C A P I T U L O I

1.1. DEFINICIONES Y CLASIFICACION DE LAS E.D.

Def.1.1.1.- Una Ecuación Diferencial es una ecuación que contiene derivadas.

Ejs.1.1.1.- Algunos ejemplos de E.D. son los siguientes

a) $\frac{dv}{dt} = -g$ representa la E.D. de la caída de un cuerpo.

b) $\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$ representa la E.D. del Movimiento Armónico Simple.

c) $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Esta E.D. es conocida con el nombre de ecuación de Laplace.

Como sabemos que existen dos formas de derivar, las E.D. las dividimos en dos clases; E.D. Ordinarias y E.D. Parciales.

Def.1.1.2.- Si una E.D. contiene derivadas totales (ordinarias) pero no contiene derivadas parciales, la ecuación es llamada E.D. Ordinaria.

En otras palabras, una E.D. Ordinaria es la que contiene derivadas totales (ordinarias) de una o más funciones con respecto a una sola variable independiente.

Ejs.1.1.2.- a) $\frac{dy}{dx} = f(x)$ donde $f(x)$ es cualquier función de x.

b) $x + yy' = 0$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + (\frac{dy}{dx})^2\right]^{3/2}$

d) $a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} = c$ a,b,c ctes

e) $m\,\frac{d^kx}{dz^k} + n\,\frac{d^py}{dz^p} = g(z)$

f) $P_o(x)\,\frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1}(x)\,\frac{dy}{dx} + P_n(x)\,y = Q(x)$

g) $(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\,\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$

h) $x\,\frac{d^3y}{dx^3} + 4\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dy}{dx} + (6\text{Ln } x)\,y = e^x$

De todas estas E.D. Ordinarias, la f) jugará un papel muy importante en nuestro estudio y es conocida como la E.D. Lineal de orden n.

Def.1.1.3.- Si una E. D. contiene derivadas parciales pero no contiene derivadas totales, la ecuación es llamada E.D. Parcial.

En otras palabras, Una E.D. Parcial es la que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a más de una variable independiente.

Ejs.1.1.3.- a) $a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=a^2\nabla^2 u=\frac{\partial u}{\partial t}$ E.D. de transmisión del calor

b) $a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=a^2\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ E.D. de Onda.

c) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^{1/3}$

d) $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2}=\left[\rho+\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}$

e) $\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}$

f) $u\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=K\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\right)^3$

Nota.1.1.1.- En las clases en que estan divididas las E.D. no incluiremos aquellas que sean identidades tales como

$$\frac{d}{dx}(\text{ sen } ax)=a\cos ax\ ,\quad \frac{d}{dx}(UV)=U\frac{dV}{dx}+V\frac{dU}{dx}$$

Nota.1.1.2.- El símbolo

$$\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^k$$

donde m,k son enteros positivos, es conocida como la derivada ordinaria de y con respecto a x de orden m y grado k. La variable dependiente y es una función de la variable independiente x.

Tambien el símbolo

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^r \partial y^s}\right)^k$$

donde r,s son enteros no negativos y n,k,r+s enteros positivos tal que r+s = n es conocida como la derivada parcial de u con respecto a x e y de orden n y grado k. La variable dependiente u es una función de las variables independientes x e y .

Como trabajaremos con ecuaciones, se hace necesario otra clasificación de las E.D.

Def.1.1.4.- El orden de una E.D. es el de la más alta derivada contenida en la ecuación.

Ejs.1.1.4.- a) $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ — de primer orden

b) $f(x,y) + g(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ — de primer orden

c) $f(x)\frac{d^4y}{dx^4} + g(x)\frac{d^2y}{dx^2} + h(x)\frac{dy}{dx} + j(x)y = P(x)$ — de cuarto orden

d) $a\frac{dx}{dt} + b\frac{d^2y}{dt^2} = cf(t)$ — de segundo orden

e) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = k\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$ — de segundo orden

f) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = K$ — de segundo orden

Def.1.1.5.- El grado de una E.D. algebraica en sus derivadas, es el grado algebraico de la <u>más alta derivada</u> contenida en la ecuación.

Ejs.1.1.5.- a) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{3x}{4y}$ — de segundo grado

b) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[3]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4}$

Para encontrarle el grado a esta E.D. es necesario expresarla como una E.D. algebraica en sus derivadas, entonces

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 1$$ de tercer grado

c) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/2}}$

Para encontrale el grado a esta E.D. es necesario expresarla como una E.D. algebraica en sus derivadas, entonces

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/2}\right]^3$$

(?)

$$= 1 + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/2} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{3/2}$$

por tanto

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 1 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/2}\left[3 + \frac{d^2y}{dx^2}\right]$$

elevando al cuadrado para eliminar el radical obtenemos

$$\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 1\right]^2 = \frac{d^2y}{dx^2}\left[3 + \frac{d^2y}{dx^2}\right]^2$$

luego el grado de la E.D. es 4

d) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[K(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right] = c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Para encontar el grado (y el orden) de esta E.D. es necesario encontrar la derivada parcial con respecto a x de la expresión que está dentro del corchete,por tanto

$$\frac{\partial K(T)}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + K(T)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c\frac{\partial T}{\partial t}$$

pero $K(T)$ es una función de T por eso aplicamos la regla de derivación en cadena obteniendo

$$\frac{\partial K}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + K(T)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Luego el grado de esta E.D. es 1 y su orden es 2.

Nota.1.1.3.- Observese que todas las E.D. tienen orden(Porque?) mienstras que no todas tienen grado pues la E.D.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}$$

no tiene grado ya que no se puede expresar como una ecuación algebraica en sus derivadas pues

$$e^{\frac{dy}{dx}} = 1 + \frac{\frac{dy}{dx}}{1!} + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^n}{n!} + \cdots\cdots$$

De lo anterior se deduce que si se tiene una E.D. en la cual uno de sus términos tiene desarrollo en serie en términos de alguna derivada,la E.D. no tiene grado definido.

EJERCICIOS 1.1

Para cada una de las siguientes E.D. determine si es una E.D. Ordinaria o una E.D. Parcial y encuentre el orden y grado respectivo.

1) $\frac{dy}{dx} = x^2 + 5y$

2) $\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$

3) $\left(\frac{d^3s}{dt^3}\right)^2 + \frac{d^2s}{dt^2} = s - 3t$

4) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{3/2} = \sqrt[3]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4}$

5) $(2x + y)dx + (x - 3y)dy = 0$

6) $y'' + xy + \operatorname{sen}(y') = 1 - x$

7) $\frac{d^2y}{dx^2}\left[E(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right] = W(x)$

8) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3} = k\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/2}$

9) $y' + x^2 + 5 = \cos(y'')$

10) $a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{b}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

11) $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{4}{1 - k^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

12) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{1/5} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{1/2}}$

13) $y' + x = (y - xy')^{-3}$

14) $y' + x = (y - xy'')^{-4}$

15) $y'' - x = (1 - xy'')^{-5}$

16) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3} = \sqrt[5]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2}}$

17) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} = \sqrt[5]{1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/2}}$

18) $\frac{d^2y}{dx^2}\left[x\sqrt{1+\frac{d^2y}{dx^2}} \right] = f(x)$?

19) $\frac{d^2y}{dx^2}\left[y\sqrt{1+\frac{d^2y}{dx^2}} \right] = g(x)$?

20) $e^{Ln(\,y'')} - x(\,1 + y'')^{1/3} = (\,y'')^4$

1.2. FORMACION DE LAS E.D. ORDINARIAS

Def.1.1.- Cualquier relación que no contiene derivadas entre las variables de una E.D. que satisface identicamente dicha ecuación es llamada una solución de la E.D.

Ejs.1.2.1.- a) $y = ax^3 + bx^{-4} - \frac{x^2}{3}$ es solución de la E.D.

$$x^2y'' + 2xy' - 12y = 2x^2$$

ya que

$$y' = 3ax^2 - 4bx^{-5} - \frac{2}{3}x$$

$$y'' = 6ax + 20bx^{-6} - \frac{2}{3}$$

Luego

$$x^2y'' + 2xy' + -12y = 6ax^3 + 20bx^{-4} - \frac{2}{3}x^2 + 6ax^3 - 8bx^{-4}$$
$$- \frac{4}{3}x^2 - 12ax^3 - 12bx^{-4} + 4x^2$$
$$= 2x^2$$

b) $V(x,y) = e^{2x-y}\cos(y-2x)$ es solución de la E.D.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + 4\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

porque

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2e^{2x-y}\cos(y-2x) + 2e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -e^{2x-y}\cos(y-2x) - e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2\left[2e^{2x-y}\cos(y-2x) + 2e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x)\right]$$
$$+ 2\left[2e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x) - 2e^{2x-y}\cos(y-2x)\right]$$
$$= 8e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\left[-e^{2x-y}\cos(y-2x) - e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x)\right]$$
$$-\left[-e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x) + e^{2x-y}\cos(y-2x)\right]$$
$$= 2e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = -\left[2e^{2x-y}\cos(y-2x) + 2e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x)\right]$$
$$-\left[2e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x) - 2e^{2x-y}\cos(y-2x)\right]$$
$$= -4e^{2x-y}\operatorname{sen}(y-2x)$$

reemplazando estas expresiones en la E.D. observamos que se cumple la identidad.

c) Encontrar la solución de la siguiente E.D. $\frac{dy}{dx} = ay$

De la E.D. obtenemos $\frac{dy}{y} = adx$ y por lo tanto

$$\int \frac{dy}{y} = \int adx$$

de donde obtenemos

$$Ln(y) = ax + Ln(C)$$

o sea

$$Ln\left(\frac{y}{C} \right) = ax$$

luego

$$y = Ce^{ax}$$

d) Si tenemos la E.D. $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$ observamos que

1) $y = K$ K cte
2) $y = ax$ a cte
3) $y = bx^2$ b cte
4) $y = cx^3$ c cte

son soluciones de la E.D. dada.Además,cualquier combinación lineal de estas cuatro soluciones es tambien solución de la E.D. por tanto,la solución general de dicha ecuación es

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

donde A,B,C,D son constantes.

Def.1.2.2.- El conjunto formado por todas las soluciones de una E.D. es llamado solución general de la ecuación.

Veamos ahora como una función dada en términos de un parámetro es tambien solución de una E.D.

Ej.1.2.2.- Demostrar que

$$x = a(z - \text{sen } z)$$
$$y = a(1 - \cos z)$$

donde a es,diferente de cero,constante es solución de la E.D.

$$1 + (y')^2 + 2yy'' = 0$$

Derivando ambas funciones con respecto a z tenémos

$$\frac{dx}{dz} = a(1 - \cos z) \qquad \frac{dy}{dz} = a\text{sen } z$$

como

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} / \frac{dx}{dz}$$

entonces

$$y' = \frac{\text{sen } z}{1 - \cos z}$$

además $y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

entonces usando la regla de derivación en cadena encontramos

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dz}} = \frac{\frac{(1-\cos z)\cos z - \operatorname{sen}^2 z}{(1-\cos z)^2}}{a(1-\cos z)}$$

$$= \frac{\cos z - 1}{a(1-\cos z)^3} = -\frac{1}{a(1-\cos z)^2}$$

luego

$$1 + (y')^2 + 2yy'' = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 z}{(1-\cos z)^2} - \frac{2a(1-\cos z)}{a(1-\cos z)^2}$$

$$= \frac{1 - 2\cos z + \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z - 2 + 2\cos z}{(1-\cos z)^2}$$

$$= \frac{0}{(1-\cos z)^2}$$

$$= 0$$

Ej.1.2.3.- Demostrar que $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

c_1, c_2 constantes, es solución de

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

sabiendo que $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ son soluciones de dicha E.D.

Como $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ son soluciones de la E.D. dada tenemos

$$y_1'' + 3y_1' - 4y_1 = 0$$

$$y_2'' + 3y_2' - 4y_2 = 0$$

Sea $y = c_1y_1 + c_2y_2$

entonces

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2'$$

$$y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''$$

luego

$$y'' + 3y' - 4y = c_1y_1'' + c_2y_2'' + 3(c_1y_1' + c_2y_2') - 4(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$= c_1(y_1'' + 3y_1' - 4y_1) + c_2(y_2'' + 3y_2' - 4y_2)$$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0$$

$$= 0$$

En muchas de las aplicaciones en donde se utilizan las E.D. no siempre se desea encontrar la solución general sino una determinada solución que satisfaga ciertas condiciones. Estas condiciones auxiliares a menudo especifican los valores de la función y algunas de sus derivadas en uno o más puntos.

Ej.1.2.4.- La E.D. $(y')^3 = y$ donde $y(o) = 0$ tiene como solución a la expresión

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = x + C$$

pero como $y(o) = 0$ entonces $C = 0$ y por tanto la solución que pasa por el punto (o,o) es

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = x$$

o sea

$$27y^2 = 8x^3$$

Es fácil demostrar (hagalo!) que esta ecuación pasa por el punto (o,o) y satisface la E.D. dada.

Las E.D. y el conjunto de condiciones auxiliares en un mismo punto constituyen un problema de valores iniciales o problema de Cauchy. La razón de lo anterior se debe a que en muchas aplicaciones la variable independiente representa el tiempo y las condiciones especifican el tiempo en el cual empieza el proceso. Los problemas para los cuales no se dan los valores de las derivadas en un mismo punto sino los valores de la función en puntos diferentes se llaman Problemas de Contorno.

De ahora en adelante procuraremos hallar la solución general o una solución particular de las E.D. dadas por lo que podemos cuestionarnos lo siguiente:

a) EXISTENCIA. Dada una E.D., existe solución que la satisfaga incluso bajo ciertas condiciones dadas?.

La respuesta es negativa pues en el caso que se nos dé la E.D.

$$|y'| + |y| = -5$$

observamos que esta E.D. no tiene solución.

Si tenemos la E.D. $|y'| + |y| = 0$

y queremos encontrar una solución que pase por el punto (o,5) vemos que esta E.D. no tiene solución pues la única que satisface dicha E.D. es la función $y = 0$ que no cumple la condición impuesta.

b) UNICIDAD. Si existe la solución, ésta es única?.

La respuesta tambien es negativa pues la expresión $y = cx$ es solución de la E.D. $y' = c$ y sin embargo $y = cx + 1$ tambien lo es.

c) DETERMINACION. Si hay una o más soluciones, como las determinamos?.

Pues bien, el énfasis del curso recae sobre la parte c); sobre las dos primeras daremos a conocer ciertos teoremas importantes.

Para ello debemos tener presente las etapas que existen para resolver un determinado problema que son:

1) Formulación Matemática del problema, que consiste en la identificación de las variables dependientes e independientes.

2) Resolución de la E.D., que consiste en la resolución de la ecuación sometiendola a las condiciones impuestas por el problema físico. Si no se pueden obtener soluciones exactas se determinarán soluciones aproximadas. (Aquí utilizaremos los teoremas de Existencia y Unicidad)

3) Interpretación científica de las soluciones, que significa comprender lo que materialmente sucede

Veamos ahora como obtener una E.D. a partir de una relación dada.

Ej.1.2.5.- Hallar una E.D. que tenga dentro de sus soluciones a la expresión

$$y = Ae^{2x} + Be^{x} + C$$

Para obtener la E.D. deseada, procederemos de la siguiente manera: Si derivamos la expresión dada eliminamos la constante C por tanto

$$y' = 2Ae^{2x} + Be^{x}$$

si obtenemos la segunda y tercera derivada tenemos

$$y'' = 4Ae^{2x} + Be^{x}$$

$$y''' = 8Ae^{2x} + Be^{x}$$

de donde concluímos que

$$y''' - y'' = 4Ae^{2x}$$

y

$$y'' - y' = 2Ae^{2x}$$

o sea que $\quad y''' - y'' = 2(y'' - y')$

o lo que es lo mismo $\quad y''' - 3y'' + 2y' = 0$

que es la E.D. buscada.

Ej.1.2.6.- Hallar la E.D. cuya solución es

$$y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 x$$

Si derivamos la expresión dada dos veces podemos eliminar la constante c_2 por tanto

$$y' = c_1 \cos x + c_2$$

$$y'' = -c_1 \operatorname{sen} x$$

de ésta última logramos

$$c_1 = -\frac{y''}{\operatorname{sen} x}$$

reemplazando c_1 en la primera derivada podemos despejar c_2, o sea

$$c_2 = y' - \left(-\frac{y''}{\operatorname{sen} x}\right)\cos x$$

$$c_2 = y' + y''\text{ctg } x$$

reemplazando c_1 y c_2 en la ecuación original tenemos

$$y = -y'' + (y' + y''\text{ctg } x) x$$
$$= -y''(1 - x \text{ ctg } x) + xy'$$

luego la E.D. buscada es

$$y'' (1 - x \text{ ctg } x) - xy' + y = 0$$

Nota.1.2.1.- Nótese que el procedimiento utilizado en los dos ejemplos anteriores se basa en la eliminación de las constantes arbitrarias y por tanto es necesario derivar tantas veces como constantes aparezcan en la expresión dada,obteniendose así una E.D. cuyo orden es igual al número de constantes.Existen ecuaciones que satisfacen E.D. cuyo orden es menor al número de constantes contenidas en la ecuación dada tal es el caso de la expresión

$$y^2 - 2axy - bx^2 = 0$$

que satisface la E.D. $xy' - y = 0$

Nota.1.2.2.- Antes de describir una técnica general para obtener una E.D. Ordinaria de orden n de la familia de curvas planas dada por la ecuación

$$f(x,y,c_1,c_2,\ldots\ldots,c_n) = 0$$

haremos énfasis en un resultado básico del álgebra.

Sea un sistema líneal de n ecuaciones con n-1 incógnitas $x_1,x_2,\ldots$ $\ldots,x_{n-1}$ dadas por

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1,2,3,\ldots\ldots,n$$

donde las a_{ij} y las b_i son constantes o cantidades que son independientes de las n-1 incógnitas,entonces,si n ecuaciones lineales con n-1 incógnitas tiene solución es porque

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix} = 0$$

Nótese que el anterior resultado no asegura que si el determinante es cero necesariamente el sistema dado tiene una solución pues el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

es igual a cero y sin embargo el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x + 2y &= 2 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

no tiene solución.

Aplicando este resultado al ejemplo 1.2.6. tenemos

$$\begin{aligned} y - c_1 \operatorname{sen} x - c_2 x &= 0 \\ y' - c_1 \cos x - c_2 &= 0 \\ y'' + c_1 \operatorname{sen} x + 0.c_2 &= 0 \end{aligned}$$

que es un sistema lineal formado por tres ecuaciones y dos incógnitas (c_1, c_2) entonces, si este sistema tiene solución es porque

$$\begin{vmatrix} y & -\operatorname{sen} x & -x \\ y' & -\cos x & -1 \\ y'' & \operatorname{sen} x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

luego

$$y \operatorname{sen} x - y' x \operatorname{sen} x + y''(\operatorname{sen} x - x\cos x) = 0$$

que es equivalente a la ya obtenida pues basta dividirla por sen x para obtener

$$y''(1 - x\operatorname{ctg} x) - y'x + y = 0$$

Veamos ahora como podemos resolver algunas E.D.

Ej.1.2.7.- Resolver la siguiente E.D.

$$(y')^2 - y^2 = 1$$

Observamos que la E.D. dada es de primer orden y grado dos por tanto despejaremos la primera derivada de la siguiente manera

$$(y')^2 = 1 + y^2$$

$$y' = \pm(1 + y^2)^{1/2}$$

De esta expresión obtenemos dos soluciones que satisfacen la misma E.D.

luego $$\frac{dy}{(1 + y^2)^{1/2}} = \pm\, dx$$

entonces $$\int \frac{dy}{(1 + y^2)^{1/2}} = \pm \int dx$$

la primera integral la resolvemos por medio de la sustitución trigonométrica $y = tg\, z$ obteniendo

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{1/2}} = \mathrm{Ln} \left| (1+y^2)^{1/2} + y \right|$$

por lo que

$$\mathrm{Ln} \left| (1+y^2)^{1/2} + y \right| = \pm (x - A)$$

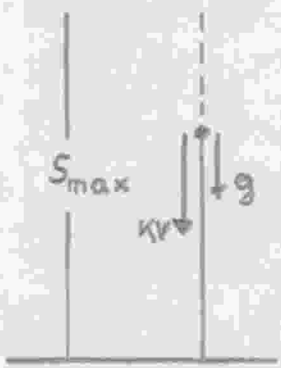
o sea

$$y + (1+y^2)^{1/2} = e^{\pm(x-A)}$$

es su solución general.

Al comenzar este curso, decíamos que las E.D. tienen aplicación en problemas prácticos, veamos uno de ellos.

Ej.1.2.8.- Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad v_o y la resistencia del aire produce un retardo kv siendo v la velocidad de la partícula en el tiempo t. Hállese la altura máxima que alcanza la partícula y el tiempo que tarda en alcanzarla.



Como la partícula va hacia arriba, la gravedad y la resistencia del aire contrarrestan el movimiento y por tanto el retardo total de la partícula está dado por

$$g + kv$$

Sea s el espacio recorrido por el cuerpo cuando alcanza la velocidad v entonces, la aceleración del cuerpo en ese instante será

$$\frac{dv}{dt} = -(g + kv)$$

entonces

$$-\int \frac{dv}{g+kv} = \int dt$$

y por tanto

$$-\frac{1}{k} \mathrm{Ln} \left| g + kv \right| + A = t$$

Según los datos del problema cuando $t = 0, v = v_o$ esto implica que

$$A = \frac{1}{k} \mathrm{Ln} \left| g + kv_o \right|$$

de donde se deduce que

$$t = -\frac{1}{k} \mathrm{Ln} \left| g + kv \right| + \frac{1}{k} \mathrm{Ln} \left| g + k\, v_o \right| = \frac{1}{k} \mathrm{Ln} \left| \frac{g + kv_o}{g + kv} \right|$$

Sabemos que la velocidad es cero cuando la partícula alcanza la altura máxima, entonces

$$t_{máx} = \frac{1}{k} \operatorname{Ln} \left| \frac{g + kv_o}{g} \right|$$

ahora, como

$$t = \frac{1}{k} \operatorname{Ln} \left| \frac{g + kv_o}{g + kv} \right|$$

entonces

$$\frac{g + kv_o}{g + kv} = e^{kt}$$

$$g + kv = (g + kv_o)e^{-kt}$$

luego

$$v = (\frac{g + kv_o}{k})e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

pero

$$v = \frac{ds}{dt}$$

así que

$$ds = \left[(\frac{g + kv_o}{k})e^{-kt} - \frac{g}{k} \right] dt$$

integrando obtenemos

$$s = -(\frac{g + kv_o}{k^2})e^{-kt} - \frac{g}{k} t + B$$

y como t=o entonces s = 0, tenemos

$$B = \frac{g + k\, v_o}{k^2}$$

por lo que

$$s = (\frac{g + kvo}{k^2})(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$$

pero $s_{máx}$ se obtiene cuanto t es máximo, por lo tanto

$$s_{máx} = (\frac{g + kv_o}{k^2})(1 - e^{-k \frac{1}{k} \operatorname{Ln} \left| \frac{g + kv_o}{g} \right|}) - \frac{g}{k^2} \operatorname{Ln} \left| \frac{g + kv_o}{g} \right|$$

$$= (\frac{g + kv_o}{k^2})(1 - \frac{g}{g + kv_o}) - \frac{g}{k^2} \operatorname{Ln} \left| \frac{g + kv_o}{g} \right|$$

$$= \frac{v_o}{k} - \frac{g}{k^2} \operatorname{Ln} \left| \frac{g + kv_o}{g} \right|$$

Supongamos ahora que tenemos una E.D. de orden n, para ello escogemos la más sencilla

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

y busquemos su solución general, entonces

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

por tanto

$$d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = f(x)dx$$

integrando encontramos

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)dx + A$$

donde $\int f(x)dx$ es una expresión dada en términos de x sin término independiente, pero

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) = \int f(x)\,dx + A$$

entonces al integrar obtenemos otra constante que llamaremos B, luego

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int\left[\int f(x)dx\right]dx + \int A dx + B$$

Si proseguimos en esta forma, obtendremos n constantes.

De lo anterior podemos concluír que bajo ciertas condiciones una E.D. de orden n tiene en su solución general n constantes arbitrarias y que ésta solución general es única, cualquier otra solución es un caso particular de la obtenida. En otras palabras, la solución general de una E.D. tiene tantas constantes arbitrarias como índique el orden de la ecuación. Una solución cualquiera de dicha ecuación que no posea dichas constantes arbitrarias o que contenga un número menor es llamada una solución particular.

EJERCICIOS 1.2.

Demostrar que las siguientes relaciones son soluciones de las E.D. escritas al frente.

1) $\mathrm{Ln}(y) = c_1e^{x} + c_2e^{-x} \Rightarrow \frac{1}{y}$ — $yy'' - (y')^2 = y^2\mathrm{Ln}(y)$

2) $y = e^{ax}\mathrm{sen}(bx)$ — $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$

3) $y = \mathrm{sen}(x - c)$ — $y'' + k\left[1 - y^2 - (y')^2\right]y' + y = 0$

4) $y = cx + f(c)$ — $y = xy' + f(y')$

5) $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = a^2$ — $a|y''| = \left[1 + (y')^2\right]^{3/2}$

6) $u = e^{x}x\cos(y) - e^{x}y\,\mathrm{sen}(y)$ — $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

7) $u = e^{(x^2-y^2)}\cos(2xy)$ — "

8) $u = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ — "

9) $u = \mathrm{Ln}(x^2 + y^2)^{1/2}$ — "

10) $u = \sum_{n=1}^{m} c_n\cos(nx)\,\mathrm{senh}(ny)$ — "

11) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ — $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{2}{u}$

12) $u = \mathrm{sen}(mx)\cos(ny)\,e^{-(m^2 + n^2)^{1/2}z}$ — " $= 0$

13) $y = e^{\mathrm{sen}(x + at)} + \mathrm{Ln}(x - at)$ — $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

14) $y = e^{\mathrm{sen}(x + at)} + \mathrm{Ln}(x + at) + \cos^2(x - at) + \mathrm{senh}(x - at)$ — "

De los ejercicios 13) y 14) puede concluírse que $Y(x,t) = F(x + at) + G(x - at)$ es solución de "

15) $y = 6\mathrm{sen}(2x-3t) + 8\mathrm{sen}(4x-6t) + 2\mathrm{sen}(2x+3t)$ — $9\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

16) $u = r^3\mathrm{sen}(3\theta)$ — $r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$

Se puede generalizar diciendo que $u = \sum_{n=1}^{m} c_nr^n\mathrm{sen}(n\theta)$ es solución de "

17) $v = e^{-k\pi^2 t}\cos(\pi x)$ — $\dfrac{\partial V}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$

Se puede generalizar diciendo que $v = \sum_{n=0}^{m} e^{-kn^2\pi^2 t}\cos(n\pi x)$ es sol de "

18) $z = A\, e^{-(3/2)^2 \pi^2 t} \operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi x)$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Se puede generalizar diciendo que

$$z = \sum_{n=1}^{m} c_n e^{-(n-1/2)^2 \pi^2 t} \operatorname{sen}\left[(n-1/2)\pi x\right]$$

es solución de "

19) $P = A \operatorname{sen}(\pi \frac{x}{a}) \operatorname{sen}(\pi \frac{y}{b}) \cos\left[\pi c(a^{-2}+b^{-2})^{1/2} t\right]$ $\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right], c \neq 0$

Se puede generalizar diciendo que

$$P = \sum_{n=1}^{r} \sum_{m=1}^{s} c_{mn} \operatorname{sen}(\pi \frac{nx}{a}) \operatorname{sen}(\pi \frac{my}{b}) \cos\left[\pi c(a^{-2} n^2 + b^{-2} m^2)^{1/2} t\right]$$

es solución de "

Encontrar una E.D.O. que tenga dentro de sus soluciones a las siguientes expresiones

20) $ay^2 = bx^2 + cx + d$

21) $r = b - a\cos(z)$

22) $y(c - \operatorname{tg}(x)) = \operatorname{ctg}(x) + 1$

23) $y = c_1 \operatorname{sen}(ax) + c_2 \cos(ax)$

24) $y = a + be^{x} + ce^{2x} + de^{-x}$

25) $a^{-2}(x-h)^2 + b^{-2}(y-h)^2 = 1$

Resolver las siguientes E.D.

26) $y' = x(1+x)^{-1/2}$ $\qquad y(o) = 0$

27) $y' = 1 + y^{-2}$ $\qquad y(1) = 0$

28) $(y')^2 = 1 - x^2$ $\qquad y(o) = 1$

29) $(y')^2 = 2xy' + 1$ $\qquad y(o) = 0$

Sugerencia: Utilizar la fórmula de la ecuación cuadrática.

30) Si se tiene $\frac{dx}{dt} = k(x-a)(x-b)$

donde k,a,b, son constantes y a es diferente de b, demuestrese que

$$x = ab\left[\frac{e^{(b-a)kt} - 1}{be^{(b-a)kt} - a}\right]$$

sabiendo que $x(o) = 0$

EJERCICIOS 1.1

1)	E.D.O.	Orden	1	Grado	1
2)	E.D.O.	"	1	"	1
3)	E.D.O.	"	3	"	2
4)	E.D.O.	"	2	"	9
5)	E.D.O.	"	1	"	1
6)	E.D.O.	"	2	"	no definido
7)	E.D.O.	"	4	"	1
8)	E.D.O.	"	2	"	2
9)	E.D.O.	"	2	"	no definido
10)	E.D.P.	"	2	"	2
11)	E.D.P.	"	2	"	2
12)	E.D.O.	"	3	"	5
13)	E.D.O.	"	1	"	4
14)	E.D.O.	"	2	"	4
15)	E.D.O.	"	2	"	6
16)	E.D.O.	"	2	"	10
17)	E.D.O.	"	2	"	3
18)	E.D.O.	"	4	"	2
19)	E.D.O.	"	4	"	2
20)	E.D.O.	"	2	"	12

EJERCICIOS 1.2.

20) $yy''' + 3y'y'' = 0$

21) $\text{sen}(\theta)\,\dfrac{d^2r}{d\theta^2} - \cos(\theta)\,\dfrac{dr}{d\theta} = 0$

22) $y' - (1 + y^2) = 0$

23) $y'' + a^2y = 0$

24) $y'''' - 2y''' - y'' + 2y' = 0$

25) $(x-y)(y')^2(y''')^2 - \left[3(x-y)y'(y'')^2 + 3(y')^3y'' - 3(y')^2y''\right] y'''$
$+ 9(y')^2(y'')^3 = 0$

26) $3y = 4 - 2(2-x)(1+x)^{1/2}$

27) $y = \text{tg}(y - x + 1)$

28) $4(y-1)^2 = \left[x(1 - x^2)^{1/2} + \text{sen}^{-1}(x)\right]^2$

29) $(2y-x^2)^2 = \left[x(1 + x^2)^{1/2} + \text{Ln}\,|x + (1 + x^2)^{1/2}|\right]^2$