UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sumas y Particiones con Números Poligonales de Rango Positivo

María Alejandra Osorio Angarita

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2011

Sumas y Particiones con Números Poligonales de Rango Positivo

María Alejandra Osorio Angarita

Trabajo Final presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Doctor Agustín Moreno Cañadas

Línea de Investigación:
Teoría de Números

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Tunja, Colombia
2011

(Dedicatoria o un lema)

A María Alejandra, Sebastián y Felipe por su comprensión y apoyo incondicional

Resumen

Se usaron resultados recientes relacionados con sumas mixtas de números cuadrados y triangulares con el fin de probar que cada número natural n de la forma $n = 8m + k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k \in \{1, 2, 5, 6\}$, se puede expresar como suma de tres cuadrados de una forma dada. Además, se usaron Particiones-$\mathcal{P}$ para obtener fórmulas para el número de algunas composiciones restringidas de un entero positivo n, en el cual cualquier suma parcial de las partes es una suma mixta de números cuadrados y triangulares.

Palabras clave: Composición, Ecuación Diofántica, Forma Cuadrática, Número cuadrado, Número triangular, Partición, Partición-$\mathcal{P}$, .

Abstract

We use some recent results concerning universal mixed sums of squares and triangular numbers in order to prove that all positive integers n of the form $= 8m + k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k \in \{1, 2, 5, 6\}$ can be written as a sum of three squares of numbers of a given shape. We also some $\mathcal{P}$-Partitions on order to obtain formulas for the number of some restricted compositions of a positive integer n in which any partial sum of the parts is a given mixed sum of squares and triangular numbers.

Keywords: Composition, Diophantine equation, Partition, $\mathcal{P}$-Partition, Quadratic form, Square Number, Triangular Number

Lista de Figuras

Contenido

Introducción

El objetivo principal de este trabajo consiste en estudiar los siguientes problemas, propuestos por R. Guy en 1994 [25]:

(1) *¿Qué teoremas hay, que establezcan que los números de una forma dada se puedan expresar como la suma de tres o más números poligonales de una forma también dada?*

(2) *¿Qué teoremas hay, que establezcan el número de particiones de un entero positivo con partes de tipo poligonal?*

Estos problemas tienen que ver con el conocido Teorema de Fermat de los números poligonales, que se describe de la siguiente forma: Todo número se puede escribir como una suma de a lo más n números n-gonales, o escrito de otra manera, como se cita en [39]: Para todo $m \geq 1$, todo entero no negativo puede ser escrito como la suma de $m+2$ números poligonales de orden $m+2$, donde el k-ésimo número poligonal de orden $m+2$ está dado por la expresión:

$$p_m(k) = \frac{1}{2}[mk(k-1)] + k$$

La investigación de este teorema ha permitido el desarrollo de la Teoría Aditiva de Números, en particular del capítulo correspondiente a las bases clásicas. M. Nathanson explica en qué consisten dichas bases clásicas así: en general, el conjunto A de enteros no negativos es llamado una *Base aditiva de orden h* si cada entero no negativo puede ser escrito como la suma de h elementos, no necesariamente distintos de A. El conjunto A es llamado una *base de orden finito* si A es una base de orden h para algún entero positivo h; las bases clásicas son los cuadrados, cubos, potencias superiores, al igual que los números poligonales y los números primos [39]. En este caso se debe mencionar que muchos de los grandes matemáticos han realizado investigaciones en esta dirección; Gauss, Legendre, Lagrange y Cauchy entre otros han dado aportes significativos en este campo, como se detallará más adelante.

El Teorema de Fermat de los Números Poligonales

El Teorema de Fermat de los números poligonales, fue probado por Cauchy en 1813 [10] y Nathanson en 1987 presentó una versión corta de la demostración de este resultado [38].

Antes de la prueba de Cauchy se dieron avances importantes a este problema, tales como el trabajo del matemático francés Lagrange en 1772, quien afirmó y probó que cada número natural puede ser expresado como la suma de cuatro cuadrados, basándose en resultados anteriores de Euler. El Teorema de Lagrange es considerado por Nathanson como uno de los aportes más importantes en la Teoría Aditiva de Números [39].

Euler probó que si n es un número triangular entonces también lo son $9n + 1$, $25n + 3$, $49n + 6$ y $81n + 10$, estos resultados le permitieron dar criterios para determinar cuáles números naturales pueden ser escritos como la suma de dos números triangulares. Además, caracterizó los números naturales que pueden ser expresados como suma de dos números cuadrados y un número triangular. También observó que cada número natural puede ser escrito como la suma de dos números enteros cuadrados y un número triangular [16, 17, 32].

Al parecer la primera demostración conocida de la aserción de Fermat, relacionada con la suma de tres números triangulares es debida a Gauss en 1796, quien probó que todo número de la forma $8k+3$, $k \in \mathbb{N}$ es una suma de tres cuadrados impares, por lo tanto todo entero no negativo es la suma de tres números triangulares, lo cual expresó en su diario de la siguiente manera:

$$\text{ΕΥΡΗΚΑ! num} = \Delta + \Delta + \Delta.$$

Legendre en 1798 probó que todo entero que no sea de la forma $4^a(8m+7)$, donde $a, m \in \mathbb{Z}$, se puede expresar como suma de tres cuadrados. Yendo más allá del trabajo de Legendre, Gauss en 1801 obtuvo una fórmula para establecer el número de representaciones primitivas de un entero como suma de tres cuadrados [39].

En 1917, S. Ramanujan encontró todos los vectores (a, b, c, d) de enteros positivos tales que la forma $ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2$ con $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ representa todos los números naturales [43]. Además, descubrió empíricamente 55 posibles formas cuaternarias y diez años más tarde Dickson observó que una de ellas, la forma $(1, 2, 5, 5)$ no representaba al número 15, pero probó que las demás eran correctas [15]. Este problema fue solucionado por H.D. Kloosterman [33] y representa una gran contribución en el campo de las formas cuadráticas [32].

L. Panaitopol en 2005 presentó aportes al estudio de las formas cuadráticas ternarias, basado en los trabajos de Ramanujan [49]. S. Cooper y M. Hirschhorn también motivados por los resultados de Ramanujan presentaron una familia de 15 resultados, algunos de los cuales tienen una interpretación interesante en términos del número de representaciones de un entero por una forma cuadrática [12].

W. Duke describe algunos problemas y resultados de representaciones de números naturales utilizando varias formas cuadráticas, principalmente en tres variables y con coeficientes en los números naturales [15]. De igual forma R. Schulze-Pillot presenta una revisión de trabajos relacionados con formas cuadráticas y discute algunos resultados sobre representaciones [44].

En la actualidad se conoce que el Teorema de Lagrange es un caso particular del Teorema Quince de Conway y Schneeberger [11], el cual establece que si una forma cuadrática de enteros representa los números $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15$ entonces representa todos los números enteros [4].

En cuanto al estudio de las sumas mixtas de números cuadrados y triangulares, en 2009 B. Kane probó el Teorema Ocho de los números triangulares, el cual es una generalización del Teorema "Eureka" de Gauss [30]. De igual manera, B. Kane, Z. Sun y otros han probado condiciones similares para sumas mixtas de números cuadrados y triangulares [24, 30–32, 40, 49].

Tomando resultados recientes relacionados con sumas mixtas universales de números cuadrados y triangulares, A.M. Cañadas y M.A.O. Angarita han probado que todos los enteros positivos n de la forma $n = 8m + k$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, 5, 6\}$, pueden ser escritos como una suma de tres números cuadrados de una forma dada [9].

Particiones y Composiciones

Una *Partición* de un entero positivo n es una sucesión finita no decreciente de enteros positivos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ tal que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Los λ_i se llaman las *partes* de la Partición. Una *Composición* es una partición en la cual el orden de las partes es esencial [1, 2].

Existen principalmente tres métodos para obtener resultados sobre particiones; el primero por argumentos puramente combinatoriales, el segundo por argumentos algebráicos con Series Generantes y finalmente por operaciones analíticas sobre las Series Generantes. P. A. MacMahon ha considerado la Teoría de las Particiones como una rama del Análisis combinatorio, incluyendo su estudio en los dos volúmenes de su libro [14].

El origen de las particiones se remonta al año 1669, cuando Gottfried Leibniz le escribió a Johann Bernoulli preguntándole si había considerado determinar el número de formas en que un número entero positivo puede ser separado en sus partes. Leibniz consideró que el problema era muy importante aunque difícil. Posteriormente, el matemático Philipp Naudé en 1740 le propuso a Euler las siguientes dos preguntas [50]:

(1) *Encuentre el número de formas de las que un número es una suma de un número dado de partes distintas.*

(2) *Encuentre el número de formas que un número es una suma de un número dado de partes iguales o distintas.*

Las Funciones Generantes fueron introducidas por Euler en 1748 en Introductio in Analysin infinitorum [50] y las utilizó como herramienta para descubrir propiedades interesantes de las particiones. Para dar respuesta a los dos interrogantes planteados por Naudé utilizó dichas Funciones Generantes y encontró el número de formas que n puede ser escrito como una suma de enteros positivos distintos, dando solución al primer problema.

En noviembre 10 de 1742, Euler en una carta a N. Bernoulli le manifestó hechos precedentes sobre particiones y dio aportes para dar respuesta al segundo problema planteado por Naudé [14].

P. R. Boscovich propuso un método para encontrar todas las particiones de un número dado n en partes enteras positivas y solucionó el problema de encontrar todas las formas, en las cuales un entero n dado puede ser descompuesto en un número asignado m de partes, iguales o distintas; pero la solución de Hindenburg es más simple y directa [14].

En relación con particiones en números cuadrados y triangulares se debe mencionar el trabajo del matemático alemán Carl Jacobi en su famoso Fundamenta Nova de 1829, quien introdujo las Funciones Elípticas y Theta y las utilizó como herramienta para el estudio de la ecuación:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2 = n.$$

Jacobi encontró fórmulas explícitas para el número de representaciones de un entero n como la suma de dos, cuatro, seis u ocho cuadrados. Por ejemplo, el número de representaciones de n como la suma de cuatro cuadrados está dado por:

$$r_4(n) = 8[2 + (-1)^n]\sigma_0,$$

donde σ_0 denota la suma de los divisores impares de n [25, 39].

Los Teoremas de Jacobi han sido generalizados por S.C. Milne, a quien se le atribuye el realizar las revisiones más amplias de literatura sobre suma de cuadrados [3, 36]. En el año 2002 Milne presentó varias familias de fórmulas explícitas exactas que implican cuadrados o números triangulares, dos de las cuales generalizan el Teorema de Jacobi, además, presentó un análisis especial de 2 números cuadrados, 2 triangulares, 6 cuadrados, entre otros [37].

Ewell ha dado fórmulas para el número de representaciones de un número natural como suma de dos números triangulares [16, 18]. Ono y otros han discutido el problema de determinar el número de representaciones de un entero n como suma de números triangulares, utilizando como herramienta las Formas Modulares [41].

En cuanto a particiones de números poligonales D. Lehmer denotó $P_k(n)$ al número de particiones de un número natural n en k cuadrados enteros positivos y resolvió casi todas las ecuaciones del tipo $P_k(n) = 1$. Lehmer afirmó que el problema general de encontrar una fórmula para $P_k(n)$ era de gran complejidad [35]. El caso $k = 3$ fue estudiado por E. Grosswald, A. Calloway y J. Calloway [21]. Posteriormente Grosswald dio una solución definitiva a este caso, dando el número de particiones de un entero n arbitrario en k cuadrados, en esta solución él no distinguió entre las particiones que tienen en cuenta el cero y las que no lo incluyen [22].

M. Hirschhorn probó la Conjetura de Gosper que afirma que toda suma de cuatro cuadrados impares distintos es la suma de cuatro cuadrados pares también distintos. Si $n \equiv 4 \pmod 8$, entonces el número de particiones de n en cuatro cuadrados impares distintos, es dos veces el números de particiones en cuatro cuadrados pares distintos menos el número de particiones en tres cuadrados enteros pares distintos [26]. Además, M. Hirschhorn y J. Sellers utilizaron como herramientas las Funciones Generantes y algunos argumentos combinatoriales para estudiar el número de particiones de un entero n en tres números triangulares, al igual que el número de particiones de un entero n cuyas partes son un número específico de números triangulares distintos. Además, probaron que $P_3^3(27n + 12) = 3P_3^3(3n + 1)$, donde $P_3^3(m)$ denota el número de particiones de un entero positivo m en tres números triangulares [28, 29].

H. Farkas usó la Teoría de las Funciones Theta para dar fórmulas que determinan el número de representaciones de un número como suma de tres cuadrados y el número de representaciones como una suma de tres números triangulares [19].

Recientemente, Z. Sun, B. Kane y otros investigadores en diferentes trabajos han presentado avances al problema de contar el número de formas en que se puede escribir un número entero como una suma mixta de número cuadrados y triangulares [30–32, 40, 49].

A.M. Cañadas y A. Irlande en 2010 utilizaron una herramienta combinatoria para producir fórmulas que determinan el número de particiones de un entero positivo con tres números poligonales de rango positivo de una forma dada, para obtener avances a los problemas (1) y (2) propuestos por R. Guy. Además presentaron un criterio sobre números que no se pueden escribir como suma de tres números poligonales [6]. Además, A.M. Cañadas y otros han usado el número de extensiones lineales para producir fórmulas para particiones de orden superior cuyas partes son de tipo poligonal [8].

De otra parte, R. Stanley ha mostrado que las particiones-$\mathcal{P}$ constituyen una buena herramienta para abordar diferentes problemas relacionados con particiones y permutaciones. Dichas particiones-$\mathcal{P}$ son transformaciones que preservan el orden, con dominio un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{P}$ en una cadena con reglas especiales, que permiten determinar cuándo dos valores iguales pueden ocurrir [1, 47, 48].

A.M. Cañadas y M.A.O. Angarita, en 2011 usaron como herramienta las particiones-$\mathcal{P}$ y obtuvieron fórmulas para el número de algunas composiciones restringidas de un entero positivo n, en las cuales cualquier suma parcial de las partes es una suma mixta de números cuadrados y triangulares [9].

Este trabajo se distribuye así: en el Capítulo 1 se presentan los principales resultados de sumas de dos, tres y cuatro números cuadrados; suma de números triangulares, sumas mixtas de cuadrados y triangulares y sumas de números poligonales, algunos de dichos resultados con su demostración. En el Capítulo 2 se muestran algunos resultados de particiones de números enteros positivos, en el Capítulo 3 se presentan algunos conceptos preliminares y resultados de posets, particiones-$\mathcal{P}$ y composiciones restringidas, en el Capítulo 4 se presentan resultados de particiones-$\mathcal{P}$ y composiciones en sumas mixtas de números cuadrados y triangulares y por último se presenta la Bibliografía.

1 Principales resultados de sumas de números poligonales

En este Capítulo se presentan resultados relevantes relacionados con la representación de un número entero como suma de números poligonales, haciendo un recorrido desde los resultados clásicos hasta relacionar investigaciones recientes. Se presentan las demostraciones de algunos de estos resultados.

La solución de problemas diofánticos es uno de los temas de investigación más interesantes en la Teoría Aditiva de Números. En este trabajo se estudiarán problemas diofánticos del tipo cuadrático [23], es decir, para una forma cuadrática entera Q y $n \in \mathbb{Z}$:

1. Determinar si la ecuación diofántica:

$$Q(x_1, \ldots, x_k) = n \tag{1-1}$$

   tiene soluciones (en este caso estamos interesados únicamente en las soluciones enteras de la ecuación (1-1)).

2. Si n es un entero representado por Q (es decir, $n \in N_Q$) determinar el número total de k- tuplas que satisfacen (1-1).

Por lo tanto, en el caso de formas cuadráticas, dar aportes a los planteamientos propuestos por R. Guy permitiría obtener avances en la investigación de problemas diofánticos del tipo cuadrático.

Para el estudio de problemas diofánticos se han utilizado diferentes herramientas, algunas de tipo analítico, tales como las Funciones Generantes y la Función Theta de Jacobi y otras provenientes de la Teoría Combinatoria, como lo son: los diagramas de Ferrers y de Young, la Teoría de las Particiones-$\mathcal{P}$, y las extensiones lineales de un Conjunto Parcialmente Ordenado $\mathcal{P}$.

1.1 Suma de dos números cuadrados

El problema de suma de dos cuadrados, se presenta explícitamente en [23] como:

1. Caracterizar los conjuntos de números enteros, para los cuales la ecuación diofántica

$$x^2 + y^2 = n \tag{1-2}$$

   tiene solución para enteros x y y.

2. Determinar el número de soluciones de (1-2).

Diofanto discutió varios problemas relacionados con la ecuación (1-2), para ello utilizó el lenguaje geométrico pero el significado de sus afirmaciones no siempre fue claro, además algunas de ellas no fueron correctas [23].

Teorema 1.1. *La ecuación diofántica (1-2) es solucionable si y sólo si todos los divisores primos q de n con $q \equiv 3 \pmod 4$ ocurren en n para una potencia par.*

Gauss y Jacobi tomaron como base este resultado para probar el teorema que permite calcular el número de representaciones.

Teorema 1.2. *(Fermat-Euler). Un número primo p puede ser escrito en la forma $x^2 + y^2$ con x e $y \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $p \equiv 3 \pmod 4$.*

Respecto a las contribuciones para dar avances en este problema, L. Dickson menciona resultados de más de cien matemáticos, entre ellos se pueden destacar: Goldbach, Legendre, Lagrange, Cauchy, Dirichlet y Catalán [14].

1.2 Suma de tres números cuadrados

Para analizar el problema de la suma de tres cuadrados se deben tener en cuenta los siguientes aspectos [23]:

1. Caracterizar los conjuntos de números enteros, para los cuales la ecuación diofántica

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1-3}$$

   tiene solución para enteros x, y y z.

2. Determinar el número de soluciones de la ecuación (1-3).

Uno de los resultados más importantes del problema de la suma de tres cuadrados es el Teorema de Gauss-Legendre, pero antes de presentarlo mencionaremos dos lemas, cuyas demostraciones pueden verse en [39].

Lema 1.3. *Si n es un entero positivo tal que $n \equiv 2 \pmod 4$ entonces n puede ser representado como la suma de tres cuadrados.*

Lema 1.4. *Si n es un entero positivo y $n \equiv 1, 3$ o $5 \pmod 8$ entonces n puede ser representado como la suma de tres cuadrados.*

El siguiente teorema es conocido como el Teorema de Gauss-Legendre, cuyo resultado fue probado por Legendre en 1798.

Teorema 1.5. *(Teorema de Gauss-Legendre). La ecuación diofántica*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n \tag{1-4}$$

tiene soluciones en enteros $x_i (i = 1, 2, 3)$ si y sólo si n no es de la forma $4^a(8k + 7)$, con $a, k \in \mathbb{Z}$. Para todo n, $r_3(4^a n) = r_3(n)$.

Demostración Parte I. Para cualquier entero x, siempre se tiene que:

$$x^2 \equiv 0, 1, \text{ o } 4 \pmod 8.$$

En general, se puede tomar $x_i = 2^{ai} y_i$, con $2 \nmid y_1, y_2, y_3$, de modo que $y_i^2 \equiv 1 \pmod 8$. Sin pérdida de generalidad, se hace $0 \leq a = a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Entonces $n = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 4^a(y_i^2 + 4^b y_2^2 + 4^c y_3^2) = 4^a n_1$, digamos con $0 \leq b \leq c$. Si $b \geq 2$, entonces $n_1 \equiv 1 \pmod 8$. De otra manera, de acuerdo a los posibles valores de la pareja (b, c): $(0, 0), (0, 1), (0, c), (1, 1), (1, c)$ con $c \geq 2$, se encuentra que $n_1 \equiv 3, 6, 2, 1, 5 \pmod 8$, respectivamente. Si $a \geq 1$ y $n_1 \equiv 1 \pmod 8$, también se puede escribir $n = 4^a(8k+1) = 4^{a-1}(8k_1+4)$ y si $a \geq 2, n = 4^{a-2}(8k_2+0)$. Puesto que si n admite una representación como suma de tres cuadrados entonces es necesariamente de la forma $n = 4^a(8k + m)$, donde $0 \leq m \leq 6$. También $n \equiv 0 \pmod 4$ ocurre sólo si todos los sumandos son pares; en particular si $4 \mid n$ entonces (1-4) no tiene soluciones primitivas. Ahora si $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ entonces $4n = (2x_1)^2 + (2x_2)^2 + (2x_3)^2$ y recíprocamente si $4n = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, entonces los tres y_i's son pares, es decir $y_i = 2x_i$, de modo que $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ y hay una correspondencia 1 a 1 entre las representaciones por sumas de tres cuadrados de n y las de $4n$. De ahí se tiene que $r_3(n) = r_3(4n)$ y por inducción sobre a, $r_3(n) = r_3(4^a n)$.

Para la prueba de la recíproca del Teorema de Gauss-Legendre se usan algunas propiedades de las formas binarias y ternarias, las cuales se presentarán previamente como una serie de lemas (sin demostración).

Lema 1.6. *Una forma cuadrática binaria* $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ *es definida positiva si y sólo si los dos menores principales son positivos.*

Como

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

El lema 1.6 requiere que $a_{11} > 0$ y $d_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

Lema 1.7. *En cada clase de formas binarias definidas positivas, hay una forma con:*

$$2|a_{12}| \leq a_{11} \leq a_{22};$$

tal forma es llamada reducida. En una forma reducida

$$a_{11} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{d_2}.$$

Corolario 1.8. *Toda forma cuadrática binaria definida positiva de discriminante* $d_2 = 1$ *es equivalente a una suma de dos cuadrados.*

Lema 1.9. *Una forma cuadrática ternaria* $Q = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$ *es definida positiva si y sólo si todos los tres menores principales de la matriz* $A = (a_{ij})$ *son positivos.*

Como en el caso de las formas binarias, esto significa que:

$$d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad b = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \text{y} \quad a_{11} > 0.$$

Lema 1.10. *Cada clase de formas cuadráticas ternarias definidas positivas* $Q = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$ *contiene una forma reducida con:*

$$0 \leq a_{11} \leq \frac{4}{3}\sqrt[3]{d}, \qquad 2|a_{12}| \leq a_{11}, \qquad 2|a_{13}| \leq a_{11}.$$

Corolario 1.11. *Toda forma cuadrática ternaria definida positiva de discriminante* $d_3 = 1$ *es equivalente a una suma de tres cuadrados.*

Demostración Parte II. Si $n = 4^a n_1, 4 \nmid n_1$ y n_1 es la suma de tres cuadrados, digamos que $n_1 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$ entonces $n = \sum_{i=1}^{3} (2^a x_i)^2$ es también una suma de tres cuadrados. De ahí que es suficiente considerar sólo el caso $n \not\equiv 0 \pmod 4$. Se sabe que si $n \equiv 7 \pmod 8$ entonces (1-4) no tiene solución, por lo tanto sólo se consideran los casos $n \not\equiv 0, 4, 7 \pmod 8$.

La idea de la demostración consiste en mostrar primero que bajo estas condiciones existe una forma cuadrática ternaria definida positiva $Q = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$ de discriminante 1, la cual representa a n. Luego se utilizará el Corolario 1.11 para completar la prueba.

La ecuación

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = n \tag{1-5}$$

tiene nueve parámetros, los seis coeficientes a_{ij} y los tres valores x_i. Las condiciones a ser encontradas junto a (1-5) son:

$$d_3 =\mid a_{ij} \mid= 1(> 0), \qquad b = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \text{y} \quad a_{11} > 0.$$

Si (1-5) se cumple para alguna forma Q con $d_3 = 1$, entonces se cumplirá para cualquier otra forma $Q_1 \sim Q$. De hecho, mientras es verdadero que formas equivalentes representan los mismos enteros, la recíproca no es verdadera. El mismo entero puede ser representado por formas no equivalentes del mismo discriminante. Tales formas son llamadas a pertenecer al mismo género. Por ejemplo las dos formas $Q_1 = x^2 + 161y^2$ y $Q_2 = 9x^2 + 2xy + 18y^2$ ambas tienen discriminante $d_2 = 161$. También $Q_1(1,1) = 162 = Q_2(0,3)$ y $Q_1(3,0) = 9 = Q_2(1,0)$. Sin embargo, las dos formas no son equivalentes. En verdad, si se hace $x = ax_1 + by_1, \quad y = cx_1 + dy_1$, entonces $Q_1(x,y) = Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2$, con $A = a^2 + 161c^2, \quad B = ab + 161cd, \quad C = b^2 + 161d^2$. Si esto se identifica con $Q_2(x_1, y_1)$, se tiene que solucionar el sistema de ecuaciones:

$$a^2 + 161c^2 = 9, \qquad ab + 161cd = 1, \qquad b^2 + 161d^2 = 18$$

en enteros a, b, c, d con $ad - bc = 1$. La primera ecuación requiere $c = 0, a = \pm 3$; la segunda $b = a^{-1} = \pm\frac{1}{3}$, y la última $d = \pm\frac{1}{3}$. Con adecuada selección de los signos, se encuentra que $ad - bc = 1$, pero $b, d \notin \mathbb{Z}$.

Es obvio que dada una forma, su clase de equivalencia entera pertenece a un género dado, en consecuencia, un género consiste en un cierto número de clases de equivalencia de formas.

Si el discriminante $D = b^2 - 4ac$ de la forma $ax^2 + bxy + cy^2$ es divisible por t primos distintos, entonces $g = 2^{t-1}$ excepto para $-D = 4n$, con $n \equiv 3 \pmod 4$, cuando $g = 2^{t-2}$, y para $-D = 4n$, $n \equiv 0 \pmod 8$, cuando $g = 2^t$, es un caso que no nos concierne. Esto es esecialmente equivalente a la regla de Gauss de contar sólo los divisores primos impares de n. Siguiendo cuidadosamente los números de diferentes selecciones posibles de los parámetros, se puede obtener el número exacto $r_3(n)$ de soluciones de la ecuación (1-4), esencialmente como Gauss afirmó.

El interés en este caso es completar la demostración del Teorema 1.5. Para hacer esto tan simple como sea posible, se toman los valores de tres de los nueve parámetros disponibles y tomando $a_{13} = 1, a_{23} = 0, a_{33} = n$. Esto reduce Q a:

$$Q = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + nx_3^2.$$

Obviamente, $Q(0,0,1) = n$; de ahí también se toma $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1$. Sólo resta determinar los tres coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{22} sujetos a las condiciones:

$$a_{11} > 0, \qquad b = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \qquad d_3 = 1.$$

Como

$$d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 1 & 0 & n \end{vmatrix} = nb - a_{22},$$

la última condición es equivalente a $a_{22} = b_n - 1$, mientras que (para $n \geq 2$) la primera condición se satisface automáticamente sobre la cuenta de las otra dos y puede ser ignorada. Se tiene, $a_{22} = nb - 1 \geq 2b - 1 > 0$ y $a_{11}a_{22} = a_{12}^2 + b \geq b > 0$, lo cual por ser $a_{22} > 0$ implica $a_{11} > 0$.

La principal dificultad es la búsqueda apropiada de b con el fin de asegurar que $a_{11} = a_{22}^{-1}(a_{12}^2 + b) \in \mathbb{Z}$. Esta condición significa que $-b \equiv a_{12}^2 \pmod{a_{22}}$. Como a_{12} es un entero arbitrario, la condición realmente se reduce a la selección de $-b$ como un residuo cuadrático módulo a_{22}, es decir, módulo $nb - 1$. La forma más fácil para lograr esto es buscar b tal que $nb - 1 = p$ o $nb - 1 = 2p$ con p primo y verificar que $(\frac{-b}{p}) = +1$ o $(\frac{-b}{p}) = (\frac{-b}{2}) = +1$, respectivamente. Es conveniente tratar los casos de n par y n impar separadamente. En cualquier caso se debe hacer uso del Teorema de Dirichlet que si $(k, m) = 1$, entonces la progresión aritmética $kr + m (r = 0, 1, 2, \dots)$ contiene infinitamente muchos primos [5].

(i) Sea $n \equiv 2$ o $6 \pmod 8$. De $(4n, n-1) = 1$ se sigue del Teorema de Dirichlet que hay un entero m tal que $4nm + (n-1) = p$, con p primo [5]. Entonces se selecciona $b = 4m + 1$, de modo que, $p = bn - 1$, y se observa que $b \equiv p \equiv 1 \pmod 4$. Además,

$$(\frac{-b}{p}) = (\frac{b}{p}) = (\frac{p}{b}) = (\frac{bn-1}{b}) = (\frac{-1}{b}) = 1.$$

Con este b los coeficientes restantes de Q se obtienen fácilmente. De verdad, $a_{22} = bn - 1 = p > 0$ y $-b \equiv a_{12}^2 \pmod p$ es solucionable, encontrando a_{12}. En consecuencia $a_{11} = (b + a_{12}^2)/a_{22}$ es un entero y Q se determina completamente.

(ii) Si $n \equiv 1, 3$, o $5 \pmod 8$, se busca c tal que $cn - 1 \equiv 2 \pmod 4$. Entonces $(4n, (cn - 1)/2) = 1$ y por el Teorema de Dirichlet, se puede buscar m tal que $4nm + (cn-1)/2 = p$, un primo [5]. Ahora se hace $b = 8m + c$, tal que $2p = (8m + c)n - 1 = bn - 1$. Se puede verificar que, con n en cualquiera de las tres clases de residuos módulo 8, $-b$ es un residuo cuadrático módulo $2p$. Por ejemplo, si $n \equiv 1 \pmod 8$, sea $c = 3$. Entonces $b \equiv c \equiv 3 \pmod 8$, $p \equiv (3n - 1)/2 \equiv 1 \pmod 4$, y $(\frac{-b}{p}) = (\frac{b}{p}) = (\frac{p}{b})$; también $(\frac{-2}{b}) = (\frac{-1}{b})(\frac{2}{b}) = (-1)^2 = +1$. De ahí que

$$(\frac{-b}{p}) = (\frac{-b}{p})(\frac{-2}{b}) = (\frac{p}{b})(\frac{-2}{b}) = (\frac{-2p}{b}) = (\frac{1 - bn}{b}) = (\frac{1}{b}) = 1,$$

como se afirmó. Los casos $n \equiv 3$ o $5 \pmod 8$ son analizados similarmente. Luego se procede como en (i). Obviamente, $a_{22} = bn - 1 = 2p, -b \equiv u^2 \pmod p$ es solucionable y también lo es $-b \equiv u^2 \pmod 2$.

De ahí que $-b \equiv a_{12}^2$ tiene una solución a_{12}^2 tal que $b + a_{12}^2$ es divisible por $2p = a_{22}, a_{11} = (a_{12}^2 + b)/a_{22} \in \mathbb{Z}$ y se obtiene el resultado, quedando completa la demostración. □

Teorema 1.12. *Si n es un número entero positivo tal que $n \equiv 3 \pmod 8$, entonces n es la suma de tres cuadrados impares.*

Demostración. Recordemos que $x^2 \equiv 0, 1$ o $4 \pmod 8$ para todo número entero x. Si $n \equiv 3 \pmod 8$ es una suma de tres cuadrados, entonces cada uno de los cuadrados debe ser congruente a $1 \pmod 8$ y así cada uno de los cuadrados debe ser impar. Esto completa la prueba. □

En 1939 W. Jones y G. Pall usaron la teoría de las formas cuadráticas ternarias para probar que para cualquier número natural n se tiene [24]:

$$8n + 1 = ax^2 + by^2 + cz^2$$

para algún $x, y, z \in \mathbb{Z}$ si el vector (a, b, c) pertenece al conjunto:

$$(1, 1, 16), (1, 4, 16), (1, 16, 16), (1, 2, 32), (1, 8, 32), (1, 8, 64).$$

En el año 2005 L. Panaitopol probó el siguiente resultado [42]:

Teorema 1.13. *Sean a, b, c enteros positivos con $1 \leq a \leq b \leq c$. Para cada número natural impar n existen x, y y z enteros no negativos tales que:*

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2$$

si y sólo si el vector (a, b, c) es $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ o $(1, 2, 4)$.

Según Dickson, Euler ya había notado que todo entero impar se puede representar por $x^2 + y^2 + 2z^2$ con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ [14].

1.3 Suma de cuatro números cuadrados

Uno de los resultados más destacados en la Teoría Aditiva de Números es el Teorema de Lagrange, cuya demostración puede verse detalladamente en [39].

Teorema 1.14. *(Lagrange). Todo entero no negativo es la suma de cuatro cuadrados.*

Demostración. Es fácil chequear la Identidad polinómica formal:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2, \tag{1-6}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \\ z_2 &= x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3 \\ z_3 &= x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_4 - x_4y_2 \\ z_4 &= x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 + x_3y_2 \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

Esto implica que si dos números son ambos suma de cuatro cuadrados, entonces su producto es también la suma de cuatro cuadrados. Todo entero no negativo es el producto de números primos, es decir, es suficiente probar que todo número primo es la suma de cuatro cuadrados. A partir de que $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, sólo se consideran los primos impares p.

El conjunto de cuadrados:

$$\{a^2 \mid a = 0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$$

representa $(p+1)/2$ distintas clases de congruencia módulo p. Similarmente, el conjunto de enteros

$$\{-b^2 - 1 \mid b = 0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$$

representa $(p+1)/2$ distintas clases de congruencia módulo p. A partir de que hay sólo p diferentes clases de conguencia módulo p, por el Principio del Palomar deben existir enteros a y b tales que $0 \leq a, \quad b \leq (p-1)/2$ y

$$a^2 \equiv -b^2 - 1 \pmod{p},$$

es decir,

$$a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

donde $a^2 + b^2 + 1 = np$. Entonces

$$p \leq np = a^2 + b^2 + 1^2 + 0^2 \leq 2(\frac{p-1}{2})^2 + 1 < \frac{p^2}{2} + 1 < p^2,$$

y además

$$1 \leq n < p.$$

Si m es el menor entero positivo tal que mp sea la suma de cuatro cuadrados entonces existen enteros x_1, x_2, x_3, x_4 tal que:

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

y

$$1 \leq m \leq n < p.$$

Se debe mostrar que $m = 1$.

Se supone que no lo es. Entonces $1 < m < p$. Se buscan enteros y_i tales que:

$$y_i \equiv x_i \pmod{m}$$

y

$$\frac{-m}{2} < y_i \leq \frac{m}{2}$$

para $i = 1, \ldots, 4$. Entonces:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = mp \equiv 0 \pmod{m}$$

y

$$mr = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$

para algún entero no negativo r. Si $r = 0$, entonces $y_i = 0$ para todo i y cada x_i^2 que sea divisible por m^2. Entonces mp es divisible por m^2 y además p es divisible por m. Esto es imposible, puesto que p es primo y $1 < m < p$. Por lo tanto $r \geq 1$ y

$$mr = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \leq 4(m/2)^2 = m^2$$

Además, $r = m$ si y sólo si m es par y $y_i = m/2$ para todo i. En este caso, $x_i \equiv m/2 \pmod{m}$ para todo i y también $x_i^2 \equiv (m/2)^2 \pmod{m^2}$ y $mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv 4(m/2)^2 = m^2 \equiv 0 \pmod{m^2}$.

Esto implica que p es divisible por m, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $1 \leq r < m$.

Aplicando la Identidad Polinomial (1-6) se obtiene:

$$\begin{aligned} m^2rp =&(mp)(mr) \\ =&(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) \\ =&z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2 \end{aligned}$$

Donde los z_i son definidos por las ecuaciones (1-7). A partir de que $x_i \equiv y_i \pmod m$, estas ecuaciones implican que $z_i \equiv 0 \pmod m$ para $i = 1, \ldots, 4$. Sea $w_i = z_i/m$ entonces $w_1, \ldots, w_4$ son enteros y

$$rp = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2,$$

lo cual contradice la minimalidad de m. Por lo tanto $m = 1$ y el primo p es la suma de cuatro cuadrados. Esto completa la demostración. □

1.4 Suma de números triangulares

En esta sección se presentan algunos resultados importantes de suma de números triangulares, entre ellos el Teorema de Gauss y otros resultados recientes.

Teorema 1.15. *(Gauss). Todo número entero no negativo es la suma de tres números triangulares.*

Demostración. Los números triangulares t_k son enteros de la forma $\frac{k(k+1)}{2}$, con $k \in \mathbb{N}$. Si $n \geq 1$, por Teorema 1.12 el número entero $8n+3$ es la suma de tres cuadrados impares y además existen enteros no negativos k_1, k_2, k_3 tales que:

$$8n+3 = (2k_1+1)^2 + (2k_2+1)^2 + (2k_3+1)^2$$

$$8n+3 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1 + 4k_2^2 + 4k_2 + 1 + 4k_3^2 + 4k_3 + 1$$

$$8n+3 = 4(k_1^2 + k_1 + k_2^2 + k_2 + k_3^2 + k_3) + 3$$

$$8n = 4(k_1^2 + k_1 + k_2^2 + k_2 + k_3^2 + k_3)$$

Por lo tanto:
$n = \frac{k_1(k_1+1)}{2} + \frac{k_2(k_2+1)}{2} + \frac{k_3(k_3+1)}{2}$. □

El Teorema de Lagrange es el Teorema de los números poligonales para cuadrados y el Teorema de Gauss es el Teorema de los números poligonales para triangulares.

Liouville en 1862 probó el siguiente resultado [3].

Teorema 1.16. *Sean a, b, c enteros positivos con $a \leq b \leq c$. Cada número natural n puede ser escrito como $at_x + bt_y + ct_z$ con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ si y sólo si (a, b, c) está entre los siguientes vectores*

$$(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4).$$

J. Ewell en 1998 presentó como resultado el Teorema 1.17 y la Nota 1.18 que se mencionan a continuación [17].

Teorema 1.17. *Para cada número impar $m = 2j + 1$, el número:*

$$m^2 + \frac{m^2 - 1}{8} = (2j + 1)^2 n + j(j + 1)/2 = (2jk + j + k)(2jk + j + k + 1)/2$$

es un número triangular.

Nota 1.18. Del Teorema 1.17 se sigue que de cada suma $n = t_1 + t_2$ de dos números triangulares dados surge una sucesión infinita de tales sumas correspondiente a m impar:

$$m^2 + \frac{m^2 - 1}{4} = (m^2 t_1 + \frac{m^2 - 1}{8}) + (m^2 t_2 + \frac{m^2 - 1}{8})$$

donde, n es la suma de dos números triangulares $j(j+1)/2+k(k+1)/2$ exactamente cuando

$$2(4n + 1) = (2j + 1)^2 + (2k + 1)^2.$$

y por métodos estándar de la Teoría de Números $2(4n+1)$ es la suma de dos cuadrados sólo cuando los factores primos de $(4n + 1)$ de la forma $p = 4r + 3$ ocurren en una potencia par.

De otra parte, B. Kane presentó la siguiente generalización del Teorema "Eureka" de Gauss [30]:

Teorema 1.19. *Sea la sucesión $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k$. Entonces*

(a) La suma de números triangulares

$$f(x) = f_b(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i t_{x_i}$$

representa cada entero positivo si y sólo si f_b representa los números enteros $1, 2, 4, 5,$ y 8.

(b) La correspondiente forma diagonal cuadrática $Q(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i s_{x_i}$ con x_i todos impares representa todos los números enteros de la forma:

$$8n + \sum_{i=1}^{k} b_i, \qquad n \geq 0$$

si y sólo si representa:

$$8 + \sum_{i=1}^{k} b_i, \qquad 16 + \sum_{i=1}^{k} b_i, \qquad 32 + \sum_{i=1}^{k} b_i, \qquad 40 + \sum_{i=1}^{k} b_i, \text{ y} \qquad 64 + \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

1.5 Sumas mixtas de números cuadrados y triangulares

De acuerdo con L. Dickson, L. Euler observó que el hecho de que $8n+1$ sea una suma de tres cuadrados de números enteros implica que n pueda ser expresado como la suma de dos números cuadrados y un triangular [14].

E. Lionnet afirmó que un número natural n es una suma de dos números triangulares y un cuadrado [14]. El siguiente teorema probado por V. Lebesgue [34] y M. Réalis [45], posteriormente también fue probado por H. Farkas en 2006 utilizando la Teoría de las Funciones Theta [19].

Teorema 1.20. *Todo entero positivo puede ser escrito como la suma de dos números cuadrados más un número triangular y todo entero positivo puede ser escrito como la suma de dos números triangulares más un número cuadrado.*

Como resultado más reciente se presenta el siguiente teorema, que fue probado por Z. Sun en 2007 [49].

Teorema 1.21. *(a) Cualquier número natural es suma de un número cuadrado par y dos números triangulares, y cada número entero positivo es una suma de un número triangular más x^2+y^2 para algún $x, y \in \mathbb{Z}$ con $x \not\equiv y \pmod 2$ o $x = y > 0$.*

(b) Sean a, b, c números enteros positivos con $a \leq b$. Si cada $n \in \mathbb{N}$ puede ser escrito como $ax^2 + by^2 + ct_z$ con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ entonces (a, b, c) está entre los siguientes vectores:

$(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(1,2,2)$, $(1,2,4)$,

$(1,3,1)$, $(1,4,1)$, $(1,4,2)$, $(1,8,1)$, $(2,2,1)$.

(c) Sean a, b, c números enteros positivos con $b \geq c$. Cada $n \in \mathbb{N}$ puede ser escrito como $ax^2 + bt_y + ct_z$ con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ entonces (a, b, c) está entre los siguientes vectores:

$(1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,2,2)$, $(1,3,1)$, $(1,4,1)$, $(1,4,2)$, $(1,5,2)$,

$(1,6,1)$, $(1,8,1)$, $(2,1,1)$, $(2,2,1)$, $(2,4,1)$, $(3,2,1)$, $(4,1,1)$, $(4,2,1)$.

El Teorema 1.22 que se presenta más adelante fue probado en 2007 por Guo, Pan y Sun; para dicha prueba utilizaron el Teorema de Gauss-Legendre y la Identidad de Jacobi, ésta última se menciona antes de presentar el teorema [24].

Identidad de Jacobi. Se tiene que

$$3(x^2+y^2+z^2)=(x+y+z)^2+2\left(\frac{x+y-2z}{2}\right)^2+6\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \tag{1-8}$$

Teorema 1.22. *Todo $n \in \mathbb{N}$ puede ser expresado en alguna de las siguientes formas con $x, y, z \in \mathbb{Z}$:*

$$x^2+3y^2+t_z, \quad x^2+3t_y+t_z, \quad x^2+6t_y+t_z, \quad 3x^2+2t_y+t_z, \quad 4x^2+2t_y+t_z.$$

Demostración. Para esta prueba se toma básicamente el resultado del Teorema de Gauss-Legendre y se aplica la Identidad de Jacobi.

(i) Por el Teorema de Gauss-Legendre, se tiene que $8n+3=x^2+y^2+z^2$ para algún $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Se tiene que cada uno de los x, y, z es congruente a 1 o -1 módulo 4. Sin pérdida de generalidad, se asignaron $x \equiv y \equiv z \equiv 1 \pmod 4$. Dos de los x, y, z son congruentes módulo 8, es decir, $x \equiv y \pmod 8$. Haciendo

$$x_0=\frac{x-y}{8}, \quad y_0=\frac{x+y-2}{4}, \quad y \quad z_0=\frac{z-1}{2}.$$

Entonces,

$$8n+3=2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+z^2=2(4x_0)^2+2(2y_0+1)^2+(2z_0+1)^2$$

y por lo tanto, $n=4x_0^2+2t_{y_0}+t_{z_0}$.

(ii) Por el Teorema de Gauss-Legendre, $12(4n+2)=x^2+y^2+z^2$ para $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Como $x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \pmod 3$, se puede buscar convenientemente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{\pm 1\}$ tal que $\varepsilon_1 x \equiv \varepsilon_2 y \equiv \varepsilon_3 z \equiv 0$ o $1 \pmod 3$. Por lo tanto se puede asignar $x \equiv y \equiv z \pmod 3$. A partir de que $x^2+y^2+z^2 \equiv 8 \pmod{16}$, x, y, z son todos pares y exactamente uno de ellos es divisible por 4 . Suponga que $x \equiv y+2 \equiv z+2 \equiv 0 \pmod 4$. Se puede ver que:

$$x+y+z \equiv 0 \pmod{12}, \quad x+y-2z \equiv 6 \pmod{12}, \quad x-y \equiv 6 \pmod{12}.$$

Tomando

$$x_0=\frac{x+y+z}{12}, \quad y_0=\frac{x+y-2z-6}{12}, \quad y \quad z_0=\frac{x-y-6}{12}$$

Por la Identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned}36(4n+2) &= 3(x^2+y^2+z^2)\\ &= (12x_0)^2+2(6y_0+3)^2+6(6z_0+3)^2\\ &= 144x_0^2+72y_0(y_0+1)+18+216z_0(z_0+1)+54.\end{aligned}$$

por lo tanto se tiene que: $n = x_0^2 + t_{y_0} + 3t_{z_0}$.

(iii) Sea $\varepsilon \in \{0,1,3\}$. Por el Teorema de Gauss-Legendre, $24n+3+6\varepsilon = x^2+y^2+z^2$ para algún $x,y,z \in \mathbb{Z}$. Como $3|x^2+y^2+z^2$, sin pérdida de generalidad se supone que $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \quad o \quad 1 \pmod 3$. Aplicando la Identidad de Jacobi, se obtiene:

$$72n+9+18\varepsilon = (x+y+z)^2+2(\frac{x+y-2z}{2})^2+6(\frac{x-y}{2})^2.$$

Recordemos que $x^2+y^2+z^2 \equiv 3+6\varepsilon \pmod 8$. Si $\varepsilon = 0$, entonces, x,y,z son impares y dos de ellos son congruentes módulo 4, es decir, $x \equiv y \pmod 4$. En el caso de que $\varepsilon = 1$ se puede suponer que $x \equiv y \equiv z-1 \equiv 0 \pmod 2$ y $x \equiv y \pmod 4$. Cuando $\varepsilon = 3$, se puede asumir que $x \equiv 2 \pmod 4$, $4 \mid y$ y $2 \nmid z$. Claramente,

$$x+y+z \equiv 3 \pmod 6, \quad x+y-2z \equiv \begin{cases} 0 \pmod{12} & \text{si } \varepsilon = 0,3,\\ 6 \pmod{12} & \text{si } \varepsilon = 1,\end{cases}$$

y

$$x-y \equiv \begin{cases} 0 \pmod{12} & \text{si } \varepsilon = 0,1,\\ 6 \pmod{12} & \text{si } \varepsilon = 3,\end{cases}$$

Haciendo

$$x_0 = \begin{cases} (x+y-2z)/12 & \text{si } \varepsilon = 0,\\ (x-y)/12 & \text{si } \varepsilon = 1,\\ (x+y-2z)/12 & \text{si } \varepsilon = 3,\end{cases}$$

$$y_0 = \begin{cases} (x-y)/12 & \text{si } \varepsilon = 0,\\ (x+y-2z-6)/12 & \text{si } \varepsilon = 1,\\ (x-y-6)/12 & \text{si } \varepsilon = 3,\end{cases}$$

y $z_0 = (x + y + z - 3)/6$. Por lo anterior:

$$72n + 9 + 18\varepsilon = \begin{cases} (6z_0+3)^2 + 2(6x_0)^2 + 6(6y_0)^2, & \text{si } \varepsilon = 0, \\ (6z_0+3)^2 + 2(6y_0+3)^2 + 6(6x_0)^2, & \text{si } \varepsilon = 1, \\ (6z_0+3)^2 + 2(6x_0)^2 + 6(6y_0+3)^2, & \text{si } \varepsilon = 3, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 72x_0^2 + 216y_0^2 + 36z_0(z_0+1) + 9, & \text{si } \varepsilon = 0, \\ 216x_0^2 + 72y_0(y_0+1) + 36z_0(z_0+1) + 27, & \text{si } \varepsilon = 1, \\ 72x_0^2 + 216y_0(y_0+1) + 36z_0(z_0+1) + 63, & \text{si } \varepsilon = 3. \end{cases}$$

De lo anterior se sigue que:

$$n = \begin{cases} x_0^2 + 3y_0^2 + t_{z_0}, & \text{si } \varepsilon = 0, \\ 3x_0^2 + 2t_{y_0} + t_{z_0}, & \text{si } \varepsilon = 1, \\ x_0^2 + 6t_{y_0} + t_{z_0}, & \text{si } \varepsilon = 3. \end{cases}$$

Combinando (i)-(iii) se completa la prueba del Teorema 1.22. □

Los siguientes tres teoremas fueron probados por B. Kane y Z. Sun, quienes utilizaron como herramientas la Teoría de las Formas Cuadráticas y las Formas Modulares [32]. Teniendo en cuenta que cada entero positivo n puede ser expresado en la forma $n = 2^{v_2(n)}n'$ con $v_2(n) \in \mathbb{N}$ y n' un entero impar. $v_2(a)$ recibe el nombre de 2-ádico orden de a (equivalentemente $2^{v_2(a)} \| a$) mientras a' se dice la parte impar de a. Estos resultados se utilizarán posteriormente.

Nota 1.23. En dichos teoremas, para $a \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}^+$, por $a\,R\,m$, se entenderá que a es residuo cuadrático módulo m. Además, S_k representará el k-ésimo número cuadrado.

Teorema 1.24. *Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ con* M.C.D$(a, b, c) = 1$. *Entonces la forma:*

$$f(x, y, z) = at_x + bt_y + ct_z$$

es asintóticamente universal (es decir, el conjunto $E(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(x, y, z) = n$ no tiene soluciones enteras$\}$ *tiene asintóticamente densidad cero) si y sólo si*

$$-bc\,R\,a', \quad -ac\,R\,b',\ y\ -ab\,R\,c'.$$

Teorema 1.25. *Tomando fijos $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ con* M.C.D$(a, b, c) = 1$. *Entonces la forma:*

$$f(x, y, z) = as_x + bt_y + ct_z$$

es asintóticamente universal si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $-bc\, R\, a'$, $\quad -2ac\, R\, b'$, *y* $-2ab\, R\, c'$.

(2) Alguna $4 \nmid b$ *o* $4 \nmid c$.

Teorema 1.26. *Tomando fijos* $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ *con* M.C.D$(a, b, c) = 1$*. Entonces la forma*

$$f(x, y, z) = as_x + bs_y + ct_z$$

es asintóticamente universal si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $-2bc\, R\, a'$, $\quad -2ac\, R\, b'$, *y* $-ab\, R\, c'$.

(2) Alguna $4 \nmid c$*, o ambas* $4 \| c$ *y* $2 \| ab$.

Nota 1.27. Por ejemplo, cada una de las siguientes formas representa todos los enteros positivos para $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

(a) $f_1(x, y, z) = t_x + 4t_y + s_z$,

(b) $f_2(x, y, z) = t_x + 2s_y + 2s_z$,

(c) $f_3(x, y, z) = t_x + t_y + 2s_z$,

(d) $f_4(x, y, z) = t_x + t_y + t_z$,

(e) $f_5(x, y, z) = t_x + 2s_y + 4t_z$,

(f) $f_6(x, y, z) = 4t_x + t_y + t_z$.

B. Kane y Z. Sun dieron la lista completa de estas formas $as_x + bs_y + ct_z$, $as_x + bt_y + ct_z$, con $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^+$ y $a + b + c \leq 10$ las cuales son casi universales (es decir, el correspondiente conjunto $E(f)$ es finito) pero no universales (es decir, $E(f) = \varnothing$). En este caso, las que son asintóticamente universales son todas casi universales.

Las correspondientes formas casi universales que no son universales, son respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} s_x + 2s_y + 3t_z, & 2s_x + 4s_y + t_z, & s_x + 6s_y + t_z, \\ s_x + s_y + 5t_z, & 2s_x + 3s_y + 2t_z, & 3s_x + 4s_y + t_z, \\ s_x + 2s_y + 6t_z, & s_x + 5s_y + 3t_z, & 2s_x + 4s_y + 3t_z, \\ 4s_x + 4s_y + t_z, & s_x + 4s_y + 5t_z, & \end{array}$$

$$5s_x + t_y + t_z \sim s_x + 5s_y + 2t_z, \quad 5s_x + 2t_y + 2t_z \sim 2s_x + 5s_y + 4t_z, \quad s_x + 4t_y + 2t_z,$$
$$8s_x + t_y + t_z \sim s_x + 8s_y + 2t_z, \quad 2s_x + 3t_y + 2t_z, \quad 3s_x + 4t_y + 2t_z,$$
$$2s_x + 5t_y + t_z, \quad 3s_x + 5t_y + t_z, \quad 5s_x + 4t_y + t_z,$$
$$4s_x + 4t_y + t_z, \quad 5s_x + 3t_y + 2t_z,$$

Para las formas $at_x + bt_y + ct_z$ con $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^+$ y $a + b + c \leq 10$, se presenta la lista completa de esas formas universales asintóticamente, las cuales no son universales.

Nota 1.28. En este caso, si $\{f(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\} = \{g(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ entonces se dice que $f(x, y, z)$ es equivalente a $g(x, y, z)$ y se denota por $f(x, y, z) \sim g(x, y, z)$.

$$t_x + 4t_y + 4t_z \sim 4s_x + 8t_y + t_z, \quad 2t_x + 3t_y + 4t_z, \quad t_x + 4t_y + 5t_z,$$
$$t_x + t_y + 8t_z \sim s_x + 8t_y + 2t_z,$$
$$2t_x + 2t_y + 5t_z \sim 2s_x + 4t_y + 5t_z,$$
$$t_x + 2t_y + 6t_z.$$

B. Kane y Z. Sun hicieron la siguiente conjetura:

$E(s_x + 2s_y + 3t_z) = \{23\}$,
$E(2s_x + 4s_y + t_z) = \{20\}$,
$E(s_x + 5s_y + 2t_z) = \{19\}$,
$E(s_x + 6s_y + t_z) = \{47\}$,
$E(s_x + s_y + 5t_z) = \{3, 11, 12, 27, 129, 138, 273\}$,
$E(2s_x + 3s_y + 2t_z) = \{1, 19, 43, 94\}$,
$E(2s_x + 5s_y + t_z) = \{4, 27\}$,
$E(3s_x + 4s_y + t_z) = \{2, 11, 23, 50, 116, 135, 138\}$,
$E(s_x + 2s_y + 6t_z) = \{5, 13, 46, 161\}$,

$E(8s_x + t_y + t_z) = E(s_x + 8s_y + 2t_z) = \{5, 40, 217\}$,
$E(2s_x + 3t_y + 2t_z) = \{1, 16\}$,
$E(2s_x + 5t_y + t_z) = \{4\}$,
$E(4s_x + 3t_y + t_z) = \{2, 11, 27, 38, 86, 93, 188, 323\}$,
$E(3s_x + 5t_y + t_z) = \{2, 7\}$,

$E(3s_x + 4t_y + 2t_z) = \{1, 8, 11, 25\}$,
$E(4s_x + 4t_y + t_z) = \{2, 108\}$,
$E(6s_x + 2t_y + t_z) = \{4\}$,
$E(5s_x + 4t_y + t_z) = \{2, 16, 31\}$,
$E(5s_x + 3t_y + 2t_z) = \{1, 4, 13, 19, 27, 46, 73, 97, 111, 123, 151, 168\}$,

$E(2t_x + 2t_y + 5t_z) = E(2s_x + 4t_y + 5t_z) = \{1, 3, 10, 16, 28, 43, 46, 85, 169, 175, 211, 223\}$,

y

$E(t_x + 2t_y + 6t_z) = \{4, 50\}$,
$E(2t_x + 3t_y + 4t_z) = \{1, 8, 31\}$,
$E(t_x + 4t_y + 5t_z) = \{2\}$.

Recientemente A.M. Cañadas y M.A.O. Angarita presentan soluciones de Ecuaciones Diofánticas de la forma: $x^2 + y^2 + z^2 = 8m + k$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, 5, 6\}$, que contribuyen a la solución de los problemas planteados por R. Guy, descritos en la Introducción de este trabajo. Dichos resultados se presentan en los siguientes cuatro teoremas [9].

Teorema 1.29. *Si $S = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ es una solución de la Ecuación Diofántica de la forma:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8m + 1,\ m \in \mathbb{N},$$

entonces S satisface al menos una de las siguientes tres condiciones:

(a) $x = 2n_1 + 1$, $y = 4n_2 + 2$, $z = 4n_3 + 2$, para algún $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, tal que $n_1 \geq 0$ y $n_2 \geq n_3 \geq 0$,

(b) $x = 2n_1 + 1$, $y = 4n_2$, $z = 4n_3$, para algún $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, tal que $n_1 \geq 0$, y $n_2 \geq n_3 \geq 1$,

(c) $x = 2n_1 + 1$, $y = 4n_2$, $z = 0$, para algún $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $n_1, n_2 \geq 0$.

Demostración. Considerando la forma universal $(2, 2, 1)$ descrita en el Teorema 1.21, parte (b). Se tiene que m puede ser escrito como una suma de la forma $2s_x + 2s_y + t_z$ para algún x, y, z.

En el caso de que $z \geq 0$ y $y \geq x \geq 1$ entonces,

$$n = 8m + 1 = s_{4x} + s_{4y} + s_{2z+1},$$

si $x = 0$ y $y, z \geq 0$ entonces

$$n = 8m + 1 = s_{4y} + s_{2z+1},$$

Finalmente, si $m = t_x + 4t_y + s_z + s_{z+1}$, para algún $x \geq 0$ y $y \geq z \geq 0$ entonces

$$n = 8m + 1 = s_{2x+1} + 4s_{2y+1} + 4s_{2z+1}.$$

Como m puede ser escrito en al menos una de las formas descritas antes, se tiene el resultado. $\square$

Teorema 1.30. *Si $S = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ es una solución de la ecuación diofántica de la forma:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8m + 2,\ m \in \mathbb{N}$$

entonces S satisface al menos una de las siguientes tres condiciones:

(a) $x = 2n_1 + 1$, $y = 2n_2 + 1$, $z = 0$, para algún $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $0 \leq n_1 \leq n_2$,

(b) $x = 4n_1$, $y = 2n_2 + 1$, $z = 1$, para algún $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 0$,

(c) $x = 2n_1 + 1$, $y = 2n_2 + 1$, $z = 4n_3$, para algún $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq n_1 \leq n_2$, $n_3 \geq 1$.

Demostración. Se considera la forma universal $(2, 1, 1)$ descrita en el Teorema 1.21, parte (c). Por lo tanto m puede ser escrito como una suma de la forma $2s_x + t_y + t_z$ para algún x, y, z.
En el caso que $x = 0$ y $0 \leq y \leq z$ entonces

$$n = 8m + 2 = s_{2y+1} + s_{2z+1},$$

si $z = 0$, $x \geq 1$, y $y \geq 0$ entonces

$$n = 8m + 2 = s_{4x} + s_{2y+1} + 1,$$

por último, si $1 \leq y \leq z$, y $x \geq 1$ entonces

$$n = 8m + 2 = s_{4x} + s_{2y+1} + s_{2z+1}.$$

Como m puede ser escrito en al menos una de las tres formas descritas anteriormente, se tiene el resultado. $\square$

Teorema 1.31. *Si* $S = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ *es una solución de la ecuación diofántica de la forma:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8m + 5,\ m \in \mathbb{N},$$

entonces S *satisface al menos una de las siguientes tres condiciones:*

(a) $x = 2n_1 + 1$, $y = 4n_2$, $z = 4n_3 + 2$, *para algún* $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, *tal que* $n_1, n_3 \geq 0$, $n_2 \geq n_3 + 1$,

(b) $x = 2n_1 + 1$, $y = 4n_2 + 2$, $z = 4n_3$, *para algún* $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, *tal que* $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq n_3 \geq 1$,

(c) $x = 2n_1 + 1$, $y = 4n_2 + 2$, $z = 0$, *para algún* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_1, n_2 \geq 0$.

Demostración. Se considera la forma universal $(2, 4, 1)$ descrita en el Teorema 1.21, parte (c). Por lo tanto m puede ser escrito como una suma de la forma $2s_x + 4t_y + t_z$ para algún x, y, z.
Si $y, z \geq 0$, y $x \geq y + 1$ entonces

$$n = 8m + 5 = s_{4x} + 4s_{2y+1} + s_{2z+1},$$

si $z \geq 0$, y $y \geq x \geq 1$ entonces

$$n = 8m + 5 = s_{4x} + s_{4y+2} + s_{2z+1},$$

por último, si $x = 0$ y $y, z \geq 0$ entonces

$$n = 8m + 5 = 4s_{2y+1} + s_{2z+1}.$$

A partir de que m puede ser escrito en al menos una de las tres formas descritas anteriormente, se tiene el resultado. □

Teorema 1.32. *Si* $S = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ *es una solución de una ecuación diofántica de la forma:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8m + 6,\ m \in \mathbb{N},$$

entonces S *satisface al menos una de las siguientes tres condiciones:*

(a) $x = 4n_1 + 2$, $y = 2n_2 + 1$, $z = 2n_3 + 1$, *para algún* $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, *tal que* $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq n_3 \geq 1$,

(b) $x = 4n_1 + 2$, $y = 2n_2 + 1$, $z = 1$, *para algún* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, *tal que* $n_1, n_2 \geq 0$,

(c) $x = 2n_1 + 1$, $y = 2n_2 + 1$, $z = 2$, *para algún* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_2 \geq n_1 \geq 1$.

Demostración. Como $4t_u + t_v + t_w$ es una forma universal (ver Teorema 1.19 y Nota 1.27) entonces m puede ser escrito como una suma de la forma $4t_x + t_y + t_z$ para algún x, y, z.

Si $x \geq 0$, y $y \geq z \geq 1$ entonces

$$n = 8m + 6 = s_{4x+2} + s_{2y+1} + s_{2z+1},$$

si $x, y \geq 0$ y $z = 0$ entonces

$$n = 8m + 6 = s_{4x+2} + s_{2y+1} + 1,$$

por último, si $x = 0$ y $1 \leq y \leq z$ entonces

$$n = 8m + 6 = s_{2y+1} + s_{2z+1} + 4.$$

Como m puede ser escrito en al menos una de las tres formas descritas antes, el resultado se tiene. □

1.6 Suma de números poligonales

En esta sección se mencionan cuatro trabajos relacionados con la suma de números poligonales, tres de los cuales son resultados recientes.

De acuerdo a M. Nathanson un resultado importante de suma de números poligonales es el Teorema de Legendre que enunciamos a continuación [39]:

Teorema 1.33. *(Legendre). Sea* $m \geq 3$ *y* $N \geq 28m^3$. *Si* m *es impar, entonces* N *es la suma de cuatro números poligonales de orden* $m + 2$. *Si* m *es par, entonces* N *es la suma de cinco números poligonales de orden* $m + 2$, *al menos uno de los cuales es* 0 *o* 1.

K. Ono, S. Robins y P. Wahl estudiaron el problema de determinar el número de representaciones de un entero n como suma de k números triangulares, utilizando la Teoría de las Formas Modulares, además, sugieren cómo utilizar esta teoría para solucionar el problema general de calcular el número de representaciones de enteros como suma de números figurados [41]. El método requiere algunas definiciones que se presentan a continuación y posteriormente se muestran los principales resultados sin prueba.

El método requiere definir una función generante que es una forma modular de peso $\frac{1}{2}$. Los números figurados están dados por la siguiente función:

$$f_a(n) = \frac{an^2 + (a-2)n}{2}.$$

Obsérvese que si $a = 1$ se obtienen los números triangulares y si $a = 2$ tenemos los cuadrados.

Se derivan las Funciones Generantes para todos estos números figurados usando las Funciones η Generalizadas de Dedekind.

Definición 1.34. La Función η Generalizada de Dedekind se define por:

$$\eta_{\delta,g}(\tau) = e^{\pi i P_2(\frac{g}{\delta})\delta\tau} \prod_{\substack{n>0 \\ n\equiv g \mod \delta}} (1-q^n) \prod_{\substack{n>0 \\ n\equiv -g \mod \delta}} (1-q^n)$$

donde $P_2(t) = \{t\}^2 - \{t\} + \frac{1}{6}$ es el segundo polinomio de Bernoulli y $\{t\} = t - [t]$ es la parte fraccionaria de t.

Ahora se definen las Funciones Generantes para los números figurados en términos de las Funciones η Generalizadas de Dedekind.

Teorema 1.35. *Si $a \geq 1$ entonces*

$$q^{\frac{(a-2)^2}{8a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{an^2+(a-2)n}{2}} = \frac{\eta(a\tau)\eta_{a,1}(2\tau)}{\eta_{a,1}(\tau)}$$

Ejemplo. Para números pentagonales se tiene que $a = 3$ en el teorema anterior. Se obtiene:

$$q^{\frac{1}{24}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{3n^2+n}{2}} = \frac{\eta(3\tau)\eta_{3,1}(2\tau)}{\eta_{3,1}(\tau)}$$

Es decir, si $\delta_k(n)$ es el número de representaciones de n como una suma de k números pentagonales, entonces se puede calcular $\rho_k(n)$ usando formas modulares. Se Observa que

$\rho_k(n)$ reflejará la multiplicidad de representaciones que resulta de las posibles selecciones de signo permitidas para n en la función generante.

Se menciona este método, ya que otro tipo de acercamiento a la solución del problema se obtiene utilizando el estudio de Lattices (Retículos), pero este último va más allá de los alcances de este trabajo.

De otra parte, como resultados recientes se menciona el trabajo de Z. Sun sobre números poligonales generalizados. Para $m = 3, 4, \ldots$ aquellos $p_m(x) = \frac{(m-2)x(x-1)}{2} + x$ con $x \in \mathbb{Z}$ son llamados números Poligonales Generalizados o números m-gonales. Z. Sun encontró para qué valores de enteros a, b, c, la suma $ap_5 + bp_5 + cp_5$ es universal sobre $\mathbb{Z}$. Ge y Sun probaron que $p_5 + bp_5 + 3p_5$ con $(b = 1, 2, 3, 4, 9)$ y $p_5 + 2p_5 + 6p_5$ son formas universales sobre $\mathbb{Z}$, lo cual confirma parcialmente la Conjetura de Sun [20].

2 Principales resultados de particiones

En este Capítulo se presentan dos resultados de particiones, el primer resultado fue probado por Euler y su demostración puede verse en [50]. El segundo resultado debido a M. Hirschhorn y J. Sellers, concierne particiones de números con partes triangulares y para su prueba se utilizaron herramientas de tipo combinatorial. En este trabajo se muestran los detalles de la primera parte de la prueba.

Teorema 2.1. *(Euler). Para cualquier entero positivo n, el número de particiones $p(n)$ de n, está dado por:*

$$p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+p(n-15)$$
$$+\cdots+(-1)^{k+1}[p(n-\frac{3k^2-k}{2})+p(n-\frac{3k^2+k}{2})]$$

M. Hirschhorn y J. Sellers estudiaron $p_{3\Delta}(n)$, el número de particiones del número entero n en tres números triangulares y $p^d_{3\Delta}(n)$ el número de particiones de n en tres números triangulares distintos [29]. Ellos descubrieron y probaron el teorema que se presenta a continuación.

Teorema 2.2. *Sea $p_{3\Delta}(n)$, el número de particiones del número entero n en tres números triangulares y sea $p^d_{3\Delta}(n)$ el número de particiones de n en tres números triangulares distintos. Entonces, para todo $n \geq 0$,*

$$p_{3\Delta}(27n+12) = 3p_{3\Delta}(3n+1) \tag{2-1}$$

y

$$p^d_{3\Delta}(27n+12) = 3p^d_{3\Delta}(3n+1) \tag{2-2}$$

Además, Hirschhorn y Sellers presentaron dos demostraciones del Teorema 2.2, una utilizando las Funciones Generantes y la otra con herramientas combinatoriales, la prueba combinatorial de la parte (2-1) se presenta a continuación.

Demostración. Iniciaron observando que hay una correspondencia 1 a 1 entre las particiones de $3n+1$ en tres números triangulares y las particiones de $24n+11$ en tres cuadrados impares. Una correspondencia similar se puede hacer entre las particiones de $27n + 12$ en tres números triangulares y $216n + 99$ en tres cuadrados impares. Puesto que probar (2-1) es equivalente a probar que el número de particiones de $216n+99$ en tres cuadrados impares es igual a 3 veces el número de particiones de $24n + 11$ en tres cuadrados impares.

Con el fin de obtener el resultado, se debe establecer una correspondencia 1 a 3 entre los dos conjuntos de particiones.

Suponga que:

$$24n + 11 = k^2 + l^2 + m^2,$$

con $k, l,$ y m positivos e impares. Considerando esta ecuación módulo 6 se tiene:

$$k^2 + l^2 + m^2 \equiv -1 \pmod 6.$$

Las únicas soluciones de esta ecuación son (permutaciones de):

$$k \equiv \pm 1, \quad l \equiv \pm 1, \quad m \equiv 3, \qquad (\text{mod } 6),$$

donde se permite que k y l sean negativos. Se puede asumir sin pérdida de generalidad que:

$$k \equiv 1, \quad l \equiv 1, \quad m \equiv 3, \qquad (\text{mod } 6)$$

y que $k \geq l$ y $m > 0$,

ahora sea:

$$\begin{aligned}
x_1 =& 2k + 2l - m, \quad y_1 = 2k - l + 2m, \quad z_1 = -k + 2l + 2m,\\
x_2 =& 2k + 2l + m, \quad y_2 = 2k - l - 2m, \quad z_2 = -k + 2l - 2m,\\
x_3 =& 3k, \quad y_3 = 3l, \quad z_3 = 3m.
\end{aligned}$$

esto es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 216n + 99$$

y, módulo 6,

$$(x_1, y_1, z_1) \equiv (1, 1, 1), \quad (x_2, y_2, z_2) \equiv (1, 1, 1), \quad (x_3, y_3, z_3) \equiv (3, 3, 3).$$

Es claro que la partición dada por (x_3, y_3, z_3) es diferente de las otras dos. Luego mostraron que las particiones dadas por (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) son diferentes una de la otra. Al suponer que las dos particiones son la misma, una de las siguientes seis situaciones se debería tener:

$$\begin{aligned}
& x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2, \\
& x_1 = x_2, \quad y_1 = z_2, \quad z_1 = y_2, \\
& x_1 = y_2, \quad y_1 = x_2, \quad z_1 = z_2, \\
& x_1 = y_2, \quad y_1 = z_2, \quad z_1 = x_2, \\
& x_1 = z_2, \quad y_1 = x_2, \quad z_1 = y_2, \\
o \quad & x_1 = z_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = x_2.
\end{aligned}$$

En cada uno de estos casos se sigue que $m = 0$, pero esto es falso ya que m es impar. Además, para cada partición de $24n + 11$ en tres cuadrados impares, hay tres particiones de $216n + 99$ en tres cuadrados impares.

En lo relacionado con la partición de $24n + 11$ dada por:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$$

se tienen las tres particiones de $216n + 99$ dadas por $A\mathbf{v}, B\mathbf{v}$ y $C\mathbf{v}$, donde A, B y C son las tres matrices definidas anteriormente. Se debe mostrar que las tres particiones de $216n + 99$ son determinadas de una única forma, es decir,

si $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$, donde

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} k' \\ l' \\ m' \end{pmatrix}$$

y $(k', l', m') \equiv (1, 1, 3) \pmod 6$, entonces,

$$\{A\mathbf{v}, B\mathbf{v}, C\mathbf{v}\} \cap \{A\mathbf{v}', B\mathbf{v}', C\mathbf{v}'\} = \{\}$$

Al suponer que:

$$C\mathbf{v} = C\mathbf{v}'$$

entonces,

$$\begin{pmatrix} 3k \\ 3l \\ 3m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k' \\ 3l' \\ 3m' \end{pmatrix}$$

y esto implica que $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$.

Suponga que

$$A\mathbf{v} = A\mathbf{v}'$$

entonces,

$$A^2\mathbf{v} = A^2\mathbf{v}'$$

esto es,

$$9\mathbf{v} = 9\mathbf{v}'$$

luego

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

Un resultado similar se tiene si $B\mathbf{v} = B\mathbf{v}'$. Multiplicando por la transpuesta de B, se observa que $B^T B = 9I$.

Luego, se supone

$$A\mathbf{v} = B\mathbf{v}'.$$

entonces,

$$A^2\mathbf{v} = AB\mathbf{v}'$$

, o

$$\begin{pmatrix} 9k \\ 9l \\ 9m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7k + 4l - 4m \\ 4k + l + 8m \\ 4k - 8l - m \end{pmatrix}.$$

Esto queda

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \pmod 6,$$

lo cual es falso. Un resultado similar se obtiene (por simetría) si $B\mathbf{v} = A\mathbf{v}'$

Se necesita mostrar que cada partición de $216n + 99$ en tres cuadrados impares da lugar a una partición de $24n + 11$ en tres cuadrados impares.

Suponga que

$$216n + 99 = x^2 + y^2 + z^2$$

con x, y y z impares. Se tendría

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 45 \pmod{54}.$$

Los autores encontraron las 240 soluciones sin contar las permutaciones [29].

Si se permite que x, y y z sean negativos, se asume sin pérdida de generalidad que módulo 54, se tiene una de las siguientes 30 posibilidades.

$$\begin{aligned}&(x,y,z)\\ &\equiv (-23,1,1),(-5,1,-17),(1,7,7),(1,25,-11),(13,1,19),(7,-5,-5),\\ &(-11,-5,13),(-5,19,19),(25,-23,-5),(19,-11,7),(7,13,-23),(-17,7,25),\\ &(-17,-11,-11),(-11,-23,-23),(25,13,13),(13,-17,-17),(-23,19,-17),(19,25,25),\\ &(3,3,9),(3,3,27),(3,-15,9),(3,-15,27),(3,21,9),(3,21,27),\\ &(-15,-15,9),(-15,-15,27),(-15,21,9),(-15,21,27),(21,21,9),(21,21,27).\end{aligned}$$

En los primeros dieciocho casos, se aplica la matriz $A^{-1} = \frac{1}{9}A$ al vector $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, obteniendo un vector $\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$, que satisface

$$k^2 + l^2 + m^2 = 24n + 11, \quad (k, l, m) \equiv (1, 1, 3) \pmod{6}.$$

Si $k < l$ se cambian la segunda y tercera coordenadas de $\mathbf{w}$ y entonces se tiene $k > l$. Si $m < 0$ se aplica B^{-1} en lugar de A^{-1} y entonces $m > 0$. En los siguientes 12 casos se aplica la matriz $C^{-1} = \frac{1}{9}C$ para $\mathbf{w}$ se obtiene un vector $\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$ que satisface

$$k^2 + l^2 + m^2 = 24n + 11, \quad (k, l, m) \equiv (1, 1, 3) \pmod{6}.$$

Si $k < l$ se cambian las dos primeras coordenadas de $\mathbf{w}$ y entonces se tiene $k > l$. Si $m < 0$ se cambia el signo de la tercera coordenada de $\mathbf{w}$ y entonces $m > 0$.

Esto establece la correspondencia deseada uno a tres y completa la demostración de la parte (2-1) del Teorema 2.2. $\square$

3 Posets y Particiones-$\mathcal{P}$

En este Capítulo se presentan algunas definiciones, notaciones y situaciones relacionadas con posets, particiones-$\mathcal{P}$ y algunas relaciones entre ellos, vía el número de extensiones lineales de un poset $\mathcal{P}$ dado.

3.1 Posets

Un *Conjunto Ordenado* (o *Conjunto Parcialmente Ordenado* o *Poset*) es un par ordenado de la forma $(\mathcal{P}, \leq)$ de un conjunto $\mathcal{P}$ y una relación binaria $\leqslant$ contenida en el producto cartesiano $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, la cual es una relación de *Orden* (o de *Orden Parcial*) sobre $\mathcal{P}$, es decir que es Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva [13]. Los elementos de $\mathcal{P}$ son llamados los *puntos* del Conjunto Ordenado. Se escribirá $x < y$ para denotar $x \leq y$ y $x \neq y$, en este caso se dirá que x es *estrictamente menor que* y. Un Conjunto Ordenado se llama *finito* o *infinito* si y sólo si el conjunto subyacente es *finito* o *infinito*.

Usualmente se dirá simplemente que $\mathcal{P}$ *es un conjunto ordenado* y cuando sea necesario especificar la relación de orden se escribirá $(\mathcal{P}, \leq)$.

Al tener $\mathcal{P}$ un conjunto ordenado y $x, y \in \mathcal{P}$ se dice que x *es cubierto por* y si $x < y$ y $x \leq z < y$ implica $z = x$.

Un conjunto ordenado finito $\mathcal{P}$, se puede representar por una configuración de círculos (que representan los elementos de $\mathcal{P}$) y se interconectan con líneas (que indican la relación de cubrimiento). La construcción se presenta a continuación:

(1) A cada punto $x \in \mathcal{P}$ se le asocia un punto $p(x)$ del plano euclideano $\mathbb{R}^2$, representado por un círculo pequeño con centro en $p(x)$.

(2) Para cada par cubierto $x < y$ en $\mathcal{P}$, se toma un segmento de línea $l(x, y)$ conectando el círculo de $p(x)$ al círculo de $p(y)$.

(3) Realizar (1) y (2) en tal forma que:

(a) si $x < y$, entonces $p(x)$ es menor que $p(y)$,

(b) el círculo en $p(z)$ no intersecta el segmento de línea $l(x, y)$ si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Una configuración que satisface (1)-(3) es llamada *Diagrama de Hasse* o *Diagrama* de $\mathcal{P}$. En otra dirección, un diagrama puede ser usado para definir un conjunto ordenado finito. Veamos un ejemplo, para el conjunto ordenado $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$, en el cual $a < b < c < d < e$ y $f < c$.

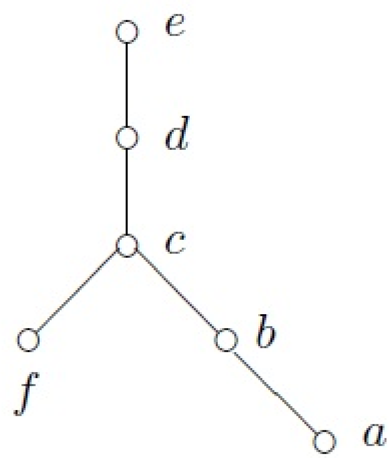

Figura 3-1: Ejemplo de Conjunto ordenado Finito

Hasta ahora sólo se han definido diagramas para conjuntos ordenados finitos, es decir, no es posible representar totalmente mediante un diagrama un conjunto ordenado infinito, pero si su estructura es suficientemente regular puede ser sugerido mediante un diagrama. Además, el mismo conjunto ordenado puede tener diferentes representaciones. El proceso de realizar los diagramas es tanto arte como ciencia y como se verá más adelante, unos buenos diagramas pueden ser una verdadera herramienta para la comprensión y confirmación de teoremas [13].

Un Conjunto Ordenado C es llamado una *Cadena* (o un *Conjunto Totalmente Ordenado* o un *Conjunto Ordenado Linealmente*) si y sólo si para todo $p, q \in C$ se tiene $p \leq q$ o $q \leq p$

(es decir, p y q son comparables). De otra parte, un Conjunto Ordenado $\mathcal{P}$ es llamado una *Anticadena* si $x \leq y$ en $\mathcal{P}$ sólo si $x = y$ [13].

Una Cadena C en un conjunto ordenado $\mathcal{P}$ será llamada una *Cadena Maximal* si y sólo si para todas las cadenas $K \subseteq \mathcal{P}$ con $C \subseteq K$ se tiene $C = K$.

Si n es un entero positivo, $\mathbf{n}$ denota el poset de n-elementos con la propiedad especial que dos elementos cualquieras son comparables [44]. También se define un subposet Q de un poset P como *convexo* si $y \in Q$ siempre que $x < y < z$ en P y $x, z \in Q$.

Dados los conjuntos ordenados $(\mathcal{P}, \preceq)$ y $(\mathcal{Q}, \trianglelefteq)$ y $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ una transformación, f es llamada una *función que preserva el orden* si y sólo si para todo $x, y \in \mathcal{P}$ se tiene:

$$x \preceq y \Rightarrow f(x) \trianglelefteq f(y).$$

Se dice que dos posets P y Q son *Isomorfos* si existe una biyección que preserva el orden $f : P \to Q$, cuya inversa preserva el orden. En tal caso, se escribe $P \cong Q$.

Dados los conjuntos ordenados $(\mathcal{P}, \preceq)$ y $(\mathcal{Q}, \trianglelefteq)$ entonces $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ se llama *un orden de incrustación* si y sólo si f es inyectiva, y para todo $x, y \in \mathcal{P}$ se tiene:

$$x \preceq y \Leftrightarrow f(x) \trianglelefteq f(y).$$

Si $(P, \leq)$ y $(Q, \trianglelefteq)$ son posets, entonces *el producto directo* (o cartesiano) de P y Q es el poset $(P \times Q, \preceq)$ sobre el conjunto $\{(x, y) : x \in P \text{ y } y \in Q\}$ tal que $(x, y) \preceq (x', y')$ en $P \times Q$ si $x \leq x'$ en P y $y \trianglelefteq y'$ en Q. Para realizar el diagrama de Hasse de $P \times Q$ (cuando P y Q son finitos), se dibuja el diagrama de Hasse de P, reemplazando cada elemento x de P por una copia Q_x de Q y conectando los elementos correspondientes de Q_x y Q_y (con respecto a algún isomorfismo $Q_x \cong Q_y$) si x y y están conectados en el diagrama de Hasse de P.

Otra operación que se considera es el *dual* de un poset P. Este es el poset P^* sobre el mismo conjunto P, pero tal que $x \leq y$ en P^* si y sólo si $y \leq x$ en P. Si P y P^* son isomorfos, entonces P es llamado *auto-dual*.

Un *ideal de orden* de un poset $(\mathcal{P}, \leq)$ es un subconjunto I de $\mathcal{P}$ tal que si $x \in I$ y $y \leq x$, entonces $y \in I$. Sea $J(\mathcal{P})$ el conjunto de todos los ideales de orden de $\mathcal{P}$, ordenado por inclusión. En particular, se define el ideal de orden o *conjunto inferior* de $a \in \mathcal{P}$ como $a_{\vartriangle} = \{q \in \mathcal{P} : q \leq a\}$. Dualmente, $a^{\triangledown} = \{q \in \mathcal{P} : a \leq q\}$ es el *filtro* o *conjunto superior* de a [46].

Se puede observar que las anticadenas de k-elementos en $\mathcal{P}$ corresponden a elementos de $J(\mathcal{P})$ que cubren exactamente k-elementos.

Si x, y pertenecen a un poset $\mathcal{P}$, entonces una *cota superior* de x y y es un elemento $z \in \mathcal{P}$, que satisface: $x \leq z$ y $y \leq z$. La *menor cota superior* de x y y es una cota superior z de x y y tal que cada cota superior w de x y y satisface $z \leq w$. Si una menor cota superior de x y y existe, entonces es única y se denota $x \vee y$. Dualmente se puede definir la más grande cota inferior $x \wedge y$, cuando exista. Un *Retículo (lattice)* es un poset L para el cual cada par de elementos tiene una menor cota superior y una mayor cota inferior. Se dice que un poset $\mathcal{P}$ *tiene* $\hat{0}$ si existe un elemento $\hat{0} \in \mathcal{P}$ tal que $\hat{0} \leq x$ para todo $x \in \mathcal{P}$. Similarmente, $\mathcal{P}$ *tiene un* $\hat{1}$ si existe $\hat{1} \in \mathcal{P}$ tal que $x \leq \hat{1}$ para todo $x \in \mathcal{P}$. Obviamente todos los retículos finitos tienen $\hat{0}$ y $\hat{1}$. A partir de que la unión e intersección de los ideales de orden es también un ideal de orden, esto se sigue de la distributividad de la unión e intersección de conjuntos, lo que hace que $J(\mathcal{P})$ sea en verdad un retículo distributivo [48].

Una *Trayectoria Reticular* finita no negativa en el plano (con pasos unitarios a la derecha y hacia abajo) es una secuencia $L = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, donde $v_i \in \mathbb{N}^2$ y $v_{i+1} - v_i = (1, 0)$ or $(0, -1)$ [48]. Dado un poset finito $\mathcal{P}$ con $|\mathcal{P}| = n$ en [48] se define una *extensión de* $\mathcal{P}$ *a un orden total o extensión lineal de* $\mathcal{P}$ como una biyección que preserva el orden $\sigma : \mathcal{P} \to \mathbf{n}$. El número de extensiones de $\mathcal{P}$ a un orden total se denota $e(\mathcal{P})$. En realidad, $e(\mathcal{P})$ es también igual al número de cadenas máximales de $J(\mathcal{P})$.

Se puede identificar una cadena maximal de $J(\mathcal{P})$ con un cierto tipo de trayectoria reticular en el espacio Euclidiano como sigue [48]. Sea $C_1, \ldots C_k$ una partición de $\mathcal{P}$ en cadenas. Se define una transformación $\delta : J(\mathcal{P}) \to \mathbb{N}^k$ por:

$$\delta(I) = (|I \cap C_1|, |I \cap C_2|, \ldots, |I \cap C_k|).$$

Si se da $\mathbb{N}^k$ el orden obvio del producto, entonces δ es un homomorfismo reticular inyectivo que preserva el cubrimiento (y por lo tanto preserva la categoría). Luego $J(\mathcal{P})$ es isomorfo a un subretículo de $\mathbb{N}^k$. Dado $\delta : J(\mathcal{P}) \to \mathbb{N}^k$, como se dijo antes, se define $\Gamma_\delta = \bigcup_T cx(\delta(T))$, donde cx denota la envoltura convexa en $\mathbb{R}^k$, T se extiende sobre todos los intervalos $J(\mathcal{P})$ que son isomorfos a álgebras booleanas. Luego Γ_δ es un subconjunto poliédrico compacto de $\mathbb{R}^k$. Es obvio que el número de cadenas maximales en $J(\mathcal{P})$ es igual al número de trayectorias reticulares desde el origen $(0, 0, \ldots, 0) = \delta(\hat{0})$ hasta $\delta(\hat{1})$, con pasos unitarios en la dirección de los ejes coordenados. En otras palabras, $e(\mathcal{P})$ es igual al número de formas de escribir

$$\delta(\hat{1}) = v_1 + v_2 + \cdots + v_n, \tag{3-1}$$

donde cada v_i es un vector de coordenadas unitarias en $\mathbb{R}^k$ y $v_1 + v_2 + \cdots + v_i \in \Gamma_\delta$, para todo i.

Nota 3.1. *La enumeración de trayectorias reticulares es un tema que se ha desarrollado ampliamente. Lo importante para este trabajo es que ciertos problemas de trayectorias reticulares son equivalentes a determinar el número de extensiones lineales $e(\mathcal{P})$ para un poset dado $\mathcal{P}$ o el número de composiciones restringidas de un entero positivo n* [48]. *Por ejemplo, Stanley describe en* [47] *la siguiente relación entre el número de particiones-$\mathcal{P}$ de un entero positivo n, denotado a_n, y el número $e(\mathcal{P})$ de extensiones de $\mathcal{P}$ a un orden total. En este caso, se ha considerado que $|\mathcal{P}| = p$*

$$a_n = \tfrac{e(\mathcal{P})n^{p-1}(1+o(\frac{1}{n}))}{p!(1-p)!} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Nota 3.2. *Se debe observar que si $\mathcal{M} = \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{n}$ con $C_1 = \{(2,j) \mid j \in \boldsymbol{n}\}$, $C_2 = \{(1,j) \mid j \in \boldsymbol{n}\}$ entonces $\delta(J(\mathcal{M})) = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq i \leq j \leq n\}$ (en el caso particular $n = 3$, se obtiene la* Fig. 2 *). Por lo que $e(\mathcal{M})$ es igual al número de Trayectorias Reticulares desde $(0,0)$ hasta (n,n) con pasos $(1,0)$ y $(0,1)$, las cuales no sobrepasan la diagonal principal $x = y$ del plano (x,y). Se puede mostrar que $e(\boldsymbol{2} \times \boldsymbol{n}) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$. Estos números son llamados Números de Catalán* [48].

$\mathcal{M}_n$ denota el poset $(\delta(J(\mathbf{2} \times \mathbf{n})), \preceq)$, donde:

$$(i,j) \preceq (i',j') \quad \text{si y sólo si} \quad i \leq i' \text{ y } j \leq j'. \tag{3-2}$$

En este caso, $\mathbb{N}$ ha sido dotado con su orden natural.

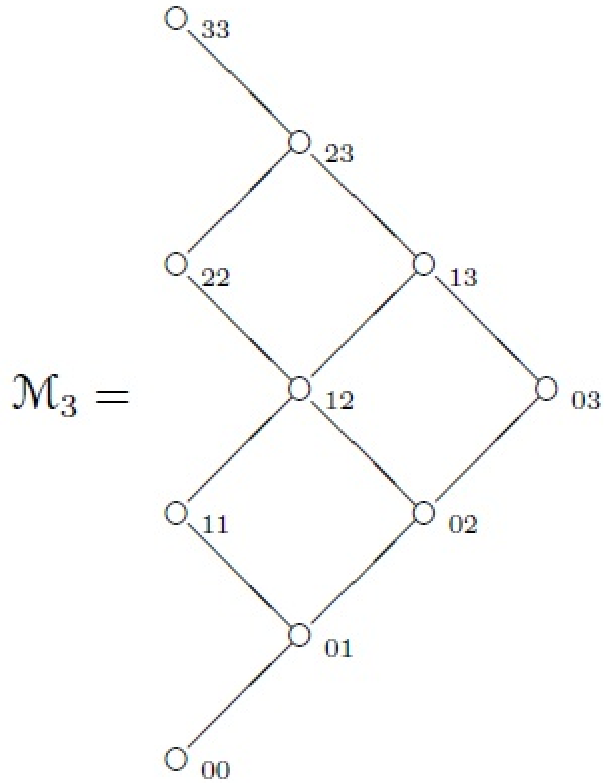

Figura 3-2: Representación del Poset $\mathcal{M}_3$

3.2 Particiones-$\mathcal{P}$

La teoría de las particiones-$\mathcal{P}$ fué introducida por R. Stanley en 1972, es una generalización de la teoría de las particiones y composiciones [47].

Para definir particiones-$\mathcal{P}$ previamente se explicará el concepto de *conjuntos ordenados etiquetados*. Si $(\mathbb{N}, \leq)$ es el conjunto de los números naturales dotado con su orden natural y $(\mathcal{P}, \trianglelefteq)$ es un conjunto ordenado con $\mid \mathcal{P} \mid= p$, entonces una *etiqueta* w de $\mathcal{P}$ es una biyección $w : \mathcal{P} \to \{1, 2, \ldots, p\} \subset \mathbb{N}$.

Una Etiqueta w es llamada una *etiqueta natural* si satisface:

$$x \trianglelefteq y \quad implica \quad w(x) \leq w(y)$$

w es una *Etiqueta estricta* si:

$$x \trianglelefteq y \quad implica \quad w(x) \geq w(y).$$

Un conjunto ordenado junto con una etiqueta w recibe el nombre de *Conjunto ordenado etiquetado*.

Si w es una etiqueta de $(\mathcal{P}, \trianglelefteq)$ entonces una Partición-$(\mathcal{P}, w)$ de n o *Partición del poset* es una transformación $\sigma : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ que satisface las condiciones:

1. $x \trianglelefteq y$ en $\mathcal{P}$ implica $\sigma(x) \geq \sigma(y)$, es decir, es de orden inverso,
2. $x \triangleleft y$ en $\mathcal{P}$ y $w(x) > w(y)$ implica $\sigma(x) > \sigma(y)$,
3. $\sum_{x \in \mathcal{P}} \sigma(x) = n$.

Si w es una etiqueta natural, entonces σ recibe el nombre de *Partición*-$\mathcal{P}$. Si w es una etiqueta estricta entonces se dice que σ es una *Partición-$\mathcal{P}$ estricta.* Si σ es una Partición-$(\mathcal{P}, w)$ entonces los valores $\sigma(x)$, con $x \in \mathcal{P}$ son las *partes* de σ.

En la Figura 3-3 se muestra una partición-$(\mathcal{M}_3, w)$ del número $22 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, donde C_i denota el i-ésimo número de Catalán. En este caso, se ha etiquetado $\mathcal{M}_3$ con una transformación $w : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{P}$, tal que, $\mathbb{P} = \{1, \ldots, 10\}$, $w(i, 3) = 4 - i$, si $0 \leq i \leq 3$, $w(j, 2) = 7 - j$, si $0 \leq j \leq 2$, $w(k, 1) = 9 - k$, si $0 \leq k \leq 1$, y $w(0, 0) = 10$.

Se denotará como $\mathcal{A}(\mathcal{P}, w)$ a la clase de todas las particiones-$(\mathcal{P}, w)$. Se definen dos etiquetas w, w' que sean equivalentes $(w \sim w')$ si $\mathcal{A}(\mathcal{P}, w) = \mathcal{A}(\mathcal{P}, w')$.

En [47] y [48] R. Stanley menciona problemas combinatoriales interesantes relacionados con etiquetas de conjuntos ordenados, por ejemplo, dado un conjunto ordenado etiquetado $(\mathcal{P}, w)$, se plantea ¿cuántas etiquetas son equivalentes a w?

La mayoría de los conceptos que se dieron anteriormente pueden ser extendidos a posets infinitos. Así, la noción de partición-$\mathcal{P}$ puede ser ampliada de tal forma que sostenga las siguientes condiciones de finitud:

1. Para cada elemento $x \in \mathcal{P}$ hay alguna σ Partición-$\mathcal{P}$ tal que $\sigma(x) > 0$.
2. Existe sólamente un número finito de Particiones-$\mathcal{P}$ de cualquier entero n dado.

Por lo tanto, si $\mathcal{P}$ es un poset entonces una transformación de orden inversa w de $\mathcal{P}$ al conjunto de enteros no negativos es una etiqueta de $\mathcal{P}$ si adicionalmente sólo un número finito x tiene $w(x) > 0$. En este caso una etiqueta w de $\mathcal{P}$ es una partición-$\mathcal{P}$ de n si $\sum_{x \in \mathcal{P}} w(x) = n$ [1].

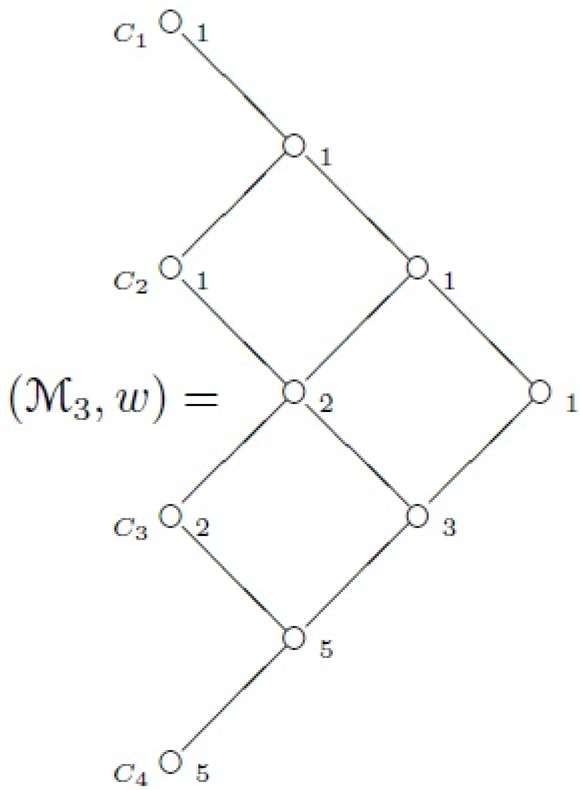

Figura 3-3: Partición-$(\mathcal{M}_3, w)$ del Número 22

Nota 3.3. *Se han considerado sólo los casos para los cuales una partición-$\mathcal{P}$ es una transformación de orden inversa. El caso donde se preserva el orden puede ser obtenido simplemente por dualización del poset* $\mathcal{P}$ [47].

3.3 Particiones-$\mathcal{P}$ y composiciones restringidas

En esta sección se recuerdan resultados de A.M. Cañadas y otros [7], quienes han obtenido relaciones entre conjuntos de trayectorias reticulares en un poset dado $\mathcal{M}_k = (\delta(J(\mathbf{2}\times\mathbf{k})), \preceq)$ y algunas composiciones restringidas inducidas por $\mathcal{M}_k$. En estos casos se considera que el vértice $(k, k) \in \mathcal{M}_k$ es una trayectoria reticular.

Se debe observar que el conjunto de vértices de una trayectoria reticular $L = (i_0, j_0)||(k, k) \in$

$\mathcal{M}_k = \delta(J(\mathbf{2} \times \mathbf{k}))$, con $L \neq (k, k)$, puede ser construido recursivamente haciendo:

$$(i_{t+1}, j_{t+1}) = (i_t + \epsilon_t, j_t + 1 - \epsilon_t), \tag{3-3}$$

$0 \leq t \leq 2k - (i_0 + j_0 + 1)$, donde $\epsilon_t \in \{0, 1\}$, $\quad \epsilon_0 = 0$ si $(i_0, j_0) = (0, 0)$, $\quad$ y $\quad \epsilon_{2k-(i_0+j_0+1)} = 1$.

Dada la translación $T : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ definida por:

$$T(i, j) = (i', j') = (j + 1, i + 1), \text{ para todo } (i, j) \in \mathbb{N}^2. \tag{3-4}$$

Entonces, la imagen $T(\delta(J(\mathbf{2} \times \mathbf{k})))$, dotada con el orden del producto $\preceq$ (ver Ec. (3-2)) es isomorfa a $\mathcal{M}_k$ para todo $k \geq 1$. Por lo tanto, existe una biyección entre los conjuntos correspondientes de trayectorias reticulares. En tal caso, L es una trayectoria reticular en $\mathcal{M}_k$ si y sólo si $T(L)$ también lo es en $T(\delta(J(\mathbf{2} \times \mathbf{k})))$ (en $T(L)$, se tiene que, $(i'_{t+1}, j'_{t+1}) = (i'_t + \epsilon_t, j'_t + 1 - \epsilon_t)$, con $\epsilon_{2k'-(i'_0-j'_0+1)} = 0$).

En adelante $\mathcal{M}'_k$ denotará el poset $(T(\delta(J(\mathbf{2} \times \mathbf{k}))), \preceq)$.

A continuación se definirán las Composiciones de tipo $\mathcal{O}$.

El n-ésimo *Número Octaedral* se obtiene con la expresión $\mathcal{O}_n = \frac{n(2n^2+1)}{3}$, con $n \geq 1$ y $\mathcal{O}_{rsk_0}$ denotará una suma de la forma $\mathcal{O}_r + \mathcal{O}_s + \mathcal{O}_{k_0}$ con k_0 fijo.

Si r_0, s_0, k_0, k_1 y k_2 son enteros positivos fijos con $s_0 \leq r_0$, $r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$ entonces se dirá que una composición $c = \{z_0, z_1, \ldots, z_t\}$ de un entero positivo n es de *tipo* $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$ si y sólo si c satisface las reglas $(a_{\mathcal{O}})$-$(d_{\mathcal{O}})$:

$(a_{\mathcal{O}})$ $z_0 = \mathcal{O}_{rsk_0}$, para algún $r_0 \leq r \leq k_1$, y $s_0 \leq s \leq k_2$.

$(b_{\mathcal{O}})$

$$n = \mathcal{O}_{rsk_0} + z_1 + \cdots + z_t, \tag{3-5}$$

donde $t = (k_1 + k_2) - (r + s)$ y para cada $\quad 1 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s)$, $\quad z_i = (m_i^2 + (m_i + 1)^2)$, para algún entero positivo m_i.

$(c_{\mathcal{O}})$ Si $S = \{s_0(r, s), s_1(r, s), \ldots, s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r, s)\}$ es el conjunto de las sumas $s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r, s) = \mathcal{O}_{k_1 k_2 k_0}$. De hecho, para todo $0 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s)$, se tiene que, $s_i(r, s) = \mathcal{O}_{pqk_0}$, para algún $r \leq p \leq k_1$, $\quad s \leq q \leq k_2$. En tal caso, $s_{i+1}(r, s) \in \{\mathcal{O}_{p(q+1)k_0}, \mathcal{O}_{(p+1)qk_0}\}$, para todo $0 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s + 1)$.

($d_{\mathcal{O}}$) $\mathcal{O}_{k_1k_2k_0}$ es una composición(trivial) de tipo $\mathcal{O}((i'_0, j'_0),(k_1,k_2),k_0)$ para todo $1 \leq j'_0 \leq i'_0 \leq k_1$, $1 \leq j'_0 \leq k_2$ y k_0 fijo.

$\mathcal{O}$ denota el conjunto de todas las composiciones de tipo $\mathcal{O}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0)$, con $1 \leq s_0 \leq r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$ y $k_0 \geq 1$.

Veamos por ejemplo, las composiciones de tipo $\mathcal{O}((1,1),(3,3),1)$ del número $39 = \mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_3 + 1$ son:

39,
$13 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2$,
$26 + 2^2 + 3^2$,
$21 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$,
$8 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$,
$8 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2$,
$3 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2$,
$3 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$.

Ahora se definirán las Composiciones de tipo $\mathcal{Q}$.

Si q_i denota el i-ésimo cubo, p_i^5 denota el i-ésimo número pentagonal y r_0, s_0, k_0, k_1, k_2 son enteros positivos fijos con $s_0 \leq r_0$, $r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$ entonces se debe decir que una composición $\lambda = \{y_0, y_1, \ldots, y_t\}$ de un entero positivo n es de *tipo* $\mathcal{Q}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0)$ si satisface las reglas ($a_{\mathcal{Q}}$)-($d_{\mathcal{Q}}$):

($a_{\mathcal{Q}}$) $y_0 = \mathcal{Q}_{rsk_0} = q_r + q_s + 2q_{k_0}$, para algún $r_0 \leq r \leq k_1$, $s_0 \leq s \leq k_2$.

($b_{\mathcal{Q}}$)

$$n = \mathcal{Q}_{rsk_0} + y_1 + y_2 + \cdots + y_t. \tag{3-6}$$

donde, $t = (k_1 + k_2) - (r + s)$ y para cada $1 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s)$, $\quad y_i = \frac{p^5_{2\mu+1} + \mu + 1}{2}$, para algún $\mu \geq 1$. Se observa que $y_i \equiv 1 \pmod 6$.

($c_{\mathcal{Q}}$) Cada suma parcial $s_0(r,s), s_1(r,s), \ldots, s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r,s)$ en (3-6) tiene la forma:

$$s_i(r,s) = \mathcal{Q}_{pqk_0} \quad \text{con} \quad s_{i+1} \in \{\mathcal{Q}_{(p+1)qk_0}, \mathcal{Q}_{p(q+1)k_0}\},\ 0 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s + 1)$$

para algunos enteros positivos p, q, $r \leq p \leq k_1$, $s \leq q \leq k_2$.
En este caso:

$$s_0(r,s) = \mathcal{Q}_{rsk_0} \quad \text{y} \quad s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r,s) = \mathcal{Q}_{k_1k_2k_0}.$$

$(d_{\mathcal{Q}})$ $\mathcal{Q}_{k_1k_2k_0}$ es una composición (trivial) de tipo $\mathcal{Q}((i'_0, j'_0), (k_1, k_2), k_0)$ para todo $1 \leq j'_0 \leq i'_0 \leq k_1$, $1 \leq j'_0 \leq k_2 \leq k_1$ y $k_0 \geq 1$ fijo.

$\mathcal{Q}$ denota el conjunto de todas las composiciones de tipo $\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$, con $1 \leq s_0 \leq r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$ y $k_0 \geq 1$.

Por ejemplo, las siguientes son las ocho composiciones de tipo $\mathcal{Q}((1,1),(3,3),1)$ de $56 = q_3 + q_3 + 2q_1$.

56,

$37 + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 37 + 19$,

$30 + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 30 + 7 + 19$,

$11 + \frac{p_5^5+2+1}{2} + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 11 + 19 + 7 + 19$,

$11 + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 11 + 7 + 19 + 19$,

$18 + \frac{p_5^5+2+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 18 + 19 + 19$,

$4 + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 4 + 7 + 19 + 7 + 19$,

$4 + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 4 + 7 + 7 + 19 + 19$.

En [8] se han obtenido los siguientes resultados, los cuales describen identidades entre Composiciones de tipo $\mathcal{O}$ y Composiciones de tipo $\mathcal{Q}$.

Teorema 3.4. *Sea $c(\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0); \alpha)$ el número de composiciones de tipo $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$ de un número entero positivo α, entonces*

$$c(\mathcal{O}((1,1),(k',k'),m_0); \mathcal{O}_{k'k'm_0}) = \sum_{j=1}^{k'} e(\boldsymbol{2} \times \boldsymbol{j}) = \sum_{j=1}^{k'} C_j,$$

donde k', k_0, m_0, n y q son enteros positivos fijos y C_j denota el j-ésimo número de Catalán.

Demostración. Se observa que cualquier composición $c = \{z_0, z_1, \ldots, z_t\}$ de tipo $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$ satisface la condición:

$$\mathcal{O}_{k_1 k_2 k_0} = \sum_{h=0}^{t} z_h.$$

Por lo tanto, se debe mostrar que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de Composiciones de tipo $\mathcal{O}((1,1), (k', k'), m_0)$ y el conjunto de trayectorias reticulares $\mathcal{M}'_k$. Para hacer esto, se define una Partición-$\mathcal{M}'_k$, $w^{\mathcal{O}} : \mathcal{M}'_k \to \mathbb{N}$, tal que:

$$w^{\mathcal{O}}(i', j') = \mathcal{O}_{i'j'm_0}. \tag{3-7}$$

Para todo $(i', j') \in \mathcal{M}'_k$. En este caso, una Trayectoria Reticular $(i'_0, j'_0)||(k', k') \in \mathcal{M}'_k$ es etiquetada por una única sucesión de la forma:

$$\mathcal{O}_{i'_0 j'_0 m_0} \leq \mathcal{O}_{(i'_0+\epsilon_0)(j'_0+1-\epsilon_0)m_0} \leq \cdots \leq \mathcal{O}_{(i'_{t-1}+\epsilon_{t-1})(j'_{t-1}+1-\epsilon_{t-1})m_0} \leq \cdots \leq \mathcal{O}_{k'k'm_0}$$

donde, para $0 \leq t \leq 2k' - (i'_0 + j'_0 - 1)$,se tiene que:

$$\mathcal{O}_{(i'_{(t+1)} j'_{(t+1)} k_0)} - \mathcal{O}_{(i'_t j'_t k_0)} = \begin{cases} j'^2_t + j'^2_{t+1} & \text{si } \epsilon_t = 0, \\ i'^2_t + i'^2_{t+1}, & \text{si } \epsilon_t = 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, cada trayectoria reticular $(r, s)||(k', k') \in \mathcal{M}'_k$ define una única composición de tipo $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k', k'), m_0)$ de $\mathcal{O}_{k'k'm_0}$, donde $r_0 \leq r \leq k'$, $s_0 \leq s < k'$ (en este caso, el vértice (k', k') define la composición trivial $\mathcal{O}_{k'k'm_0}$ de tipo $\mathcal{O}((1,1), (k', k'), m_0)$. Debido a que por definición, cada Composición de tipo $\mathcal{O}((i', j'), (k', k'), m_0)$ induce una única trayectoria reticular de la forma $(i', j')||(k', k') \in \mathcal{M}'_k$, se puede concluir que el conjunto de Composiciones de tipo $\mathcal{O}((1,1), (k', k'), m_0)$ es una correspondencia biyectiva con el conjunto de trayectorias reticulares de $\mathcal{M}'_k$. Por lo tanto, $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{k'} C_j$, es decir, el número $\mathcal{L}$ de tales trayectorias reticulares es igual al número de Composiciones de tipo $\mathcal{O}((1,1), (k', k'), m_0)$ (ver Nota 3.2) y se obtiene el resultado. □

Teorema 3.5. *Si* $c(\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0); \alpha)$ *es el número de composiciones de tipo* $\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$ *de un entero positivo* α *entonces*

$$c(\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0); \mathcal{O}_{k_1k_2k_0}) = c(\mathcal{O}((r_0 - s_0 + s_1, s_1), (k_1 - s_0 + s_1, k_2 - s_0 + s_1), m_0); \mathcal{O}_{h_1h_2m_0}),$$

donde $k_0, k_1, k_2, m_0, r_0, s_0$ *y* s_1 *son enteros positivos fijos tales que* $s_0 \leq s_1$, $s_0 \leq r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$, $h_1 = k_1 - s_0 + s_1$, *y* $h_2 = k_2 - s_0 + s_1$.

Demostración. Como en la anterior demostración, se observa que cualquier composición $c = \{y_0, y_1, \dots, y_t\}$ de tipo $\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$, satisface la condición:

$$\mathcal{Q}_{k_1k_2k_0} = \sum_{h=0}^{(k_1+k_2)-(r_0+s_0)} y_h.$$

En este caso, si r_0, s_0, k_1, k_2, y k' son enteros positivos fijos, tales que $r_0 \le k_1 \le k'$, $s_0 \le k_2 \le k'$, $k_2 \le k_1$ y $s_0 \le r_0$ entonces $w^{\mathcal{Q}}$ denota la partición-$(k_1, k_2)_\triangle$ tal que (recordemos que, $(k_1, k_2)_\triangle = \{(i', j') \in \mathcal{M}'_k \mid (i', j') \preceq (k_1, k_2)\}$, $(r_0, s_0)^\triangledown = \{(i', j') \in \mathcal{M}'_k \mid (r_0, s_0) \preceq (i', j')\}$):

$w^{\mathcal{Q}} : Q = (k_1, k_2)_\triangle \to \mathbb{N}$, con:

$$w^{\mathcal{Q}}(i', j') = \begin{cases} \mathcal{Q}_{i'j'k_0}, & \text{si } r_0 \le i' \le k_1,\ s_0 \le j' \le k_2. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, cualquier trayectoria reticular $L = (i'_0, j'_0)||(k_1, k_2)$ en $Q \cap (r_0, s_0)^\triangledown$, es etiquetada por una única sucesión de la forma:

$$\mathcal{Q}_{i'_0j'_0k_0} \le \mathcal{Q}_{(i'_0+\epsilon_0)(j'_0+1-\epsilon_0)k_0} \le \cdots \le \mathcal{Q}_{(i'_{t-1}+\epsilon_{t-1})(j'_{t-1}+1-\epsilon_{t-1})k_0} \le \cdots \le \mathcal{Q}_{k_1k_2k_0}.$$

donde

$$\mathcal{Q}_{(i'_{(t+1)}j'_{(t+1)}k_0)} - \mathcal{Q}_{(i'_tj'_tk_0)} = \begin{cases} \frac{p^5_{(2i'_t+1)}+i'_t+1}{2}, & \text{si } \epsilon_t = 1, \\ \frac{p^5_{(2j'_t+1)}+j'_t+1}{2}, & \text{si } \epsilon_t = 0 \end{cases}$$

si $0 \le t \le (k_1 + k_2) - (i'_0 + j'_0 - 1)$. Luego, cada trayectoria reticular en $Q \cap (r_0, s_0)^\triangledown$ induce una composición única de tipo $\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$ (en este caso, se supone que el vértice (k_1, k_2) es una trayectoria reticular que induce la composición trivial $\mathcal{Q}_{k_1k_2k_0}$ de tipo $\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$.

Debido a que por definición cada composición de tipo $\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$ define una única trayectoria reticular en $Q \cap (r_0, s_0)^\triangledown \subseteq \mathcal{M}'_k$, se puede ver que existe una biyección entre esta clase de composiciones y el conjunto de trayectorias reticulares en $Q \cap (r_0, s_0)^\triangledown$.

Como existe una biyección entre el conjunto de trayectorias reticulares en $Q \cap (r_0, s_0)^\triangledown$ y el conjunto de composiciones de tipo $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), m_0)$, utilizando $w^{\mathcal{O}}$ la partición-$\mathcal{M}'_k$ (ver (3-7)), se puede concluir que hay una biyección entre composiciones de tipo $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), m_0)$ y composiciones de tipo $\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$.

Por último, sea $T' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ una transformación biyectiva tal que $T'(i, j) = (i - s_0 + s_1, j - s_0 + s_1)$. Por lo tanto, si $\mathcal{N}_k$ denota el poset $(T'(T(\delta(J(\mathbf{2} \times \mathbf{k})))), \preceq)$, (ver (3-2) y (3-4)) entonces $\mathcal{M}'_k$ es isomorfo a $\mathcal{N}_k$ y el número N de trayectorias reticulares en $T'(Q \cap (r_0, s_0)^{\triangledown}) \subseteq \mathcal{N}_k$ es igual el número de trayectorias reticulares en $Q \cap (r_0, s_0)^{\triangledown} \subseteq \mathcal{M}'_k$.

Como el conjunto de trayectorias reticulares en $T'(Q \cap (r_0, s_0)^{\triangledown})$ es una correspondencia biyectiva con el conjunto de composiciones de tipo $\mathcal{O}((r_0 - s_0 + s_1, s_1), (k_1 - s_0 + s_1, k_2 - s_0 + s_1), m_0)$ de $\mathcal{O}_{h_1 h_2 m_0}$, y

$$N = c(\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0); \mathcal{Q}_{k_1 k_2 k_0}),$$

se tiene el resultado. $\square$

4 Particiones-$\mathcal{P}$ y composiciones en sumas mixtas de números cuadrados y triangulares

En el Capítulo 1 se presentaron algunos resultados de sumas mixtas de números cuadrados y triangulares, en este capítulo se utilizan los Teoremas 3.4 y 3.5 con el fin de relacionar las particiones-$\mathcal{P}$ y obtener fórmulas para composiciones de un entero positivo n en el cual cualquier suma parcial de las partes es una suma mixta de números cuadrados y triangulares (recordamos la notación t_i para el i-ésimo número triangular).

4.1 Composiciones de tipo $\mathcal{T}_m^0$

Si r_0, s_0, k_0, k_1, k_2 son enteros positivos fijos con $s_0 \leq r_0$, $r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$, entonces se dice que una composición $\lambda = \{y_0, y_1, \dots, y_t\}$ de un entero positivo n es de *tipo* $\mathcal{T}^0((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0, m)$ si satisface las siguientes reglas $(a_{\mathcal{T}^0})$-$(d_{\mathcal{T}^0})$ para algún $k_0, m \geq 1$ fijo:

$(a_{\mathcal{T}^0})$ $\quad y_0 = \mathcal{T}^0_{rsk_0m} = t_r + t_s + mt_{k_0}$, para algún $r_0 \leq r \leq k_1$, $\quad s_0 \leq s \leq k_2$.

$(b_{\mathcal{T}^0})$

$$n = \mathcal{T}^0_{rsk_0m} + y_1 + y_2 + \cdots + y_t, \tag{4-1}$$

donde, $t = (k_1 + k_2) - (r + s)$ y para cada $1 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s)$. Si $(k_1, k_2) \neq (1, 1)$ entonces $2 \leq y_i \leq \max\{k_1, k_2\}$.

$(c_{\mathcal{T}^0})$ Cada suma parcial $s_0(r, s), s_1(r, s), \dots, s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r, s)$ en (4-1) tiene la forma:
$s_i(r, s) = \mathcal{T}^0_{pqk_0m}$ con $s_{i+1} \in \{\mathcal{T}^0_{(p+1)qk_0m}, \mathcal{T}^0_{p(q+1)k_0m}\}$, $0 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s + 1)$

para algunos enteros positivos p, q, $r \leq p \leq k_1$, $s \leq q \leq k_2$. En este caso:

$$s_0(r,s) = \mathcal{T}^0_{rsk_0m}, \quad \text{y} \quad s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r,s) = \mathcal{T}^0_{k_1k_2k_0m}.$$

($d_{\mathcal{T}^0}$) $\mathcal{T}^0_{k_1k_2k_0m}$ es una composición (trivial) de tipo $\mathcal{T}^0((i'_0, j'_0), (k_1, k_2), k_0, m)$ para todo $1 \le j'_0 \le i'_0 \le k_1$, $1 \le j'_0 \le k_2 \le k_1$, $k_0, m \ge 1$ fijo.

$\mathcal{T}^0_m$ denota al conjunto de todas las composiciones de tipo $\mathcal{T}^0((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0, m)$, $1 \le s_0 \le r_0 \le k_1$, $s_0 \le k_2 \le k_1$ y $k_0, m \ge 1$.

Por ejemplo, las siguientes son las composiciones de tipo $\mathcal{T}^0((1,1),(3,3),1,2)$ del número 14:

14,

11+3,

8+3+3,

9+2+3,

6+2+3+3,

6+3+2+3,

4+2+2+3+3, y 4+2+3+2+3.

El resultado que se presenta a continuación es consecuencia de los Teoremas 3.4 y 3.5.

Nota 4.1. Recordamos que C_j representa el j-ésimo número de Catalán.

Corolario 4.2. *Sea $c(\mathcal{T}^0((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0, m); \alpha)$ el número de composiciones de tipo $\mathcal{T}^0((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0, m)$ de un número positivo α. Entonces*

$$c(\mathcal{T}^0((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0,m);\mathcal{T}^0_{k_1k_2k_0m}) = c(\mathcal{O}((r_0-s_0+s_1,s_1),(k_1-s_0+s_1,k_2-s_0+s_1),m_0);\mathcal{O}_{h_1h_2m_0}),$$

donde $k_0, k_1, k_2, m_0, r_0, s_0$ y s_1 son enteros positivos fijos tales que $s_0 \le s_1$, $s_0 \le r_0 \le k_1$, $s_0 \le k_2 \le k_1$, $h_1 = k_1 - s_0 + s_1$, y $h_2 = k_2 - s_0 + s_1$. En particular

$$c(\mathcal{T}^0((1,1),(k_1,k_2),k_0,m;\mathcal{T}^0_{k_1k_2k_0m}) = \sum_{j=1}^{k_1} C_j.$$

Demostración. Observamos nuevamente que cualquier composición $c = \{y_0, y_1, \ldots, y_t\}$ de tipo $\mathcal{T}^0((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0, m)$, satisface la condición:

$$\mathcal{T}^0_{k_1k_2k_0m} = \sum_{h=0}^{(k_1+k_2)-(r_0+s_0)} y_h.$$

Ahora, si se denota $w^{\mathcal{T}^0}$ la partición-$(k_1,k_2)_\triangle$ y se define en tal forma que:

$w^{\mathcal{T}^0} : (k_1,k_2)_\triangle \to \mathbb{N}$, con

$$w^{\mathcal{T}^0}(i',j') = \begin{cases} \mathcal{T}^0_{i'j'k_0m}, & \text{si } r_0 \leq i' \leq k_1,\ s_0 \leq j' \leq k_2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, los argumentos usados en la demostración del Teorema 3.5 permiten concluir que para todo $h_1, h_2, k_0, k_1, k_2, m, m_0, r_0, s_0, s_1$ existe una correspondencia biyectiva entre composiciones de tipo

$\mathcal{O}((r_0 - s_0 + s_1, s_1), (k_1 - s_0 + s_1, k_2 - s_0 + s_1), m_0)$ de $\mathcal{O}_{h_1h_2m_0}$ y

composiciones de tipo $\mathcal{T}^0((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0,m)$ de $\mathcal{T}^0_{k_1k_2k_0m}$.

En particular, si $r_0 = s_0 = s_1 = 1$ y $k_1 = k_2$ entonces

$$c(\mathcal{T}^0((1,1),(k_1,k_1),k_0,m); \mathcal{T}^0_{k_1k_1k_0m}) = c(\mathcal{O}((1,1),(k_1,k_1),m_0); \mathcal{O}_{k_1k_1m_0}) = \sum_{j=1}^{k_1} C_j.$$

□

4.2 Composiciones de tipo $\mathcal{T}^1_m$

Si r_0, s_0, k_0, k_1, k_2 son enteros positivos fijos con $s_0 \leq r_0$, $r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$ entonces debemos decir que una composición $\lambda = \{y_0, y_1, \ldots, y_t\}$ de un entero positivo n es de *tipo* $\mathcal{T}^1((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0,m)$ si satisface las siguientes reglas $(a_{\mathcal{T}^1})$-$(d_{\mathcal{T}^1})$ para algún $k_0, m \geq 1$ fijo:

$(a_{\mathcal{T}^1})$ $y_0 = \mathcal{T}^1_{rsk_0m} = t_r + t_s + mk_0^2$, para algún $r_0 \leq r \leq k_1$, $s_0 \leq s \leq k_2$.

$(b_{\mathcal{T}^1})$

$$n = \mathcal{T}^1_{rsk_0m} + y_1 + y_2 + \cdots + y_t, \tag{4-2}$$

donde, $t = (k_1 + k_2) - (r + s)$ y para cada $1 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s)$. Si $(k_1, k_2) \neq (1,1)$ entonces $2 \leq y_i \leq \max\{k_1, k_2\}$.

$(c_{\mathcal{T}^1})$ Cada suma parcial $s_0(r,s), s_1(r,s), \ldots, s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r,s)$ en (4-2) tiene la forma:

$$s_i(r,s) = \mathcal{T}^1_{pqk_0m} \quad \text{con} \quad s_{i+1} \in \{\mathcal{T}^1_{(p+1)qk_0m}, \mathcal{T}^1_{p(q+1)k_0m}\},$$

$$0 \leq i \leq (k_1+k_2) - (r+s+1)$$

para algunos enteros positivos p, q, $r \leq p \leq k_1$, $s \leq q \leq k_2$. En este caso

$$s_0(r,s) = \mathcal{T}^1_{rsk_0m}, \quad \text{y} \quad s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r,s) = \mathcal{T}^1_{k_1k_2k_0m}.$$

$(d_{\mathcal{T}^1})$ $\mathcal{T}^1_{k_1k_2k_0m}$ es una composición(trivial) de tipo $\mathcal{T}^1((i'_0, j'_0), (k_1,k_2), k_0, m)$ para todo $1 \leq j'_0 \leq i'_0 \leq k_1$, $1 \leq j'_0 \leq k_2 \leq k_1$, $k_0, m \geq 1$ fijo.

$\mathcal{T}^1_m$ denota al conjunto de todas las composiciones de tipo
$\mathcal{T}^1((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0,m)$, $1 \leq s_0 \leq r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$ y $k_0, m \geq 1$.

Se debe observar que, si $t_r = (r')^2$ para algún $r, r' \geq 1$, entonces, el número de composiciones de tipo $\mathcal{T}^1((1,1),(k_1,k_2),r',m)$ de un entero positivo n es igual al número de composiciones de tipo $\mathcal{T}^0((1,1),(k_1,k_2),r,m)$ de n, para todo $k_1,k_2 \geq 1$ y $m \geq 1$ fijo. Se tiene el siguiente resultado, que es consecuencia de los Teoremas 3.4, 3.5 y el Corolario 4.2.

Corolario 4.3. *Si $c(\mathcal{T}^1((r_0,s_0),(k_1,k_2),k'_0,m');\alpha)$ es el número de composiciones de tipo $\mathcal{T}^1((r_0,s_0),(k_1,k_2),k'_0,m')$ de un número entero positivo α, entonces*

$$c(\mathcal{T}^0((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0,m);\mathcal{T}^0_{k_1k_2k_0m}) = c(\mathcal{T}^1((r_0,s_0),(k_1,k_2),k'_0,m');\mathcal{T}^1_{k_1k_2k'_0m'})$$

donde $k_0, k'_0, k_1, k_2, m, m', r_0$ y s_0 son enteros positivos fijos tales que $s_0 \leq r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$.

Demostración. Las biyecciones requeridas pueden ser obtenidas usando los argumentos descritos en la prueba del Teorema 3.5 con $w^{\mathcal{T}^1}$ partición-$(k_1,k_2)_\triangle$ y definida en tal forma que:

$w^{\mathcal{T}^1} : (k_1,k_2)_\triangle \to \mathbb{N}$, con:

$$w^{\mathcal{T}^1}(i',j') = \begin{cases} \mathcal{T}^1_{i'j'k'_0m'}, & \text{si } r_0 \leq i' \leq k_1,\ s_0 \leq j' \leq k_2. \\ 0, & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

□

4.3 Composiciones de tipo $\mathcal{T}_m^2$

Si r_0, s_0, k_0, k_1, k_2 son enteros positivos fijos con $s_0 \leq r_0$, $r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$ entonces se debe decir que una composición $\lambda = \{y_0, y_1, \ldots, y_t\}$ de un entero positivo n es de *tipo* $\mathcal{T}^2((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0, m)$ si satisface las siguientes reglas $(a_{\mathcal{T}^2})$-$(d_{\mathcal{T}^2})$ para algún $k_0, m \geq 1$ fijo:

$(a_{\mathcal{T}^2})$ $y_0 = \mathcal{T}^2_{rsk_0m} = r^2 + s^2 + mt_{k_0}$, para algún $r_0 \leq r \leq k_1$, $s_0 \leq s \leq k_2$.

$(b_{\mathcal{T}^2})$

$$n = \mathcal{T}^2_{rsk_0m} + y_1 + y_2 + \cdots + y_t, \tag{4-3}$$

donde, $t = (k_1 + k_2) - (r + s)$ y para cada $1 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s)$, $y_i = 2x + 1$, para algún $x \geq 1$. Si $(k_1, k_2) \neq (1, 1)$ entonces $3 \leq y_i \leq 2\max\{k_1, k_2\} - 1$.

$(c_{\mathcal{T}^2})$ Cada suma parcial $s_0(r, s), s_1(r, s), \ldots, s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r, s)$ en (4-3) tiene la forma
$s_i(r, s) = \mathcal{T}^2_{pqk_0m}$ con $s_{i+1} \in \{\mathcal{T}^2_{(p+1)qk_0m}, \mathcal{T}^2_{p(q+1)k_0m}\}$, $0 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s + 1)$

para algunos enteros positivos p, q, $r \leq p \leq k_1$, $s \leq q \leq k_2$. En este caso

$$s_0(r, s) = \mathcal{T}^2_{rsk_0m}, \quad \text{y} \quad s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r, s) = \mathcal{T}^2_{k_1k_2k_0m}.$$

$(d_{\mathcal{T}^2})$ $\mathcal{T}^2_{k_1k_2k_0m}$ es una composición (trivial) de tipo $\mathcal{T}^2((i_0', j_0'), (k_1, k_2), k_0, m)$
para todo $1 \leq j_0' \leq i_0' \leq k_1$, $1 \leq j_0' \leq k_2 \leq k_1$, $k_0, m \geq 1$ fijo.

Denotamos $\mathcal{T}_m^2$ al conjunto de todas las composiciones de tipo
$\mathcal{T}^2((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0, m)$, $\quad 1 \leq s_0 \leq r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$ y $k_0, m \geq 1$.

Como un ejemplo, se presentan las composiciones de tipo $\mathcal{T}^2((1, 1), (3, 3), 1, 2)$ de 20:

20,

15+5,

10+5+5,

12+3+5,

7+3+5+5,

7+5+3+5,

4+3+3+5+5,

4+3+5+3+5.

Se debe observar que, por definición existe una biyección entre composiciones de tipo $\mathcal{T}_m^i$ y composiciones de tipo $\mathcal{T}_{m'}^2$, $i \in \{0,1\}$, $m, m' \geq 1$. Los argumentos descritos en las pruebas de los Teoremas 3.4, 3.5, Corolarios 4.2 y 4.3 y $w^{\mathcal{T}^2}$ partición-$(k_1,k_2)_\triangle$, tales que:

$w^{\mathcal{T}^2} : (k_1,k_2)_\triangle \to \mathbb{N}$, con:

$$w^{\mathcal{T}^2}(i',j') = \begin{cases} \mathcal{T}^2_{i'j'k_0'm'}, & \text{si } r_0 \leq i' \leq k_1,\ s_0 \leq j' \leq k_2. \\ 0, & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

permiten obtener el siguiente resultado.

Corolario 4.4. *Sea $c(\mathcal{T}^2((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0',m');\alpha)$ el número de composiciones de tipo $\mathcal{T}^2((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0',m')$ de un número positivo α entonces*

$$c(\mathcal{T}^0((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0,m);\mathcal{T}^0_{k_1k_2k_0m}) = c(\mathcal{T}^2((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0',m');\mathcal{T}^2_{k_1k_2k_0'm'}),$$

donde $k_0, k_0', k_1, k_2, m, m', r_0$ y s_0 son enteros positivos fijos tales que $s_0 \leq r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$.

Por lo tanto:

$$c(\mathcal{T}^2((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0',m');\mathcal{T}^2_{k_1k_2k_0'm'}) = c(\mathcal{T}^1((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0,m);\mathcal{T}^1_{k_1k_2k_0m}).$$

Bibliografía

[1] G.E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Reprint of the 1976 original, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[2] G.E. Andrews and K. Eriksson, *Integer Partitions*, Reprinted ICM edition 2010, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] B.C. Berndt, *Number Theory in the Spirit of Ramanujan*, Student Mathematical Library, 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[4] M. Bhargava, *On the Conway-Schneeberger fifteen theorem*, Quadratic Forms and Their Applications (Dublin, 1999), 27-37, Contemp. Math., 272, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[5] A.I. Borevich and I.R. Shafarevich, *Number Theory*, Translated from the Russian by Newcomb Greenleaf, Pure and Applied Mathematics, vol. 20, Academic Press, New York-London, 1966.

[6] A.M. Cañadas and A. Irlande, *On partitions into figurate numbers and compositions of multipartite numbers*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **17** (2010), no. 2, 173–208.

[7] A.M. Cañadas, M.A.O. Angarita, A.N.P. Pulido, and A.M.S. Arcos, *On some linear extensions of a poset and compositions of multipartite numbers*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **18** (2010), no. 2, 97–123.

[8] A.M. Cañadas, A.N.P. Pulido, and A.M.S. Arcos, *On some higher dimensional compositions*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **21** (2011), no. 1, 83–108.

[9] A.M. Cañadas and M.A.O. Angarita, *On sums of three squares and compositions into squares and triangular numbers*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **23** (2011), no. 1, 25–59.

[10] A.L. Cauchy, *Démonstration du théorèm génèral de Fermat sur les nombres polygones*, Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, Gauthier-Villars **VI** (1905), 320–353.

[11] J.H. Conway, *Universal quadratic forms and the fifteen theorem*, Quadratic forms and their applications (Dublin, 1999), 23-26, Contemp. Math., 272, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[12] S. Cooper and M. Hirschhorn, *Sums of squares and sums of triangular numbers*, Georgian Mathematical Journal **13** (2006), no. 4, 675–686.

[13] B.A. Davey and H.A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, 2nd ed., Cambridge University Press, New York, 2002.

[14] L.E. Dickson, *History of The Theory of Numbers*, vol. II: Diophantine Analysis, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[15] W. Duke, *Some old problems and new results about quadratic forms*, Notices. Amer. Math. Soc. **44** (1997), no. 2, 190–196.

[16] J.A. Ewell, *On sums of triangular numbers and sums of squares*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), no. 8, 752–757.

[17] ______, *A trio of triangular number theorems*, Amer. Math. Monthly **105** (1998), no. 9, 848–849.

[18] ______, *On sums of two squares and sums of two triangular numbers*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **33** (2003), no. 3, 1289–1293.

[19] H. Farkas, *Sums of squares and triangular numbers*, Online J. Anal. Combin. **1** (2006), no. 1, 1–11.

[20] F. Ge and Z.W. Sun, *On some universal sums of generalized polygonal numbers.* preprint, 2009.

[21] E. Grosswald, A. Calloway, and J. Calloway, *The representation of integers by three positive squares*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), no. 3, 451–455.

[22] E. Grosswald, *Partitions into squares*, Enseign. Math. **(2) 30** (1984), no. 3-4, 223–245.

[23] ______, *Representations of Integers as Sums of Squares*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[24] S. Guo, H. Pan, and Z.W. Sun, *Mixed sums of squares and triangular numbers II*, Integers **7** (2007), A56, 5 pp.

[25] R.K. Guy, *Every number is expressible as the sum of how many polygonal numbers?*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 2, 169–172.

[26] ______, *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd ed., Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2004.

[27] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th ed., Revised by D.R. Heath-Brown and J.H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[28] M.D. Hirschhorn and J.A. Sellers, *On representations of a number as a sum of three triangles*, Acta Arith. **77** (1996), 289–301.

[29] ______, *Partitions into three triangular numbers*, Australas. J. Comb. **30** (2004), 307–318.

[30] B. Kane, *Representing sets with sums of triangular numbers*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2009**, no. 17, 3264–3285.

[31] ______, *On two conjectures about mixed sums of squares and triangular numbers*, J. Combin. Number Theory **1** (2009), 77–90.

[32] B. Kane and Z.W Sun, *On almost universal mixed sums of squares and triangular numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 12, 6425-6455.

[33] H.D. Kloosterman, *On the representation of numbers in the form* $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, Acta Math. **49** (1927), no. 3-4, 407–464.

[34] V.A. Lebesgue, *Questions 1059, 1060, 1061 (Lionnet)*, Nouv. Ann. Math. **11** (1872), 516–519.

[35] D.H. Lehmer, *On the partition of numbers into squares*, Amer. Math. Monthly **55** (1948), 476–481.

[36] S.C. Milne, *New infinite families of exact sums of squares formulas, Jacobi elliptic functions, and Ramanujan's tau function*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A **93** (1996), no. 26, 15004–15008.

[37] ______, *Infinite Families of exact sums of squares formulas, Jacobi Elliptic Functions, Continued Fractions, and Schur Functions*, The Ramanujan Journal **6** (2002), no. 1, 7–149.

[38] M.B. Nathanson, *A short proof of Cauchy's polygonal number theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), no. 1, 22–24.

[39] ______, *Additive Number Theory*, The Classical Bases, Graduate texts in Mathematics, 164, Springer-Verlag, 1996.

[40] B.K. Oh and Z.W. Sun, *Mixed sums of squares and triangular numbers III*, J. Number Theory **129** (2009), no. 4, 964–969.

[41] K. Ono, S. Robins, and P. Wahl, *On the representation of integers as sums of triangular numbers*, Aequationes Math. **50** (1995), no. 1-2, 73–94.

[42] L. Panaitopol, *On the representation of natural numbers as sums of squares*, Amer. Math. Monthly **112** (2005), no. 2, 168–171.

[43] S. Ramanujan, *On the expression of a number in the form* $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2$, [Proc. Cambridge Philos. Soc. 19 (1917), 11-21], Collected papers of Srinivasa Ramanujan, 169-178, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.

[44] R. Schulze-Pillot, *Representation by integral quadratic forms-a survey*, Algebraic and Arithmetic Theory of Quadratic Forms, 303-321, Contemp. Math., 344, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[45] M.S. Réalis, *Scolies pour un théorèm d'arithmétique*, Nouv. Ann. Math. **12** (1873), 212–217.

[46] B.S.W. Schröder, *Ordered Sets. An Introduction*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[47] R.P. Stanley, *Ordered structures and partitions*, Memories of Amer. Math. Soc., no. 119, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1972.

[48] ______, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[49] Z.W. Sun, *Mixed sums of squares and triangular numbers*, Acta Arith. **127** (2007), no. 2, 103–113.

[50] J.J. Tattersall, *Elementary Number Theory in Nine Chapters*, 2nd ed., Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[51] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.