiel. Sean H,L Λ-retículos entre P e I , y $\overline{f}:H/P\to I/L$ un monomorfismo. Entonces $Ext_{\underline{\Lambda}}(H,L)=0$ implica que $Hom_\Lambda(H,I)\to Hom_\Lambda(H,I/L)$ es epimórfico. Por tanto, $\overline{f}$ puede ser elevado a un homomorfismo $f:H\to I$ con $f(P)\subset L$. Por otra parte, f se extiende a $I=H^+$, y así $\overline{f}$ es inducido por un endomorfismo de I/P. En consecuencia, I/P es un módulo de Zavadskij. □

Corolario 3.10. *Todo módulo M finitamente generado sobre Λ/Λ_- es de la forma $M\cong H/L$ con Λ-retículos $P^s\subset L\subset H\subset I^s$ y $s\in\mathbb{N}$. Por otra parte, M es proyectivo (inyectivo) si y sólo si puede ser representado en la forma $M\cong H/P^s$ (respectivamente I^s/L). Si E es cualquier Λ-retículo, entonces E/E_- es proyectivo, y E^+/E inyectivo sobre Λ/Λ_-.*

Demostración.

Por Lema 3.3, todo módulo libre finitamente generado Λ/Λ_- es isomorfo a algún H/P^s con $P^s \subset H \subset I^s$. Por tanto M es de la forma deseada. Por la Proposición 2.12, Λ/Λ_- es hereditaria, y I/P biyectivo. Por consiguiente, cada H/P^s es proyectivo. si el módulo factor H/L es proyectivo, debe ser un sumando directo de H/P^s, De donde $H/L \cong H'/P^s$ para algún $H' \subset H$. Un argumento similar se emplea para el caso inyectivo. La afirmación final se sigue del Lema 3.3. □

Ahora consideraremos el orden derivado. Claramente, los $\delta_u\Lambda$ -retículos estan dados por columnas $\binom{F}{G}$ con $F \in \Lambda^+$-**lat**, $G \in \Lambda^-$-**lat**, y $\Lambda_- F \subset G \subset F$. Por tanto, la aplicación $E \to \binom{E^+}{E_-}$ da lugar a un funtor aditivo

$$\partial_u : \Lambda\text{-}\mathbf{lat} \to \delta_u\Lambda\text{-}\mathbf{lat} \ (12)$$

de Λ y $\delta_u\Lambda$-retículos

Si H es un Λ-retículo entre P e I, entonces $\partial_u H = \binom{I}{P}$. Así, si se elige:

$$H_u := \text{add}\ \{H \in \Lambda\text{-}\mathbf{lat} : P \subset H \subset I\}\ (13)$$

Entonces ∂_u induce un funtor

$$\widetilde{\partial_u} : \Lambda\text{-}\mathbf{lat}/\,[H_u] \to \delta_u\Lambda\text{-}\mathbf{lat}/\left[\binom{I}{P}\right]\ (14)$$

Proposición 3.11. *Cada Λ-retículo H con $P^s \subset H \subset I^s$ para algún entero positivo s pertenece a H_u.*

Demostración.

Se procede por inducción sobre s. Para $s = 1$ la afirmación es trivial. Sea $P^s \subset H \subset I^s$ con $s \geq 2$, entonces se tiene una sucesión exacta $H' \to H \to H''$ con $P^{s-1} \subset H' \subset I^{s-1}$ y $P \subset H'' \subset I$, y la hipótesis de inducción implica que H' se descompone en Λ-retículos entre P e I . Por tanto $Ext_\Lambda(H'', H') = 0$, y así $H \in H_u$. □

Para verificar si un $\delta_u\Lambda$ -retículo tiene un sumando directo indescomponible en común con $\binom{I}{P}$, el siguiente criterio será necesario:

Proposición 3.12. *Si un $\delta_u\Lambda$ -retículo $\binom{F}{G}$ no tiene sumandos directos no triviales con $\binom{I}{P}$, entonces la inclusión $G^+ \subset F_-$ se satisface.*

Observación 3.13. *La inversa se satisface obviamente si $\binom{I}{P}$ no tiene sumandos directos no nulos de la forma trivial $\binom{H}{H}$.*

Demostración.

Como $G^+ \subset F$ y $G \subset F_-$, la relación $G^+ \subset F_-$ establece que para cada par de homomorfismos $g : P \to G$ y $f : F \to I$, la composición fg satisface $fg(I) \subset P$. Por lo tanto, supóngase que existen f, g con $fg(I) \nsubseteq P$. Entonces $g(I) \subset G^+ \subset F$ y $f(G) \subset f(F_-) \subset P$, y la Proposición 3.8 implica que fg no está en el radical de $End_\Lambda(I)$. En consecuencia, existe un sumando directo indescomponible $\binom{I_1}{P_1}$ de $\binom{I}{P}$ con componentes $g_1 : \binom{I_1}{P_1} \to \binom{F}{G}$ y $f_1 : \binom{F}{G} \to \binom{I_1}{P_1}$ de g, f tales que $f_1 g_1$ es un isomorfismo.Así, $\binom{I_1}{P_1}$ es un sumando directo de $\binom{F}{G}$. $\square$

A continuación se enuncia la equivalencia categórica presentada por Rump, obtenida de la generalización del algoritmo de diferenciación de Zavadskij:

Teorema 3.14. *Si $u : P \to I$ es un monomorfismo hereditario, entonces el funtor*

$$\widetilde{\partial}_u : \Lambda\text{-}\boldsymbol{lat}/\,[H_u] \to \delta_u\Lambda\text{-}\boldsymbol{lat}/\,\left[\binom{I}{P}\right]$$

es una equivalencia; y $\binom{I}{P}$ es un $\delta_u\Lambda$-retículo biyectivo.

Nota 3.15. *Por el lema de rechazo, existe un superorden generalizado $\widetilde{\delta}_u\Lambda$ de $\delta_u\Lambda$ respecto a $\binom{I}{P}$. Por lo tanto, el teorema implica una biyección entre indescomponibles*

$$\text{Ind } \Lambda \setminus \{H_1, ..., H_m\} \widetilde{\to} \text{Ind } \widetilde{\delta}_u\Lambda \quad (15)$$

donde $H_1, ..., H_m$ son los sumandos directos indescomponibles de Λ-retículos entre P e I .

Demostración.

Se mostrará primero que ∂_u es fiel. Para $E \in \Lambda$**-lat** se tiene:

$$Hom_{\delta_u\Lambda}\left(\binom{E^+}{E_-},\binom{I}{P}\right) = Hom_\Lambda(E,I);$$
$$Hom_{\delta_u\Lambda}\left(\binom{I}{P},\binom{E^+}{E_-}\right) = Hom_\Lambda(P,E).$$

Ahora sea $f : E \to F$ un morfismo en Λ**-lat** tal que $\partial_u f$ tiene una factorización

$$\partial_u f : \binom{E^+}{E_-} \xrightarrow{g} \binom{I^s}{P^s} \xrightarrow{h} \binom{F^+}{F_-}$$

entonces $f = hg$ con $g : E \to I^s$ y $h : P^s \to F$. Por tanto, f se factoriza a través de $g(E) + P^s$ el cual está en H_u por la Proposición 3.11. Para mostrar que $\widetilde{\partial}_u$ es pleno, sea $E, F \in \Lambda$**-lat**, y sea

$$f : \binom{E^+}{E_-} \to \binom{F^+}{F_-}$$

un morfismo en $\delta_u\Lambda$**-lat**. Por el Lema 3.3, existen Λ-retículos H, L entre P^s y I^s para algún $s \in \mathbb{N}$, y morfismos $g : E \to L$, $h : I^s \to F^+$ en Λ**-lat** con $g(E_-) \subset P$ y $h(H) \subset F$ que inducen isomorfismos $\overline{g} : E/E_- \xrightarrow{\sim} L/P^s$ y $\overline{h} : I^s/H \to F^+/F$. Por consiguiente, f induce un homomorfismo $\overline{f} : E/E_- \to F^+/F$ con una factorización:

$$\overline{f} : E/E_- \xrightarrow{\overline{g}} L/P^s \xrightarrow{\overline{l}} I^s/H \xrightarrow{\overline{h}} F^+/F$$

Por las Proposiciones 3.9 y 2.3, I^s/P^s es un módulo de Zavadskij sobre Λ/Λ_-. En consecuencia $\overline{l}$ se eleva a un homomorfismo I^s/P^s, y así a un endomorfismo de I^s por la Proposición 3.8. De esta manera, existe un homomorfismo $l : L \to I^s$ con $l(P^s) \subset H$ el cual induce $\overline{l}$. De donde, la composición hlg da lugar a un morfismo

$$f' : \binom{E^+}{E_-} \to \binom{F^+}{F_-}$$

en el ideal $\left[\binom{I}{P}\right]$ de $\delta_u\Lambda$**-lat** el cual induce $\overline{f}$. Por tanto $f - f' \in Hom_\Lambda(E,F)$, y se ha probado que $\widetilde{\partial}_u$ es pleno.

Se mostrará que $\widetilde{\partial}_u$ es denso. Sea $\binom{F}{G} \in \delta_u\Lambda$**-lat** sin sumandos directos en add $\left\{\binom{I}{P}\right\}$. Entonces $G^+ \subset F_-$ por la Proposición 3.12. El corolario de la Proposición 3.9 implica que F/F_- es proyectivo y G^+/G inyectivo. De esta manera, F/G tiene una descomposición $F/G \cong G^+/G \oplus F_-/G^+ \oplus F/F_-$, y existen Λ-retículos F', G' con $G \subset G' \subset F' \subset F$ tales que $F = F' + G^+ = G' + F_-$ y $G = F' \cap G^+ = G' \cap F_-$.

Además, existen Λ-retículos H, L con $P^s \subset L \subset H \subset I^s$ para algún $s \in \mathbb{N}$ tal que H/L es isomorfo a $M := F_-/G^+$. Ahora se define $E \in \Lambda$**-lat** por el pullback

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{q'} & M \\ \uparrow & & \uparrow q \\ E & \to & H \end{array}$$

Respecto a los epimorfismos naturales $q : H \to H/L \cong M$ y $q' : F' \to F'/G' \cong M$. Esto da lugar a embebimientos naturales:

$$G' \oplus L \to E \to F' \oplus H.$$

De esta forma, $H \subset L^+ \subset E^+$ implica $F' \oplus H = E + H \subset E^+$. En consecuencia, $F = G^+ + F' \subset E^+$, y así $E \subset F \oplus H \subset E^+$. Dualmente, $E_- \subset G \oplus L \subset E$. Por tanto se obtiene

$$E^+ = F \oplus I^s,\ E_- = G \oplus P^s$$

Lo que prueba que $\widetilde{\partial}_u$ es denso. Se ha mostrado que $\widetilde{\partial}_u$ es una equivalencia. resta probar que $\binom{I}{P}$ es biyectivo. Como P es proyectivo, la identidad $1 : P \to P$ admite una composición $P \to \Lambda^n \to P$ que da lugar a $P \to (\Lambda_-)^n \to P$ y $I \to (\Lambda^+)^n \to I$ .Por tanto,$\binom{I}{P}$ es un sumando directo de $\delta_u\Lambda$, de donde $\binom{I}{P}$ es proyectivo. Por dualidad,$\binom{I}{P}^* = (I^*P^*)$ es un $\delta_u\Lambda$-retículo proyectivo derecho. Por tanto $\binom{I}{P}$ es inyectivo. $\square$

Para realizar cálculos es a veces útil reemplazar $\delta_u\Lambda$ por un Morita equivalente R-orden con menos proyectivos indescomponibles. Sea

$$\Lambda = Q \oplus Q_0 \ (16)$$

una descomposición de Λ-retículos tal que $Hom_\Lambda(Q', I/P) \neq 0$ para cada sumando directo indescomponible Q' de Q, y $Hom(Q_0, I/P) = 0$. Defínase

$$\delta'_u\Lambda = \begin{pmatrix} Hom_\Lambda(Q,Q^+) & Hom_\Lambda(Q,\Lambda^+\Lambda^-) \\ Q_- & \Lambda^- \end{pmatrix} \quad (17)$$

Proposición 3.16. *$\delta'_u\Lambda$ es Morita equivalente a $\delta_u\Lambda$.*

Demostración.

Como $(Q_0)_- = Q_0$, la Proposición 3.4 implica $\Lambda^+\Lambda^-Q_0 = \Lambda^+Q_0 = Q_0^+$. Por tanto $\partial_u Q_0$ es simultaneamente un sumando directo de $\partial_u({}_\Lambda\Lambda) = \binom{\Lambda^+}{\Lambda^-}$ y $Q' := \binom{\Lambda^+\Lambda^-}{\Lambda^-}$. En consecuencia,$\partial_u Q \oplus Q'$ es un progenerador de $\delta_u\Lambda$. Por la Proposición 3.4, la descomposición $\Lambda_- = Q_- \oplus Q_0 = \Lambda_- Q \oplus \Lambda_- Q_0$ da lugar a $Q_- = \Lambda_- Q \subset \Lambda_- Q^+ \subset Q_-$. Además, $Q^+ = \Lambda^+ Q$, y así $End_{\delta_u\Lambda}(\partial_u Q) = Hom_\Lambda(Q,Q^+)$, $Hom_{\delta_u\Lambda}(\partial_u Q, Q') = Hom_\Lambda(Q,\Lambda^+\Lambda^-)$.

En consecuencia, el progenerador $\partial_u Q \oplus Q'$ da lugar al Morita equivalente R-orden (17). $\square$

CAPÍTULO 4

Ejemplos de Módulos de Zavadskij en diferentes tipos de álgebras

En este capítulo se presentan diferentes ejemplos de módulos de Zavadskij en diferentes tipos de álgebras; en particular en álgebras de Nakayama y álgebras hereditarias tipo Dynkin. Se concluye con criterios que permiten establecer cuándo un tipo de álgebra de Nakayama es un álgebra de Zavadskij y cómo poder encontrar módulos de Zavadskij en otro tipo de estas álgebras, también se da un criterio que establece que en una K álgebra básica de dimensión finita serial a derecha sin ciclos los morfismos de mansedumbre definidos por Rump[18] son inyectivos para sus módulos proyectivos indescomponibles, también se da un criterio similar para sus módulos inyectivos indescomponibles. Una consecuencia inmediata de lo anterior es que algunas álgebras de Nakayama son álgebras de Zavadskij. Además se sigue que en las álgebras hereditarias y seriales a derecha tipo Dynkin todos sus módulos indescomponibles proyectivos son de Zavadskij, se tiene un resultado también para los módulos inyectivos indescomponibles. Otro corolario es que para las álgebras de tipo A_n y seriales a derecha, que no son de Nakayama, todos sus módulos indescomponibles proyectivos y todos sus módulos indescomponibles inyectivos son de Zavadskij excepto tal vez uno de ellos. En lo que sigue se considera a A como un álgebra de dimensión finita sobre un campo cerrado K.

Sea K un campo. Una K-**álgebra** es un anillo A con un elemento identidad (Denotado por 1) tal que A tiene una estructura de K espacio vectorial compatible con la multiplicación del anillo, es decir, tal que $\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$ para todo $\lambda \in K$ y todo $a, b \in A$. Una K-álgebra A se dice que es de **dimensión finita** si la dimensión $\dim_K A$ del K espacio vectorial A es finita. Un subespacio B de una K-álgebra A es una K-**subalgebra** de A si la identidad de A pertenece a B y $bb' \in B$ para todo $b, b' \in B$. Un K subespacio vectorialI I de una K-álgebra A es un **ideal derecho** de A (o ideal izquierdo de A) si $xa \in I$ (o $ax \in I$, respectivamente) para todo $x \in I$ y $a \in A$. Un ideal bilátero de A (o simplemente un ideal de A) es un K subespacio vectorial de A que es a la vez un ideal izquierdo e ideal derecho de A [3].

Si A y B son K - álgebras, entonces un homomorfismo de anillos $f : A \to B$ se denomina **homomorfismo de K-álgebras** si f es una aplicación K-lineal. Dos K - álgebras A y B se llaman **isomorfas** si hay un isomorfismo de K-álgebras $f : A \to B$, es decir, un homomorfismo de K-álgebras biyectivo. En este caso se escribe $A \simeq B$ [3].

El anillo $K[t]$ de todos los polinomios en la indeterminada t con coeficientes en K y el anillo $K[t_1, ..., t_n]$ de todos los polinomios con n indeterminadas $t_1, ..., t_n$ con coeficientes en K son K-álgebras de dimensión infinita [3].

Si A es una K-álgebra y $n \in N$, entonces el conjunto $M_n(A)$ de todas las matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes en A es una K-álgebra con respecto a la adición y multiplicación usual de la matrices. La identidad de $M_n(A)$ es la matriz $E = \text{diag}(1, ..., 1) \in M_n(A)$ con 1 en la diagonal principal y ceros en las otras entradas. En particular $M_n(K)$ es una K-álgebra de dimensión n^2 [3].

El Rad$A$ **radical** (de Jacobson) de una K-álgebra A es la intersección de todos los ideales maximales de A. Un A-módulo derecho S es **simple** si S es distinto de cero y cualquier submódulo de S es cero o S [3].

Sean S y S' A-módulos derechos, y $f : S \to S'$ un A-homomorfismo no nulo. El lema de Schur dice que si S es simple, entonces f es monomorfismo. Si S' es simple, entonces f es un epimorfismo. Además si S y S' son simples, entonces f es un isomorfismo [3]. Como corolario de este lema se tiene que si S es un A-módulo simple, entonces hay un K-álgebra isomorfismo End $S \simeq K$ [3].

Sea M un A módulo derecho. El radical (de Jacobson) Rad$M$ de M es la intersección de todos los submódulos maximales de M [3].

Dado un A módulo M, el **top** de M es el módulo top$M = M/\text{Rad}M$, éste es un $A/\text{Rad}A$ módulo derecho respecto a la acción de $A/\text{Rad}A$ definida por la fórmula $(m+\text{Rad}M)(a+\text{Rad}A) = ma+\text{Rad}M$ [3].

Es sabido por el Teorema de Jordan-Hölder que si A es una K - álgebra de dimensión finita y

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ...M_m = M,$$

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset ...N_n = M$$

son dos series de composición de un módulo M en mod A (categoría de A - módulos derechos finitamente generados), entonces $m = n$, y existe una permutación σ de $\{1, ..., m\}$ tal que, para cualquier $j \in \{0, 1, ..., m-1\}$, hay un A - isomorfismo $M_{j+1}/M_j \simeq N_{\sigma(j+1)}/N_{\sigma(j)}$ [3].

En el estudio de módulos indescomponibles sobre una K-álgebra A, un papel importante es desempeñado por los elementos idempotentes de A. Un elemento $e \in A$ es llamado **idempotente** si $e^2 = e$. El idempotente e se dice que es **central** si $ae = ea$ para todos los elementos $a \in A$. Los idempotentes $e_1, e_2 \in A$ son llamados **ortogonales** si $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. El idempotente e se dice que es **primitivo** si e no puede escribirse como una suma $e = e_1 + e_2$, donde e_1 y e_2 son idempotentes ortogonales no nulos de A [3].

Cada álgebra A tiene dos idempotentes triviales 0 y 1. Si el idempotente e de A es no trivial, entonces $1 - e$ es también un idempotente no trivial, los idempotentes e y $1 - e$ son ortogonales, y existe una descomposición no trivial de A módulos derechos $A_A = eA \oplus (1 - e)A$. De manera inversa, si $A_A = M_1 \oplus M_2$ es una A módulo descomposición no trivial y $1 = e_1 + e_2$, $e_i \in M_i$, entonces e_1, e_2 es un par de idempotentes ortogonales de A, y $M_i = e_iA$ es indescomponible si y sólo si e_i es primitivo [3].

Si e es un idempotente central, entonces $1-e$ también lo es, y por lo tanto eA y $(1-e)A$ son ideales biláteros y se muestra fácilmente que son K álgebras con identidades $e \in eA$ y $1 - e \in (1 - e)A$, respectivamente. En este caso, la descomposición $A_A = eA \oplus (1 - e)A$ es una descomposición en suma directa del álgebra A [3].

Debido a que el álgebra A es de dimensión finita, el módulo A_A admite una descomposición en suma directa $A_A = P_1 \oplus ... \oplus P_n$, donde $P_1, ..., P_n$ son ideales derechos indescomponibles de A. Se deduce de la discusión precedente que $P_1 = e_1A, ..., P_n = e_nA$, donde $e_1, ..., e_n$ son idempotentes ortogonales primitivos de A tales que $1 = e_1 + ... + e_n$. De forma recíproca, cada conjunto de idempotentes con las propiedades precedentes induce una descomposición $A_A = P_1 \oplus ... \oplus P_n$ con ideales derechos indescomponibles $P_1 = e_1A, ..., P_n = e_nA$. Tal descomposición se llama una **descomposición indescomponible** de A y tal conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ se denomina un **conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos** de A [3].

En [3] se establece que un A-módulo derecho P es proyectivo si y sólo si existe un A-módulo libre F y un A-módulo derecho P' tal que $P \oplus P' \cong F$. También encontramos que si $A_A = e_1A \oplus ... \oplus e_nA$ es una descomposición de A_A en submódulos indescomponibles. Si un A-módulo derecho P es proyectivo, entonces $P = P_1 \oplus ... \oplus P_m$, donde cada sumando P_j es indescomponible e isomorfo a algún e_sA [3].

Supongamos que $A_A = e_1A \oplus ... \oplus e_nA$ es una descomposición de A en submódulos indescomponibles. En [3] encontramos la siguiente caracterización de módulos simples, proyectivos e inyectivos, importante para el presente trabajo

(a) Todo A-módulo simple derecho es isomorfo a uno de los módulos

$$S(1) = \text{tope} e_1A, ..., S(n) = \text{tope} e_nA.$$

(b) Cada A-módulo proyectivo derecho indecomponible es isomorfo a uno de los módulos

$$P(1) = e_1A, P(2) = e_2A, ..., P(n) = e_nA.$$

Además, $e_iA \cong e_jA$ si y sólo si $S(i) \cong S(j)$.

(c) Cada A-módulo inyectivo indescomponible derecho es isomorfo a uno de los módulos

$$I(1) = E(S(1)), ..., I(n) = E(S(n)),$$

donde $E(S(j))$ es una envoltura inyectiva del módulo simple $S(j)$.

Supongamos que A es una K-álgebra con un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos $\{e_1, ..., e_n\}$. La álgebra A se llama **básica** si $e_iA \ncong e_jA$, para todo $i \neq j$. Se dice que una álgebra A es **local** si A tiene un único ideal máximal derecho, o equivalentemente, si A tiene un único ideal máximal izquierdo [3].

En [3] se muestra que cada álgebra de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado K corresponde a una estructura gráfica, denominada carcaj, y que, en el otro sentido, a cada carcaj le corresponde una K-álgebra asociativa, que tiene una identidad y es de dimensión finita cuando se cumplen algunas condiciones.

Un **carcaj** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es un cuádrupla que esta formada por dos conjuntos: Q_0 (cuyos elementos se llaman **puntos** o vértices) y Q_1 (Cuyos elementos se llaman **flechas**), y dos aplicaciones $s, t : Q_1 \to Q_0$ que asocian a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su **origen** $s(\alpha)_0$ y su **final** $t(\alpha) \in Q_0$, respectivamente [3].

Una flecha $\alpha \in Q_1$ del origen $a = s(\alpha)$ y el final $b = t(\alpha)$ suele ser denotada por $\alpha : a \to b$. Un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ se denomina normalmente brevemente por $Q = (Q_0, Q_1)$ o incluso simplemente por Q. Un **subcarcaj** de un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es un carcaj $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ tal que $Q'_0 \subset Q_0$, $Q'_1 \subset Q_1$ y las restricciones $s|_{Q'_1}$, $t|_{Q'_1}$de s, t a Q'_1 son respectivamente iguales a s', t' (Es decir, si $\alpha : a \to b$ es una flecha en Q_1 tal que $\alpha \in Q'_1$ y $a, b \in Q'_0$, entonces $s'(\alpha) = a$ y $t'(\alpha) = b$). Tal subcarcaj se llama **completo** si Q'_1 es igual al conjunto de todas aquellas flechas en Q_1 cuyo origen y final pertenecen a Q'_0, es decir

$$Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 |\ s(\alpha) \in Q'_0 \text{ y } t(\alpha) \in Q'_0\}.$$

En particular, un subcarcaj completo está determinado exclusivamente por su conjunto de puntos [3].

Un carcaj Q se dice que es **finito** si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos. El grafo subyacente $\overline{Q}$ de un carcaj Q se obtiene de Q olvidando la orientación de las flechas. El carcaj Q se dice que es **conexo** si $\overline{Q}$ es un grafo conexo [3].

Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj y $a, b \in Q_0$. Un **camino** de longitud $l \geq 1$ con origen a y final b (o, más brevemente, de a a b) es una secuencia

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l|b),$$

donde $\alpha_k \in Q_1$ para todo $1 \leq k \leq l$, y se tiene $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ para cada $1 \leq k < l$, y $t(\alpha_l) = b$. Tal camino se denota brevemente por $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ y se visualiza de la siguiente manera

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \to ... \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b$$

Se adopta por conveniencia asociar con cada punto $a \in Q_0$ un camino de longitud $l = 0$, llamado el **camino trivial** o el camino estacionario en a, y denotado por

$$\varepsilon_a = (a \parallel a).$$

De esta forma, los caminos de longitudes 0 y 1 están en correspondencia biyectiva con los elementos de Q_0 y Q_1, respectivamente. Un camino de longitud $l \geq 1$ se denomina **ciclo** cuando su origen y final coinciden. Un ciclo de longitud 1 se llama **bucle**. Un carcaj se llama **acíclico** si no contiene ciclos [3].

Sea Q un carcaj. El **álgebra de caminos** KQ de Q es la K-álgebra cuyo K espacio vectorial subyacente tiene como base el conjunto de todos los caminos $(a|\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l|b)$ de longitud $l \geq 0$ en Q y tal que el producto de dos vectores de la base $(a|\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l|b)$ y $(c|\beta_1, ..., \beta_k|d)$ de KQ es definido por

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l|b)(c|\beta_1, ..., \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, ..., \alpha_l, \beta_1, ..., \beta_k|d),$$

donde δ_{bc} denota el delta de Kronecker. En otras palabras, el producto de dos caminos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ y $\beta_1, ..., \beta_k$ es igual a cero si $t(\alpha_l) \neq s(\beta_1)$ y es igual al camino compuesto $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l\beta_1, ..., \beta_k$ si $t(\alpha_l) = s(\beta_1)$. El producto de elementos de la base se extiende a elementos arbitrarios de KQ por distributividad [3].

Sea Q el carcaj

$$\overset{\overset{\alpha}{\curvearrowleft}}{\circ}$$

que consta de un solo punto y un solo bucle. La base que define el álgebra de caminos KQ es $\left\{\varepsilon_1, \alpha, \alpha^2, ...\alpha^l, ...\right\}$ Y la multiplicación de vectores de la base está dada por

$\varepsilon_1\alpha^l = \alpha^l\varepsilon_1 = \alpha^l$ para todo $l \geq 0$, y
$\alpha^l\alpha^k = \alpha^{l+k}$ para todo , $l, k \geq 0$,

donde $\alpha^0 = \varepsilon_1$. Por tanto KQ es isomorfa al álgebra polinomial $K[t]$ en una indeterminada t, siendo el isomorfismo inducido por la aplicación K-lineal tal que

$$\varepsilon_1 \to 1 \text{ y } \alpha \to t \text{ [3].}$$

Sea Q el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \leftarrow \underset{2}{\circ}$$

El álgebra de caminos KQ tiene como base el conjunto $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha\}$ con la tabla de multiplicación

	ε_1	ε_2	α
ε_1	ε_1	0	0
ε_2	0	ε_2	α
α	α	0	0

Claramente, KQ es isomorfa al álgebra matricial triangular inferior 2×2

$$T_2(K) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} / a, b, c \in K \right\}$$

Donde el isomorfismo es inducido por la aplicación K-lineal tal que

$$\varepsilon_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ [3]}$$

En [3] se establece que dado Q un carcaj y KQ su álgebra de caminos. Entonces

(a) KQ es un álgebra asociativa,

(b) KQ tiene un elemento identidad si y sólo si Q_0 es finito, y

(c) KQ es de dimensión finita si y sólo si Q es finito y acíclico.

Se dice que una álgebra A es **conexa** (o indescomponible) si A no es una suma directa de dos álgebras, o de forma equivalente, si 0 y 1 son los únicos idempotentes centrales de A [3].

Un álgebra A se dice que es **serial a derecha** si cada A-módulo derecho proyectivo indescomponible es uniserial. Un álgebra A se llama serial a izquierda si cada A-módulo izquierdo proyectivo indescomponible es uniserial [3].

Para un A - módulo M, consideramos la sucesión decreciente de submódulos de M dada por

$$M \supset \mathrm{Rad}M \supset \mathrm{Rad}^2 M \supset ...\mathrm{Rad}^i M.. \supset 0.$$

esta sucesión se llama la serie radical de M [3].

En [3] se establece que las siguientes condiciones son equivalentes para un A - módulo derecho M: (a) M es uniserial. (b) La serie radical $M \supset \mathrm{Rad}M \supset \mathrm{Rad}^2 M \supset ... \supset 0$ es una serie de composición.

Sea Q un carcaj finito y conexo. El ideal bilátero del álgebra de caminos KQ generado (como un ideal) por las flechas de Q es llamado el **ideal de flechas** de KQ y se denota por R_Q [3].

Obsérvese que existe una descomposición en suma directa

$$R_Q = KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus ... \oplus KQ_l \oplus ...$$

del K espacio -vectorial R_Q, donde KQ_l es el subespacio de KQ generado por el conjunto Q_l de todos los caminos de longitud l. En particular, el K espacio -vectorial subyacente de R_Q se genera por todos los caminos en Q de longitud $l \geq 1$. Esto implica que, para cada $l \geq 1$,

$$R_Q^l = \bigoplus_{m \geq l} KQ_m$$

y por lo tanto R_Q^l es el ideal de KQ generado, como un K espacio vectorial, por el conjunto de todos los caminos de longitud $\geq l$ [3].

Sea Q un carcaj finito y R_Q el ideal de flechas del álgebra de caminos KQ. Un ideal bilátero I de KQ se dice que es **admisible** si existe $m \geq 2$ tal que

$$R_Q^m \subset I \subset R_Q^2$$

Si I es un ideal admisible de KQ, se dice que el par (Q, I) es un carcaj acotado. El álgebra cociente KQ/I es el álgebra del carcaj acotado (Q, I) [3]. Es sabido que si Q un carcaj finito y conexo e I es un Ideal admisible de KQ, y $A = KQ/I$. Entonces $Q_A = Q$ [3].

Los carcajes proporcionan una manera conveniente de visualizar álgebras de dimensión finita. También pueden ser utilizados para visualizar módulos. Usando un carcaj (Q, I) asociado a un álgebra A, visualizamos cualquier A-módulo M (de dimensión finita) como una representación K-lineal de (Q, I), es decir, una familia de K espacios vectoriales (de dimensión finita) M_a, con $a \in Q_0$, conectada por aplicaciones K-lineales $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$ que corresponde con las flechas $\alpha : a \to b$ en Q, y satisfaciendo algunas relaciones inducidas por I. Esta descripción de A-módulos es una poderosa herramienta en el estudio de A-módulos y está jugando un papel fundamental en la teoría moderna de representación de álgebras [3].

Sea Q un carcaj finito. Una **representación** K-lineal o, más brevemente, una representación M de Q se define por los siguientes datos:

(a) A cada punto a en Q_0 se asocia un K espacio vectorial M_a.

(b) A cada flecha $\alpha : a \to b$ en Q_1 se asocia una aplicación K-lineal $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.

Dicha representación se denota $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a\in Q_0, \alpha\in Q_1}$, o simplemente $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. Ésta se dice de **dimensión finita** si cada espacio vectorial M_a es de dimensión finita [3].

Sean $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q. Un **morfismo** (de representaciones) $f : M \to M'$ es una familia $f = (f_a)_{a\in Q_0}$ de aplicaciones K lineales $(f_a : M_a \to M'_a)_{a\in Q_0}$ que son compatibles con la estructura de las aplicaciones φ_α, es decir, para cada flecha $\alpha : a \to b$, tenemos $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$ o, equivalentemente, el siguiente cuadrado es conmutativo [3]:

$$\begin{array}{ccc} M_a & \stackrel{\varphi_\alpha}{\to} & M_b \\ \downarrow f_a & & \downarrow f_b \\ M'_a & \stackrel{\varphi'_\alpha}{\to} & M'_b \end{array}$$

Sean $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ dos morfismos de representaciones de Q, donde $f = (f_a)_{a\in Q_0}$ y $g = (g_a)_{a\in Q_0}$. Su composición se define como la familia $gf = (f_a g_a)_{a\in Q_0}$. Entonces gf se ve fácilmente como un morfismo de M a M''. Se ha definido así una categoría Rep (Q) de las representaciones K-lineales de Q. Se denota por rep (Q) la subcategoría plena de Rep (Q) que consiste en las representaciones de dimensión finita [3].

Sea $A = KQ/I$, donde Q es un carcaj conexo y finito e I es un ideal admisible de KQ, es sabido que existe una equivalencia K-lineal de categorías

$$F : \text{Mod } A \overset{\simeq}{\to} \text{Rep}_K(Q, I)$$

que se restringe a una equivalencia de categorías

$$F : \text{mod } A \overset{\simeq}{\to} \text{rep}_K(Q, I) \text{ [3].}$$

Con Mod A la categoría de A - módulos derechos.

De lo anterior se deduce que si Q es un carcaj finito, conexo y acíclico. Existe una equivalencia de categorías Mod $KQ \cong \text{Rep}_K(Q)$ que se restringe a una equivalencia mod $KQ \cong \text{rep}_K(Q)$ [3].

Sea $a \in Q_0$; denotamos por $S(a)$ la representación $(S(a)_b, \varphi_\alpha)$ de Q definida como sigue

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq a \\ K & \text{si } b = a \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha = 0 \text{ para todo } \alpha \in Q_1$$

Claramente, $S(a)$ es una representación acotada de (Q, I) (para cualquier I) [3]

Sea $A = KQ/I$ el álgebra de caminos de (Q, I). En [3] se establece que el conjunto $\{S(a) | a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfía de los A - módulos simples.

Dada $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ una representación de (Q, I). Es sabido que Rad$M = J$, donde $J = (J_a, \gamma_\alpha)$ con $J_a = \sum_{\alpha : b \to a} Im(\varphi_\alpha : M_b \to M_a)$ y $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a}$ para toda flecha α de origen a [3].

Se concentrará ahora la atención en los módulos proyectivos indescomponibles de un álgebra, vistos estos como representaciones. Sea (Q, I) un carcaj acotado, $A = KQ/I$, y $P(a) = e_a A$, donde $a \in Q_0$. En [3] se concluye que si $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\beta)$, entonces $P(a)_b$ es el K espacio vectorial con base el conjunto de todos los $\overline{w} = w + I$, con w un camino de a a b y, para una flecha $\beta : b \to c$, la aplicación K-lineal $\varphi_\beta : P(a)_b \to P(a)_c$ está dada por la multiplicación a derecha por $\overline{\beta} = \beta + I$ [3]. En lo que sigue $P(a)$ es el A módulo proyectivo indescomponible correspondiente al punto $a \in Q_0$. Un caso particular importante es cuando Q es acíclico e $I = 0$.

En este caso, $P(a)_b$ es igual al espacio vectorial que tiene como base el conjunto de todos los caminos desde a hasta b [3].

Ahora describiremos explícitamente los A-módulos inyectivos indescomponibles $I(a)$. En [3] se establece que si $I(a) = (I(a)_b, \varphi_\beta)$, entonces $I(a)_b$ es el dual del K espacio vectorial con base el conjunto de todos los $\overline{w} = w + I$, con w un camino de b a a y, para una flecha $\beta : b \to c$, la aplicación K-lineal $\varphi_\beta : I(a)_b \to I(a)_c$ es dado por el dual de la multiplicación izquierda por $\overline{\beta} = \beta + I$ [3]. Decimos en lo que sigue que $I(a)$ es el A-módulo inyectivo indescomponible correspondiente al punto $a \in Q_0$. Un caso particular importante es cuando Q es acíclico e $I = 0$. En este caso, $I(a)_b$ es el dual del espacio vectorial con base el conjunto de todos los caminos de b a a [3].

A continuación se establecen los resultados del presente proyecto.

Ejemplo 4.1.

Dada un álgebra A de dimensión finita, todo módulo simple $M = M_A$ es de Zavadskij. Por el lema de Schur [3, 3.1, 3.2] se tiene que $End\,(M) \cong K$ además el único factor de la serie de composición de M es $U_1 = M$, y por tanto los morfismos (1) son inyectivos, así sobreyectivos. De esta manera M es manso; las otras condiciones de la Proposición 2.7 son de verificación inmediata. Por tanto toda algebra A tiene módulos de Zavadskij.

Ejemplo 4.2.

Sea $M = M_A$ un módulo simple sobre un álgebra A de dimensión finita, por Proposición 2.3 se tiene que M^s es de Zavadskij, con $s \in \{1, 2, ...\}$.

Ejemplo 4.3.

Sea A un álgebra hereditaria a derecha, si M es un A-módulo proyectivo derecho y quasi-inyectivo, entonces es de Zavadskij por definición.

Ejemplo 4.4.

Sea A un álgebra local no simple, entonces A_A es indescomponible y $End\,A_A \cong A \ncong K$ [3], de esta manera A_A no es manso y por tanto no es de Zavadskij. En particular, $A = K\,[t]\,/(t^n)$ es autoinyectiva [3], pero A_A no es de Zavadskij, $End\,A_A \cong A \ncong K$.

Ejemplo 4.5.

Sea A un álgebra hereditaria: su carcaj es finito, conexo y acíclico, entonces si P es un A-módulo indescomponible proyectivo, se tiene que $End\,P \cong K$, así P es un ladrillo [3]. De esta manera, para que M sea de Zavadskij es suficiente verificar que P sea uniserial y los morfismos (1) sean no nulos, ó también que P sea uniserial con factores de composición U_i no isomorfos.

Ejemplo 4.6.

Los ladrillos uniseriales con factores de composición no isomorfos son de Zavadskij

Ejemplo 4.7.

Módulos de Zavadskij y teorema de Gabriel: Sea M un módulo indescomponible sobre un álgebra hereditaria A de tipo de representación finito. Entonces $End_A M \cong K$ [3]. Entonces para que M sea de Zavadskij en un álgebra del tipo A_n, D_n, E_6, E_7 o E_8 es suficiente ver que M sea uniserial con factores de composición no isomorfos.

Ejemplo 4.8.

Módulos de Zavadskij y álgebras de Nakayama: como el álgebra

$$\underset{1}{\circ} \leftarrow \underset{2}{\circ} \leftarrow \underset{3}{\circ} \leftarrow \ldots \leftarrow \underset{n-1}{\circ} \leftarrow \underset{n}{\circ}$$

es hereditaria y de tipo de representación finito [3], entonces para catalogar a un módulo M indescomponible proyectivo o inyectivo como módulo de Zavadskij en esta álgebra, basta ver que los factores de composición de M sean no isomorfos.

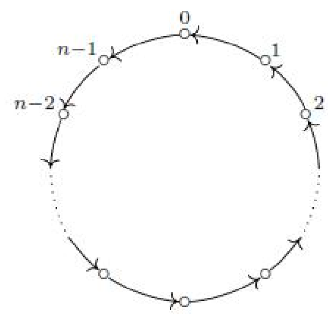
Se llamará a un álgebra A **álgebra de Zavadskij** si todos sus módulos indescomponibles proyectivos y todos sus módulos indescomponibles inyectivos son módulos de Zavadskij.

El álgebra

$$\underset{1}{\circ} \overset{\alpha_1}{\leftarrow} \underset{2}{\circ} \overset{\alpha_2}{\leftarrow} \underset{3}{\circ} \overset{\alpha_3}{\leftarrow} \ldots \overset{\alpha_{n-2}}{\leftarrow} \underset{n-1}{\circ} \overset{\alpha_{n-1}}{\leftarrow} \underset{n}{\circ}$$

sin acotamientos, es de Zavadskij. Más adelante se verá que sin importar los acotamientos un álgebra de este estilo resulta también de Zavadskij.

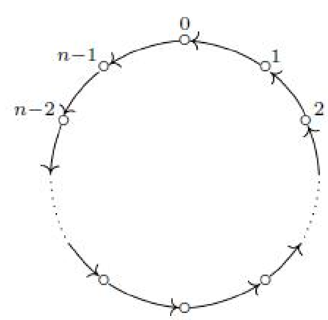
Las álgebras



No son hereditarias de tipo de representación finito, por ello no aplica el anterior razonamiento. Aún así estas álgebras son autoinyectivas [3] y por tal razón cada A módulo indescomponible proyectivo es inyectivo (por tanto quasi-inyectivo). De donde, para garantizar que un módulo indescomponible M proyectivo sea de Zavadskij por definición es suficiente establecer condiciones sobre el álgebra para que todos los submódulos del módulo en mención sean M-proyectivos.

Ejemplo 4.9. ***Construcción de un módulo de Zavadskij en un álgebra de Nakayama circular***

Considérese la siguiente álgebra básica y conexa de Nakayama

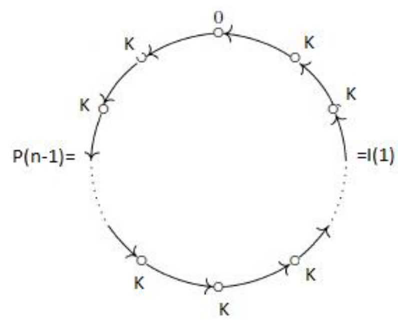


con los siguientes morfismos: α_1 del punto 0 al punto $n-1$, α_2 del punto $n-1$ al punto $n-2$, y así sucesivamente hasta α_n del punto 1 al punto 0.

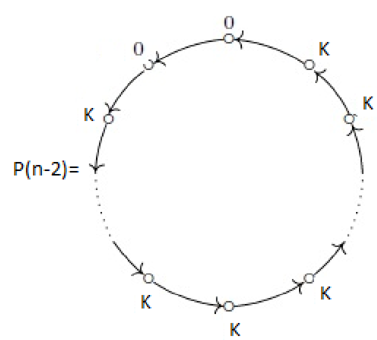
Sea $\alpha_n = 0$ y $\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1} = 0$.

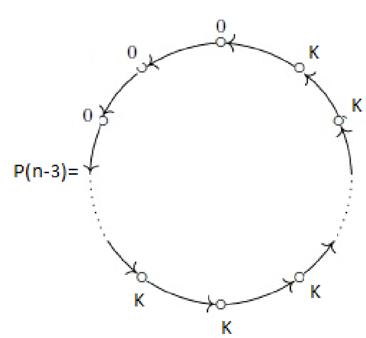
De $\alpha_n = 0$, se tiene automáticamente que $\alpha_{n-1}\alpha_n = 0$, $\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = 0$, y así sucesivamente hasta $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n = 0$.

Tenemos que

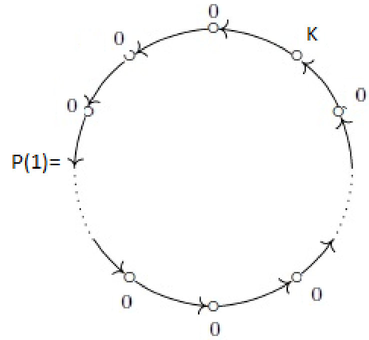


$P(n-1)$ es quasi-inyectivo debido a que las álgebras de Nakayama del ejemplo anterior son auto-inyectivas. Todos los submódulos de $P(n-1)$ son proyectivos, y son:





$$\vdots$$



De donde $P(n-1)$ es de Zavadskij por definición.

La serie de composición para este módulo es: $P(n-1) \supseteq P(n-2) \supseteq ... \supseteq P(1) \supseteq 0$, Nótese que los factores de composición de esta serie son no isomorfos dos a dos y por tanto los morfismos (1) son inyectivos.

Ejemplo 4.10.

Sea A un álgebra hereditaria D_n, E_6, E_7 o E_8 y serial a derecha, entonces si M es indescomponible y proyectivo e inyectivo entonces es de Zavadskij por definición. Si M es proyectivo no inyectivo, basta ver que sus factores de composición sean no isomorfos para que sea de Zavadskij. Si M es inyectivo no proyectivo basta ver que M sea uniserial con factores de composición no isomorfos o también que los submódulos de M sean M proyectivos, para que así el módulo sea de Zavadskij.

Ejemplo 4.11.

Sea A la K-álgebra serial a derecha dada por el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \underset{2}{\overset{\overset{\beta}{\curvearrowleft}}{\circ}}$$

donde $\alpha\beta^2 = 0$ y $\beta^3 = 0$

$P(1)$ y $P(2)$ no son módulos de Zavadskij, porque los factores de composición de sus series de composición correspondientes no son mutuamente no isomorfos [3]. Por tanto los homomorfismos de anillos (1) no son todos inyectivos. i.e $P(1), P(2)$ no son mansos, aunque $P(1), P(2)$ son uniseriales.

Enfocaremos ahora nuestra atención en las K álgebras básicas de dimensión finita seriales a derecha sin ciclos, particularmente en las álgebras hereditarias tipo Dynkin con estas características.

Recordemos que en un álgebra de las mencionadas todos sus módulos indescomponibles proyectivos a derecha son uniseriales.

Es de importancia mencionar que una K álgebra A básica es serial a derecha si y sólo si, para todo punto a de su carcaj ordinario Q_A, existe a lo más una flecha de origen a [3]. Como consecuencia nosotros obtenemos el siguiente corolario

Corolario 4.12.

Para A_n existen n orientaciones posibles para construir álgebras seriales a derecha, y son las siguientes:

$\circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \ldots \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ$

$\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \ldots \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ$

$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \leftarrow \ldots \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ$

.

.

.

$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \ldots \rightarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ$

$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \ldots \rightarrow \circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ$

$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \ldots \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$

Para D_n existen n orientaciones posibles para construir álgebras seriales a derecha, se ilustra la situación para D_4, D_5 y D_6:

Para D_4:

$$
\begin{array}{ccccc}
\circ & & & & \\
 & \nwarrow & & & \\
 & & \circ & \leftarrow & \circ \\
 & \nearrow & & & \\
\circ & & & &
\end{array}
$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[dr] & & \\ & \circ & \circ \arrow[l] \\ \circ \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[dr] & & \\ & \circ \arrow[r] & \circ \\ \circ \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[dr] & & \\ & \circ \arrow[dl] & \circ \arrow[l] \\ \circ & & \end{tikzcd}$$

Para D_5:

$$\begin{tikzcd} \circ & & & \\ & \circ \arrow[ul] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] \\ \circ \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[dr] & & & \\ & \circ & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] \\ \circ \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[dr] & & & \\ & \circ \arrow[r] & \circ & \circ \arrow[l] \\ \circ \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[dr] & & & \\ & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \\ \circ \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & & & & & & \\ & \searrow & & & & & \\ & & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ \\ & \swarrow & & & & & \\ \circ & & & & & & \end{array}$$

Para D_6:

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & & & & & & & & \\ & \nwarrow & & & & & & & \\ & & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ \\ & \nearrow & & & & & & & \\ \circ & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & & & & & & & & \\ & \searrow & & & & & & & \\ & & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ \\ & \nearrow & & & & & & & \\ \circ & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & & & & & & & & \\ & \searrow & & & & & & & \\ & & \circ & \rightarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ \\ & \nearrow & & & & & & & \\ \circ & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & & & & & & & & \\ & \searrow & & & & & & & \\ & & \circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ & \leftarrow & \circ \\ & \nearrow & & & & & & & \\ \circ & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & & & & & & & & \\ & \searrow & & & & & & & \\ & & \circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ \\ & \nearrow & & & & & & & \\ \circ & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & & & & & & & & \\ & \searrow & & & & & & & \\ & & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ \\ & \swarrow & & & & & & & \\ \circ & & & & & & & & \end{array}$$

Para E_6, E_7 y E_8 existen $6, 7$ y 8 orientaciones posibles respectivamente para construir álgebras seriales a derecha, se ilustra la situación para E_6 y E_7.

Para E_6:

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ \arrow[d] & & \\
\circ & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ \arrow[d] & & \\
\circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ \arrow[d] & & \\
\circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ \arrow[d] & & \\
\circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ & & \\
\circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[u] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ \arrow[d] & & \\
\circ \arrow[r] & \circ & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Para E_7:

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ \arrow[d] & & & \\
\circ & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ \arrow[d] & & & \\
\circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ \arrow[d] & & & \\
\circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & \circ & & & & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & & & & \\
\circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & \circ & & & & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & & & & \\
\circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & \circ & & & & & & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & & & & & \\
\circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & \circ & & & & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & & & & \\
\circ & \rightarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & &
\end{array}$$

Los siguientes ejemplos inspiraron la construcción del teorema de esta sección, obsérvese que en las álgebras presentadas todos sus módulos proyectivos indescomponibles son de Zavadskij

Ejemplo 4.13.

Sea la siguiente álgebra sin acotamientos

$$\begin{array}{ccccc}
\underset{2}{\circ} & & & & \\
 & \nwarrow & & & \\
 & & \underset{3}{\circ} & \leftarrow & \underset{4}{\circ} \\
 & \nearrow & & & \\
\underset{1}{\circ} & & & &
\end{array}$$

Para esta, se construyen las sucesiones radicales de sus módulos proyectivos indescomponibles:

Para $P(1)$:

$P(1) \supseteq P(3) \supseteq P(2) \supseteq 0$, obsérvese que $P(1)/P(3) \cong S(1)$, $P(3)/P(2) \cong S(3)$, $P(2) = S(2)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(1)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

Para $P(2)$: como $P(2)$ es simple, es de Zavadskij.

Para $P(3)$:

$P(3) \supseteq P(2) \supseteq 0$, obsérvese que $P(3)/P(2) \cong S(3)$, $P(2) = S(2)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(3)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

Para $P(4)$:

$P(4) \supseteq P(3) \supseteq P(2) \supseteq 0$, obsérvese que $P(4)/P(3) \cong S(4)$, $P(3)/P(2) \cong S(3)$, $P(2) = S(2)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(4)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

Ejemplo 4.14.

Sea la siguiente álgebra sin acotamientos

$$\begin{tikzcd} \underset{2}{\circ} \arrow[dr] & & \\ & \underset{3}{\circ} & \underset{4}{\circ} \arrow[l] \\ \underset{1}{\circ} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Siguiendo el ejemplo anterior es fácil verificar que los módulos $P(i)$, $1 \leq i \leq 4$ son de Zavadskij.

Ejemplo 4.15.

Sea la siguiente álgebra sin acotamientos

$$\begin{tikzcd} \underset{2}{\circ} \arrow[dr] & & \\ & \underset{3}{\circ} \arrow[r] & \underset{4}{\circ} \\ \underset{1}{\circ} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Para esta, se construyen las sucesiones radicales de sus módulos proyectivos indescomponibles:

$P(4)$ es simple, por tanto es de Zavadskij.

Para $P(1)$:

$P(1)\supseteq P(3) \supseteq P(4) \supseteq 0$, obsérvese que $P(1)/P(3) \cong S(1)$, $P(3)/P(4) \cong S(3)$, $P(4) = S(4)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(1)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

Para $P(2)$:

$P(2)\supseteq P(3) \supseteq P(4) \supseteq 0$, obsérvese que $P(2)/P(3) \cong S(2)$, $P(3)/P(4) \cong S(3)$, $P(4) = S(4)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(2)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

Para $P(3)$:

$P(3) \supseteq P(4) \supseteq 0$, obsérvese que $P(3)/P(4) \cong S(3)$, $P(4) = S(4)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(3)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

Nótese que en general los módulos inyectivos indescomponibles de estas álgebras no son de Zavadskij:

La sucesión radical de $I(4)$ es:

$I(4) \supseteq P(3) \supseteq P(4) \supseteq 0$

La cual no es serie de composición, ya que $I(4)/P(3)$ no es simple, así $I(4)$ no es uniserial y por tanto no es de Zavadskij.

Ejemplo 4.16.

Sea la siguiente álgebra sin acotamientos

$$
\begin{tikzcd}
2 \arrow[dr] & & \\
& 3 \arrow[dl] & 4 \arrow[l] \\
1 & &
\end{tikzcd}
$$

Para esta, se construyen las sucesiones radicales de sus módulos proyectivos indescomponibles:

$P(1)$ es simple, por tanto es de Zavadskij.

Para $P(2)$:

$P(2) \supseteq P(3) \supseteq P(1) \supseteq 0$, obsérvese que $P(2)/P(3) \cong S(2)$, $P(3)/P(1) \cong S(3)$, $P(1) = S(1)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(2)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

Para $P(3)$:

$P(3) \supseteq P(1) \supseteq 0$, obsérvese que $P(3)/P(1) \cong S(3)$, $P(1) = S(1)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(3)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

Para $P(4)$:

$P(4) \supseteq P(3) \supseteq P(1) \supseteq 0$, obsérvese que $P(4)/P(3) \cong S(4)$, $P(3)/P(1) \cong S(3)$, $P(1) = S(1)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(4)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

Por las mismas razones que en el ejemplo anterior tenemos que $I(1)$ e $I(3)$ no son de Zavadskij.

Ejemplo 4.17.

Sea la siguiente álgebra sin acotamientos

$$
\begin{tikzcd}
& & 6 \arrow[d] & & \\
5 & 4 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & 2 \arrow[l] & 1 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Para esta, se construyen las sucesiones radicales de sus módulos proyectivos indescomponibles:

$P(5)$ es simple, por tanto es de Zavadskij.

Para $P(6)$:

$P(6) \supseteq P(3) \supseteq P(4) \supseteq P(5) \supseteq 0$, obsérvese que $P(6)/P(3) \cong S(6)$, $P(3)/P(4) \cong S(3)$, $P(4)/P(5) \cong S(4)$, $P(5) = S(5)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(6)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

Para $P(1)$:

$P(1) \supseteq P(2) \supseteq P(3) \supseteq P(4) \supseteq P(5) \supseteq 0$, obsérvese que $P(1)/P(2) \cong S(1)$, $P(2)/P(3) \cong S(2)$, $P(3)/P(4) \cong S(3)$, $P(4)/P(5) \cong S(4)$, $P(5) = S(5)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(1)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

De lo anterior también se concluye que los módulos $P(i)$, con $2 \leq i \leq 5$ son módulos de Zavadskij.

De forma análoga para el álgebra siguiente todos sus módulos proyectivos indescomponibles son de Zavadskij.

Ejemplo 4.18.

$$\begin{tikzcd} & & \underset{6}{\circ} \arrow[d] & & \\ \underset{1}{\circ} \arrow[r] & \underset{2}{\circ} \arrow[r] & \underset{3}{\circ} \arrow[r] & \underset{4}{\circ} \arrow[r] & \underset{5}{\circ} \end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.19.

Sea la siguiente álgebra sin acotamientos

$$\begin{tikzcd} & & \underset{6}{\circ} \arrow[d] & & \\ \underset{1}{\circ} \arrow[r] & \underset{2}{\circ} \arrow[r] & \underset{3}{\circ} \arrow[r] & \underset{4}{\circ} & \underset{5}{\circ} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Para esta, se construyen las sucesiones radicales de sus módulos proyectivos indescomponibles:

$P(4)$ es simple, por tanto es de Zavadskij.

Para $P(1)$:

$P(1) \supseteq P(2) \supseteq P(3) \supseteq P(4) \supseteq 0$, obsérvese que $P(1)/P(2) \cong S(1)$, $P(2)/P(3) \cong S(2)$, $P(3)/P(4) \cong S(3)$, $P(4) = S(4)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(1)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

De lo anterior también se concluye que los módulos $P(i)$, con $1 \leq i \leq 4$ son módulos de Zavadskij. De manera similar que para $P(1)$ se concluye que los módulos $P(5)$ y $P(6)$ son de Zavadskij.

De forma análoga que para el álgebra anterior, en las álgebras siguientes todos sus módulos proyectivos indescomponibles son de Zavadskij.

Ejemplo 4.20.

$$\begin{tikzcd} & & \underset{6}{\circ} & & \\ \underset{1}{\circ} \arrow[r] & \underset{2}{\circ} \arrow[r] & \underset{3}{\circ} \arrow[u] & \underset{4}{\circ} \arrow[l] & \underset{5}{\circ} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & \underset{6}{\circ} \arrow[d] & & \\ \underset{1}{\circ} \arrow[r] & \underset{2}{\circ} \arrow[r] & \underset{3}{\circ} & \underset{4}{\circ} \arrow[l] & \underset{5}{\circ} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.21.

Sea la siguiente álgebra sin acotamientos

$$\begin{tikzcd} & & \underset{6}{\circ} \arrow[d] & & \\ \underset{1}{\circ} \arrow[r] & \underset{2}{\circ} & \underset{3}{\circ} \arrow[l] & \underset{4}{\circ} \arrow[l] & \underset{5}{\circ} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Para esta, se construyen las sucesiones radicales de sus módulos proyectivos indescomponibles:

$P(2)$ es simple, por tanto es de Zavadskij.

Para $P(5)$:

$P(5) \supseteq P(4) \supseteq P(3) \supseteq P(2) \supseteq 0$, obsérvese que $P(5)/P(4) \cong S(5)$, $P(4)/P(3) \cong S(4)$, $P(3)/P(2) \cong S(3)$, $P(2) = S(2)$, de tal manera que los factores de composición de esta serie son mutuamente no isomorfos, por tal razón $P(5)$ es manso por el ejemplo 4.7, y por el ejemplo 4.10 es de Zavadskij.

De lo anterior también se concluye que los módulos $P(i)$, con $3 \leq i \leq 4$ son módulos de Zavadskij. De manera similar que para $P(1)$ se concluye que los módulos $P(1)$ y $P(6)$ son de Zavadskij.

Los ejemplos anteriores sugieren el siguiente

Teorema 4.22. *Sea A una K álgebra básica serial a derecha y acíclica(es decir su carcaj ordinario Q_A no tiene ciclos), entonces:*

i) Cada módulo proyectivo indescomponible $P(i)$ cumple que los morfismos (1) de mansedumbre son inyectivos.

ii) Cada módulo inyectivo indescomponible $I(i)$ cumple que los morfismos (1) de mansedumbre son inyectivos, siempre que al vértice i en Q_A no llegue flecha o llegue una única flecha que hace parte de un único camino maximal tal que a sus vértices no llegan flechas.

Demostración

Sea $P(i)$ un módulo proyectivo indescomponible del álgebra A.

Si del vértice i de Q_A no sale flecha, entonces $P(i)$ es simple y cumple que los morfismos (1) son inyectivos, además $P(i)$ es de Zavadskij.

Por otro lado, si del vértice i sale una flecha, entonces Q_A tiene un camino de longitud $t \geq 2$ que comienza en el vértice i. Nótese que en las únicas posiciones en $P(i)$ que pueden ser ocupadas por K son las correspondientes al camino (único, ya que el álgebra es serial a derecha) que comienza en i, las demás posiciones de $P(i)$ son ocupadas por 0. Además se tiene K en la posición i de $P(i)$.

Si se tiene 0 en la posición correspondiente al vértice de la punta de la flecha que comienza en i, entonces $P(i)$ es simple y cumple la condición (1). En caso contrario se tiene K en la posición correspondiente al vértice de la punta de la flecha que comienza en i.

El camino es isomorfo al álgebra

$$\underset{i_1}{\circ} \leftarrow \underset{i_2}{\circ} \leftarrow \underset{i_3}{\circ} \leftarrow \ldots \leftarrow \underset{i_{t-2}}{\circ} \leftarrow \underset{i_{t-1}}{\circ} \leftarrow \underset{i_t}{\circ} \cong A_t$$

y el módulo $P(i)$ de A se puede identificar con el módulo $P(t)$ en A_t.

Si hay acotamientos en A se tiene que en algún primer momento en alguna posición del camino, por ejemplo en i_j se tiene 0 en dicha posición en $P(i)$, $j \in \{1, ..., t-2\}$, por tal razón luego de dicha posición (en la dirección del camino) van también sólo ceros en $P(i)$. Nótese que en los vértices anteriores a i_j en $P(i)$ se tiene K en cada uno de ellos.

Ahora, si se calcula la sucesión radical de $P(i)$ y con el renombramiento anterior de los vértices tenemos:

$$P(i)/\mathrm{Rad}(P(i)) \cong S(i_t)$$

$$\mathrm{Rad}(P(i))/\mathrm{Rad}^2(P(i)) \cong S(i_{t-1})$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Rad}^j(P(i))/\mathrm{Rad}^{j-1}(P(i)) \cong S(i_j)$$

Así los factores de composición de dicha serie son no isomorfos dos a dos y $P(i)$ cumple que los morfismos (1) son inyectivos.

Si no hay acotamientos en A se sigue una idea similar. $\square$

ii) Para los módulos inyectivos con las restricciones establecidas se puede adaptar la demostración anterior. $\square$

Corolario 4.23. *Para las álgebras hereditarias de tipo de representación finito* A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 *y seriales a derecha, todos sus módulos proyectivos indescomponibles son de Zavadskij y también los inyectivos con las restricciones del teorema anterior.*

Demostración

Consecuencia inmediata del teorema 4.22 y los ejemplos 4.7 y 4.10. □

Corolario 4.24. *Las álgebras de Nakayama*

$$\circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \ldots \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ$$

$$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \ldots \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$$

Son álgebras de Zavadskij.

Demostración

Consecuencia inmediata del teorema 4.22 y los ejemplos 4.7 y 4.10. □

Corolario 4.25. *En las siguientes álgebras todos sus módulos indescomponibles proyectivos y todos sus módulos indescomponibles inyectivos son de Zavadskij, excepto posiblemente uno de los segundos(el determinado por la posición en donde llegan dos flechas.)*

$\circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \ldots \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ$

$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \leftarrow \ldots \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ$.

.

.

$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \ldots \rightarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ$

$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \ldots \rightarrow \circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ$

Demostración

Consecuencia inmediata del teorema 4.22 y los ejemplos 4.7 y 4.10. □

Ejemplo 4.26.

Para el álgebra siguiente con acotamientos arbitrarios

$$\begin{tikzcd}
2 & & & & \\
& 3 \arrow[ul] & 4 \arrow[l] & 5 \arrow[l] & 6 \arrow[l] \\
1 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Según el teorema anterior $P(i)$ con $1 \leq i \leq 6$ es de Zavadskij. También $I(j)$ con $4 \leq j \leq 6$ y $I(1)$ son de Zavadskij.

Bibliografía

[1] F.W. Anderson, K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, New York, 1974.

[2] D.M. Arnold, *Abelian Groups and Representations of Finite Partially Ordered Sets*, CMS Books in Mathematics, vol. 2, Springer, 2000, 244p.

[3] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Vol 1*, Cambridge University Press, 2006, 469p.

[4] A.M. Cañadas, *Descripción categórica de algunos algoritmos de diferenciación*, Universidad Nacional de Colombia, 2013, 156p.

[5] A.M. Cañadas, *The School of Kiev in Colombia; the legacy of Alexander Zavadskij.* São Paulo Journal of Mathematical Sciences 7. 1(2013) 105-126.

[6] P. Gabriel, A.V. Roiter, *Representations of Finite Dimensional Algebras.* Algebra VIII, Encyclopedia of Algebra VIII Mathematical Sciences, Vol. 73, Springer-Verlag, 1992. 177 p.

[7] M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules.* Mathematics and Its Applications, vol. 1, Kluwer Academic Publishers, 2004, 393p.

[8] O. Iyama, τ-Categories III: Auslander orders and Auslander-Reiten quivers. Algebr. Represent. Theory, 8 (5) (2005), pp. 601-619.

[9] O. Iyama, *Representation dimension and Solomon zeta function.* Representations of Finite Dimensional Algebras and Related Topics in Lie Theory and Geometry, Fields Inst. Commun., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2004), pp. 45-64.

[10] R.E. Johnson, E.T. Wong, *Quasi-injective modules and irreducible rings*, J. London Math. Soc. 36(1961) 260-268.

[11] M.M. Kleiner, *On faithful representations of partially ordered sets of finite type*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI, **28** (1972), 42-59 (in Russian); English transl. in: J. Sov. Math. **3** (1975), no.5, 616-628.

[12] M.M. Kleiner, *Partially ordered sets of finite type*, type, Zap. Nauchn. Semin. LOMI, **28** (1972), 32-41 (in Russian); English transl. in: J. Sov. Math. **3** (1975), no.5, 607-615.

[13] G. Medina *Introducción a la Teoría de Representaciones de Posets Ordinarios.* Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.

[14] L.A. Nazarova and A.V. Roiter, *Representations of partially ordered sets*,sets, Zap. Nauchn. Semin. LOMI, **28** (1972), 5-31 (in Russian); English transl. in: J.Sov.Math. **3** (1975), 585-606.

[15] L.A. Nazarova, *Partially ordered sets of infinite type.* Izv. AN SSSR, Ser. Mat., **39** (1975), no.5, 963-991; English transl. in: : Math. USSR Izvestija, **9** (1975), 911-938.

[16] C.M. Ringel. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, LNM, Springer, v.**1099** (1984), 376p.

[17] W. Rump, *Differentiation and splitting for lattices and orders.* Coll. Math., **89** (2001), no.1, 7-42.

[18] W. Rump, *Two-point differentiation for general orders*, J.Pure Appl. Algebra, **153** (2000), no.2, 171-190.

[19] B. Schröder, *Ordered Sets An Introduction*, Birkhäuser, 2002.

[20] D. Simson, *On vector space categories and differentiations of right peak rings*, in: Proceedings of the International Conference Report of Algebras, Vol. IV, Ottawa, Carleton Univ., 1984.

[21] D. Simson, *Vector space categories, right peak rings, and their socle projective modules*, J. Algeb. 92 (1985) 532-571.

[22] D. Simson. *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories.* Categories, Algebra, Logic and Applications, Vol.**4**, Gordon Breach Sci. Publ., New York, 1992.

[23] K. Spindler. *Abstract Algebra With Applications.* Categories, Algebra, Logic and Applications, Vol.**1**, Marcel Dekker, Inc, 1994.

[24] L.E.T. Wu, J.P. Jans, *On quasi projectives*, Illinois J. Math. 11 (1967) 439 448.

[25] A.G. Zavadskij, *An algorithm for posets with an equivalence relation*, Can. Math. Soc. Conf. Proc., **11**, AMS (1991), 299-322.

[26] A.G. Zavadskij, *Differentiation algorithm and classification of representations*, Izv. AN SSSR, Ser. Mat. **55** (1991), no.5, 1007-1048 (in Russian); English transl. in Math. USSR Izvestiya, **39** (1992), no.2, 975-1012.

[27] A.G. Zavadskij, *Differentiation with respect to a pair of points*Matrix Problems, Kiev (1977), 115-121 (in Russian).

[28] Zavadskij A.G. *Diferentiation algorithm and classication of representations.* Izv. AN SSSR, Ser. Mat. 55 (1991), 1007-1048; English transl., Math. USSR Izvestiya 39 (1992), 975-1012).

[29] A.G. Zavadskij, *On two point diferentiation and its generalitation.* Contemporary mathematics 376 (2005), 413-435.

[30] A.G. Zavadskij, *Representations of partially ordered sets of finite growth.* DThesis for D.Sc. Degree, Kiev, 1988, 207p. (in Russian).

[31] A.G. Zavadskij, *Series of representations and the Tits form*Preprint No. 81.27, Inst. Mat. AN UkSSR, Kiev (1981), 3-20 (in Russian).

[32] A.G. Zavadskij, *Tame equipped posets*, posets, Linear Algebra Appl., **365** (2003), 389 465.

[33] A.G. Zavadskij, *The Auslander-Reiter quiver for posets of finite growth.* growth, Topics in Algebra, Banach Center Publ., **26** (1990), Part 1, 569-587.

[34] A.G. Zavadskij, A.M. Cañadas *Categorical description of some differentiation algorithms.* growth, Journal of Algebra and Its Applications, World Scientific Publishing Company, **5** (2006), No. 5, 629-652.

[35] A.G. Zavadskij, V.V. Kiricenko, *Semimaximal rings of finite type.* Mat. Sbornik 103(145) (1977) 323-345 [Math. USSR Sbornik 32 (1977) 273-291].