

*Un método numérico para reproducir explosiones en  
Ecuaciones diferenciales estocásticas con retardo*

WILMER PINEDA RÍOS  
MATEMÁTICO



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ, D.C.  
MARZO 2016

*Un método numérico para reproducir explosiones en  
Ecuaciones diferenciales estocásticas con retardo*

WILMER PINEDA RÍOS  
MATEMÁTICO

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
MAGISTER EN CIENCIAS - MATEMÁTICAS

DIRECTOR  
JOHANNA GARZÓN MERCHÁN, PH.D.  
DOCTORA EN MATEMÁTICAS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ, D.C.  
MARZO 2016

---

## Dedicado a

---

A Diana Moreno por todo su cariño, amor, apoyo y esfuerzo que me ha dado para cumplir esta meta.

---

## Agradecimientos

---

Quiero agradecer a mi madre por su apoyo incondicional, a Diana Moreno por su amor, comprensión y ayuda en los momentos difíciles de este trabajo y el ánimo necesario para continuar este camino, a Edward Latorre y Sedi Quintero por su gran amistad y por compartir conmigo muchos de los momentos más bacanos de mi vida universitaria. También le agradezco a Juan David Navia, Deimer Sánchez, Nelcy Arévalo y muchos otros compañeros y amigos que me aportaron en todo lo necesario para alcanzar este logro.

A los profesores Oswaldo Lezama, Fernando Zalamea, Liliana Blanco y Arun, quienes con sus clases hicieron que sintiera que la decisión que tomé al cursar la Maestría en Matemáticas haya sido fructífera y que, con todas sus enseñanzas, aportaron significativamente a la elaboración de este trabajo.

Por último, quiero agradecer la paciencia y apoyo incondicional de la profesora Johanna Garzón, por su tiempo, disposición y constante apoyo que hizo posible la elaboración completa de este documento, Muchas Gracias.

---

# Índice general

---

<b>Índice general</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos de Teoría de la Medida . . . . .	1
1.2. Esperanza Condicional . . . . .	4
1.3. Procesos estocásticos y Martingalas . . . . .	6
1.3.1. Desigualdades de Doob . . . . .	7
1.4. Movimiento Browniano . . . . .	8
<b>2. Integración Estocástica</b>	<b>14</b>
2.1. Integración estocástica . . . . .	14
2.2. Algunas propiedades de las integrales de Itô . . . . .	15
2.3. Formula de Itô . . . . .	21
<b>3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas</b>	<b>25</b>
3.1. Definiciones básicas . . . . .	25
3.2. Existencia y unicidad de las soluciones . . . . .	32
3.3. Explosiones en SDE . . . . .	39
3.4. Aproximación de Euler-Maruyama para SDE . . . . .	42
<b>4. Ecuaciones diferenciales estocásticas con retardo</b>	<b>43</b>
4.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas funcionales . . . . .	43
4.1.1. Existencia y Unicidad . . . . .	44
4.1.2. Métodos numéricos para SDDE . . . . .	45
4.2. Ecuación diferencial estocástica con retardo a trabajar . . . . .	46
4.2.1. Existencia y unicidad . . . . .	46

---

4.2.2. Explosión de la solución . . . . .	54
4.3. Método numérico . . . . .	57
4.3.1. Definición del método . . . . .	57
4.3.2. Explosión de la solución numérica . . . . .	61
4.4. Ejemplo numérico . . . . .	64
4.4.1. SDDE a trabajar . . . . .	64
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

---

## Introducción

---

Muchos fenómenos de la vida real, ya sean físicos, sociológicos o incluso económicos, pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, en las que la función desconocida y sus derivadas se evalúan todas en el mismo instante de tiempo  $t$ . Una clase más general de ecuaciones diferenciales, a menudo llamadas *ecuaciones diferenciales funcionales* son aquellas en las que la función desconocida ocurre con varios argumentos diferentes.

La ecuación diferencial funcional más simple y, quizás, más natural es la *ecuación diferencial ordinaria con tiempo de retardo*, que puede ser usada para expresar alguna derivada de la función desconocida en el tiempo  $t$  en términos de la ocurrencia de la misma en instantes anteriores. Este tipo de ecuaciones fueron introducidas por Hutchinson en [11], donde señaló que la formación del huevo  $r$  unidades de tiempo antes de la eclosión viene dada por la siguiente ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x(t) \left[ 1 - \frac{x(t-r)}{K} \right]$$

donde  $\gamma > 0$  es la tasa de crecimiento intrínseco y  $K > 0$  es la capacidad de volumen de la población. Las ecuaciones diferenciales con retardo producen, entonces, una amplia variedad de sistemas naturales y artificiales. A menudo surgen de una aproximación de una ecuación diferencial parcial que describe, por ejemplo, la difusión de una sustancia reactiva o una onda que viaja en algún medio. Sin embargo, en el mundo real “no tan ideal”, el fenómeno de interés está sujeto a factores externos desconocidos, o “ruido”. Para ilustrar este efecto, podemos imaginar que deseamos modelar la trayectoria de un cohete hacia la luna. Alguna de las cantidades pertinentes son su posición y su momentum; pero no podemos ignorar que el cohete viajará a través de barrancos de campos gravitatorios que pueden deberse a heterogeneidades desconocidas en la distribución de la masa de la tierra, o incluso se puede encontrar con ráfagas de viento que no se preveen. Así, parece razonable modificar el modelo anterior de manera que se puedan incluir estos efectos aleatorios que perturban el sistema.

La clase general de *ecuaciones diferenciales estocásticas con retardo* (SDDE) vienen dadas por lo siguiente:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, X_{t-r})dt + \sigma(t, X_t, X_{t-r})dB_t & t \in [0, T] \\ X_t = \varphi(t) & t \in [-r, 0] \end{cases} \quad (1)$$

donde se tiene una constante finita de retardo  $r > 0$  y un *segmento inicial*  $\varphi = \{\varphi(s) : s \in [-r, 0]\}$  se asume continuo a derecha y con límites a izquierda, además todos los valores

$\varphi(s)$  del segmento inicial son asumidos como  $\mathcal{F}_0$ -medibles, donde  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  es la filtración natural del movimiento Browniano  $\{B_t\}$ . La versión integral de (1) viene dada por

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s, X_{s-r}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, X_{s-r}) dB_s$$

El modelo de Lotka-Volterra retardado ([10] y [15]) resulta ser una de las soluciones más importantes para explicar la dinámica de poblaciones, pero es conocido que los sistemas de población están sujetos al ruido ambiental y hay diferentes tipos de ruido, por ejemplo, la tasa de crecimiento intrínseco de la población puede ser estimada por un valor medio más un término de error (véase [18]). Así que resulta mejor describir la dinámica de población de forma estocástica, es fundamental averiguar, a partir de la solución de este tipo de ecuación, si la cantidad de población será positiva, si se extinguirá, si es acotada o si se *vuelve infinita en un tiempo finito*. El último fenómeno se conoce como *explosión* y, generalmente, el tiempo de explosión es aleatorio.

El propósito de este trabajo es establecer, para una clase particular de SDDE, las condiciones necesarias para que la solución exista y sea única, así como un criterio de explosión de la solución en tiempo finito. Por un lado, este objetivo se logra analizando los aspectos teóricos de la solución de SDDE propuestos en [18] y [21], así como el criterio de explosión propuesto para ecuaciones diferenciales estocásticas (SDE) en [6]. Por otro lado, el aspecto más innovador de este trabajo es la implementación de un método numérico que permita reproducir la explosión de la solución de una SDDE.

Este trabajo está organizado como sigue. En el capítulo uno establecemos algunos preliminares necesarios de teoría de la medida y de probabilidad, así como la definición de procesos estocásticos, movimiento Browniano y las propiedades que tiene este proceso estocástico. En el segundo capítulo mostramos los resultados más importantes asociados a la integración estocástica en el sentido de Itô, algunas propiedades básicas de la integral de Itô, así como la fórmula de Itô.

En el capítulo tres, hablamos de las ecuaciones diferenciales estocásticas, así como los resultados más relevantes de existencia y unicidad de las soluciones, también mostramos más formalmente cuando una ecuación diferencial explota en tiempo finito, así como varios ejemplos de este tipo de ecuaciones. También presentamos una aproximación numérica de la solución.

En el cuarto capítulo, introduciremos las ecuaciones diferenciales estocásticas con retardo, se establece el teorema de existencia y unicidad de una clase particular de éstas, así como las condiciones para que la solución explote en tiempo finito. Luego mostraremos la aproximación numérica de la solución de este tipo de ecuaciones y establecemos un criterio de explosión, tanto de la solución real como de la solución aproximada. Finalmente, mostramos un ejemplo de una ecuación con las condiciones establecidas y mostramos la simulación de las trayectorias usando Matlab.



---

## Preliminares

---

### 1.1. Conceptos de Teoría de la Medida

Sea  $\Omega$  un conjunto diferente de vacío. Una *medida* es una extensión natural de la noción de longitud, área o volumen de subconjuntos en el espacio euclidiano de una, dos o tres dimensiones respectivamente.

**Definición 1.1.** Sea  $\mathcal{F}$  una colección de subconjuntos de  $\Omega$ . Se dice que  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$  si, y sólo si, se tienen las siguientes condiciones:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$
- (ii) Si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $A^C \in \mathcal{F}$
- (iii) Si  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , entonces  $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$

La pareja  $(\Omega, \mathcal{F})$  se llama **espacio medible**. Los elementos de  $\mathcal{F}$  se llaman conjuntos medibles.

**Ejemplo 1.2. ( $\sigma$ -álgebra generada)** Sean  $\Omega \neq \emptyset$  y  $L$  una colección de subconjuntos de  $\Omega$ . Sea  $\mathcal{M} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra sobre } \Omega \text{ que contiene a } L\}$ . Entonces  $\sigma(L) := \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{M}} \mathcal{F}$  es la menor  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$  que contiene a  $L$ . Esta  $\sigma$ -álgebra se llama  $\sigma$ -álgebra generada por  $L$ .

A partir de una colección  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $\Omega$ , se puede construir la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a  $\mathcal{C}$ , que solamente será la intersección de todas las  $\sigma$ -álgebras que contienen  $\mathcal{C}$ . Un caso particularmente importante de espacio medible se tiene cuando  $(\Omega, \tau)$  es un espacio topológico y se construye  $\sigma(\tau) = \mathcal{B}(\Omega)$  (la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\Omega$ ).

**Ejemplo 1.3.** Sea  $(\mathbb{R}, u)$  el espacio topológico real con la topología usual. Entonces la  $\sigma$ -álgebra por los abiertos de la forma  $(a, b)$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.4.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible. Una **medida de probabilidad** sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una función

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

que satisface las siguientes condiciones:

- (i) Para todo  $A \in \mathcal{F}$ ,  $P(A) \geq 0$
- (ii)  $P(\Omega) = 1$
- (iii) Si  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  disyuntos, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

A la tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se le suele llamar **espacio de probabilidad**. Se dice que  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un espacio de probabilidad *completo* si para cada  $B \subset A$  con  $A \in \mathcal{F}$  y  $\mu(A) = 0$ , entonces  $B \in \mathcal{F}$ . El siguiente resultado permite establecer algunas propiedades básicas de las medidas de probabilidad.

**Proposición 1.5.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Entonces,

- (i) Si  $A \subset B$ , entonces  $P(A) \leq P(B)$
- (ii) Si  $A_1, A_2, \dots$  es una sucesión de conjuntos, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- (iii) Si  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , entonces

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

- (iv) Si  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  y  $P(A_1)$ , entonces

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

*Demostración.* Véase [27] Proposición 1.1. □

Si  $P$  es una medida de probabilidad, entonces podemos definir la **función de distribución acumulada** de  $P$  como

$$F(x) = P((-\infty, x]) \tag{1.1}$$

**Proposición 1.6.** Sea  $F$  una función de distribución acumulada sobre  $\mathbb{R}$ . Entonces

- (i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- (iii)  $F$  es una función no decreciente
- (iv)  $F$  es una función continua a derecha

*Demostración.* Véase [27] Proposición 1.2. □

**Definición 1.7.** Sean  $(\Omega, \mathcal{F})$  y  $(\Lambda, \mathcal{G})$  dos espacios medibles y  $X : \Omega \rightarrow \Lambda$  una función. Se dice que  $X$  es medible si, y sólo si,  $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ , para todo  $A \in \mathcal{G}$ .

Si  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un espacio de probabilidad y  $(\Lambda, \mathcal{G}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  una función medible, a menudo, dichas funciones se les conoce como *variables aleatorias*. Se puede verificar que la suma, producto y cociente de variables aleatorias son nuevamente variables aleatorias. Si  $X$  es una variable aleatoria, podemos crear  $\sigma(X)$ , que denota la  $\sigma$ -álgebra generada por los elementos de la forma  $X^{-1}(A)$  donde  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Esta  $\sigma$ -álgebra nos resultará de interés más adelante cuando aclaremos el concepto de filtración. Si  $X_1, X_2, \dots$  son variables aleatorias, entonces  $\sup\{X_n\}$ ,  $\inf\{X_n\}$ ,  $\limsup\{X_n\}$ ,  $\liminf\{X_n\}$  son variables aleatorias.

**Definición 1.8.** *Se dice que  $\varphi$  es una variable aleatoria simple si es una combinación lineal de funciones indicadoras de conjuntos medibles, es decir,*

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^k a_i 1_{A_i}(\omega) \quad \text{para } A_i \in \mathcal{F}$$

**Teorema 1.9.** *Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa. Entonces existe una sucesión creciente de variables aleatorias simples  $\{\varphi_n\}$  no negativas tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = X$ .*

*Demostración.* Véase [26] Teorema 5.1.1. □

Un concepto importante en teoría de la medida es la integración de variables aleatorias con respecto a una medida de probabilidad  $P$ . La definición se hace en varios pasos. Primero, se define la integral para variables aleatorias simples no negativas, luego para variables aleatorias no negativas y finalmente para variables aleatorias arbitrarias.

**Definición 1.10.** (i) *Si  $\varphi$  es una variable aleatoria simple no negativa, entonces*

$$\int_{\Omega} \varphi dP := \sum_{i=1}^k a_i P(A_i)$$

(ii) *Si  $X$  es una variable aleatoria no negativa, usando el teorema 1.9, se define*

$$\int_{\Omega} X dP := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n dP$$

(iii) *Si  $X$  es una variable aleatoria,  $X = X^+ - X^-$ , donde  $X^+ = \max\{X, 0\}$  y  $X^- = \max\{-X, 0\}$  son variables aleatorias no negativas. Entonces*

$$\int_{\Omega} X dP := \int_{\Omega} X^+ dP - \int_{\Omega} X^- dP$$

Se dice que  $X$  es *integrable*, o  $X \in L^1$  si  $\int_{\Omega} |X| dP < \infty$ . Se dice que  $X$  es *cuadrado integrable*, o  $X \in L^2$  si  $\int_{\Omega} |X|^2 dP < \infty$ .

**Definición 1.11** (Valor esperado). 1. *En probabilidad la integral*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP$$

*es llamada valor esperado o esperanza matemática.*

2. Sea  $L^2(\Omega)$  el espacio de las variables aleatorias cuadrado integrables dotado con la siguiente norma:

$$\|X\|_{L^2} := \left(E(|Y|^2)\right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |X|^2 dP\right)^{1/2}$$

En el contexto de teoría de la medida, hay unos resultados que son de bastante utilidad a la hora de hablar de convergencia de variables aleatorias. El siguiente teorema resume los resultados más importantes en el contexto de integración.

**Teorema 1.12.** Sean  $X_1, X_2, \dots$  es una sucesión de variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , entonces

(i) (**Teorema de la Convergencia Monótona**) Si  $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$  y  $X_n \uparrow X$ , entonces

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} X_n dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n dP$$

(ii) (**Lema de Fatou**) Si  $X_n \geq 0$  para todo  $n$ , entonces

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n dP \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n dP$$

(iii) (**Teorema de la Convergencia Dominada**) Si  $X_n \rightarrow X$  y existe una variable aleatoria  $Y$  integrable tal que  $|X_n| \leq Y$ , entonces

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} X_n dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n dP$$

*Demostración.* Véase [26] Teoremas 5.3.1., 5.3.2. y 5.3.3. □

## 1.2. Esperanza Condicional

**Teorema 1.13.** Sea  $X$  una variable aleatoria, definida sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , cuyo valor esperado existe, y con valores en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  y sea  $\mathcal{G}$  sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ . Entonces existe una variable aleatoria  $Y$  tal que:

1.  $Y$  es  $\mathcal{G}$ -medible
2.  $E(Y1_B) = E(X1_B)$ , para todo  $B \in \mathcal{G}$

$Y$  es única con probabilidad 1, es decir, si existe otra variable aleatoria  $Z$  que satisfaga las condiciones 1 y 2 entonces  $P(Y = Z) = 1$ .

*Demostración.* Véase [26] Página 340 □

A esta variable aleatoria  $Y$  se le suele llamar la esperanza de  $X$  condicionada a la sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$  y se denota como  $Y = E(X|\mathcal{G})$ . Notemos que la esperanza condicional cumple propiedades que tiene el valor esperado.

**Proposición 1.14.** Sean  $X, Y, X_1, X_2, \dots$ , variables aleatorias integrables sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y  $\mathcal{G}$  una sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ .

- i) Si  $X = c$  c.s.,  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $E(X|\mathcal{G}) = c$  c.s.
- ii) Si  $X$  es  $\mathcal{G}$ -medible entonces  $E(X|\mathcal{G}) = X$
- iii) Si  $X \leq Y$  c.s., entonces  $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$  c.s.
- iv) Si  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces

$$E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G}), \quad \text{c.s.}$$

- v)  $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$
- vi)  $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_1) = E(E(X|\mathcal{G}_2|\mathcal{G}_1))$  c.s. donde  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  son sub- $\sigma$ -álgebras con  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ .

*Demostración.* i) Como  $X = c$  es una constante, entonces  $E(X|\mathcal{G}) = c$  es medible. Por otro lado,  $E(X|\mathcal{G}) = c$ , así

$$\int_{A \in \mathcal{G}} cdP = \int_{A \in \mathcal{G}} XdP$$

- ii) Debido a que  $X$  es  $\mathcal{G}$ -medible y  $E(X1_A) = E(X)1_A$  para todo  $A \in \mathcal{G}$ , el resultado se tiene.
- iii) Si  $X \leq Y$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_A XdP &\leq \int_A YdP \\ \int_A E(X|\mathcal{G})dP &\leq \int_A E(Y|\mathcal{G})dP \quad \forall A \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

entonces por la unicidad del valor esperado condicional  $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$

- iv) Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_A E(aX + bY|\mathcal{G})dP &= \int_A (aX + bY)dP \\ &= a \int_A XdP + b \int_A YdP \\ &= a \int_A E(X|\mathcal{G})dP + b \int_A E(Y|\mathcal{G})dP \\ &= \int_A (aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G}))dP \end{aligned}$$

por unicidad del valor esperado condicional  $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$ .

- v) Como  $\Omega \in \mathcal{G}$ , entonces

$$E(X) = \int_{\Omega} XdP = \int_{\Omega} E(X|\mathcal{G})dP = E(E(X|\mathcal{G}))$$

vi) Dado que  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$  y  $E(X|\mathcal{G}_1)$  es  $\mathcal{G}_1$  medible, también  $\mathcal{G}_2$  medible. Por tanto, por la proposición anterior  $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_1)$ . La otra igualdad se mantiene debido a que  $E(X|\mathcal{G}_1)$  es  $\mathcal{G}_1$ -medible y para todo  $A \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ , tenemos

$$E(E(X|\mathcal{G}_1)1_A) = E(X1_A) = E(E(X|\mathcal{G}_2)1_A)$$

□

### 1.3. Procesos estocásticos y Martingalas

**Definición 1.15.** *Un proceso estocástico es una familia  $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$  de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad común  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con valores en un espacio medible  $(S, \mathcal{S})$  llamado **espacio de estados**. El conjunto  $\mathcal{T}$  se llama **dominio de definición del proceso**.*

Un caso sencillo y que es de interés en este trabajo, es cuando se toma como  $\mathcal{T}$  un subconjunto de los números reales, y estos números son interpretados como tiempos. Un proceso estocástico puede considerarse como una función de dos variables

$$\begin{aligned} X : \sigma \times \mathcal{T} &\rightarrow S \\ (\omega, t) &\mapsto X(\omega, t) = X_t(\omega) \end{aligned}$$

Si se fija cada valor  $t \in \mathcal{T}$ , la función  $\omega \mapsto X_t(\omega)$  se denomina una *trayectoria* del proceso.

Si  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un espacio de probabilidad, una *filtración* es una colección de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ , tal que  $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$ , cuando  $n \leq m$ ,  $n, m \in I$ . En particular, la *filtración natural* de un proceso estocástico  $\{X_t\}$  es la sucesión de  $\sigma$ -álgebras definidas por  $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s; 0 \leq s \leq t\}$  (la menor  $\sigma$ -álgebra que hace que las variables  $X_s$ ,  $0 \leq s \leq t$  sean medibles).

Para lo que sigue, sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  un espacio de probabilidad completo con una filtración  $\mathbb{F}$  que satisface las condiciones usuales, es decir,

1.  $\mathcal{F}_s = \bigcap_{t>s} \mathcal{F}_t$
2. Si  $A \in \mathcal{F}$  y  $P(A) = 0$ , entonces  $A \in \mathcal{F}_0$ .

A continuación enunciamos algunas definiciones importantes.

**Definición 1.16.** *Una variable aleatoria  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  se dice un **tiempo de paro** si el evento  $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  para cada  $t$ ,  $0 \leq t \leq \infty$ .*

**Definición 1.17.** *Un proceso estocástico  $X$  se dice **adaptado** a la filtración  $\mathbb{F}$  si  $X_t \in \mathcal{F}_t$  (esto es,  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible) para cada  $t$ ,  $t \in I$*

**Definición 1.18.** *Un proceso estocástico  $X$  se dice **cadlag** si tiene trayectorias continuas a derecha c.s. con límites a izquierda.*

A continuación se presentan algunos resultados de la teoría de martingalas de tiempo continuo.

**Definición 1.19.** Un proceso estocástico adaptado de valor real  $X = (X_t)_{0 \leq t < \infty}$  es llamado una **martingala** (resp. **submartingala**) con respecto a la filtración  $\mathbb{F}$  si

- (i)  $E(|X_t|) < \infty$ , esto es,  $X_t \in L^1(dP)$
- (ii) Si  $s \leq t$ , entonces  $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$  (resp.  $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ ) c.s.

### 1.3.1. Desigualdades de Doob

**Teorema 1.20. (Primera desigualdad de Doob)** Sea  $X = \{X_t, \mathbb{F}, t \in T\}$  una submartingala no negativa, continua por la derecha en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y sea  $\lambda > 0$ .

1. Si  $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$ , para cada  $n \geq 0$

$$\lambda P\left(\left\{w : \max_{0 \leq j \leq n} X_j(w) \geq \lambda\right\}\right) \leq \int_{\{w : \max_{0 \leq j \leq n} X_j(w) \geq \lambda\}} X_n dP \leq E(|X_n|) \quad (1.2)$$

2. Si  $T = [0, \infty)$ , entonces para cada intervalo  $I = [a, b] \cap T$  se cumple que

$$P\left(\left\{\sup_{t \in I} X_t(w) \geq \lambda\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} E(|X_b|) \quad (1.3)$$

*Demostración.* Véase [4] teorema 3.1.1 □

**Lema 1.21.** Si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias no negativas que satisfacen la siguiente relación: para todo  $\lambda > 0$

$$P(\{w : Y(w) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{w : Y(w) \geq \lambda\}} X dP$$

entonces, para  $p > 1$ ,

$$E(Y^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(X^p); \quad (1.4)$$

Si  $E(X \log^+ X) < \infty$ , para  $p = 1$ ,

$$E(Y) \leq \frac{e}{e-1} + \left(\frac{e}{e-1}\right) E(X \log^+ X) \quad (1.5)$$

donde  $\log^+ x = \log x$  si  $x \geq 1$  y  $\log^+ x = 0$  si  $x \leq 1$ .

*Demostración.* Sea  $\phi$  una función de  $\lambda$  monótona creciente, definida para  $\lambda \geq 0$ , con  $\phi(0) = 0$ , entonces

$$E(\phi(Y)) = - \int_0^\infty \phi(\lambda) dP(\{w : Y(w) \geq \lambda\}) \quad (1.6)$$

$$\geq \int_0^\infty P(\{w : Y(w) \geq \lambda\}) d\phi(\lambda) \quad (1.7)$$

$$\geq \int_0^\infty \frac{d\phi(\lambda)}{\lambda} \int_{\{w : Y(w) \geq \lambda\}} X dP = \int_0^Y (w) \frac{d\phi(\lambda)}{\lambda} \quad (1.8)$$

la desigualdad (1.7) se obtiene por integración por partes; el paso de (1.7) y (1.8) se tiene por la hipótesis y la última identidad por el teorema de Fubini. Para la desigualdad (1.5), si  $\phi(\lambda) = \lambda^p$  para  $p > 1$ , se tiene al integrar y al aplicar la desigualdad de Hölder que

$$E(Y^p) \leq \frac{p}{p-1} E(XY^{p-1}) \leq \frac{p}{p-1} (E(X^p))^{1/p} (E(Y^p))^{1-1/p}$$

con lo que se obtiene el primer resultado. Para la desigualdad (1.5) se define  $\phi(\lambda) := \lambda$ . Si  $\lambda \geq 1$  y  $\phi(\lambda) = 0$ , con  $\lambda < 1$  y de (1.7) y (1.8) se tiene:

$$E(Y - 1) \leq E(\phi(Y)) \leq \int_{\{w: Y(w) \geq 1\}} X \log Y dP$$

y puesto que

$$a \log b \leq a \log^+ a + \frac{b}{e}, \quad \text{para } a \geq 0, b > 0$$

se tiene la desigualdad. □

**Teorema 1.22.** (*Segunda desigualdad de Doob*).

Si  $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}_t$  es una martingala  $p$ -integrable, con  $p > 1$ , entonces

$$E \left( \sup_{t \in [a, b]} |X_t|^p \right) \leq \left( \frac{p}{1-p} \right)^p E(|X_b|^p) \quad (1.9)$$

para  $p = 1$  se tiene que

$$E \left( \sup_{t \in [a, b]} |X_t|^p \right) \leq \left( \frac{e}{e-1} \right) + \left( \frac{e}{e-1} \right) E(X_b \log X_b) \quad (1.10)$$

en particular,

$$\| \sup_{n \geq 0} X_n \|_p \leq \frac{r}{r-1} \sup_{n \geq 0} \|X_n\|_p$$

*Demostración.* De la primera desigualdad de Doob, del lema anterior se cumple las desigualdades (1.9) y (1.10). □

## 1.4. Movimiento Browniano

El fenómeno natural que ahora se conoce como movimiento Browniano tiene su primer registro en 1828, cuando el botánico R. Brown reportó en una revista científica que el movimiento de un grano de polen suspendido en un vaso con cierta sustancia y vistos a través de un microscopio, era una trayectoria continua, irregular e inexplicable. Después de varios trabajos, diversas controversias y discusiones, se concluyó que este fenómeno ocurría por las múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con los granos de polen. En 1905, el trabajo de A. Einstein contribuyó de forma contundente al desarrollo de tal área, ya que pudo observar que el movimiento de una partícula en un instante de tiempo  $t$ , se podía modelar por medio de una distribución gaussiana. El objetivo de esta sección es presentar la formulación matemática dada por N. Wiener del movimiento Browniano



en el año 1923, mostrar algunas de las propiedades que este proceso estocástico posee, así como algunas definiciones equivalentes.

**Definición 1.23.** Sea  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico en tiempo continuo, definido en un espacio de probabilidad completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  que cumpla las siguientes condiciones:

- $B_0 = 0$  c.s.
- Para todo  $0 \leq s < t$ ,  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ , es decir, los incrementos están normalmente distribuidos.
- Para todo  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias  $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  son mutuamente independientes.
- $\{B_t\}_{t \geq 0}$  tiene trayectorias continuas con probabilidad 1.

A este proceso estocástico se le denomina movimiento Browniano estándar.

La media y la función de autocovarianza se pueden calcular de manera sencilla: si  $s < t$ ,

$$\begin{aligned} E(B_t) &= 0 \\ \gamma(s, t) &= E(B_s B_t) \\ &= E(B_s(B_t - B_s + B_s)) \\ &= E(B_s(B_t - B_s)) + E(B_s^2) \\ &= s \end{aligned}$$

Se puede definir la *función de probabilidad de transición* del movimiento Browniano como sigue

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(x - y)^2}{2t} \right\} \quad (1.11)$$

En particular, la probabilidad de que un movimiento Browniano que inicia en  $x$  se encuentre en un conjunto  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  después de  $t$  unidades de tiempo es

$$p(t, x, A) = \int_A p(t, x, y) dy$$

Así como se ha definido la función de probabilidad de transición, se puede verificar el siguiente resultado:

**Teorema 1.24.** Para cualquier  $t, s > 0$  se tiene

$$p(t + s, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, x, u) p(s, u, y) du \quad (1.12)$$

A este resultado se le conoce como **ecuación de Chapman-Kolmogorov**

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
p(t, x, u)p(s, u, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp \left\{ -\frac{(x-u)^2}{2t} - \frac{(y-u)^2}{2s} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{ts}} \exp \left\{ -\frac{(x^2 - 2xu + u^2)}{2t} - \frac{(y^2 - 2yu + u^2)}{2s} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{ts}} \exp \left\{ -\frac{(sx^2 - 2xsu + su^2 + ty^2 - 2tyu + tu^2)}{2ts} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{ts}} \exp \left\{ -\frac{(t+s)u^2 - 2u(ty + sx)}{2ts} - \frac{(sx^2 + ty^2)}{2ts} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{ts}} \exp \left\{ -\frac{(t+s)}{2ts} \left[ u^2 - 2u \left( \frac{ty + sx}{t+s} \right) + \left( \frac{ty + sx}{t+s} \right)^2 \right] \right\} \\
&\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2ts} \left[ sx^2 + ty^2 - \frac{(ty + sx)^2}{(t+s)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
p(t, x, u)p(s, u, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \frac{ts}{t+s} \right)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \left( \frac{ts}{t+s} \right)} \left[ u - \left( \frac{ty + sx}{t+s} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2ts} \left[ \frac{tsx^2 + s^2x^2 + t^2y^2 + tsy^2 - t^2y^2 - 2tsxy - s^2x^2}{(t+s)} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \frac{ts}{t+s} \right)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \left( \frac{ts}{t+s} \right)} \left[ u - \left( \frac{ty + sx}{t+s} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t+s)} [x^2 + y^2 - 2xy] \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \frac{ts}{t+s} \right)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \left( \frac{ts}{t+s} \right)} \left[ u - \left( \frac{ty + sx}{t+s} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2(t+s)} \right\}
\end{aligned}$$

Integrando, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} p(t, x, u)p(s, u, y) du &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2(t+s)} \right\} \\
&= p(t+s, x, y)
\end{aligned}$$

puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \frac{ts}{t+s} \right)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \left( \frac{ts}{t+s} \right)} \left[ u - \left( \frac{ty + sx}{t+s} \right) \right]^2 \right\} du = 1$$

□

Notemos que para cualesquiera tiempos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$  y para cualquier subconjunto  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned}
& P(B_{t_{n+1}} \in A | B_{t_1} = x_1, \dots, B_{t_n} = x_n) \\
&= \frac{p(t_1, 0, x_1)p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)p(t_{n+1} - t_n, x_n, A)}{p(t_1, 0, x_1)p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)} \\
&= p(t_{n+1} - t_n, x_n, A) \\
&= \frac{p(t_{n+1} - t_n, x_n, A)p(t_n, 0, x_n)}{p(t_n, 0, x_n)} \\
&= P(B_{t_{n+1}} \in A | B_{t_n} = x_n)
\end{aligned}$$

Con esta propiedad, se puede concluir que el movimiento Browniano es un proceso de Markov.

**Proposición 1.25.** *El movimiento Browniano es una martingala respecto a su filtración canónica  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$ .*

*Demostración.* El movimiento Browniano es un proceso adaptado a su filtración natural y cada variable aleatoria del proceso es integrable. Por otro lado, para cualquier  $0 \leq s < t$ ,

$$\begin{aligned}
E(B_t | \mathcal{F}_s) &= E(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s) \\
&= E(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) + E(B_s | \mathcal{F}_s) \\
&= E(B_t - B_s) + B_s \\
&= B_s
\end{aligned}$$

□

Otra propiedad importante que tiene el movimiento Browniano es que  $Y_t = B_t^2 - t$  es una martingala.

$$\begin{aligned}
E(Y_t | \mathcal{F}_s) &= E(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s) \\
&= E((B_t - B_s + B_s)^2 - t | \mathcal{F}_s) \\
&= E((B_t - B_s)^2 + 2(B_t - B_s)B_s + B_s^2 - t | \mathcal{F}_s) \\
&= E((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) + 2E((B_t - B_s)B_s | \mathcal{F}_s) + E(B_s^2 - t | \mathcal{F}_s) \\
&= E((B_t - B_s)^2) + 2B_sE((B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) + B_s^2 - t \\
&= t - s + 2B_sE(B_t - B_s) + B_s^2 - t \\
&= B_s^2 - s \\
&= Y_s
\end{aligned}$$

Existe un resultado que caracteriza al movimiento Browniano en términos de martingalas y es debido a Lévy:

**Teorema 1.26.** *Un proceso estocástico  $\{X_t; t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano si, y sólo si, tiene trayectorias continuas,  $X_0 = 0$  y los procesos  $X_t$  y  $Y_t = X_t^2 - t$  son martingalas.*

*Demostración.* Véase [18] Capítulo 1 Teorema 4.4 □

A pesar de las buenas propiedades con las que cuenta el movimiento Browniano, este no es diferenciable en ningún punto casi seguramente.

**Teorema 1.27.** *Sea  $t_0 \geq 0$  fijo. La probabilidad de que el movimiento browniano  $\{B_t\}$  no sea diferenciable en  $t_0$  es uno.*

*Demostración.* Dado que  $B_{t+t_0} - B_{t_0}$  es un movimiento Browniano, es suficiente probar la no diferenciableidad de  $B_t$  en  $t = 0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se define

$$A_n = \left\{ \left| \frac{1}{t} B_t \right| > n, \text{ para algún } t \in [0, n^{-2}] \right\}$$

Notemos que  $A_n \supseteq A_{n+1}$  para todo  $n$ , luego

$$\begin{aligned} P(A_n) &\geq P\left(\left|\frac{1}{n^{-4}} B_{n^{-4}}\right| > n\right) \\ &= P\left(|B_{n^{-4}}| > \frac{1}{n^3}\right) \\ &= P\left(|n^2 B_{n^{-4}}| > \frac{1}{n}\right) \\ &= P\left(|B_1| > \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Aquí se ha usado el hecho de que  $X_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$  es también un movimiento Browniano. Luego  $P(A_n) = 1$  para todo  $n$ , es decir, para cada  $n$ , existe un valor  $t \in [0, n^{-2}]$  tal que  $\left|\frac{1}{t} B_t\right| > n$ . Por lo tanto  $B_t$  no es diferenciable en  $t = 0$ . □

**Teorema 1.28** (Variación cuadrática). *Sea  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un Movimiento Browniano definido en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Sean  $0 \leq a < b$  y supongamos que*

$$P^n := \{a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{m_n}^n = b\}$$

*son particiones de  $[a, b]$  tales que  $|P^n| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} [B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n)]^2 = b - a.$$

*Demostración.* Consideremos:

$$Q_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} [B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n)]^2$$

entonces

$$Q_n - (b - a) = \sum_{k=0}^{m_n-1} ([B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n)]^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n))$$

y por lo tanto

$$E[(Q_n - (b-a))^2] = \sum_{k,j=0}^{m_n-1} E[(B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n) \cdot (B(t_{j+1}^n) - B(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)],$$

Dado que el Movimiento Browniano tiene incrementos independientes y estacionarios, tenemos que  $B(t_{k+1}^n - B(t_k^n)) \sim N(0, t_{k+1}^n - t_k^n)$ . Entonces, si llamamos

$$Y_k = Y_k^n := \frac{B(t_{k+1}^n - B(t_k^n))}{\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}},$$

tenemos que:

$$E[(Q_n - (b-a))^2] = \sum_{k=0}^{m_n-1} E[(Y_k^2 - 1)^2](t_{k+1}^n - t_k^n)^2$$

Como  $Y_k \sim N(0, 1)$ , obtenemos

$$E[(Q_n - (b-a))^2] \leq C \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \leq C|P^n|(b-a) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

□

---

## Integración Estocástica

---

El cálculo estocástico se ha convertido en una de las herramientas centrales en Matemática Financiera moderna. Sus inicios se remontan a 1900 con la tesis doctoral de L. Bachelier “*Théorie de la speculation*” en la que se modelan los precios de las acciones con el movimiento Browniano, después en 1945 K. Itô desarrolló las ideas del análisis estocástico con una serie de artículos donde mencionaba la integral estocástica y las ecuaciones integrales estocásticas. Casi cincuenta años después, F. Black y M. Scholes ganaron el Premio Nobel utilizando el cálculo estocástico y la tasación del arbitraje para derivar la famosa ecuación de Black-Scholes. En este capítulo se pretende dar una introducción al cálculo estocástico a través del desarrollo de la integral estocástica.

### 2.1. Integración estocástica

Se quiere definir la integral de Itô de un proceso  $X$  respecto del movimiento Browniano, es decir, una integral de la forma

$$\int_0^T X_t dB_t$$

Daremos la definición de integral estocástica en varios pasos, primero para procesos simples, luego por aproximación para procesos más generales.

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad, y un movimiento Browniano estándar  $\{B_t\}$ , junto con su filtración natural  $\mathbb{F} = \{F_t\}$ . Supondremos que  $\{X_t\}$  es un proceso estocástico con espacio de parámetros  $[0, T]$ ,  $T > 0$  fijo, y que es  $\{\mathcal{F}_t\}$  adaptado.

**Definición 2.1.** *Sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  una partición finita del intervalo  $[0, T]$ . Un proceso estocástico simple es un proceso de la forma*

$$X_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k(\omega) \chi_{[t_k, t_{k+1})}(t) \quad (2.1)$$

donde  $\{\xi_k\}$  es una colección de variables aleatorias cuadrado integrables ( $E(|\xi_k|^2) < \infty$  para todo  $k$ ) y adaptadas a la filtración  $\mathbb{F}$ .

De forma intuitiva, un proceso simple puede ser entendido como una función escalonada en el intervalo  $[0, T]$ , que en cada escalón toma valores aleatorios. Se denota con  $S$  al espacio de procesos estocásticos simples adaptados a la filtración  $\mathbb{F}$  y sea  $\mathfrak{N}$  el espacio de procesos estocásticos adaptados a la filtración  $\mathbb{F}$ . Adicionalmente, se denotará por  $L^2(\Omega)$  al conjunto de variables aleatorias  $X$  cuadrado integrables. Este conjunto determina un espacio vectorial normado, con norma

$$\|Y\|_{L^2} = \left( \int_{\Omega} |Y|^2 dP \right)^{1/2}$$

Notemos que  $S \subset \mathfrak{N} \subset L^2(\Omega)$ , por lo tanto los procesos estocásticos en  $S$  y  $\mathfrak{N}$  heredan la misma norma.

**Definición 2.2.** *La integral estocástica para un proceso simple  $X$  de la forma (2.1), respecto del movimiento Browniano, denotada por  $I(t, X)$  con  $t \in [0, T]$ , se define como la variable aleatoria*

$$I(t, X) = \int_0^t X_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + \xi_n (B_t - B_{t_n})$$

De la definición anterior, se puede mostrar que, fijando  $t$ ,  $I(t, \cdot) : S \rightarrow L^2(\Omega)$  es lineal. La siguiente proposición es importante para la extensión de la integral a una clase más amplia de procesos.

**Proposición 2.3** (Isometría de Itô). *Sea  $X \in S$ . Entonces el operador  $I(t, \cdot) : S \rightarrow L^2(\Omega)$  es isométrico, es decir,*

$$\|I(t, X)\|_{L^2(\Omega)} = \|X\|_{L^2([0, t] \times \Omega)}.$$

*Demostración.* Véase [22] Proposición 2.64 □

## 2.2. Algunas propiedades de las integrales de Itô

**Teorema 2.4.** *Sean  $f, g \in S$ ,  $0 \leq W \leq U \leq T$ . Entonces,*

$$(i) \int_W^T f dB_t = \int_W^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$$

$$(ii) \int_W^T (af + bg) dB_t = a \int_W^T f dB_t + b \int_W^T g dB_t$$

$$(iii) E \left( \int_W^T g dB_t \right) = 0$$

*Demostración.* Supongamos que  $f$  y  $g$  son procesos simples, con la misma partición, ya que siempre se puede tomar una partición más fina para el intervalo  $[0, T]$ . Supongamos que

$$f(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) I_{(t_j, t_{j+1}]}(t) \quad g(t, \omega) = \sum_j \tilde{e}_j(\omega) I_{(t_j, t_{j+1}]}(t).$$

Entonces,

(i) Para la primera propiedad, notemos que

$$\begin{aligned} \int_S^T f(t, \omega) dB_t &= \sum_j e_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \\ &= \sum_{j \geq 0, t_j \leq U} e_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \sum_{j \geq 0, t_j \leq U} e_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \\ &= \int_S^U f(t, \omega) dB_t + \int_U^T f(t, \omega) dB_t. \end{aligned}$$

(ii) Para la linealidad,

$$\begin{aligned} \int_S^T (af + bg) dB_t &= \sum_j ae_j [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] + \sum_j b\tilde{e}_j [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] \\ &= a \int_S^T f dB_t + b \int_S^T g dB_t \end{aligned}$$

(iii) Finalmente, para el valor esperado,

$$\begin{aligned} E \left( \int_S^T g(t, \omega) dB_t \right) &= E \left( \sum_j e_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right) \\ &= \sum_j E(e_j) E(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las condiciones (i), (ii) y (iii) se satisfacen para procesos simples.  $\square$

**Proposición 2.5.** Si  $X \in S$ , entonces  $I(t, X)$  es una martingala con respecto a la filtración natural  $\mathbb{F}$ .

*Demostración.* Sea  $s < t$  y además, supongamos que  $t_j \leq s \leq t_{j+1}$  y  $t_l \leq t \leq t_{l+1}$  con  $j < l$ . Entonces,

$$\begin{aligned} E(I(t, X) | \mathcal{F}_s) &= E \left( \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + \xi_n (B_t - B_{t_n}) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= E \left( \sum_{k=0}^{j-1} \xi_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \mid \mathcal{F}_s \right) + E \left( \xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &\quad + E \left( \sum_{k=j+1}^{n-1} \xi_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \mid \mathcal{F}_s \right) + E \left( \xi_n (B_t - B_{t_n}) \mid \mathcal{F}_s \right) \end{aligned}$$



Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 E(I(t, X) | \mathcal{F}_s) &= \sum_{k=0}^{j-1} E(\xi_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) | \mathcal{F}_s) + E(\xi_j B_{t_{j+1}} | \mathcal{F}_s) - E(\xi_j B_{t_j} | \mathcal{F}_s) \\
 &\quad + \sum_{k=j+1}^{n-1} E(\xi_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) | \mathcal{F}_s) + E(E(\xi_n(B_t - B_{t_n}) | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 E(I(t, X) | \mathcal{F}_s) &= \sum_{k=0}^{j-1} \xi_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + \xi_j E(B_{t_{j+1}} | \mathcal{F}_s) - \xi_j E(B_{t_j} | \mathcal{F}_s) \\
 &\quad + E(\xi_n E((B_t - B_{t_n}) | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) \\
 &= \sum_{k=0}^{j-1} \xi_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + \xi_j(B_s - B_{t_j}) \\
 &= I(s, X)
 \end{aligned}$$

□

Ahora, se quiere extender la integral estocástica a la clase de procesos estocásticos en  $\mathfrak{N}$ . Notemos que  $\mathfrak{N}$  es la clausura del conjunto de procesos estocásticos simples  $S$  en  $L^2(\Omega)$ , es decir, para todo proceso  $X \in \mathfrak{N}$  existe una sucesión de procesos simples  $(X^n) \subset S$  tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X^n\|_{L^2} = 0$$

Usando la isometría de Itô es sencillo comprobar que la sucesión  $\{I(t, X^k)\}_{k \geq 1}$  es una sucesión de Cauchy en el espacio  $L^2(\Omega)$ .

**Definición 2.6.** Sea  $X \in \mathfrak{N}$ , y sea  $(X^n)$  una sucesión de procesos en  $S$  que converge a  $X$ . Se define la integral estocástica del proceso  $X$  como

$$I(t, X) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(t, X^n),$$

en donde el límite es tomado en  $L^2(\Omega)$ , es decir, se trata de la convergencia en media cuadrática de una sucesión de variables aleatorias.

Usando el hecho de que  $L^2(\Omega)$  es completo, entonces  $I(t, X)$  está bien definida, es decir, la integral existe.

**Proposición 2.7** (Isometría de Itô). Para cualquier proceso  $X$  en  $\mathfrak{N}$  se cumple

$$\|I(t, X)\|_{L^2(\Omega)} = \|X\|_{L^2([0, t] \times \Omega)}$$

*Demostración.* Sea  $X \in \mathfrak{N}$  y sea  $(X^n)$  una sucesión en  $S$  tal que  $\|X_t - X^n\|_{L^2([0,t] \times \Omega)} \rightarrow 0$ . Esta convergencia y la desigualdad triangular implican que

$$\|X^n\|_{L^2} \rightarrow \|X\|_{L^2}$$

Análogamente, como  $\|I(t, X) - I(t, X^n)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$  se tiene que

$$\|I(t, X^n)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|I(t, X)\|_{L^2(\Omega)}$$

Como

$$\|I(t, X^n)\|_{L^2(\Omega)} = \|X^n\|_{L^2(\Omega)}$$

entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|I(t, X^n)\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|X^n\|_{L^2([0,t] \times \Omega)}$$

□

**Proposición 2.8.** Si  $X \in \mathfrak{N}$ , entonces  $E(I(t, X)) = 0$ .

*Demostración.* Usando la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (E(I(t, X) - I(t, X^n)))^2 \\ &\leq E\left((I(t, X) - I(t, X^n))^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E(I(t, X)) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(I(t, X^n)) = 0$$

□

Las propiedades dadas en el teorema 2.4 y en la proposición 2.5 se extienden a la integral de Itô para procesos en  $\mathfrak{N}$ .

**Ejemplo 2.9.** Se desea calcular

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t \quad (2.2)$$

Sea

$$\Phi_n(t, \omega) := \sum_j B_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

Notemos que  $\Phi_n$  es un proceso simple, donde  $B_j := B_{t_j}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 E\left(\int_0^t (\Phi_n - B_s)^2 ds\right) &= E\left(\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds\right) \\
 &= \sum_j E\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds\right) \\
 &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} E(B_j - B_s)^2 ds \\
 &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds \\
 &\leq \frac{1}{2} \delta_n \cdot t \xrightarrow{\delta_n \rightarrow 0} 0,
 \end{aligned}$$

donde  $\delta_n = \sup\{t_{j+1} - t_j, j = 1, \dots, n\}$ . Por lo tanto,

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \Phi_n(s) dB_s. \quad (2.3)$$

Ahora se demostrará que

$$E\left(\left(\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t - \sum_j B_j(B_{j+1} - B_j)\right)^2\right) \rightarrow 0.$$

Cuando  $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \rightarrow 0$ , pues en tal caso,

$$\lim_{\Delta B_j \rightarrow 0} \sum_j B_j \Delta B_j = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

pero, por definición

$$\lim_{\Delta B_j \rightarrow 0} \sum_j B_j \Delta B_j = \int_0^t B_s dB_s$$

entonces,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
& E \left( \left( \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t - \sum_j B_j \Delta B_j \right)^2 \right) \\
&= E \left( \frac{1}{4} B_t^4 - \frac{1}{4} t^2 - \left( \sum_j B_j \Delta B_j \right)^2 - B_t^2 \sum_j B_j \Delta B_j - \frac{1}{2} t B_t^2 + t \sum_j B_j \Delta B_j \right) \\
&= \frac{3}{4} t^2 - \frac{1}{4} t^2 + E \left( \sum_j B_j \Delta B_j \right)^2 - E \left( B_t^2 \sum_j B_j \Delta B_j \right) - \frac{1}{2} t^2,
\end{aligned}$$

pues  $E(B_t^4) = 3t^2$  y  $E(B_t^2) = t$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned}
E \left( \sum_j B_j \Delta B_j \right)^2 &= \sum_{ij} E(B_i B_j \Delta B_i \Delta B_j) \\
&= \sum_i E(B_i^2 (\Delta B_i)^2) \\
&= \sum_i E(B_{t_i}^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) \\
&= \sum_i E(B_{t_i}^2) E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \\
&= \sum_i (t_i (t_i - t_{i-1})) = \sum_i t_i \Delta t_i.
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
E \left( B_t^2 \sum_j B_j \Delta B_j \right) &= \sum_j E(B_t^2 B_j \Delta B_j) \\
&= \sum_j E \left( [(B_t - B_{j+1}) + \Delta_j + B_j]^2 \cdot B_j \Delta B_j \right) \\
&= \sum_j E \left( (B_t - B_{j+1})^2 B_j \Delta B_j \right) + \sum_j E \left( B_j (\Delta B_j)^3 \right) \\
&\quad + \sum_j E \left( B_j^3 \Delta B_j \right) + 2 \sum_j E \left( (B_t - B_{j+1}) B_j (\Delta B_j)^2 \right) \\
&\quad + 2 \sum_j E \left( (B_t - B_{j+1}) B_j^2 (\Delta B_j) \right) + 2 \sum_j E \left( B_j^2 (\Delta B_j)^2 \right) \\
&= 2 \sum_i t_j \Delta t_j.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} E \left( \left( \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t - \sum_j B_j \Delta B_j \right)^2 \right) &= \frac{1}{2} t^2 + \sum_i t_i \Delta t_i - 2 \sum_i t_j \Delta t_j \\ &= \frac{1}{2} t^2 - \sum_i t_j \Delta t_j. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_i t_j \Delta t_j &= \sum_j t_j (t_{j+1} - t_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j (t_{j+1}^2 - t_j^2) - \frac{1}{2} \sum_j (t_{j+1} - t_j), \end{aligned}$$

entonces si  $\Delta t_j \rightarrow 0$ , se obtiene que

$$E \left( \left( \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t - \sum_j B_j \Delta B_j \right)^2 \right) \rightarrow 0$$

y por lo tanto,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

### 2.3. Formula de Itô

Como se ha visto, la evaluación de las integrales de Itô, a partir únicamente de la definición, no es tarea sencilla. Es por esto que se busca desarrollar un método que permita evaluar dichas integrales de manera eficiente, una forma de hacerlo, es mediante la fórmula de Itô.

**Definición 2.10.** Sea  $\{B_t, t \geq 0\}$  un movimiento Browniano sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Un proceso de Itô es un proceso estocástico  $\{X_t, t \geq 0\}$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tal que

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s(\omega), \quad (2.4)$$

donde  $u$  y  $v$  son medibles y además

$$P \left( \int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \quad \text{para todo } t \geq 0 \right) = 1$$

**Ejemplo 2.11.**  $B_t^2$  es un proceso de Itô. En efecto, por el ejemplo 2.9 tenemos que

$$\frac{1}{2} B_t^2(\omega) = \frac{1}{2} t + \int_0^t B_s dB_s = \int_0^t \frac{1}{2} ds + \int_0^t B_s dB_s. \quad (2.5)$$

**Observación.** Si  $\{X_t, t \geq 0\}$  es un proceso de Itô de la forma (2.4), entonces dicha ecuación se acostumbra a escribir en la forma

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

Así, por ejemplo, la ecuación (2.5) queda expresada como:

$$d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) = \frac{1}{2}dt + B_tdB_t.$$

**Teorema 2.12** (Fórmula de Itô). *Sea  $\{X_t, t \geq 0\}$  un proceso de Itô*

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

y sea  $g(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times \mathbb{R})$ . Entonces  $\{Y_t, t \geq 0\}$  con  $Y_t = g(t, X_t)$  es de nuevo un proceso de Itô y

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2$$

donde  $dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0$  y  $dB_t \cdot dB_t = dt$ .

*Demostración.* Véase [5] Teorema 7.5 □

### Observaciones.

(1) Como  $dX_t = udt + vdB_t$ , entonces

$$\begin{aligned} (dX_t)^2 &= (udt + vdB_t)(udt + vdB_t) \\ &= u^2dt \cdot dt + ucdt \cdot dB_t + vud \cdot dB_t \cdot dt + v^2dB_t \cdot dB_t \\ &= v^2dt \end{aligned}$$

luego

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)(udt + vdB_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(v)^2dt,$$

esto es,

$$\begin{aligned} Y_t &= g(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)uds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)vds \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s)(v)^2ds, \end{aligned}$$

es decir,

$$g(0, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left( \frac{\partial g}{\partial s} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) ds + \int_0^t v\frac{\partial g}{\partial x}dB_s.$$

- (2) Supongamos que  $F(s, w) = f(s)$ , depende sólo de  $s$  y que  $f$  es de variación acotada en  $[0, t]$ , entonces:

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t) - \int_0^t B_s df(s)$$

En efecto, sean  $g(t, x) = f(t) \cdot x$  y  $X_t = B_t$ , entonces

$$Y_t = g(t, B_t) = f(t) \cdot B_t.$$

Por formula de Itô,

$$\begin{aligned} dY_t &= df(t) \cdot B_t + f(t) \cdot dB_t \\ Y_t &= \int_0^t df(s)B_s + \int_0^t f(s)dB_s + Y_0, \\ \int_0^t f(s)dB_s &= f(t) \cdot B_t - \int_0^t B_s df(s). \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.13.** Se considera la integral

$$I = \int_0^t B_s dB_s.$$

Sean  $X_t = B_t$  y  $g(t, x) = \frac{1}{2}x^2$ , entonces  $Y_t = \frac{1}{2}B_t^2$ . Por la fórmula de Itô, se obtiene

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) &= B_t dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt \\ \frac{1}{2}B_t^2 &= \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t ds = \frac{1}{2}t + \int_0^t B_s dB_s, \end{aligned}$$

esto es,

$$I = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

**Observación** Si suponemos que  $\{B_t, t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano unidimensional y  $\{X_t, t \geq 0\}$  es un proceso de Itô con

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, w)ds + \int_0^t v(s, w)dB_s$$

y sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces diferenciable.

Sea  $g(t, x) = f(x)$ , entonces de la fórmula de Itô se obtiene que si  $Y_t = g(t, X_t) = f(X_t)$  entonces:

$$\begin{aligned} dY_t &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dX_t^2, \\ Y_t &= \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)(dX_s)^2, \end{aligned}$$

como  $dX_t = udt + vdB_t$  y  $(dX_t)^2 = v^2$ , entonces

$$Y_t = f(X_0) + \int_0^t \left( f'(X_s)u(s) + \frac{1}{2}f''(X_s)v^2(s) \right) ds + \int_0^t f'(X_s)v(s)dB_s, \quad P - c.s.$$



---

## Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

---

Las ecuaciones diferenciales estocásticas (SDE) tienen múltiples aplicaciones en física, demografía, biología, finanzas, entre otros. El tratamiento que se les da a este tipo de ecuaciones es similar a las ecuaciones diferenciales ordinarias en el momento de hallar soluciones explícitas. En este capítulo presentaremos algunos conceptos básicos, así como el teorema de existencia y unicidad. También se presentará el método de aproximación numérica de Euler-Maruyama. Finalmente hablaremos de los criterios de explosión en tiempo finito para la solución de una SDE.

### 3.1. Definiciones básicas

**Definición 3.1.** Una ecuación diferencial estocástica (SDE) tiene la siguiente forma

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0(\omega) = \xi(\omega) \quad (3.1)$$

donde  $X_t$  es el proceso incógnita,  $B_t$  es un movimiento Browniano. La función  $b$  refleja entonces el cambio esperado en el proceso por unidad de tiempo y se denomina la componente de tendencia, mientras que  $\sigma$  refleja la incertidumbre del proceso y se denomina la volatilidad del proceso. La condición inicial de esta ecuación es  $X_0(\omega) = \xi(\omega)$ .

La solución de la ecuación (3.1), si es que existe, es entonces un proceso de Itô. La aleatoriedad de  $X = \{X_t; t \in [0, T]\}$  resulta, en primer lugar, de la condición inicial y, por otro lado, del ruido generado por el movimiento Browniano. La interpretación de Itô de la ecuación diferencial estocástica es que  $X_t$  satisface la ecuación integral estocástica

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \quad (3.2)$$

donde la primera integral en el lado derecho es una integral de Riemann, y la segunda integral es una integral estocástica de Itô. Es posible reemplazar el movimiento Browniano por cualquier otro tipo de proceso, pero, para cumplir el objetivo de este trabajo, solo se contemplará el tipo de ecuaciones descritas anteriormente.

Si suponemos que la condición inicial es una variable aleatoria constante  $x_0 \in \mathbb{R}$  y que la evolución de  $X_t$  no tiene otra causa de aleatoriedad que la inducida por la evolución

del proceso  $\{B_t\}$ , entonces no tiene sentido pensar que la solución hasta el instante  $t$  vaya a depender de lo que el azar deparará después del instante  $t$ . Por lo tanto, es razonable buscar soluciones sin esta dependencia. Con esto en mente, resulta inevitable preguntarse lo siguiente: ¿Bajo que condiciones se pueden obtener teoremas de existencia y unicidad para estas ecuaciones?, ¿Cuáles son las propiedades de estas soluciones? ¿Cómo se puede resolver una de estas ecuaciones?

Motivamos esta noción con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.2.** En [4] se considera el modelo simple de crecimiento de una población:

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = A, \quad (3.3)$$

donde  $N(t)$  es el tamaño de la población en el tiempo  $t$  y  $a(t)$  es la tasa de crecimiento relativa en el tiempo  $t$ . Se puede pensar que  $a(t)$  no es totalmente conocida, y que está sujeta a algunos efectos aleatorios del medio ambiente, esto es,

$$a(t) = r(t) + \text{“ruido”}.$$

Supongamos que no se conoce de manera exacta la conducta del término ruido, solamente su distribución en probabilidad. La función  $r(t)$  se supone no aleatoria. ¿Cómo se puede resolver la ecuación (3.3) en este caso?

Reescribimos la ecuación de la siguiente manera

$$\frac{dN_t}{dt} = a_t N_t,$$

con  $N_0$  dado y  $a_t = r_t + \alpha \xi_t$ , donde  $\xi_t$  es un término de error y  $\alpha$  es constante. Si asumimos que  $r_t = r$  constante, entonces, la ecuación de acuerdo a la interpretación de Itô queda de la forma

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t,$$

en este caso  $b(x) = rx$  y  $\sigma(x) = \alpha x$ , con lo que

$$\frac{dN_t}{N_t} = r dt + \alpha dB_t,$$

es decir,

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = rt + \alpha B_t. \quad (3.4)$$

Para evaluar la integral del lado izquierdo se usa la fórmula de Itô para la función  $h(x) = \ln(x)$ , de donde:

$$\begin{aligned} d(\ln N_t) &= \frac{1}{N_t} dN_t + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{(N_t)^2} \right) (dN_t)^2 \\ &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2(N_t)^2} (rN_t dt + \alpha N_t dB_t)^2 \\ &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2(N_t)^2} \alpha^2 (N_t)^2 dt \\ &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2} \alpha^2 dt. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{dN_t}{N_t} = d(\ln N_t) + \frac{1}{2} \alpha^2 dt,$$

al reemplazar la ecuación anterior en (3.4), se obtiene

$$\ln \frac{N_t}{N_0} = \left( r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t + \alpha B_t,$$

por último,

$$N_t = N_0 \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t + \alpha B_t \right]. \quad (3.5)$$

A esta exponencial se le conoce como Movimiento Browniano geométrico, que es importante en economía para modelar precios estocásticos. (Ver [17] capítulo 11). Parece razonable pensar que si  $B_t$  es independiente de  $N_0$ , se tiene que

$$E(N_t) = E(N_0) e^{rt},$$

es decir, el mismo resultado como cuando  $a_t$  no contiene ruido. Para ver esto, definimos

$$Y_t = e^{\alpha B_t},$$

es decir,  $N_t = N_0 \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t \right] Y_t$  por la fórmula de Itô se obtiene

$$dY_t = \alpha e^{\alpha B_t} dB_t + \frac{1}{2} \alpha^2 e^{\alpha B_t} dt,$$

por lo tanto,

$$Y_t = Y_0 + \alpha \int_0^t e^{\alpha B_s} dB_s + \frac{1}{2} \alpha^2 \int_0^t e^{\alpha B_s} ds$$

Como  $E \left[ \int_0^t e^{\alpha B_s} dB_s \right] = 0$ , por el teorema de Fubini,

$$E(Y_t) = E(Y_0) + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t E(Y_s) ds,$$

es decir,  $E(Y_0) = 1$  y  $\frac{d}{dt}E(Y_t) = \frac{1}{2}\alpha^2 E(Y_t)$  y al resolver esta ecuación diferencial ordinaria se obtiene

$$E(Y_t) = e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

Así, de (3.5) se tiene

$$E(N_t) = E \left[ N_0 \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2}\alpha^2 \right) t \right] \exp [\alpha B_t] \right] \quad (3.6)$$

$$= E(N_0) e^{rt} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t} e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t} \quad (3.7)$$

$$= E(N_0) e^{rt}, \quad (3.8)$$

como esperábamos.

El anterior ejemplo muestra que las ecuaciones diferenciales estocásticas juegan un papel importante en la solución de muchos problemas de la vida diaria. Pero la primera pregunta que surge a la hora de abordar esta ecuación es ¿Qué es una solución de una ecuación diferencial estocástica? No hay una respuesta única a esta pregunta. Hay dos tipos de soluciones a una SDE, las soluciones fuertes y las débiles.

**Definición 3.3.** Una solución fuerte de la ecuación (3.1) es un proceso estocástico  $\{X_t, t \geq 0\}$  que satisface las siguientes condiciones:

1.  $X_t$  tiene trayectorias continuas y  $\{X_t\}$  es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ ,
2.  $\{b(X_t)\} \in L^1([0, T])$  y  $\{\sigma(X_t)\} \in L^2([0, T])$ ,
3. Con probabilidad 1,

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s$$

Por lo tanto, una solución fuerte de (3.1) se basa en la trayectoria del movimiento - Browniano. Si cambiamos el movimiento Browniano por otro, obtendríamos otra solución fuerte y que estaría dada por la misma relación funcional, pero con el nuevo movimiento Browniano en ella. También hay soluciones débiles, en las que el comportamiento de la trayectoria no es esencial, sino que hay interés en la distribución de dicha solución. Pero, en este trabajo, solo vamos a considerar soluciones fuertes.

Nuestro objetivo en esta parte es mostrar la existencia y unicidad de soluciones fuertes para SDE de la forma (3.1), donde la condición inicial  $\xi$  es una variable aleatoria independiente de  $\{B_t, t \geq 0\}$ . Denotamos como  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  a la filtración generada por  $\xi$  y  $\{B_t, t \geq 0\}$ , aumentada con los conjuntos  $P$ -nulos de  $\Omega$ , es decir

$$\mathfrak{F}_t = \sigma(\{\xi, B_s : 0 \leq s \leq t\} \cup \mathcal{N}), \quad t \geq 0$$

donde  $\mathcal{N} = \{E \subseteq \Omega : \exists A \in \mathfrak{F}, A \supseteq E \text{ y } P(A) = 0\}$ .

Para hablar de la solución fuerte de (3.1), consideremos el caso en que  $\sigma$  es idénticamente cero. En este caso, la ecuación (3.2) se reduce a una ecuación integral ordinaria (no estocástica, excepto tal vez por la condición inicial), de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds, \quad t \geq 0 \quad (3.9)$$

Usualmente, en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, se impone la hipótesis de que  $b(x)$  satisfaga una condición de Lipschitz local, en la variable de espacio  $x \in \mathbb{R}$  y que sea acotado sobre subconjuntos compactos de  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Estas condiciones garantizan que, para un  $t > 0$  suficientemente pequeño, las iteraciones de Picard-Lindelöf

$$X_t^0 \equiv \xi, \quad X_t^{n+1} = \xi + \int_0^t b(X_s^{(n)}) ds, \quad n \geq 0$$

converjan a la solución (3.9), y que esta solución sea única. En ausencia de estas condiciones, la ecuación podría no tener solución o tener infinitas soluciones. Por ejemplo, la ecuación (determinística) unidimensional

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha ds \quad (3.10)$$

tiene una única solución para  $\alpha > 1$ , a saber:  $X_t \equiv 0$ . Sin embargo, para  $0 \leq \alpha \leq 1$ , todas las funciones de la forma

$$X_t = (\beta t)^{\frac{1}{\beta}} \quad \forall t \geq 0, \\ X_t = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s, \\ (\beta(t-s))^{\frac{1}{\beta}}, & t \geq s, \end{cases}$$

con  $\beta = 1 - \alpha$  y  $s \geq 0$  arbitrario, son soluciones de (3.10). Parece entonces razonable desarrollar la teoría de SDE, imponiendo condiciones de tipo Lipschitz en los coeficientes. Se dice que  $b$  y  $\sigma$  satisfacen

- la condición Lipschitz, si para  $T > 0$  existe una constante  $K_T > 0$  tal que para todo  $t \in [0, T]$  y para todo par  $x, x' \in \mathbb{R}$

$$|b(x) - b(x')| + |\sigma(x) - \sigma(x')| \leq K_T |x - x'| \quad (3.11)$$

- la condición Lipschitz local, si para cada  $T > 0$  y para cada  $n \geq 1$  existe una constante  $K_{T,n}$  tal que para todo  $t \in [0, T]$  y para todo par  $x, x' \in \mathbb{B}_n(0)$ ,

$$|b(x) - b(x')| + |\sigma(x) - \sigma(x')| \leq K_{T,n} |x - x'| \quad (3.12)$$

Para demostrar la existencia y unicidad bajo estas hipótesis, también se necesitará que los coeficientes satisfagan la condición de crecimiento lineal, es decir, para cada  $T > 0$ , existe

una constante  $K_T > 0$  tal que

$$|b(x)| + |\sigma(x)| \leq K_T(1 + |x|), \quad \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

Esta condición nos permite establecer la siguiente estimación previa de los momentos de las soluciones de SDE:

**Lema 3.4.** *Sea  $\{X_t, t \geq 0\}$  una solución fuerte de la SDE (3.2) y supongamos que existe un entero  $p \geq 1$ , tal que  $E(|\xi|^{2p}) < +\infty$ . Si los coeficientes  $b$  y  $\sigma$  satisfacen la condición de crecimiento lineal (3.13), entonces*

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^{2p} \right] &\leq C e^{CT} \left\{ 1 + E(|\xi|^{2p}) \right\}, \quad \forall T > 0, \\ E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_t|^{2p} \right] &\leq C'(T-t)^p \left\{ 1 + E(|\xi|^{2p}) \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

donde  $C$  y  $C'$  son constantes que dependen sólo de  $T, K_T$  y  $p$ .

*Demostración.* Usando la desigualdad

$$|a + b + c|^{2p} \leq 3^{2p-1} (|a|^{2p} + |b|^{2p} + |c|^{2p}),$$

se obtiene para  $0 \leq t \leq T$

$$|X_t|^{2p} \leq 3^{2p-1} \left( |\xi|^{2p} + \left| \int_0^t b(X_r) dr \right|^{2p} + \left| \int_0^t \sigma(X_r) dB_r \right|^{2p} \right).$$

De la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t b(X_r) dr \right|^{2p} &\leq t^p \left[ \int_0^t |b(X_s)|^2 ds \right]^p \\ &\leq t^{2p-1} \int_0^t |b(X_s)|^{2p} ds \end{aligned}$$

luego,

$$|X_t|^{2p} \leq 3^{2p-1} \left( |\xi|^{2p} + s^{2p-1} \int_0^s |b(X_r)|^{2p} dr + \left| \int_0^t \sigma(X_r) dB_r \right|^{2p} \right) \quad (3.14)$$

Si  $\tau_n := \inf\{s \geq 0 : |X_s| \geq n\}$ , el proceso  $H_s^n = \sigma(X_s)I_{[0, \tau_n)}(s)$ ,  $s \geq 0$  satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} E \int_0^t |H_s^n|^{2p} ds &\leq \int_0^t \|\sigma(X_s)\|^{2p} I_{[0, \tau_n)}(s) ds \\ &\leq E \int_0^t K_t^{2p} (1 + |X_s|)^{2p} I_{[0, \tau_n)}(s) ds \\ &\leq t K_t^{2p} (1 + n)^{2p}, \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ , luego,

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \int_0^{s \wedge \tau_n} \sigma(X_r) dB_r \right|^{2p} \right] &= E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \int_0^s \sigma(X_r) 1_{[0, \tau_n)}(r) dB_r \right|^{2p} \right] \\ &\leq C_p t^{p-1} E \left( \int_0^t |\sigma(X_r)|^{2p} 1_{[0, \tau_n)}(r) dr \right) \end{aligned}$$

con  $C_p = d^{p-1} [2p^3 / (2p-1)]^p$ . Tomando  $t = s \wedge \tau_n$  en (3.14) y usando la anterior desigualdad,

$$\begin{aligned} |X_{s \wedge \tau_n}|^{2p} &\leq 3^{2p-1} \left( |\xi|^{2p} + (s \wedge \tau_n)^{2p-1} \int_0^{s \wedge \tau_n} |b(X_r)|^{2p} dr + \left| \int_0^{s \wedge \tau_n} \sigma(X_r) dB_r \right|^{2p} \right) E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |X_{s \wedge \tau_n}|^{2p} \right] \\ &\leq 3^{2p-1} \left\{ E(|\xi|^{2p}) + t^{2p-1} E \int_0^t |b(X_r)|^{2p} 1_{[0, \tau_n)}(r) dr + C_p t^{p-1} E \int_0^t |\sigma(X_r)|^{2p} 1_{[0, \tau_n)}(r) dr \right\} \\ &\leq 3^{2p-1} \left\{ E(|\xi|^{2p}) + (t^{2p-1} + C_p t^{p-1}) K_t^{2p} E \int_0^t (1 + |X_r|)^{2p} 1_{[0, \tau_n)}(r) dr \right\} \\ &\leq 3^{2p-1} \left\{ E(|\xi|^{2p}) + 2^{2p-1} L \left\{ T + E \int_0^t |X_r|^{2p} 1_{[0, \tau_n)}(r) dr \right\} \right\} \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T$ , donde  $L = (t^{2p-1} + C_p t^{p-1}) K_t^{2p}$ . Dado que

$$|X_r|^{2p} I_{[0, \tau_n)}(r) \leq \sup_{0 \leq s \leq s \wedge \tau_n} |X_s|^{2p}$$

y

$$E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |X_{s \wedge \tau_n}|^{2p} \right] = E \left[ \sup_{0 \leq s \leq s \wedge \tau_n} |X_s|^{2p} \right],$$

del teorema de Fubini, se tiene que

$$\varphi_n(t) = E \left[ \sup_{0 \leq s \leq s \wedge \tau_n} |X_s|^{2p} \right]$$

satisface

$$\varphi_n(t) \leq C \left\{ E(|\xi|^{2p}) + 1 + \int_0^t \varphi_n(r) dr \right\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

con  $C = 3^{2p-1} (1 \vee 2^{2p-1} L \vee 2^{2p-1} LT)$ . Por el lema de Bellman y Gronwall,

$$\varphi_n(t) \leq C e^{Ct} \left\{ 1 + E(|\xi|^{2p}) \right\},$$

para  $0 \leq t \leq T$ , para todo  $n \geq 1$ , y por el lema de Fatou

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^{2p} \right] &= E \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left( \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau_n} |X_s|^{2p} \right) \right] \\ &\leq \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau_n} |X_s|^{2p} \right] \right] \\ &\leq C e^{Ct} \{1 + E(|\xi|^{2p})\}, \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T$ , lo que prueba la primera desigualdad. Para la segunda desigualdad, si  $0 \leq s < u \leq t \leq T$ , entonces

$$|X_u - X_s|^{2p} \leq 2^{2p-1}(u-s)^{2p-1} \int_s^u |b(X_r)|^{2p} dr + 2^{2p-1} \left| \int_s^u \sigma(X_r) dB_r \right|^{2p}$$

Tomando ahora  $\tau_n := \inf\{u \geq s : |X_u| \geq n\}$ , usando un razonamiento análogo al anterior y la desigualdad  $E(|X_r|^{2p}) \leq C e^{CT} \{1 + E(|\xi|^{2p})\}$ , se obtiene

$$|X_{u \wedge \tau_n} - X_s|^{2p} \leq 2^{2p-1}(u \wedge \tau_n - s)^{2p-1} \int_s^{u \wedge \tau_n} |b(X_r)|^{2p} dr + 2^{2p-1} \left| \int_s^{u \wedge \tau_n} \sigma(X_r) dB_r \right|^{2p}$$

entonces

$$\sup_{s \leq u \leq t} |X_{u \wedge \tau_n} - X_s|^{2p} \leq 2^{2p-1}(t-s)^{2p-1} \int_s^{t \wedge \tau_n} |b(X_r)|^{2p} dr + 2^{2p-1} \sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u \sigma(X_r) I_{[s, \tau_n)}(r) dB_r \right|^{2p}$$

y

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{s \leq u \leq t} |X_{u \wedge \tau_n} - X_s|^{2p} \right] &\leq 4^{2p-1}(t-s)^{2p-1} \int_s^t K_T^{2p} (1 + C e^{CT}) \{1 + E(|\xi|^{2p})\} dr \\ &\quad + 4^{2p-1} C_p (t-s)^{p-1} \int_s^t K_T^{2p} (1 + C e^{CT}) \{1 + E(|\xi|^{2p})\} dr \\ &= C' (t-s)^p \{1 + E(|\xi|^{2p})\}, \end{aligned}$$

con  $C' = 4^{2p-1} K_T^{2p} (T^p + C_p)(1 + C e^{CT})$ , y de nuevo por el lema de Fatou se sigue el resultado.  $\square$

### 3.2. Existencia y unicidad de las soluciones

De manera análoga al caso determinístico, existen teoremas básicos de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas que establecen condiciones de regularidad para los coeficientes  $b$  y  $\sigma$ , bajo las que la ecuación (3.1) tiene solución única. Se dice que la SDE (3.1) satisface la **unicidad en trayectoria**, o **unicidad fuerte**, si dos soluciones  $X$  y  $X'$  son indistinguibles.

Debido a que dichos procesos tienen trayectorias continuas c.s., bastaría con mostrar que uno es **modificación** del otro.



**Teorema 3.5.** Sean  $b_i : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\sigma_i : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles y localmente acotadas,  $i = 1, 2$ . Sea  $D \subset \mathbb{R}$  un conjunto abierto y  $T > 0$ . Supongamos que

$$\sigma_1(x) = \sigma_2(x), \quad b_1(x) = b_2(x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times D$$

y que existe una constante  $K_T > 0$  tal que, para todo  $t \in [0, T]$  y para todo par  $x, x' \in D$

$$|b_i(x) - b_i(x')| + |\sigma_i(x) - \sigma_i(x')| \leq K_T |x - x'| \quad (3.15)$$

$$|\sigma_i(x)| + |b_i(x)| \leq K_T(1 + |x|) \quad (3.16)$$

Para  $i=1,2$ , sea  $X^i$  una solución fuerte de la SDE (3.1), con condición inicial  $X_0^i$  una variable aleatoria cuadrado integrable y coeficientes  $b_i$  y  $\sigma_i$  y sean

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 : X_t^i \notin D\}, \quad i = 1, 2,$$

$$\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$$

Si  $X_0^1(\omega) = X_0^2(\omega)$  para casi todo  $\omega$ , para el que  $X_0^1(\omega) \in D$  o  $X_0^2(\omega) \in D$ , es decir,

$$P\left(\left((X_0^1 \in D) \cup (X_0^2 \in D)\right) \cap (X_0^1 = X_0^2)\right) = 1$$

entonces

$$P(X_{t \wedge \tau}^1 = X_{t \wedge \tau}^2, \quad \forall t \in [0, T]) = 1$$

*Demostración.* Para  $0 \leq t \leq T$ , tenemos que

$$\begin{aligned} X_{t \wedge \tau}^1 - X_{t \wedge \tau}^2 &= \int_0^{t \wedge \tau} (b_1(X_s^1) - b_2(X_s^1)) ds + \int_0^{t \wedge \tau} (b_2(X_s^1) - b_2(X_s^2)) ds \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma_1(X_s^1) - \sigma_2(X_s^1) ds + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma_2(X_s^1) - \sigma_2(X_s^2) ds \end{aligned}$$

como

$$\int_0^{t \wedge \tau} (b_1(X_s^1) - b_2(X_s^1)) ds = 0$$

y también,

$$\int_0^{t \wedge \tau} \sigma_1(X_s^1) - \sigma_2(X_s^1) ds = 0$$

entonces,

$$X_{t \wedge \tau}^1 - X_{t \wedge \tau}^2 = \int_0^{t \wedge \tau} (b_2(X_s^1) - b_2(X_s^2)) ds + \int_0^{t \wedge \tau} (\sigma_2(X_s^1) - \sigma_2(X_s^2)) ds$$

Al tomar valor esperado y, usando la desigualdad,  $(a + b)^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$  y la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned} E \left( \left| X_{t \wedge \tau}^1 - X_{t \wedge \tau}^2 \right|^2 \right) &\leq 2E \left[ \left| \int_0^{t \wedge \tau} (b_2(X_s^1) - b_2(X_s^2)) ds \right|^2 \right] \\ &\quad + 2E \left[ \left| \int_0^{t \wedge \tau} \sigma_2(X_s^1) - \sigma_2(X_s^2) dB_s \right|^2 \right] \\ &\leq 2tE \left[ \int_0^{t \wedge \tau} \left| (b_2(X_s^1) - b_2(X_s^2)) \right|^2 ds \right] \\ &\quad + 2E \left[ \left| \int_0^{t \wedge \tau} \sigma_2(X_s^1) - \sigma_2(X_s^2) 1_{[0, \tau)}(s) dB_s \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

En virtud de la condición de crecimiento lineal en  $D$  y al lema 3.4, se puede aplicar la Isometria de Itô a las integrales estocásticas y, así obtener

$$\begin{aligned} E \left( \left| X_{t \wedge \tau}^1 - X_{t \wedge \tau}^2 \right|^2 \right) &\leq 2tE \int_0^{t \wedge \tau} \left| (b_2(X_s^1) - b_2(X_s^2)) \right|^2 \\ &\quad + 2E \int_0^t \left| \sigma_2(X_s^1) - \sigma_2(X_s^2) \right|^2 1_{[0, \tau)}(s) ds \\ &\leq 2K_T^2(1 + T)E \int_0^t \left| X_s^1 - X_s^2 \right|^2 1_{[0, \tau)}(s) ds \\ &= 2K_T^2(1 + T) \int_0^t E \left[ \left| X_s^1 - X_s^2 \right|^2 1_{[0, \tau)}(s) \right] ds \\ &= 2K_T^2(1 + T) \int_0^t E \left| X_{s \wedge \tau}^1 - X_{s \wedge \tau}^2 \right|^2 ds, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

En virtud del lema de Bellman y Gronwall, se sigue que  $E \left( \left| X_{t \wedge \tau}^1 - X_{t \wedge \tau}^2 \right|^2 \right) = 0$ , para todo  $t \in [0, T]$ , lo que implica que  $P(X_{t \wedge \tau}^1 = X_{t \wedge \tau}^2) = 1$ , para todo  $t \in [0, T]$  y, puesto que  $X^1$  y  $X^2$  tienen trayectorias continuas c.s., se tiene que

$$P(X_{t \wedge \tau}^1 = X_{t \wedge \tau}^2, \quad \forall t \in [0, T]) = 1.$$

□

**Corolario 3.6.** Sean  $b$  y  $\sigma$  funciones que satisfacen la condición de Lipschitz local. Entonces se cumple la unicidad en trayectoria para la SDE (3.1).

*Demostración.* Sean  $X^1$  y  $X^2$  dos soluciones y sea

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |X_t^1| \geq n \text{ o } |X_t^2| \geq n\} \quad n \geq 1.$$

Entonces por el teorema anterior, tenemos que

$$P(X_{t \wedge \tau_n}^1 = X_{t \wedge \tau_n}^2, \quad \forall t \in [0, T]) = 1,$$

Por lo tanto, para  $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} P(X_t^1 \neq X_t^2) &\leq P(\tau_n \leq t) \\ &\leq P\left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^1| \geq n\right) + P\left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^2| \geq n\right) \\ &= P\left(\max_{0 \leq s \leq T} |X_s^1| \geq n\right) + P\left(\max_{0 \leq s \leq T} |X_s^2| \geq n\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

puesto que  $X^1$  y  $X^2$  tienen trayectorias continuas c.s. En consecuencia,  $X^1$  es una versión de  $X^2$ , y de nuevo por continuidad son indistinguibles.  $\square$

**Teorema 3.7** (Teorema de Existencia Globalmente Lipschitz). *Sean  $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles que satisfacen la condición de Lipschitz global y la condición de crecimiento lineal. Entonces existe una solución fuerte de la SDE (3.1).*

*Demostración.* Para demostrar el teorema bajo estas condiciones, se usa la misma estrategia que en caso determinístico. Se construyen aproximaciones sucesivas de Picard-Lindelöf y, usando el teorema del punto fijo de Banach, se muestra la convergencia de la sucesión. Más precisamente, sea

$$\begin{aligned} X_t^{(0)} &= X_0, \quad t \geq 0 \\ X_t^{(n+1)} &= X_0 + \int_0^t b(X_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(X_s^{(n)}) dB_s \end{aligned}$$

De esta definición, se tiene que los procesos  $\{X_t^{(n)}\}_{t \geq 0}$  son continuos y adaptados a la filtración generada por  $X_0$  y  $\{B_t\}_{t \geq 0}$ . Fijemos  $T > 0$ . Podemos afirmar que, para todo  $t \in [0, T]$ ,

$$E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2 \right] \leq C_1 \frac{(C_2 t)^n}{n!} \quad (3.17)$$

con  $C_1$  y  $C_2$  constantes independientes de  $t$  y de  $n$ . Para probar este resultado, usamos un argumento inductivo y la desigualdad de Doob. Primero probamos la desigualdad para  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}
E \left( \sup_{0 < t < T} |X_t^{(1)} - X_t^{(0)}|^2 \right) &= E \left( \sup_{0 < t < T} \left| \int_0^t b(X_s^{(0)}) ds + \int_0^t \sigma(X_s^{(0)}) dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq E \left( \left| \int_0^T b(X_s^{(0)}) ds + \int_0^T \sigma(X_s^{(0)}) dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq 2E \left( \left| \int_0^T b(X_s^{(0)}) ds \right|^2 + \left| \int_0^T \sigma(X_s^{(0)}) dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq 2E \left( T \int_0^T |b(X_s^{(0)})|^2 ds + \int_0^T |\sigma(X_s^{(0)})|^2 ds \right) \\
&\leq 2E \left( T \int_0^T K_T^2 (1 + |X_s^{(0)}|)^2 ds + \int_0^T K_T^2 (1 + |X_s^{(0)}|)^2 ds \right) \\
&= 2E \left( (T+1) K_T^2 \int_0^T (1 + |X_s^{(0)}|)^2 ds \right) \\
&\leq 2(T+1) K_T^2 \int_0^T E \left( (1 + |X_s^{(0)}|)^2 \right) ds \\
&= 2(T+1) K_T^2 \int_0^T E \left( (1 + |\xi(s)|)^2 \right) ds = C_1
\end{aligned}$$

Luego (3.17) se cumple para  $n = 0$ . Ahora, tomemos  $C_2 = 2K_T^2(T+1)$  y supongamos que (3.17) se cumple para algún  $n \geq 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
&E \left( \sup_{0 < t < T} |X_t^{(n+2)} - X_t^{(n+1)}|^2 \right) \\
&= E \left( \sup_{0 < t < T} \left| \int_0^t (b(X_s^{(n+1)}) - b(X_s^{(n)})) ds + \int_0^t (\sigma(X_s^{(n+1)}) - \sigma(X_s^{(n)})) dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq E \left( \left| \int_0^T (b(X_s^{(n+1)}) - b(X_s^{(n)})) ds + \int_0^T (\sigma(X_s^{(n+1)}) - \sigma(X_s^{(n)})) dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq 2E \left( \left| \int_0^T (b(X_s^{(n+1)}) - b(X_s^{(n)})) ds \right|^2 + \left| \int_0^T (\sigma(X_s^{(n+1)}) - \sigma(X_s^{(n)})) dB_s \right|^2 \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& E \left( \sup_{0 < t < T} |X_t^{(n+2)} - X_t^{(n+1)}|^2 \right) \\
& \leq 2E \left( T \int_0^T |(b(X_s^{(n+1)}) - b(X_s^{(n)}))|^2 ds + \int_0^T |(\sigma(X_s^{(n+1)}) - \sigma(X_s^{(n)}))|^2 ds \right) \\
& \leq 2E \left( T \int_0^T K_T^2 |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2 ds + \int_0^T K_T^2 |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2 ds \right) \\
& = 2K_T^2(T+1)E \left( \int_0^T |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2 ds \right) \\
& \leq C_2 \int_0^T E \left( |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2 \right) ds \\
& = C_2 \int_0^T E \left( \sup_{0 \leq r \leq s} |X_r^{(n+1)} - X_r^{(n)}|^2 \right) ds \\
& \leq C_2 \int_0^T \frac{C_1 C_2^n s^n}{n!} ds \\
& = \frac{C_1 C_2^{n+1}}{n!} \frac{T^{n+1}}{(n+1)} = \frac{C_1 C_2^{n+1} T^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Entonces, por inducción, se cumple la desigualdad (3.17). Ahora, notemos que este resultado implica lo deseado. De la desigualdad de Chebyshev, tenemos que

$$P \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}| > \frac{1}{2^{n+1}} \right) \leq 4C_1 \frac{(4C_2 T)^n}{n!}.$$

El término del lado derecho es sumable sobre  $n$ , entonces por el Lema de Borel-Cantelli, concluimos que

$$P \left( \limsup \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}| > \frac{1}{2^{n+1}} \right\} \right) = 0,$$

es decir, para cada  $\omega \in \Omega$ , existe  $N = N(\omega)$  una variable aleatoria tal que

$$\sup_{m \geq 1} \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{(n+m)} - X_s^{(n)}| \right] \leq \frac{1}{2^n}$$

para todo  $n \geq N(\omega)$ . En particular,  $\{X_s^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  forma una sucesión de Cauchy y, por la completitud del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , entonces dicha sucesión converge a un límite  $X_s$ ,  $s \in [0, T]$ . Notemos que el límite  $X$  no depende de  $T$  y, por tanto, está bien definido sobre  $\mathbb{R}$ . Además, como la convergencia es uniforme,  $X(t)$  es continuo y, dado que los procesos  $X^n$  son adaptados a la filtración generada por  $X_0$  y  $\{B_t\}_{t \geq 0}$ , entonces tenemos que  $X$  es adaptado a la misma filtración.  $\square$

**Teorema 3.8** (Teorema de Existencia Localmente Lipschitz). Sean  $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles que satisfacen la condición de Lipschitz local y la condición de crecimiento lineal. Entonces existe una solución fuerte de la SDE (3.1) hasta un valor  $\tau$  definido como **tiempo maximal de existencia**.

*Demostración.* Vamos a extender la demostración del teorema 3.7 usando un método de truncamiento. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$b_n(x) = \begin{cases} b(x) & \text{si } |x| < n \\ 0 & \text{si } |x| > 2n \end{cases} \quad \sigma_n(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } |x| < n \\ 0 & \text{si } |x| > 2n \end{cases}$$

y  $b_n$  y  $\sigma_n$  son interpoladas linealmente para  $n \leq |x| \leq 2n$ . Sea  $X_n(t)$  la solución de la SDE

$$dX_t = b_n(X_t)dt + \sigma_n(X_t)dB_t$$

Se definen los siguientes tiempos de paro

$$\tau_n = \inf \{t > 0; |X_n(t)| \geq n\}$$

luego, se tiene que  $X_n(t) = X_m(t)$  para  $t \leq \min\{\tau_n, \tau_m\}$ . Se define

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n.$$

Si  $X(t) = X_n(t)$  para  $t < \tau_n$ , como la sucesión de tiempos de paro es monótona, entonces el límite  $\tau$  de la sucesión está bien definido. Así, el proceso  $X$  está bien definido hasta  $\tau$  y es una solución de la SDE (3.1).  $\square$

El siguiente resultado nos resultará útil cuando estemos interesados en comparar soluciones de SDE

**Lema 3.9.** *Supongamos que se tienen dos ecuaciones diferenciales estocásticas:*

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t b(Y_s)ds + \int_0^t \sigma(Y_s)dB_s \end{aligned}$$

y que se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $a(x) < b(x)$  para todo  $x$
2. Existe una función  $Q : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  con  $Q(0) = 0$  y

$$\int_0^\infty \frac{1}{(Q(x))^2} dx = +\infty$$

tal que

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq Q(|x - y|)$$

Entonces  $X_0 \leq Y_0$  c.s. implica que

$$P(X_t \leq Y_t; t \in [0, T]) = 1.$$

*Demostración.* Véase [9] teorema 1.1 □

### 3.3. Explosiones en SDE

En esta sección, queremos enfocarnos en decidir cuándo el tiempo maximal de existencia es una variable aleatoria finita con probabilidad positiva. Este fenómeno se denomina *explosión*. En caso determinístico, existe un criterio muy sencillo para determinar si las soluciones están definidas para todo tiempo o si se produce explosión en tiempo finito [8], el cual se puede extender en cierto sentido al caso estocástico. Vamos a mostrar un criterio para determinar cuando ocurre el fenómeno de explosión, más conocido como el Test de Feller.

Supongamos que  $X$  es una solución de la SDE (3.1) con  $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ . Tratemos de determinar si  $X$  está definido para todo tiempo  $t$ . La idea es, mediante una transformación, quitar el efecto de la tendencia de la SDE, para lo que es necesario que  $\sigma$  sea estrictamente positiva para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Tomemos  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces derivable y con segunda derivada continua. Si  $Y_t = p(X_t)$ , por la fórmula de Itô,

$$dY_t = \left( p'(X_t)b(X_t) + \frac{1}{2}p''(X_t)\sigma^2(X_t) \right) dt + p'(X_t)\sigma(X_t)dB_t$$

Ahora, si la función  $p$  es una solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden,

$$p'(x)b(x) + \frac{1}{2}p''(x)\sigma^2(x) = 0. \quad (3.18)$$

Entonces, obtenemos una SDE donde se ha eliminado la componente de tendencia

$$dY_t = p'(p^{-1}(Y_t))\sigma(p^{-1}(Y_t))dB_t.$$

Así, podemos verificar que (3.18) tiene una solución de la siguiente forma

$$p(x) = \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^s \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du \right\} ds \quad (3.19)$$

además, como  $p'(x) > 0$ , entonces  $p$  es estrictamente monótona y por lo tanto es invertible. Lo que hace que este método sea útil en el estudio de explosiones es el hecho de que, si bien la solución de  $X$  de (3.1) puede explotar en tiempo (aleatorio) finito,  $Y$  está definida globalmente. Tenemos entonces la siguiente proposición:

**Proposición 3.10.** *Sea  $X$  la solución de (3.1) con valor inicial  $x_0 \in \mathbb{R}$  y sea  $p(x)$  como en (3.19). Si  $\tau$  es el tiempo maximal de existencia de  $X$ , se distinguen cuatro casos:*

1. Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ , entonces

$$P(\tau = \infty) = 1$$

2. Si  $-\infty < \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ , entonces

$$P\left(\lim_{t \nearrow \tau} X_t = -\infty\right) = 1$$

3. Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) < \infty$ , entonces

$$P\left(\lim_{t \nearrow \tau} X_t = \infty\right) = 1$$

4. Si  $-\infty < \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) < \infty$ , entonces

$$P\left(\lim_{t \nearrow \tau} X_t = -\infty\right) = 1 - P\left(\lim_{t \nearrow \tau} X_t = \infty\right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) - p(x_0)}{\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)}.$$

*Demostración.* Véase [13] Capítulo 5 Proposición 5.22 □

En el caso determinístico, es decir,  $\sigma(x) = 0$ , una condición para que la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dX}{dt} = b(X(t)),$$

explote en tiempo finito, es que.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{b(s)} ds < \infty$$

Teniendo en cuenta esta condición, se puede establecer un criterio de explosión para las SDE de la siguiente manera:

**Proposición 3.11.** *Supongamos  $b$  y  $\sigma$  son funciones que cumplen la condición de Lipschitz local. Si existen constantes  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  positivas tales que  $\kappa_1 \leq \sigma^2(x) \leq \kappa_2 b(x)$  para todo  $x$  y*

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{b(s)} ds < \infty.$$

*Entonces la solución de la SDE (3.1) explota en tiempo finito con probabilidad 1.*

*Demostración.* Como  $\kappa_1 \leq \sigma^2(x) \leq \kappa_2 b(x)$ , entonces se tiene que

$$\frac{1}{\kappa_2} \leq \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}$$



integrando a ambos lados de la desigualdad,

$$\int_0^s \frac{1}{\kappa_2} du \leq \int_0^s \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du$$

luego,

$$\frac{s}{\kappa_2} \leq \int_0^s \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du$$

Por lo tanto,

$$-2 \int_0^s \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du \leq -2 \frac{s}{\kappa_2}.$$

Ahora, como la función exponencial es monótona creciente,

$$\exp \left\{ -2 \int_0^s \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du \right\} \leq \exp \left\{ -2 \frac{s}{\kappa_2} \right\}$$

Integrando nuevamente,

$$p(x) = \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^s \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du \right\} ds \leq \int_0^x \exp \left\{ -2 \frac{s}{\kappa_2} \right\} ds$$

Así,

$$\begin{aligned} p(x) &\leq \int_0^x \exp \left\{ -2 \frac{s}{\kappa_2} \right\} ds \\ &= -\frac{\kappa_2}{2} \left( \exp \left\{ -2 \frac{x}{\kappa_2} \right\} - 1 \right) \\ &= \frac{\kappa_2}{2} \left( 1 - \exp \left\{ -2 \frac{x}{\kappa_2} \right\} \right) \end{aligned}$$

Ahora, tomando límites, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) &\leq -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) &\leq \frac{\kappa_2}{2} < \infty \end{aligned}$$

y usando el caso 3 de la proposición 3.10, entonces

$$P \left( \lim_{t \nearrow \tau} X_t = \infty \right) = 1$$

□

### 3.4. Aproximación de Euler-Maruyama para SDE

Las SDE que admiten una solución explícita son la excepción a la regla. Por lo tanto, se requieren técnicas numéricas para la aproximación de la solución de una SDE. Esta aproximación se llama *solución numérica*. Se necesitan soluciones numéricas para diferentes objetivos. Un propósito es visualizar las trayectorias de la solución. En este sentido, podemos obtener algún tipo de “predicción” del proceso estocástico en futuros instantes de tiempo.

Un segundo propósito (quizás el más importante) es lograr aproximaciones razonables a las características de la distribución de la solución de una SDE. Algunas de estas propiedades son la esperanza, varianza, covarianza y momentos de orden superior. Esto es ciertamente un asunto importante, ya que sólo en unos cuantos casos es posible dar fórmulas explícitas para estas cantidades, e incluso entonces suelen implicar funciones especiales que tienen que ser aproximadas numéricamente.

El método de Euler es un esquema de aproximación numérico que puede extenderse al caso de las SDE de la siguiente manera: sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$  una partición del intervalo de  $[0, T]$ . Se define la aproximación de Euler-Maruyama usando el siguiente esquema numérico iterativo:

$$\begin{aligned}x_0^{(n)} &= x_0 \\x_{t_i}^{(n)} &= x_{t_{i-1}}^{(n)} + b\left(x_{t_{i-1}}^{(n)}\right)(t_i - t_{i-1}) + \sigma\left(x_{t_{i-1}}^{(n)}\right)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\end{aligned}$$

En la práctica, usualmente se eligen puntos  $t_i$  equidistantes, de tal manera que

$$\delta_n = \frac{T}{n}$$

Nosotros deseamos que la aproximación  $x^{(n)}$  con tamaño  $\delta_n$  converja fuertemente a  $X$  en el tiempo  $t$  si

$$\lim_{\delta_n \searrow 0} E\left(|X_t - x_t^{(n)}|\right) = 0$$

De acuerdo con esto, se establece un teorema que garantiza la convergencia fuerte del método numérico  $x^{(n)}$  a la solución  $X$ .

**Teorema 3.12.** *Supongamos que  $b$  y  $\sigma$  cumplen las condiciones de Lipschitz y crecimiento lineal y además  $X$  es un proceso de Itô autónomo. Si los tiempos son equidistantes y  $x_0^{(n)} = 0$ , entonces*

$$\lim_{\delta_n \searrow 0} E\left(|X_t - x_t^{(n)}|\right) = 0$$

*Demostración.* Véase [14] teorema 9.6.2

□

---

## Ecuaciones diferenciales estocásticas con retardo

---

El uso de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales para modelar sistemas biológicos tiene una larga historia, que data de Malthus, Verhulst, Lotka y Volterra. Estos modelos se utilizan, en un intento de mejorar nuestra comprensión de fenómenos mucho más complicados, ya que los modelos más simples no pueden capturar la gran variedad de dinámicas observadas en los sistemas naturales. Existen muchos enfoques posibles para abordar estas complejidades. Uno de los enfoques que ha sobresalido en los últimos años es la inclusión de términos de retardo de tiempo en las ecuaciones diferenciales. Los retrasos o rezagos pueden representar los tiempos de gestación, los períodos de incubación, los retrasos en el transporte, o simplemente pueden agrupar complejos procesos biológicos, lo que sólo representa el tiempo requerido para que estos procesos ocurran. En este capítulo introducimos las ecuaciones diferenciales estocásticas con retardo (SDDE) y trabajamos con una clase particular de estas SDDE, estableciendo condiciones para la existencia y unicidad de las soluciones fuertes y también para la explosión de las soluciones. Después establecemos el esquema numérico de tipo Euler-Maruyama, verificamos convergencia fuerte a la solución y también evaluamos la reproducción de la explosión para este caso.

### 4.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas funcionales

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad completo con filtración  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$  que satisface las condiciones usuales y sea  $\{B_t\}$  un movimiento Browniano definido sobre este espacio. Sea  $r > 0$  y sea  $C([-r, 0], \mathbb{R})$  el conjunto de funciones de familias continuas  $\varphi$  de  $[-r, 0]$  a  $\mathbb{R}$  con la norma

$$\|\varphi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$$

**Definición 4.1.** Una ecuación diferencial estocástica funcional (SFDE) tiene la siguiente forma

$$dX_t = f(\tilde{X}_t)dt + h(\tilde{X}_t)dB_t \tag{4.1}$$

donde  $X_t$  es el proceso incógnita,  $\tilde{X}_t = \{X_{t+\theta}; -r \leq \theta \leq 0\}$  es un proceso estocástico que toma valores en  $C([-r, 0], \mathbb{R})$ ,  $B_t$  es un movimiento Browniano y

$$f, h : C([-r, 0], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

son funciones medibles.

Aquí también podemos establecer problemas de valor inicial, para lo que es necesario imponer una condición inicial de la siguiente manera:

$$\xi = \{\xi_s; -r \leq s \leq 0\} \quad (4.2)$$

En este caso,  $\xi$  es una variable aleatoria que toma valores en  $C([-r, 0], \mathbb{R})$  y tal que  $E(\|\xi\|^2) < \infty$ . La primera pregunta que nos surge en este tipo de ecuaciones es la siguiente: ¿Qué es una solución para la ecuación (4.1)?

### 4.1.1. Existencia y Unicidad

**Definición 4.2.** *Un proceso estocástico  $\{X_t\}$  se dice que es una solución de la ecuación (4.1) con condición inicial dada por (4.2) si se tienen las siguientes propiedades:*

1.  $X_t$  tiene trayectorias continuas y  $\{\tilde{X}_t\}$  es adaptado a la filtración  $\mathbb{F}$ .
2.  $\{f(\tilde{X}_t)\} \in L^1([0, T])$  y  $\{h(\tilde{X}_t)\} \in L^2([0, T])$ .
3.  $\tilde{X}_0 = \xi$  y, para cada  $t \in [0, T]$ .

$$X_t = \xi_0 + \int_0^t f(\tilde{X}_s) ds + \int_0^t h(\tilde{X}_s) dB_s.$$

Una solución  $\{X_t\}$  de la ecuación (4.1) es única, si cualquier otra solución  $\{\bar{X}_t\}$  es indistinguible de  $\{X_t\}$ , es decir,

$$P\left(X_t = \bar{X}_t; t \in [-r, T]\right) = 1$$

Con el siguiente resultado, establecemos existencia y unicidad de la solución para la ecuación (4.1).

**Teorema 4.3.** *Supongamos que existen constantes  $\bar{K}$  y  $K$  tal que*

(i) *(Condición Lipschitz Uniforme) para todo  $\varphi, \phi \in C([-r, 0], \mathbb{R})$ ,*

$$|f(\varphi) - f(\phi)|^2 \vee |h(\varphi) - h(\phi)|^2 \leq \bar{K} \|\varphi - \phi\|^2.$$

(ii) *(Condición de crecimiento lineal) para todo  $\varphi \in C([-r, 0], \mathbb{R})$  y,*

$$|f(\varphi)|^2 \vee |h(\varphi)|^2 \leq K(1 + \|\varphi\|^2).$$

*Entonces existe una única solución  $X_t$  de (4.1) con condición inicial (4.2). Más aún, la solución es una martingala cuadrado integrable.*

*Demostración.* Véase [18] capítulo 5 teorema 2.2

□

Sea  $r > 0$ . Una ecuación diferencial estocástica con retardo (SDDE) es una ecuación de la forma

$$dX_t = F(X_t, X_{t-r})dt + G(X_t, X_{t-r})dB_t \quad (4.3)$$

sobre  $t \in [0, T]$  y con condición inicial

$$\xi = \{\xi_s; -r \leq s \leq 0\} \quad (4.4)$$

y  $F, G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles.

Si se define

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= F(\varphi(0), \varphi(-r)) \\ h(\varphi) &= G(\varphi(0), \varphi(-r)) \end{aligned}$$

entonces la ecuación (4.3) se puede ver como una ecuación SFDE (4.1) y, por lo tanto, en virtud del teorema 4.3 tenemos la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (4.3).

#### 4.1.2. Métodos numéricos para SDDE

En el caso de las ecuaciones diferenciales estocásticas con retardo también se requieren técnicas numéricas para la aproximación de las soluciones. En la literatura se pueden encontrar distintos métodos numéricos para producir soluciones aproximadas en el contexto de SDE. Sin embargo, no hay muchos trabajos para el caso en que el retardo entra como una función del tiempo en lugar de una constante. En [2] se trabaja el caso en que los coeficientes de la SDDE cumplen la condición de Lipschitz, mientras que [21] generaliza este trabajo, suponiendo que los coeficientes cumplen la condición de Lipschitz local. A continuación ilustramos este método numérico.

Si  $\Delta = \frac{r}{n}$ , donde  $r$  es el tiempo de retardo, la solución aproximada de Euler-Maruyama para el caso discreto está definida de la siguiente manera

$$x_{(k+1)\Delta} = x_{k\Delta} + F(x_{k\Delta}, x_{\llbracket k-r \rrbracket \Delta})\Delta + G(x_{k\Delta}, x_{\llbracket k-r \rrbracket \Delta})\Delta B_k,$$

donde  $\llbracket x \rrbracket$  denota la parte entera de  $x$ . Para definir la extensión continua tomamos  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$ ,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} 1_{[t_k, t_{k+1})} x_{(k+1)\Delta} \\ z_2(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} 1_{[t_k, t_{k+1})} x_{\llbracket k-r \rrbracket \Delta} \end{aligned}$$

La versión continua de la solución aproximada de tipo Euler-Maruyama se define como

$$x(t) = \xi(0) + \int_0^t F(z_1(s), z_2(s))ds + \int_0^t G(z_1(s), z_2(s))dB_s \quad (4.5)$$

Con todo lo anterior, se puede establecer el siguiente resultado

**Teorema 4.4.** *Supongamos que  $F$  y  $G$  cumplen las condiciones de Lipschitz local y de crecimiento lineal. Si la condición inicial (4.4) es Hölder-continua, es decir, existen constantes  $K_1$  y  $\gamma \in (0, 1]$  tal que para todo  $-r \leq s < t \leq 0$ ,*

$$E \left( |\xi_t - \xi_s|^2 \right) \leq K_1(t - s)^\gamma$$

Entonces la solución aproximada (4.5) converge a la solución de la ecuación (4.3), en el siguiente sentido

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - X_t|^2 \right) = 0$$

*Demostración.* Véase [21] teorema 2.1 □

## 4.2. Ecuación diferencial estocástica con retardo a trabajar

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la siguiente ecuación diferencial estocástica con retardo (SDDE):

$$\begin{cases} dX_t = [b(X_t) + g(X_{t-r})] dt + \sigma(X_{t-r})dB_t \\ X_s = \xi(s) \end{cases} \quad s \in [-r, 0] \quad (4.6)$$

para  $t \in [0, T]$ ,  $T < \infty$ , en la cual se tiene un *tiempo de retardo*  $r$  fijo. La ecuación (4.6) cubre ecuaciones diferenciales estocásticas no lineales. Aquí,  $b$ ,  $g$  y  $\sigma$  son funciones Lipschitz positivas, suaves y  $\xi = \{\xi(s); s \in [-r, 0]\}$  es el *segmento inicial* el cual se asume  $\mathcal{F}_0$ -medible, continua a la derecha y tiene límite por la izquierda. La intención es seguir la ideas de [18] para probar la existencia y unicidad de (4.6).

### 4.2.1. Existencia y unicidad

Supongamos que existen constantes positivas  $L_b, L_g, L_\sigma, K_b, K_g, K_\sigma$  tal que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |b(x_1) - b(x_2)| \leq L_b|x_1 - x_2| \\ |g(x_1) - g(x_2)| \leq L_g|x_1 - x_2| \\ |\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| \leq L_\sigma|x_1 - x_2| \\ |b(x)|^2 \leq K_b(1 + |x|^2) \\ |g(x)|^2 \leq K_g(1 + |x|^2) \\ |\sigma(x)|^2 \leq K_\sigma(1 + |x|^2) \\ |b(x)| \geq 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

también, suponemos que  $b$  es dos veces diferenciable y sus derivadas están uniformemente acotadas. Sea,

$$f, h : C([-r, 0], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

funciones Borel medibles dadas por:

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= b(\varphi(0)) + g(\varphi(-r)) \\ h(\varphi) &= \sigma(\varphi(-r)) \end{aligned}$$

y sea  $\tilde{X}_t = \{X_{t+\theta}; -r \leq \theta \leq 0\}$  un proceso estocástico que toma valores en  $C([-r, 0], \mathbb{R})$ . Por tanto, podemos reescribir la ecuación diferencial estocástica (4.6) como sigue:

$$\begin{cases} dX_t = f(\tilde{X}_t) dt + h(\tilde{X}_t) dB_t \\ \tilde{X}_0 = \{\xi(s); s \in [-r, 0]\} \end{cases} \quad (4.8)$$

Notemos que  $f, h$  satisfacen las condición de Lipschitz uniforme.

**Proposición 4.5** (Condición Lipschitz uniforme). *Si  $f$  y  $h$  están definidas como antes, entonces*

$$|f(\varphi) - f(\phi)|^2 \vee |h(\varphi) - h(\phi)|^2 \leq \bar{L} \|\varphi - \phi\|^2 \quad (4.9)$$

para todo  $\varphi, \phi \in C([-r, 0], \mathbb{R})$ .

*Demostración.* Usando (4.7),

$$\begin{aligned} |f(\varphi) - f(\phi)| &= |b(\varphi(0)) + g(\varphi(-r)) - b(\phi(0)) - g(\phi(-r))| \\ &= |(b(\varphi(0)) - b(\phi(0))) + (g(\varphi(-r)) - g(\phi(-r)))| \\ &\leq |b(\varphi(0)) - b(\phi(0))| + |g(\varphi(-r)) - g(\phi(-r))| \\ &\leq L_b |\varphi(0) - \phi(0)| + L_g |\varphi(-r) - \phi(-r)| \\ &\leq (L_b + L_g) \|\varphi - \phi\| \end{aligned}$$

Entonces,

$$|f(\varphi) - f(\phi)|^2 \leq (L_b + L_g)^2 \|\varphi - \phi\|^2$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |h(\varphi) - h(\phi)|^2 &= |\sigma(\varphi(-r)) - \sigma(\phi(-r))|^2 \\ &\leq L_\sigma^2 |\varphi(-r) - \phi(-r)|^2 \\ &\leq L_\sigma^2 \|\varphi - \phi\|^2. \end{aligned}$$

Así, obtenemos (4.9) con

$$\bar{L} = \max \{L_\sigma^2, (L_b + L_g)^2\}.$$

□

**Proposición 4.6** (Condición de crecimiento uniforme). *Si  $f$  y  $h$  están definidas como antes, entonces*

$$|f(\varphi)|^2 \vee |h(\varphi)|^2 \leq \bar{K} (1 + \|\varphi\|^2) \quad (4.10)$$

para todo  $\varphi \in C([-r, 0], \mathbb{R})$ .

*Demostración.* Usando de nuevo (4.7)

$$\begin{aligned} |f(\varphi)|^2 &\leq (|b(\varphi(0))| + |g(\varphi(-r))|)^2 \\ &= |b(\varphi(0))|^2 + |g(\varphi(-r))|^2 + 2|b(\varphi(0))||g(\varphi(-r))| \\ &\leq K_b (1 + |\varphi(0)|^2) + K_g (1 + |\varphi(-r)|^2) + 2\sqrt{K_b(1 + |\varphi(0)|^2)}\sqrt{K_g(1 + |\varphi(-r)|^2)} \\ &\leq K_b (1 + \|\varphi\|^2) + K_g (1 + \|\varphi\|^2) + 2\sqrt{K_b(1 + \|\varphi\|^2)}\sqrt{K_g(1 + \|\varphi\|^2)} \\ &= K_b (1 + \|\varphi\|^2) + K_g (1 + \|\varphi\|^2) + 2\sqrt{K_b K_g} (1 + \|\varphi\|^2) \\ &= (K_b + K_g + 2\sqrt{K_b K_g}) (1 + \|\varphi\|^2) \\ &= (\sqrt{K_b} + \sqrt{K_g})^2 (1 + \|\varphi\|^2) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} |h(\varphi)|^2 &= |\sigma(\varphi(-r))|^2 \\ &\leq K_\sigma (1 + |\varphi(-r)|^2) \\ &\leq K_\sigma (1 + \|\varphi\|^2). \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos (4.10) con

$$\bar{K} = \max \left\{ K_\sigma, (\sqrt{K_b} + \sqrt{K_g})^2 \right\}.$$

□

Con los anteriores resultados, queremos mostrar que la ecuación diferencial estocástica (4.8) tiene una única solución. Con el fin de probar este resultado, los siguientes dos lemas son necesarios:

**Lema 4.7.** *Si  $\{X_t\}$  es una solución para la ecuación (4.8), entonces*

$$E \left( \sup_{-r \leq t \leq T} |X_t|^2 \right) \leq (1 + 5E(\|\xi\|^2)) e^{4(T+1)\bar{K}}.$$

*Demostración.* Para cada entero  $n \geq 1$ , se define el siguiente tiempo de paro

$$\tau_n = T \wedge \inf \left\{ t \in [0, T]; \|\tilde{X}_t\| \geq n \right\}.$$



Note que  $\tau_n \uparrow T$  c.s. Sea  $X_t^n = X_{t \wedge \tau_n}$  para  $t \in [-r, T]$ . Entonces para  $0 \leq t \leq T$ ,

$$X_t^n = \xi(0) + \int_0^t f(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) ds + \int_0^t h(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) dB_s.$$

Por la desigualdad de Doob,

$$E \left( \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^n|^2 \right) \leq 2E \left( |X_t^n|^2 \right).$$

Ahora, usando la desigualdad de Hölder, la condición de crecimiento uniforme y la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned} E \left[ \left[ \int_0^t f(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) ds \right]^2 \right] &\leq E \left[ \left[ \int_0^t (f(\tilde{X}_s^n))^2 1_{[0, \tau_n]}(s) ds \right] \left[ \int_0^t ds \right] \right] \\ &\leq TE \left[ \left[ \int_0^t (f(\tilde{X}_s^n))^2 1_{[0, \tau_n]}(s) ds \right] \right] \\ &\leq TE \left[ \left[ \int_0^t \bar{K} (1 + \|\tilde{X}_s^n\|^2) \chi_{[0, \tau_n]}(s) ds \right] \right] \\ &\leq T \int_0^T \bar{K} (1 + E(\|\tilde{X}_s^n\|^2)) ds \\ &= T \bar{K} \int_0^T \left( 1 + E \left( \left( \sup_{-r \leq u \leq 0} |X_{s+u}^n| \right)^2 \right) \right) ds \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E \left[ \left[ \int_0^t h(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) dB_s \right]^2 \right] &= E \left[ \int_0^t (h(\tilde{X}_s^n))^2 1_{[0, \tau_n]}(s) ds \right] \\ &\leq E \left[ \left[ \int_0^t \bar{K} (1 + \|\tilde{X}_s^n\|^2) 1_{[0, \tau_n]}(s) ds \right] \right] \\ &\leq \int_0^T \bar{K} (1 + E(\|\tilde{X}_s^n\|^2)) ds \\ &= \bar{K} \int_0^T (1 + E(\|\tilde{X}_s^n\|^2)) ds \\ &= \bar{K} \int_0^T \left( 1 + E \left( \left( \sup_{-r \leq u \leq 0} |X_{s+u}^n| \right)^2 \right) \right) ds. \end{aligned}$$

Notemos que  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , entonces

$$\begin{aligned} E \left( |X_n^t|^2 \right) &\leq 2E \left( (\xi(0))^2 + \left( \int_0^t f(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) ds + \int_0^t h(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) dB_s \right)^2 \right) \\ &\leq 2E \left( (\xi(0))^2 \right) + 2E \left( \int_0^t f(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) ds + \int_0^t h(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) dB_s \right)^2. \end{aligned}$$

Tomando el segundo término sobre el lado derecho de la anterior desigualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned} &E \left( \int_0^t f(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) ds + \int_0^t h(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) dB_s \right)^2 \\ &\leq 2E \left[ \left( \int_0^t f(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) ds \right)^2 + \left( \int_0^t h(\tilde{X}_s^n) 1_{[0, \tau_n]}(s) dW_s \right)^2 \right] \\ &\leq 2(T+1)\bar{K} \int_0^T \left( 1 + E \left( \left( \sup_{-r \leq u \leq 0} |X_{s+u}^n| \right)^2 \right) \right) ds. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} E \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^n|^2 \right) &\leq 2E \left( |X_T^n|^2 \right) \\ &\leq 4E \left( (\xi(0))^2 \right) + 4(T+1)\bar{K} \int_0^T \left( 1 + E \left( \left( \sup_{-r \leq u \leq 0} |X_{s+u}^n| \right)^2 \right) \right) ds. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$\sup_{-r \leq s \leq T} |X_s^n|^2 \leq \|\xi\|^2 + \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^n|^2,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} E \left( \sup_{-r \leq s \leq T} |X_s^n|^2 \right) &\leq 5E \left( \|\xi\|^2 \right) + 4(T+1)\bar{K} \int_0^T \left( 1 + E \left( \left( \sup_{-r \leq u \leq 0} |X_{s+u}^n| \right)^2 \right) \right) ds \\ &\leq 5E \left( \|\xi\|^2 \right) + 4(T+1)\bar{K} \int_0^T \left( 1 + E \left( \left( \sup_{-r \leq u \leq s} |X_u^n| \right)^2 \right) \right) ds. \end{aligned}$$

Ahora, la desigualdad de Bellman-Gronwall conlleva a

$$1 + E \left( \sup_{-r \leq s \leq T} |X_s^n|^2 \right) \leq \left( 1 + 5E \left( \|\xi\|^2 \right) \right) \exp \left\{ 4(T+1)\bar{K} \right\}$$

Tomando  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$E \left( \sup_{-r \leq t \leq T} |X_t|^2 \right) \leq \left( 1 + 5E \left( \|\xi\|^2 \right) \right) e^{4(T+1)\bar{K}}$$

□

**Lema 4.8.** Sean  $f, h$  dos funciones medibles Lipschitz definidas como antes. Si existe la solución de la ecuación (4.8), ésta es única.

*Demostración.* Sean  $\{X_t\}, \{Y_t\}$  dos soluciones de (4.8) y sea  $Z_t = X_t - Y_t$ . Entonces

$$\begin{aligned} Z_t &= \left\{ \tilde{X}_0 + \int_0^t h(\tilde{X}_s) dB_s + \int_0^t f(\tilde{X}_s) ds \right\} - \left\{ \tilde{X}_0 + \int_0^t h(\tilde{Y}_s) dB_s + \int_0^t f(\tilde{Y}_s) ds \right\} \\ &= \int_0^t [h(\tilde{X}_s) - h(\tilde{Y}_s)] dB_s + \int_0^t [f(\tilde{X}_s) - f(\tilde{Y}_s)] ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Z_t^2 \leq 2 \left\{ \left[ \int_0^t h(\tilde{X}_s) - h(\tilde{Y}_s) dB_s \right]^2 + \left[ \int_0^t f(\tilde{X}_s) - f(\tilde{Y}_s) ds \right]^2 \right\}.$$

Usando la ecuación (4.9),

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^t h(\tilde{X}_s) - h(\tilde{Y}_s) dB_s \right]^2 &= \int_0^t E \left( (h(\tilde{X}_s) - h(\tilde{Y}_s))^2 \right) ds \\ &\leq \bar{L} \int_0^t E \left( \|\tilde{X}_s - \tilde{Y}_s\|^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Ahora, usando la desigualdad de Jensen y (4.9),

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^t f(\tilde{X}_s) - f(\tilde{Y}_s) ds \right]^2 &\leq E \left[ \frac{1}{t} \int_0^t [tf(\tilde{X}_s) - tf(\tilde{Y}_s)]^2 ds \right] \\ &= E \left[ \frac{1}{t} \int_0^t t^2 [f(\tilde{X}_s) - f(\tilde{Y}_s)]^2 ds \right] \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^t f(\tilde{X}_s) - f(\tilde{Y}_s) ds \right]^2 &\leq tE \left[ \int_0^t [f(\tilde{X}_s) - f(\tilde{Y}_s)]^2 ds \right] \\ &= t \int_0^t E \left[ [f(\tilde{X}_s) - f(\tilde{Y}_s)]^2 \right] ds \\ &\leq T\bar{L} \int_0^t E (\|\tilde{X}_s - \tilde{Y}_s\|^2) ds. \end{aligned}$$

Entonces,

$$E(Z_t^2) \leq 2\bar{L}(1+T) \int_0^t E (\|\tilde{X}_s - \tilde{Y}_s\|^2) ds.$$

Ahora, usando la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned} E \left( \sup_{0 \leq s \leq t} Z_s^2 \right) &\leq 2\bar{L}(1+T) \int_0^t E (\|\tilde{X}_s - \tilde{Y}_s\|^2) ds \\ &\leq 2\bar{L}(1+T) \int_0^t E \left( \sup_{-r \leq u \leq 0} Z_{s+u}^2 \right) ds \\ &\leq 2\bar{L}(1+T) \int_0^t E \left( \sup_{0 \leq u \leq s} Z_u^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Bellman-Gronwall ,

$$E \left( \sup_{0 \leq s \leq t} Z_s^2 \right) \leq 0,$$

entonces  $E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} Z_t^2 \right) = 0$ . Por lo tanto  $X_t = Y_t$  c.s. □

Finalmente, obtenemos el siguiente teorema

**Teorema 4.9.** *Si (4.7) se tiene, entonces la ecuación (4.8) tiene solución.*

*Demostración.* Para la existencia de la solución, definimos  $\tilde{X}_0^0 = \xi$  y  $X_t^{(0)} = \xi(0)$  para  $0 \leq t \leq T$ . Para cada  $n = 1, 2, \dots$ , fijamos  $\tilde{X}_0^n = \xi$  y definimos, por las iteraciones de Picard,

$$X_t^{(n)} = \xi(0) + \int_0^t f(\tilde{X}_s^{(n-1)}) ds + \int_0^t h(\tilde{X}_s^{(n-1)}) dB_s$$

para  $t \in [0, T]$ . Entonces tenemos que para  $n \geq 0$ ,

$$E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \right) \leq \frac{CM^n T^n}{n!} \quad (4.11)$$

sobre  $0 \leq t \leq T$ . Procederemos por inducción sobre  $n$ . Primero calculamos

$$\begin{aligned}
E \left( \sup_{0 < t < T} |X_t^{(1)} - X_t^{(0)}|^2 \right) &\leq E \left( \left| \int_0^T f(\tilde{X}_s^{(0)}) ds + \int_0^T h(\tilde{X}_s^{(0)}) dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq 2E \left( \left| \int_0^T f(\tilde{X}_s^{(0)}) ds \right|^2 + \left| \int_0^T h(\tilde{X}_s^{(0)}) dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq 2E \left( T \int_0^T |f(\tilde{X}_s^{(0)})|^2 ds + \int_0^T |h(\tilde{X}_s^{(0)})|^2 ds \right) \\
&\leq 2E \left( T \int_0^T \bar{K} (1 + \|\tilde{X}_s^{(0)}\|^2) ds + \int_0^T \bar{K} (1 + \|\tilde{X}_s^{(0)}\|^2) ds \right) \\
&\leq 2(T+1)\bar{K} \int_0^T (1 + E(\|\tilde{X}_s^{(0)}\|^2)) ds \\
&= 2(T+1)\bar{K} \int_0^T \left( 1 + E \left( \left( \sup_{0 \leq u \leq s} |\xi_u| \right)^2 \right) \right) ds \\
&= C.
\end{aligned}$$

Así (4.11) se mantiene para  $n = 0$ . Fijemos  $M = 2\bar{L}(T+1)$  y asuma que (4.11) se tiene para algún  $n \geq 0$ . Entonces, por la isometría de Itô

$$\begin{aligned}
&E \left( \sup_{0 < t < T} |X_t^{(n+2)} - X_t^{(n+1)}|^2 \right) \\
&= E \left( \sup_{0 < t < T} \left| \int_0^t (f(\tilde{X}_s^{(n+1)}) - f(\tilde{X}_s^{(n)})) ds + \int_0^t (h(\tilde{X}_s^{(n+1)}) - h(\tilde{X}_s^{(n)})) dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq E \left( \left| \int_0^T (f(\tilde{X}_s^{(n+1)}) - f(\tilde{X}_s^{(n)})) ds + \int_0^T (h(\tilde{X}_s^{(n+1)}) - h(\tilde{X}_s^{(n)})) dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq 2E \left( \left| \int_0^T (f(\tilde{X}_s^{(n+1)}) - f(\tilde{X}_s^{(n)})) ds \right|^2 + \left| \int_0^T (h(\tilde{X}_s^{(n+1)}) - h(\tilde{X}_s^{(n)})) dB_s \right|^2 \right) \\
&\leq 2E \left( T \int_0^T |(f(\tilde{X}_s^{(n+1)}) - f(\tilde{X}_s^{(n)}))|^2 ds + \int_0^T |(h(\tilde{X}_s^{(n+1)}) - h(\tilde{X}_s^{(n)}))|^2 ds \right)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
& E \left( \sup_{0 < t < T} |X_t^{(n+2)} - X_t^{(n+1)}|^2 \right) \\
& \leq 2E \left( T \int_0^T \bar{L} \|\tilde{X}_s^{(n+1)} - \tilde{X}_s^{(n)}\|^2 ds + \int_0^T \bar{L} \|\tilde{X}_s^{(n+1)} - \tilde{X}_s^{(n)}\|^2 ds \right) \\
& = 2\bar{L}(T+1)E \left( \int_0^T \|\tilde{X}_s^{(n+1)} - \tilde{X}_s^{(n)}\|^2 ds \right) \\
& \leq M \int_0^T E \left( \|\tilde{X}_s^{(n+1)} - \tilde{X}_s^{(n)}\|^2 \right) ds \\
& \leq M \int_0^T E \left( \sup_{0 \leq u \leq s} |X_u^{(n+1)} - X_u^{(n)}|^2 \right) ds \\
& \leq M \int_0^T \frac{CM^n s^n}{n!} ds \\
& = \frac{CM^{n+1}T^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por inducción, (4.11) se cumple para todo  $n \geq 0$ . De (4.11), podemos usar el mismo argumento del teorema 3.7 para concluir que  $X_t^{(n)}$  converge a  $X_t$  en  $L^2$  con probabilidad 1, y  $\{X_t\}$  es una solución para la ecuación (4.8) que satisface las condiciones iniciales.  $\square$

#### 4.2.2. Explosión de la solución

Así como existen criterios de explosión de las soluciones de SDE, queremos determinar un criterio de explosión para la ecuación (4.6). Es importante resaltar que en la literatura consultada no se encontraron criterios para que la solución de la ecuación (4.3) explote en tiempo finito, así que uno de los objetivos de este trabajo es establecer un criterio de explosión para la solución de la ecuación (4.6). La idea es usar un criterio de comparación y el criterio de explosión establecido en la proposición 3.10.

Consideramos ahora la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dY_t = f_0(\tilde{Y}_t) dt + h(\tilde{Y}_t) dW_t \\ \tilde{Y}_0 = \{\xi(s); s \in [-r, 0]\} \end{cases} \quad (4.12)$$

donde  $f_0(\varphi) = b(\varphi(0))$ . Dado que  $g$  es positiva,  $f(\varphi) \geq f_0(\varphi)$ . A continuación establecemos un criterio de comparación entre las soluciones de las ecuaciones (4.8) y (4.12).

**Proposición 4.10.** Sean  $\{X_t\}$  y  $\{Y_t\}$  las soluciones de (4.8) y (4.12) respectivamente. Si,

$$Y_0 \leq X_0 \text{ c.s.}$$

Entonces,

$$P(Y_t \leq X_t, t \geq 0) = 1.$$

*Demostración.* Tomemos  $Q(x) = \bar{L}x^2$ . Por la condición Lipschitz uniforme dada en la proposición 4.5,

$$|h(\tilde{X}_t) - h(\tilde{Y}_t)| \leq Q(\|\tilde{X}_t - \tilde{Y}_t\|) \text{ a.s.}$$

Ahora, notemos que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{Q(x)}\right)^2 = \infty$$

Por tanto, por el lema 3.9,

$$P(Y_t \leq X_t, t \geq 0) = 1.$$

□

La proposición 4.10 nos asegura que, si la solución de (4.12) explota en tiempo finito, entonces esto lleva a que la solución de la ecuación (4.8) también explote en tiempo finito. Ahora, para asegurar que la solución de la SDDE (4.12) explota en tiempo finito, podemos reescribir la ecuación como sigue

$$\begin{cases} dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_{t-r})dW_t \\ Y_s = \xi(s) \end{cases} \quad s \in [-r, 0] \quad (4.13)$$

**Proposición 4.11.** Sean  $b, \sigma$  funciones positivas Lipschitz, suaves y tales que existen constantes positivas  $\kappa_1, \kappa_2$  que satisfacen

$$\kappa_1 \leq \sigma^2(s) \leq \kappa_2 b(s).$$

Si además  $b$  es no decreciente y

$$\int_0^\infty \frac{1}{b(s)} ds < \infty$$

Entonces la solución de la ecuación (4.13) explota en tiempo finito con probabilidad 1.

*Demostración.* Definimos  $p(x)$  como en 3.10,

$$p(x) = \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^s \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right\} ds$$

Como  $\kappa_1 \leq \sigma^2(y) \leq \kappa_2 b(y)$  se cumple, entonces

$$\frac{1}{\kappa_2} \leq \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} \leq \frac{1}{\kappa_1} b(y)$$

Integrando, obtenemos

$$\int_0^s \frac{1}{\kappa_2} dy \leq \int_0^s \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy \leq \int_0^s \frac{1}{\kappa_1} b(y) dy.$$

Así,

$$-2 \int_0^s \frac{1}{\kappa_1} b(y) dy \leq -2 \int_0^s \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy \leq -2 \int_0^s \frac{1}{\kappa_2} dy.$$

Por tanto,

$$\int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^s \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right\} ds \leq \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^s \frac{1}{\kappa_2} dy \right\} ds.$$

Entonces,

$$p(x) \leq \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^s \frac{1}{\kappa_2} dy \right\} ds.$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^s \frac{1}{\kappa_2} dy \right\} ds &= \int_0^x \exp \left\{ -\frac{2}{\kappa_2} s \right\} ds \\ &= -\frac{\kappa_2}{2} \left[ \exp \left\{ -\frac{2}{\kappa_2} x \right\} - 1 \right] \\ &= \frac{\kappa_2}{2} \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{2}{\kappa_2} x \right\} \right]. \end{aligned}$$

Tomando  $x \rightarrow -\infty$ ,

$$p(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) \leq -\infty.$$

Así,  $p(-\infty) = -\infty$ , y  $x \rightarrow \infty$ ,

$$p(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) \leq \frac{\kappa_2}{2} < \infty.$$

Usando el caso 3 de la proposición 3.10, si  $T$  es el tiempo máximo de existencia para  $Y$ , entonces

$$P \left( \lim_{t \nearrow T} Y_t = \infty \right) = 1.$$

□

**Corolario 4.12.** *Si los coeficientes de la ecuación (4.6)  $b, g, \sigma$  son funciones positivas con la condición Lipschitz local, suaves y suponga que existen constantes positivas  $\kappa_1, \kappa_2$  tal que*

$$\kappa_1 \leq \sigma^2(s) \leq \kappa_2 b(s).$$

*Suponga también que  $b$  es no decreciente y que*

$$\int_0^\infty \frac{1}{b(s)} ds < \infty.$$

*Entonces la solución de la ecuación (4.6) explota en tiempo finito con probabilidad 1.*

*Demostración.* Notemos que  $b(X_t) \leq b(X_t) + g(X_{t-r})$ . Usando la condición Lipschitz local para  $\sigma$ , por la proposición 4.10, tenemos que

$$P(Y_t \leq X_t; t \in [0, T]) = 1.$$



donde  $X_t$  es la solución de (4.6) y  $Y_t$  es la solución de (4.13). Ahora, por la proposición 4.11, tenemos que

$$P\left(\lim_{t \nearrow T} Y_t = \infty\right) = 1.$$

Con lo que

$$P\left(\lim_{t \nearrow T} X_t = \infty\right) = 1.$$

□

### 4.3. Método numérico

#### 4.3.1. Definición del método

Para establecer un método numérico que pueda reproducir la posible explosión de la solución de (4.6), usaremos una aproximación adaptativa de tipo Euler-Maruyama, siguiendo las ideas de [6]. Sea  $h > 0$  el parámetro del método y definimos la aproximación numérica de (4.6)  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  de la siguiente manera

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \tau_k b(x_k) + \tau_k g(x_{\llbracket k-r \rrbracket}) + \sigma(x_{\llbracket k-r \rrbracket}) \Delta B_k \\ x(0) = \xi(0) = z \end{cases} \quad (4.14)$$

donde  $\Delta B_k = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$  denota el incremento del movimiento Browniano en el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  y  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ . Notemos que los tiempos de paro  $\tau_k$  son  $\mathbb{F}_{t_k}$ -medibles. Si tomamos  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$ ,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} 1_{[t_k, t_{k+1})} x_k \\ z_2(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} 1_{[t_k, t_{k+1})} x_{\llbracket k-r \rrbracket}, \end{aligned}$$

la versión continua de la solución aproximada de tipo Euler-Maruyama la definimos como

$$x(t) = \xi(0) + \int_0^t b(z_1(s)) ds + \int_0^t g(z_2(s)) ds + \int_0^t \sigma(z_2(s)) dB_s. \quad (4.15)$$

**Lema 4.13.** *Bajo la condición Lipschitz uniforme para  $b, g$  y  $\sigma$ ,*

$$E\left(|x(t)|^2\right) \leq C_1. \quad (4.16)$$

donde  $C_1$  es una constante positiva.

*Demostración.* Como  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ , entonces,

$$\begin{aligned}
|x(t)|^2 &\leq 3\left|\xi(0)\right|^2 + 3\left|\int_0^t (b(z_1(s)) + g(z_2(s))) ds\right|^2 + 3\left|\int_0^t \sigma(z_2(s))dW_s\right|^2 \\
&\leq 3|\xi(0)|^2 + 6\left|\int_0^t b(z_1(s))ds\right|^2 + 6\left|\int_0^t g(z_2(s))ds\right|^2 + 3\left|\int_0^t \sigma(z_2(s))dW_s\right|^2 \\
&\leq 3|\xi(0)|^2 + 6T\int_0^t |b(z_1(s))|^2 ds + 6T\int_0^t |g(z_2(s))|^2 ds + 3\int_0^t |\sigma(z_2(s))|^2 ds \\
&\leq 3|\xi(0)|^2 + 6TK_b\int_0^t 1 + |z_1(s)|^2 ds + 6TK_g\int_0^t 1 + |z_2(s)|^2 ds \\
&\quad + 3K_\sigma\int_0^t 1 + |z_2(s)|^2 ds \\
&\leq 3|\xi(0)|^2 + 6T^2K_b + 6TK_b\int_0^t |z_1(s)|^2 ds + 6T^2K_g + 6TK_g\int_0^t |z_2(s)|^2 ds \\
&\quad + 3TK_\sigma + 3K_\sigma\int_0^t |z_2(s)|^2 ds \\
&= 3|\xi(0)|^2 + 6T^2(K_b + K_g) + 6TK_b\int_0^t |z_1(s)|^2 ds + 6TK_g\int_0^t |z_2(s)|^2 ds \\
&\quad + 3TK_\sigma + 3K_\sigma\int_0^t |z_2(s)|^2 ds \\
&\leq 3|\xi(0)|^2 + 3T\bar{K}(2T + 1) + 6TK_b\int_0^t |z_1(s)|^2 ds + 3(K_\sigma + 2TK_g)\int_0^t |z_2(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Tomando el valor esperado,

$$\begin{aligned}
E(|x(t)|^2) &\leq 3E(|\xi(0)|^2) + 3T\bar{K}(2T + 1) + 6TK_b\int_0^t E(|z_1(s)|^2) ds \\
&\quad + 3(K_\sigma + 2TK_g)\int_0^t E(|z_2(s)|^2) ds \\
&\leq 3\sup_{-r \leq t \leq 0} E(|\xi(t)|^2) + 3T\bar{K}(2T + 1) + 6TK_b\int_0^t \sup_{-r \leq u \leq s} E(|z_1(u)|^2) ds \\
&\quad + 3(K_\sigma + 2TK_g)\int_0^t \sup_{-r \leq u \leq s} E(|z_2(u)|^2) ds.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
E(|x(t)|^2) &\leq 3 \sup_{-r \leq t \leq 0} E(|\xi(t)|^2) + 3T\bar{K}(2T+1) + 6TK_b \int_0^t \sup_{-r \leq u \leq s} E(|x(u)|^2) ds \\
&\quad + 3(K_\sigma + 2TK_g) \int_0^t \sup_{-r \leq u \leq s} E(|x(u)|^2) ds \\
&\leq 3 \sup_{-r \leq t \leq 0} E(|\xi(t)|^2) + 3T\bar{K}(2T+1) + 3\bar{K}(2T+1) \int_0^t \sup_{-r \leq u \leq s} E(|x(u)|^2) ds.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier  $t_1 \in [0, T]$

$$\sup_{-r \leq t \leq t_1} E(|x(t)|^2) \leq 3 \sup_{-r \leq t \leq 0} E(|\xi(t)|^2) + 3T\bar{K}(2T+1) + 3\bar{K}(2T+1) \int_0^t \sup_{-r \leq u \leq s} E(|x(u)|^2) ds.$$

Por desigualdad de Bellman-Gronwall,

$$\sup_{-r \leq t \leq t_1} E(|x(t)|^2) \leq 3 \left[ \sup_{-r \leq t \leq 0} E(|\xi(t)|^2) + T\bar{K}(2T+1) \right] \exp \{ 3T\bar{K}(2T+1) \}$$

Si se define

$$C_1 = 3 \left[ \sup_{-r \leq t \leq 0} E(|\xi(t)|^2) + T\bar{K}(2T+1) \right] \exp \{ 3T\bar{K}(2T+1) \},$$

Entonces se cumple la desigualdad (4.16).  $\square$

Notemos que, de las ecuaciones (4.14) y (4.15),  $x(t_k) = x_k$  y que la aproximación numérica  $x(t)$  es un proceso bien definido hasta el tiempo

$$T_h := \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k.$$

Sea  $h > 0$  el parámetro del método y seleccionando  $\tau_k$  de la siguiente manera

$$\tau_k = \frac{h}{b(x_k)}.$$

Tenemos que  $x(t) \nearrow \infty$  cuando  $T_h < \infty$ .

Para establecer la convergencia fuerte de la solución numérica  $x(t)$  a la solución  $X_t$  de la ecuación (4.6), tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.14.** *Sea  $X(\cdot)$  la solución de (4.6) y  $x(\cdot)$  su aproximación dada por (4.14) con los supuestos de la proposición 4.11. Fijemos un tiempo  $\bar{\tau} > 0$  y una constante  $M > 0$ . Considere los tiempos de paro dados por  $\tau = \bar{T} \wedge R^M$  and  $\tau_h = \bar{\tau} \wedge R_h^{2M}$ , donde*

$$R^M = \inf \{t; |X_t| \geq M\}$$

$$R_h^M = \inf \{t; |x(t)| \geq M\}$$

Entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq \bar{\tau} \wedge \tau_h} |X_t - x(t)|^2 \right] = 0.$$

*Demostración.* Primero, truncamos las funciones  $b(x)$ ,  $g(x)$  y  $\sigma(x)$  de forma que sean globalmente Lipschitz, acotadas y que coincida con las originales  $b(x)$  y  $\sigma(x)$  para valores de  $x$  con  $|x| \leq 2M$ , es decir, consideramos

$$\bar{b}(x) = \begin{cases} b(x) & \text{if } |x| \leq 2M \\ b(2M) & \text{if } x \geq 2M \\ b(-2M) & \text{if } x \leq -2M \end{cases}$$

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } |x| \leq 2M \\ g(2M) & \text{if } x \geq 2M \\ g(-2M) & \text{if } x \leq -2M \end{cases}$$

y

$$\bar{\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{if } |x| \leq 2M \\ \sigma(2M) & \text{if } x \geq 2M \\ \sigma(-2M) & \text{if } x \leq -2M \end{cases}$$

Sean  $Y$  y  $y$ , respectivamente, las soluciones de

$$dY_t = \left( \bar{b}(Y_t) + \bar{g}(Y_{t-r}) \right) dt + \bar{\sigma}(Y_{t-r}) dW_t$$

$$y_{k+1} = y_k + \tau_k \bar{b}(y_k) + \tau_k \bar{g}(y_{k-r}) + \bar{\sigma}(y_{k-r}) \Delta W_k$$

con  $Y_0 = y(0)$ . Del teorema 4.4, tenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq \tau} |Y_t - y(t)|^2 \right] = 0.$$

Retomando que  $\tau = \bar{\tau} \wedge R^M$  y  $\tau_h = \bar{\tau} \wedge R_h^{2M}$  tenemos que  $X_t = Y_t$  y  $x(t) = y(t)$  si  $0 \leq t \leq \tau \wedge \tau_h$ . Por tanto

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq \tau_h} |X_t - x(t)|^2 \right] = E \left[ \sup_{0 \leq t \leq \tau_h} |Y_t - y(t)|^2 \right] \leq E \left[ \sup_{0 \leq t \leq \bar{\tau}} |Y_t - y(t)|^2 \right].$$

Esto implica el resultado.  $\square$

### 4.3.2. Explosión de la solución numérica

Ya verificamos que bajo las condiciones de la proposición 4.11, la solución de (4.6) explota en tiempo finito. En esta sección probaremos que para casi todo  $\omega \in \Omega$ , el método numérico  $x(t)$  explota en tiempo finito  $T_h(\omega)$ .

**Lema 4.15.** *Sea  $y_k = \sum_{j=1}^k \sigma(x(t_{\lfloor j-r \rfloor})) \Delta B_j$ . Entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k}{k} = 0 \quad c.s.$$

*Demostración.* Definimos  $Z_j$  y  $a_j$  como sigue

$$Z_j = \frac{\Delta B_j}{\sqrt{\tau_j}}$$

$$a_j = \sigma(x(t_{\lfloor j-r \rfloor})) \sqrt{\tau_j} = \frac{\sqrt{h} \sigma(x(t_{\lfloor j-r \rfloor}))}{\sqrt{b(x(t_j))}},$$

entonces,

$$y_k = \sum_{j=1}^k a_j Z_j$$

De acuerdo con la hipótesis, los  $a_j$  son uniformemente acotados. Ahora, mostramos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E(y_k^4)}{k^4} < \infty \quad (4.17)$$

Notemos que  $Z_j$  es independiente de  $\mathcal{F}_{t_j}$  y  $Z_j$  está normalmente distribuido. Entonces, si  $i \neq j, l, m$ , obtenemos

$$\begin{cases} E(Z_i Z_j Z_l Z_m) = 0 \\ E(Z_i^2 Z_j^2) = 1 \\ E(Z_i^4) = 3 \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \sum_{j=1}^k Z_j \right)^4 \right] &= \sum_{j=1}^k E(Z_j^4) + 3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k E(Z_i^2 Z_j^2) \\ &= 3k + 3(k^2 - k) \\ &= 3k^2. \end{aligned}$$

Como  $a_j$  es  $\mathbb{F}_{t_j}$ -medible y  $a_j \leq \sqrt{\kappa_2 h}$ , entonces

$$\begin{cases} E(a_i^2 Z_i^2 a_j^2 Z_j^2) \leq \kappa_2^2 h^2 \\ E(a_i^4 Z_i^4) \leq 3\kappa_2^2 h^2, \end{cases}$$

entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
E(y_k^4) &= E \left[ \left( \sum_{j=1}^k a_j Z_j \right)^4 \right] \\
&= \sum_{j=1}^k E(a_j^4 Z_j^4) + 3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k E(a_i^2 Z_i^2 a_j^2 Z_j^2) \\
&\leq 3\kappa_2^2 h^2 k + 3\kappa_2^2 (k^2 - k) h^2 \\
&= 3\kappa_2^2 k^2 h^2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E(y_k^4)}{k^4} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\kappa_2^2 k^2 h^2}{k^4} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\kappa_2^2 h^2}{k^2} \\
&= 3\kappa_2^2 h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Usando el lema de Borel-Cantelli, la desigualdad de Chebyshev y la ecuación (4.17), obtenemos el resultado deseado.  $\square$

Ahora, analizamos el comportamiento asintótico de  $x(t)$  y mostramos que este concuerda con el comportamiento de la solución  $X_t$ . Este es el resultado principal de este trabajo.

**Teorema 4.16.** *Supongamos que  $b$ ,  $g$  y  $\sigma$  con las condiciones dadas en la ecuación (4.7) y las condiciones de la proposición 4.11. Si existe una constante  $\lambda > 0$  tal que para todo  $x \geq 0$*

$$g(x) \leq \lambda b(x), \quad (4.18)$$

entonces

(1)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(t_k)}{h(\lambda + 1)k} \leq 1 \quad c.s.$$

(2) *Para cada dato inicial  $x_0 > 0$ ,  $x(t)$  explota en tiempo finito con probabilidad 1.*

*Demostración.* (1) Definimos  $d_j = \tau_j g(x(t_{\lfloor j-r \rfloor}))$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
x(t_k) &= x(t_{k-1}) + \tau_k b(x(t_k)) + \tau_k g(x(t_{\lfloor j-r \rfloor})) + \sigma(x(t_{\lfloor j-r \rfloor})) \Delta B_k \\
&= x(t_{k-1}) + h + d_k + \sigma(x(t_{\lfloor j-r \rfloor})) \Delta B_k
\end{aligned}$$

Usando un argumento recursivo, tenemos que

$$\begin{aligned} x(t_k) &= x_0 + hk + \sum_{j=1}^k d_j + \sum_{j=1}^k \sigma(x(t_{\lfloor j-r \rfloor})) \Delta B_k \\ &= x_0 + hk + \sum_{j=1}^k d_j + y_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{x(t_k)}{hk} &= \frac{x_0}{hk} + \frac{y_k}{hk} + 1 + \frac{1}{hk} \sum_{j=1}^k d_j \\ &= \frac{x_0}{hk} + \frac{y_k}{hk} + 1 + \frac{1}{hk} \sum_{j=1}^k \tau_j g(x(t_{\lfloor j-r \rfloor})) \\ &= \frac{x_0}{hk} + \frac{y_k}{hk} + 1 + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{g(x(t_{\lfloor j-r \rfloor}))}{b(x(t_k))} \\ &\leq \frac{x_0}{hk} + \frac{y_k}{hk} + 1 + \lambda \rightarrow \lambda + 1 \text{ c.s.} \end{aligned}$$

- (2) Para probar que la explosión ocurre, es necesario que, con probabilidad 1,  $T_h < \infty$ . Notemos que para cada  $\alpha > 1$ , existe  $k_0(\omega) = k_0$  tal que

$$\begin{aligned} T_h &= \sum_{k=k_0}^{\infty} \tau_k \\ &= \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{h}{b(X_k)} \\ &\leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{h}{b(\alpha^{-1}hk)} \\ &\leq \int_{k_0-1}^{\infty} \frac{h}{b(\alpha^{-1}hs)} ds \end{aligned}$$

Si tomamos  $u = \alpha^{-1}hs$ , obtenemos

$$\begin{aligned} T_h &\leq \alpha \int_{\alpha^{-1}h(k_0-1)}^{\infty} \frac{1}{b(u)} du \\ &\leq \alpha \int_1^{\infty} \frac{1}{b(u)} du < \infty \end{aligned}$$

Luego el método numérico explota con probabilidad 1.

□

## 4.4. Ejemplo numérico

### 4.4.1. SDDE a trabajar

En esta sección presentamos el método numérico de la siguiente SDDE

$$\begin{cases} dX_t = \left[ \frac{X_t^4 + 5X_t^2 + 4}{2X_t^2 + X_t + 1} + X_{t-3}^2 \right] dt + \sqrt{X_{t-3}^2 + 1} dW_t \\ X_s = s^5 + 3s + 4 \end{cases} \quad s \in [-3, 0] \quad (4.19)$$

Ilustraremos la teoría expuesta anteriormente. Notemos que  $b$ ,  $g$  and  $\sigma$  satisfacen las condiciones de existencia, unicidad y explosión de la solución. En efecto, usando el teorema de los residuos de Cauchy,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{b(x)} dx &= \int_0^\infty \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{2x^2 + x + 1}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx \\ &= 2\pi i \left[ \frac{-8 + 2i - 1}{-12i} + \frac{-1 + i}{6i} \right] \\ &= 2\pi i \left[ \frac{5}{12i} \right] \\ &= \frac{5\pi}{6} < \infty \end{aligned}$$

donde  $i^2 = -1$ . Además,  $b$  es no decreciente,

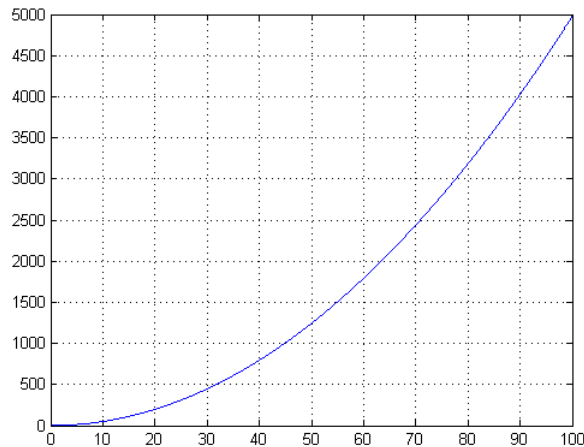
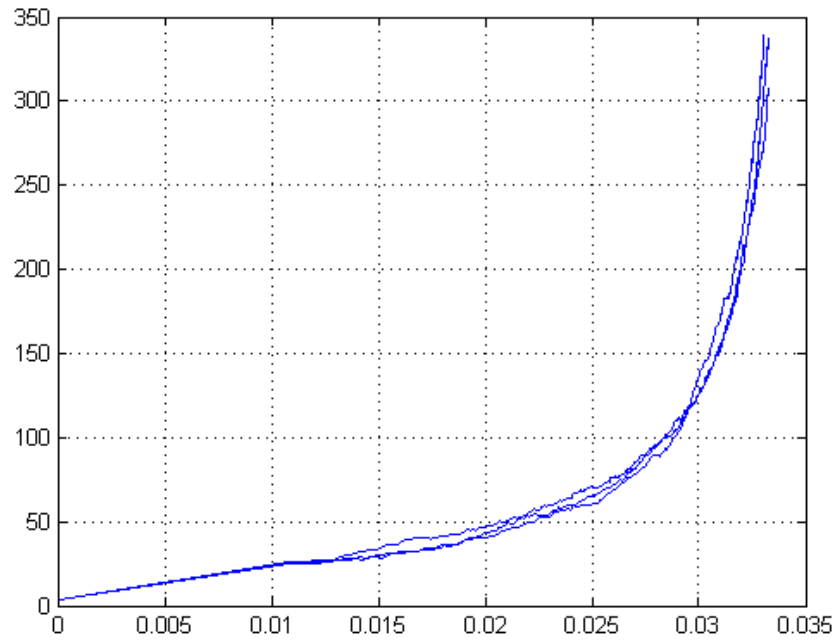
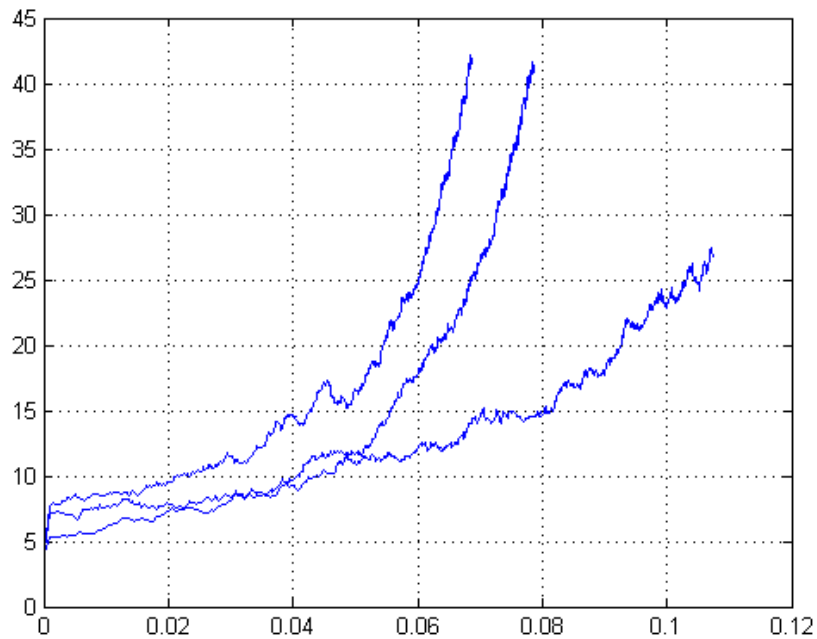


Figura 4.1: Gráfico de  $b(x)$

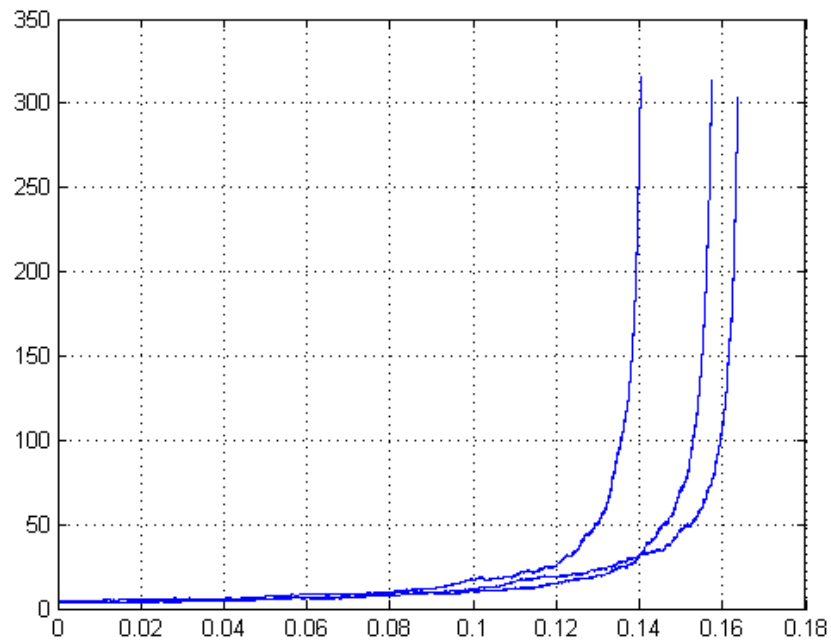
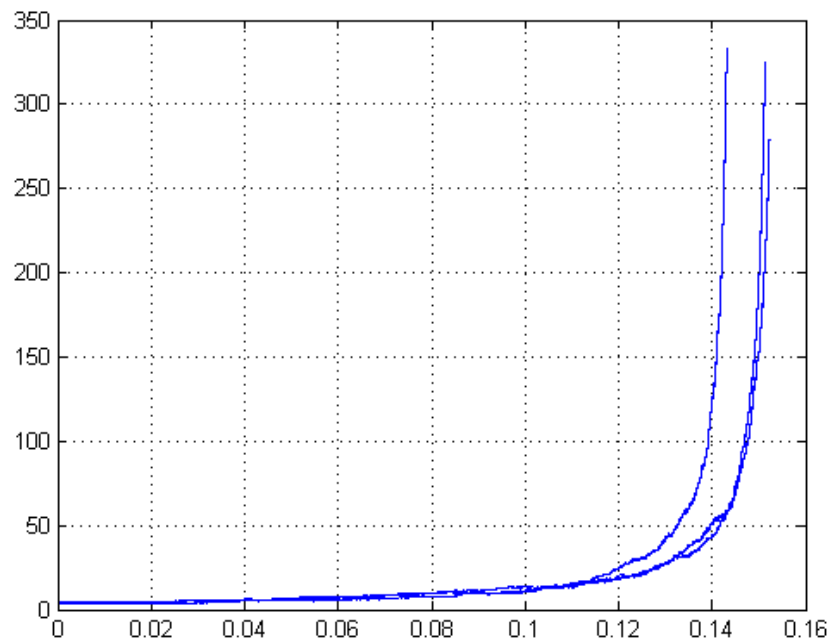
Los incrementos del movimiento Browniano se generaron con la rutina `randn` de Matlab. En las figuras 4.4.1, 4.4.1, 4.4.1 y 4.4.1 mostramos algunas de las trayectorias de la solución para diferentes valores de  $h$ .

A través del método numérico adaptativo tipo Euler-Maruyama propuesto en la ecuación (4.14), reprodujimos la explosión de la ecuación (4.8). Hicimos comparaciones de la inci-



Figura 4.2: Tres trayectorias,  $h = 0,1$ Figura 4.3: Tres trayectorias,  $h = 0,01$ 

dencia de la elección de  $h$  y pudimos visualizar que, a medida que  $h \searrow 0$ , se detecta la explosión con más rapidez y además la convergencia a la solución de (4.6).

Figura 4.4: Tres trayectorias,  $h = 0,0001$ Figura 4.5: Tres trayectorias,  $h = 0,000001$

---

## Bibliografía

---

- [1] BAI, X. & JIANG, J. *Comparison theorems for neutral stochastic functional differential equations*, Journal of Differential Equations **260** (2016), 7250-7277.
- [2] BACKER, C. & BUCKWAR, E. *Numerical analysis of explicit one-step methods for stochastic delay differential equations*, LMS Journal of Computation and Mathematics **3** (2000), 315-335.
- [3] BILLINGSLEY, P. *Probability and Measure*, John Wiley & Sons (1986).
- [4] BLANCO, L. & MUÑOZ, M. *Análisis Estocástico*, Universidad Nacional de Colombia,(2003).
- [5] BRZEZNIAK, Z. & ZASTAWNIAK, T. *Basic Stochastic Processes*, Springer (1999).
- [6] DÁVILA, J., FERNÁNDEZ, J., GROISMAN, P., ROSSI, J. & SUED, M. *Numerical Analysis of Stochastic Differential Equations with explosions*, Stochastic Analysis and Applications **23** (2005), 809-825.
- [7] DELBAEN, F. & SCHACHERMAYER, W. *The Mathematics of Arbitrage* Springer Finance (2008).
- [8] EARL, A & LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations* McGraw-Hill New York (1955).
- [9] GEIß, C. & MANTHEY, R. “Comparison theorems for stochastic differential equations in finite and infinite dimensions”, *Stochastic Processes and Their Applications* **53** (1994), 23-35.
- [10] GOPALSAMY, K. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic Publisher,(1992).
- [11] HUTCHINSON, G. E. *Circular Causal Systems in Ecology*, Annals of the New York Academy of Sciences **50**(4) (1948), 221-246.
- [12] JACOD, J. & SHIRYAEV, A. *Limit Theorems for Stochastic Processes* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften , Springer **288** (2003).
- [13] KARATZAS, I. & SHREVE, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics Springer 2nd Edition,(1992).
- [14] KLOEDEN, P. & PLATEN, E. *Numerical solution of Stochastic Differential Equations*, Springer,(1995).

- 
- [15] KOLMANOVSKII, V. & MYSHKIS, A. *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publisher, (1992).
- [16] KÜCHLER, U. & PLATEN, E. “Strong Discrete Approximation of Stochastic Differential Equations with Time Delay”, *Mathematics and Computers in Simulation* **54** (2000), 189-205.
- [17] KUO, H. *Introduction to Stochastic Integration* Springer (2006).
- [18] MAO, X. *Stochastic Differential Equations and Applications* Woodhead Publishing Limited **2** (2011).
- [19] MAO, X. “Numerical solutions of stochastic differential delay equations under the generalized Khasminskii-type conditions”, *Applied Mathematics and Computation* **217** (2011), 5512-5524.
- [20] MAO, X. & RASSIAS, M.J. “Khasminskii-type theorems for stochastic differential delay equations”, *Journal of Stochastic Analysis and Applications* **23** (2005), 1045-1069.
- [21] MAO, X. & SABANIS, S. “Numerical solutions of stochastic differential delay equations under local Lipschitz condition”, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **151** (2003), 215-227.
- [22] MEDVEGYEV, P. *Stochastic Integration Theory* Oxford University Press (2007).
- [23] MOHAMMED, S.E.A. “Stochastic Functional Differential Equations”, *Research Notes in Mathematics* (1984).
- [24] PROTTER, P. *Stochastic Integration and Differential Equations Applications of Mathematics*, Springer **21** (2004).
- [25] PULIDO, S. *Semimartingales and stochastic integration* (2011).
- [26] RESNICK, S.I. *A Probability Path*, Birkhauser (1999).
- [27] SHAO, J. *Mathematical Statistics Second Edition*, Springer (2003).
- [28] SHIRYAEV, A. *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory* Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, World Scientific **3** (1999).