C A P I T U L O III

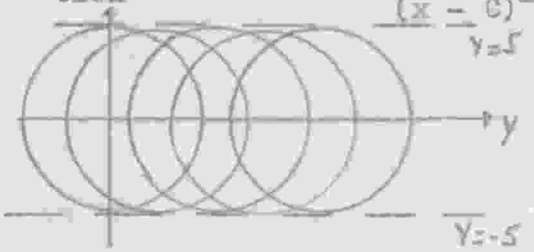
SOLUCIONES SINGULARES. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN Y GRADO SUPERIOR AL PRIMERO. ECUACION DE CLAIRAUT. ECUACION DE LAGRANGE.

3.1. SOLUCIONES SINGULARES

Ilustraremos lo que es una solución singular por medio del siguiente ejemplo

Ej.3.1.1.- Consideremos la familia de circunferencias representadas por la ecuación

$$(x - C)^2 + y^2 = 25$$



Estas circunferencias tienen sus centros sobre la recta $y = 0$ siendo las rectas $y = 5$ y $y = -5$ tangentes a todas ellas. Claramente el número de tales circunferencias que pasan por un punto dado es

a) cero si y^2 es mayor que 25

b) una si y^2 es igual a 25

c) dos si y^2 es menor que 25

Cuando $y = 0$ solamente dos circunferencias tienen una tangente vertical única.

Busquemos la E.D. tal que la familia de circunferencias dadas sea la solución general, para ello procedemos de la siguiente forma.

$$2(x - C) + 2yy' = 0$$

de donde obtenemos

$$yy' = -(x - C)$$

así que reemplazando en la Ecuación dada tenemos

$$y^2(y')^2 + y^2 = 25$$

y de aquí logramos $\quad (y')^2 = (25 - y^2)y^{-2}$

Es fácil ver que esta ecuación no define valores reales de y' si se cumple que y^2 es mayor que 25, define un solo valor real de y' si y^2 es igual a 25 y dos valores de y' si y^2 es menor que 25.

Hagamos $y' = p$ entonces el lugar de los puntos para el cual

$$p^2 = \frac{(25 - y^2)}{y^2}$$

define un solo valor de p se compone de las rectas $y = 0, y = 5$ y $y = -5$.

Entonces, cabe preguntarse si estas rectas son soluciones de la E.D. obtenida. Observamos que las tres rectas anteriores tienen la forma $y =$ una constante y por tanto $y' = p = 0$

sustituyendo en $\quad p^2 = \dfrac{25 - y^2}{y^2}$

tenemos $0 = 0/25$ si $y = 5$ y $y = -5$ pero no se satisface para $y = 0$.

Es claro que $$(x - C)^2 + y^2 = 25$$

es la solución general de $$p^2 = \frac{25 - y^2}{y^2}$$

y que cualquier solución particular de esta E.D. es una circunferencia cuyo centro está sobre el eje X y de radio 5; sin embargo, las rectas $y = 5$, $y = -5$ no son expresables como tales a pesar de ser solución de la E.D. obtenida.

Def.3.1.1.- Cualquier solución de una E.D. que no esté incluida en la solución general es llamada solución singular.

La curva correspondiente (en el ejemplo anterior las rectas $y = 5$, $y = -5$)es llamada envolvente de la familia.

Ahora, se presenta el siguiente problema: Dada una E.D. como hallamos la solución general y la singular (si existe)? Tratemos de contestar esta pregunta mediante un ejemplo del cual sacaremos conclusiones importantes.

Ej.3.1.2.- Hallar la solución general y singular (si existe) de la E.D.

$$xp^2 - 2yp + 9x = 0$$

donde $p = y'$.

Si tratamos de despejar p observamos que aparecen radicales por tanto despejamos y obteniendo

$$y = \frac{9x}{2p} + \frac{xp}{2}$$

Derivando esta expresión con respecto a x obtenemos

$$p = \frac{9}{2}\left(\frac{p - xp'}{p^2}\right) + \frac{1}{2}(xp' + p)$$

por tanto $$2p = 9\left(\frac{p - xp'}{p^2}\right) + xp' + p$$

o sea $$9p - 9xp' + xp^2p' - p^3 = 0$$

$$(xp' - p)p^2 - 9(xp' - p) = 0$$

$$(xp' - p)(p^2 - 9) = 0$$

de donde concluímos que

$$p^2 = 9 \quad \text{y} \quad xp' = p$$

De $$xp' = p$$

obtenemos $$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$p = Cx$$

pero $$p = y'$$

por lo que $$dy = Cxdx$$

integrando $$y = \frac{Cx^2}{2} + A$$

observe que de una E.D. de primer orden hemos obtenido una solución que posee dos constantes arbitrarias lo cual no es posible. Entonces si reemplazamos la expresión obtenida encontramos A en términos de C así:

$$xC^2x^2 - 2(C\frac{x^2}{2} + A)Cx + 9x = -2ACx + 9x = 0$$

$$x(9 - 2AC) = 0$$

luego $$A = 9/2C$$

por lo que $$y = C\frac{x^2}{2} + \frac{9}{2C}$$

Tambien podemos eliminar p de las expresiones

$$xp^2 - 2yp + 9x = 0$$

$$p - Cx = 0$$

además, podemos considerar las ecuaciones anteriores como ecuaciones paramétricas de la solución. Si procedemos a eliminar p de las dos ecuaciones anteriores tenemos

$$x^3C^2 - 2yCx + 9x = 0$$

por tanto $$y = \frac{C^2x^3}{2Cx} + \frac{9x}{2xC}$$

$$= C\frac{x^2}{2} + \frac{9}{2C}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Pero $p^2 = 9$ implica que $p = 3$ y $p = -3$ entonces $\frac{dy}{dx} = \pm 3$

o sea $$y = \pm 3x + B$$

si esta ecuación la sustituímos en

$$xp^2 - 2yp + 9x = 0$$

tenemos $$9x - 2(\pm 3x + B)(\pm 3) + 9x = \pm 6B = 0$$

luego $$B = 0$$

y por tanto $$y = \pm 3x$$

estas expresiones satisfacen la E.D. dada pero no estan incluidas en la solución general y por consiguiente son soluciones singulares.

Nota.3.1.1.- Del Algebra y Cálculo sabemos que toda ecuación polinómica $F(p) = 0$ de grado n tiene n raíces y que toda raíz múltiple de multiplicidad mayor que uno es tambien raíz de $F'(p) = 0$.

Recíprocamente, toda raíz de $F(p) = 0$ y $F'(p) = 0$ que sea común es raíz múltiple de $F(p) = 0$.

Aplicando la nota anterior a nuestro problema tenemos

$$f(x,y,p) = 0 = xp^2 - 2yp + 9x$$

$$f'(x,y,p) = \frac{\partial}{\partial p}\left[f(x,y,p)\right] = 0 = 2px - 2y$$

De este sistema de ecuaciones eliminamos p obteniendo

$$p = \frac{y}{x}$$

así que reemplazando en

$$xp^2 - 2yp + 9x = 0$$

obtenemos

$$9x - y^2x^{-1} = 0$$

lo que implica

$$y = \pm 3x$$

que son las soluciones singulares de la E.D. dada.

De lo anterior se deduce que las condiciones para que una E.D. tenga soluciones singulares son:

a) Que la E.D. tenga raíces múltiples en p.

b) Que la primitiva tenga raíces múltiples.

Nota.3.1.2.- Observe que

1) Una E.D. de primer orden y primer grado no tiene soluciones singulares.

2) Una E.D. de grado superior a uno no tiene soluciones singulares si f(x,y,p) puede expresarse como factores que sean lineales en p y racionales en x,y.

EJERCICIOS 3.1.

Encontrar las soluciones singulares de las siguientes E.D.

1) $y = 2px - yp^2$

2) $2y = p^2 + 4px + 2x^2$

3) $y = p^2$ ✓

4) $4yx^6 = px^7 + 4p^2$

5) $(p^2 + 1)(2y - x) = 2(x + py)y$ ✗

6) $y = 2px + 3p^2$ /

7) $(1 + p^2)y^2 - 4yp - 4x = 0$ ✓

8) $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$

9) $(xp + y)^2 + 3x^5(xp - 2y) = 0$

10) $y(y - 2xp)^2 = 2p$

11) $8p^3 - 12p^2 = 27(y - x)$

12) $p = y^{2/3} + a$ Para que valores de a esta ecuación tiene solución singular?

13) Diga si $y = 0$ es solución singular o particular de la E.D.

$$p^2(12x) - 12yp + 4y = 0$$

14) La ecuación $(1 - x^2)p + xy - 10 = 0$ se satisface para $y = 10x$. Diga si esta ecuación es solución singular o particular.

EJERCICIOS 3.1.

1) $y = 0 \quad y = \pm x$

2) $y + x^2 = 0$

3) $y = 0$

4) $y = 0 \quad 64y + x^8 = 0$

5) $2x + \frac{y^2}{2y+x} = 0$

6) $3y + x^2 = 0$

7) $y^2 = 4x + 4$

8) $y = 0 \qquad y = \frac{4}{27} x^3$

9) $4y + x^5 = 0$

10) $4xy^2 = -1$

11) $y = x - \frac{4}{27}$

12) $a = 0 \qquad y = 0$

13) singular

14) Particular.

3.2. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN Y GRADO SUPERIOR AL PRIMERO.

Estudiaremos algunos tipos de E.D. de primer orden y grado mayor que uno.

CASO I. La E.D. puede ser resuelta en términos de y'.

Sabemos que la E.D. de primer orden tiene la forma

$$F(x,y,y') = 0$$

Es posible que de esta ecuación podamos despejar y' como

$$y' = f_i(x,y) \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,n$$

donde n representa el grado de la E.D.

Integrando cada una de estas ecuaciones obtenemos las soluciones de la E.D. inicial(la solución general es el conjunto de las n soluciones obtenidas).En otras palabras,si tenemos

$$a_0(x,y)(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0$$

entonces es posible expresarla en la siguiente forma

$$\left[y' - f_1(x,y)\right]\left[y' - f_2(x,y)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \left[y' - f_n(x,y)\right] = 0$$

y por tanto

$$y' = f_i(x,y) \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,n$$

así que obtenemos n soluciones que son las que determinan la solución general.

Lo anterior es cierto si encontramos n soluciones reales para y' pero si al resolver la E.D. dada con respecto a y' encontramos k soluciones reales, $k \leqslant n$,las k soluciones qùe se obtienen conforman una solución de la E.D. dada.

Ej.3.2.1.- Resolver $\qquad 2(y')^2 - (x + 2)y' + x = 0$

La E.D. la podemos escribir como

$$(y')^2 - \left(\frac{x}{2} + 1\right)y' + \frac{x}{2} = 0$$

que podemos factorizarla así

$$(y' - 1)\left(y' - \frac{x}{2}\right) = 0$$

y por tanto a) $y' = 1$

b) $y' = \dfrac{x}{2}$

de a) obtenemos $y = x + C$ y

de b) $y = \dfrac{x^2}{4} + A$

Es fácil comprobar que cualquiera de estas expresiones satisfacen la E.D. dada,por tanto el conjunto formado por las expresiones

$$y_1 = x + C \qquad\qquad y_2 = \frac{x^2}{4} + A$$

representa la integral gener$_a$l de la E.D. dada.

Nótese que la suma de y_1 y y_2 no es solución de la E.D. dada pues

$$y = y_1 + y_2 = \frac{x^2}{4} + x + B$$

donde $B = A + C$, reemplazando en la E.D. tenemos

$$2\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - (x + 2)\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x = \left(\frac{x}{2} + 1\right)(x + 2 - x - 2) + x$$
$$= x \neq 0$$

salvo cuando $x = 0$, pero si $x = 0$ entonces $y = B$ que no satsiface la E.D. original.

Ej.3.2.2.- Resolver $\quad (y')^2 - (x + y)y' + xy = 0$

Esta E.D. la podemos escribir como

$$(y' - x)(y' - y) = 0$$

obteniendo a) $y' = x$

b) $y' = y$

De a) concluímos que $y = \frac{x^2}{2} + A$

De b) $y = Be^x$

Entonces el conjunto formado por las expresiones

$$y_1 = \frac{x^2}{2} + A \qquad\qquad y_2 = Be^x$$

representa la solución general de la E.D. dada.

CASO II. La E.D. es de la forma $F(y') = 0$

Como trabajamos con E.D. de primer orden que tienen grado mayor que uno entonces $F(y') = 0$ puede expresarse como un polinomio en y' lo que implica que existe una raíz k tal que $y' = k$ (k puede ser constante real o compleja). De $y' = k$ obtenemos $y = kx + C$ de dohde concluímos que $k = \frac{y - C}{x}$ por tanto

$$F(y') = F(k) = F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$$

así que

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$$

es la solución buscada.

Ej.3.2.3.- Resolver $\quad p^9 - 169p^7 + p + 13 = 0$

donde $p = y'$.

Esta E.D. la podemos escribir así

$$p^7(p^2 - 169) + (p + 13) = (p+13)\left[p^7(p - 13) + 1\right] = 0$$

o sea que

$$p = -13$$

satisface la E.D.

Luego la solución general es

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^9 - 169\left(\frac{y - C}{x}\right)^7 + \left(\frac{y - C}{x}\right) + 13 = 0$$

CASO III. La E.D. es de la forma $y = F(x,y')$

En este caso, podemos derivarla con respecto a x obteniendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dx} \qquad p = y'$$

entonces observamos que p puede escribirse como

$$p = \phi(x,p,p')$$

que es una E.D. de primer orden y primer grado por tanto, si resolvemos esta ecuación obtenemos una función

$$g(x,p,C) = 0$$

Luego, para obtener la solución de la E.D. dada eliminamos p entre las ecuaciones

$$y = F(x,p)$$
$$g(x,p,C) = 0$$

Si lo anterior no es posible entonces expresamos x e y separadamente como funciones del parámetro p.

A este método muy a menudo se le conoce con el nombre de "solución de una E.D. por derivación".

Ej.3.2.4.- Hallar las soluciones (general y singular) de

$$y = 5px + 5x^2 + p^2 \qquad p = y'$$

Derivando la E.D. con respecto a x obtenemos

$$y' = p = (5p + 10x) + (5x + 2p)p'$$

luego

$$p'(5x + 2p) + 2(5x + 2p) = 0$$
$$(p' + 2)(5x + 2p) = 0$$

Sol Gral. Como $p' = -2$ entonces $p = -2x + C$ y de las ecuaciones

$$2x + p = C$$
$$5px + 5x^2 + p^2 = y$$

eliminamos p. Esto es, sustituyendo $p = -2x + C$ en

$$5px + 5x^2 + p^2 = y$$

obtenemos

$$\begin{aligned} y &= 5(C - 2x)x + 5x^2 + (C - 2x)^2 \\ &= 5Cx - 10x^2 + 5x^2 + C^2 - 4Cx + 4x^2 \\ &= Cx - x^2 + C^2 \end{aligned}$$

Sol Singular. Como $5x + 2p = 0$ entonces $p = -(5/2)x$ y reemplazando en la E.D. original encontramos

$$\begin{aligned} y &= 5(-\tfrac{5}{2}x)x + 5x^2 + (-\tfrac{5}{2}x)^2 \\ &= -\tfrac{5}{4}x^2 \end{aligned}$$

CASO IV. La E.D. es de la forma $x = G(y.y')$

En este caso podemos derivarla con respecto a y obteniendo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y'}\frac{dy'}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

o sea

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial p}}$$

esta ecuación puede resolverse por los métodos conocidos obteniendose como solución

$$M(y,p,C) = 0$$

Entonces si eliminamos p entre esta ecuación y la original obtenemos la solución general.

Si lo anterior no es posible, entonces expresamos a x e y separadamente como funciones del parámetro p.

Ej.3.2.5.- Resolver $\qquad x = y + Ln(p) \qquad p = y'$

Derivando la E.D. con respecto a y obtenemos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{p}\frac{dp}{dy}$$

por tanto

$$\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p}\left(p - 1 + \frac{dp}{dy} \right) = 0$$

entonces

$$\frac{dp}{dy} + p - 1 = 0$$

de donde Obtenemos $\qquad y + Ln(p - 1) \pm LnC$

o sea

$$\frac{p-1}{C} = e^{-y}$$

$$p = Ce^{-y} + 1$$

eliminando p entre esta última ecuación y la original encontramos la solución general que es

$$x = y + Ln(Ce^{-y} + 1)$$

CASO V. La E.D. es de la forma $F(y,y') = 0$

Si de la expresión anterior se puede despejar y' se obtiene una ecuación de variables separables.

Por consiguiente, son de interés los demás casos.

a) Si de la expresión $F(y,y') = 0$ se puede despejar y obtenemos una expresión de la forma

$$y = f(y')$$

y por tanto podemos aplicar el CASO III así que derivando la expresión $y = f(p)$ con respecto a x obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{df}{dp}\frac{dp}{dx}$$

luego

$$dx = \frac{1}{p}\frac{df}{dp}\,dp$$

o sea
$$x = \int \frac{1}{p}\frac{df}{dp}\,dp$$

Observese que tanto x como y estan dadas en términos de p por tanto son ecuaciones paramétricas.

Ej.3.2.6.- Resolver
$$y = (y')^3 - (y')^2 - 1$$
$$= p^3 - p^2 - 1$$

Como $\frac{dy}{dx} = p$ entónces $dx = \frac{1}{p}\,dy$

luego
$$dx = \frac{3p^2 - 2p}{p}\,dp$$

por lo que
$$x = \int (3p - 2)\,dp$$
$$= \frac{3}{2}p^2 - 2p + C$$

b) Si de la expresión $F(y,y') = 0$ no pueden despejarse ni y ni y' pero estas últimas pueden expresarse en forma paramétrica mediante algún parámetro t,digamos

$$y = h(t) \qquad p = j(t) \qquad p = y'$$

entonces $\quad dy = p\,dx = j(t)\,dx$

y de otro lado $\quad dy = h'(t)\,dt$

de modo que $\quad j(t)\,dx = h'(t)\,dt$

de donde logramos
$$dx = \frac{h'(t)}{j(t)}\,dt$$

o sea
$$x = \int \frac{h'(t)}{j(t)}\,dt$$

Por consiguiente,obtenemos l a solución general de la E.D. dada en forma paramétrica.

Ej.3.2.7.- Resolver
$$(y^{2/3}) + (y')^{2/3} = 1$$

Si hacemos $y = \cos^3 t \quad , \quad y' = p = \operatorname{sen}^3 t$

la E.D. se satisface entonces

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{-3\cos^2 t\,\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^3 t}dt = -3\,\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt = -3\operatorname{ctg}^2 t\,dt$$

de donde
$$x = 3t + 3\operatorname{ctg} t + C$$

y la solución general es
$$y = \cos^3 t$$
$$x = 3t + 3\operatorname{ctg} t + C$$

CASO VI. La E.D. es de la forma $G(x,y') = 0$

Si de la expresión anterior se puede despejar y' obtenemos una E.D. de variables separables.

Entonces pueden ocurrír los siguientes casos

a) Si de la expresión $G(x,y') = 0$ se puede despejar x obtenemos una

expresión de la forma
$$x = g(y')$$
y por tanto podemos aplicar el caso IV así que derivando con respecto a y obtenemos
$$\frac{1}{p} = \frac{dg}{dp}\frac{dp}{dy}$$
luego
$$dy = p\,\frac{dg}{dp}\,dp$$
o sea
$$y = \int p\,\frac{dg}{dp}\,dp$$
Observese que tanto x como y estan dadas en términos de p y por tanto son ecuaciones paramétricas.

Ej.3.2.8.- Resolver $\quad x = p^3 - p - 1 \qquad p = y'$

Como $dy = pdx$ entonces $\quad dy = p(3p^2 - 1)dp \quad$ por tanto
$$y = \int p(3p^2 - 1)\,dp$$
$$= \frac{3}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^2 + C$$
Las ecuaciones
$$x = p^3 - p - 1$$
$$y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^2 + C$$
determinan en forma paramétrica la familia de curvas buscadas

b) Si de la expresión $G(x,y') = 0$ no puede despejarse ni x ni y' pero estas últimas pueden expresarse en forma paramétrica mediante algún parámetro t, se procede en forma similar a la parte b) del caso V.

EJERCICIOS 3.2.

Resolver las siguientes E.D.

1) $y = (y')^2 e^{y'}$

2) $y' = e^{y'y^{-1}}$

3) $x = \mathrm{Ln}(y') + \mathrm{sen}(y')$

4) $x = (y')^2 - 2y' + 2$

5) $y = y'\mathrm{Ln}(y')$

6) $y = \mathrm{sen}^{-1}(y') + \mathrm{Ln}(1 + (y')^2)$

7) $y = (y' - 1)e^{y'}$

8) $x(1 + (y')^2) = 1$

9) $x(1 + (y')^2)^{3/2} = a$ a cte

10) $y^{2/5} + (y')^{2/5} = a^{2/5}$

11) $y^4 - (y')^4 - y(y')^2 = 0$

12) $x = y' + \mathrm{sen}(y')$

13) $y = y'(1 + y'\cos(y'))$

14) $(y')^3 - y(y')^2 - x^2y' + x^2y = 0$

15) $(y')^3 + (x + 2)e^y = 0$

16) $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$

17) $(y')^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$

18) $(y')^2 - (2x + y)y' + (x^2 + xy) = 0$

19) $y = 2y'x + y^2(y')^3$

EJERCICIOS 3.2.

1) $x = e^{p}(p + 1) + C$

$y = p^{2}e^{p}$ $\qquad y = 0$

2) $x = Ln(Ln\ p) + \frac{1}{Ln\ p} + C$

$y = \frac{p}{Ln\ p}$

3) $x = Ln\ p + sen\ p$

$y = C + p(1 + sen\ p) + cos\ p$

4) $x = p^{2} - 2p + 2$

$y = \frac{2}{3}p^{3} - p^{2} + C$

5) $x + C = \frac{(1 + Ln\ p)^{2}}{2}$

$y = pLn\ p$

6) $x + C = 2tg^{-1}p - Ln\left(\frac{1 + (1 - p^{2})^{1/2}}{p} \right)$

$y = sen^{-1}p + Ln(1 + p^{2})$ $\qquad y = 0$

7) $x = e^{p} + C$ $\qquad y = -1$

$y = (p - 1)e^{p}$

8) $y + C = \pm ((x - x^{2})^{1/2} + sen^{-1}(x^{1/2}))$

9) $x = acos^{3}t$

$y = C - asen^{3}t$

10) $x = 5(\frac{1}{3}tg^{3}t - tg\ t + t) + C$

$y = a\ sen^{5}t$

11) $x = -\frac{2}{t} + Ln\left(\frac{t + 1}{t - 1} \right) - 2\ tg^{-1}t$ $\qquad y = 0 \qquad p = yt$

$y = t^{2}(1 - t^{4})^{-1}$

12) $x = p + sen\ p$

$y + C = \frac{1}{2}p^{2} + psen\ p + cos\ p$

13) $x + C = Ln\ p + sen\ p + cos\ p$

$y = p + p^{2}cos\ p$

14) $y = \frac{x^{2}}{2} + C$, $y = -\frac{x^{2}}{2} + C$, $\boxed{y = Ce^{x}}$

15) $(x + 2)^{4/3} = 4e^{-(y/3)}$

16) $y = \frac{C}{2}x^{2} + \frac{1}{2C}$ $\qquad y = \pm x$

17) $Ln\ Cy = x \pm 2e^{(x/2)}$ $\qquad y = 0$

18) $y = \frac{x^{3}}{2} + C$, $y = Ce^{x} - x - 1$

19) $x = \frac{y^{2}}{2C} - \frac{C^{2}}{2}$ $\qquad y^{4} + x^{3} = 0$

3.3. LA ECUACION DE CLAIRAUT

Def.3.3.1.- La ecuación

$$y = px + f(p)$$

es llamada ecuación de Clairaut donde $p = y'$.

Observando la ecuación vemos que si la derivamos con respecto a x (CASO III) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = p = p + \left(x + \frac{df(p)}{dp}\right) \frac{dp}{dx}$$
$$= p + (x + f'(p)) \frac{dp}{dx}$$

luego

$$(x + f'(p)) \frac{dp}{dx} = 0$$

entonces a) $\frac{dp}{dx} = 0$

b) $x + f'(p) = 0$

De a) concluímos que $p = C$ y sustituyendo en la ecuación de Clairaut tenemos

$$y = Cx + f(C)$$

que es evidentemente la solución general.

si se cumple b) o sea $x + f'(p) = 0$

entonces de las ecuaciones

$$y = px + f(p)$$
$$0 = x + f'(p)$$

podemos eliminar p obteniendose así una relación entre x e y. Esta relación es una solución de la E.D. de Clairaut pero no contiene constantes arbitrarias y por tanto no es la solución general. De otro modo, esta solución no se obtiene, en general, a partir de la solución general

$$y = Cx + f(C)$$

dando valores a C. Pero según lo visto anteriormente, al eliminar p de dichas ecuaciones y obtener así una relación entre x e y, esta solución es una solución singular de la E.D. de Clairaut.

EJERCICIOS 3.3.

1) Pruebe que la ecuación $p^2(3x - 1) - 3p(y + 2) + 9 = 0$ (ecuación de Clairaut) tiene como solución general a la expresión

$$2Cy + C^2(y - 3x) - 4 = 0$$

y como solución singular a la expresión

$$y^2 + 4y - 12x = 0$$

Demuestre que tambien $y = 3x$ es solución y que esta solución no está contenida en la solución general aunque puede obtenerse deella cuando C crece indefinidamente, tal solución es llamada solución límite.

2) Resuelva las siguientes Ecuaciones de Clairaut

a) $y = px + 2p^2 - p$

b) $y = px + a^2p^{-1}$

c) $y = px + (1 + p^2)^{1/2}$

d) $y = px + (1 - p^2)^{1/2} - p\cos^{-1}p$

e) $y = px + (p - 1)^{-1/2}$

f) $y = px + ap(1 + p^2)^{-1/2}$

3) Demostrar que la E.D. de Clairaut

$$y = px + ap + b \qquad p = y'$$

no tiene soluciones singulares.

EJERCICIOS 3.3.

2 a) $y = Cx + 2C^2 - C$ $\qquad (x - 1)^2 + 8y = 0$

b) $y = Cx + a^2C^{-1}$ $\qquad y^2 = 4a^2x$

c) $y = Cx + (1 + C^2)^{1/2}$ $\qquad y = (1 - x^2)^{1/2}$

d) $y = Cx + (1 - C^2)^{1/2} - C\cos^{-1}C$ $\qquad y = \operatorname{sen} x$

e) $y = Cx + (C - 1)^{-1/2}$ $\qquad y = x + 3\, 2^{-2/3}\, x^{1/3}$

3.4. LA ECUACION DE LAGRANGE

Def.3.4.1.- Una E.D. de la forma $y = xf(p) + g(p) \qquad p = y'$

es llamada ecuación de Lagrange.

Esta ecuación es una generalización de la ecuación de Clairaut pues el coeficiente de x es una función cualquiera de y' en lugar de ser y'.

Para encontrar su solución general la derivamos con respecto a x obteniendo

$$p = f(p) + (\, xf'(p) + g'(p)\,)\frac{dp}{dx}$$

que la podemos escribir como

$$(p - f(p))\frac{dx}{dp} - f'(p)\,x = g'(p)$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}\,x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}\,x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

que es una E.D. Lineal de primer orden en la variable x.

Integrando ésta ecuación encontraremos

$$x = F(p)$$

y como $p = y'$ entonces $dy = pdx$ por tanto $dy = pF'(p)dp$ o sea

$$y = \int pF'(p)\,dp$$

Ej.3.4.1.-Resolver $\qquad y = -p^2x + p^2 + 1$

Derivando con respecto a x obtenemos

$$p = -p^2 + (-2px + 2p)\frac{dp}{dx}$$

simplificando encontramos

$$1 + p = 2(1 - x)\frac{dp}{dx}$$

esta ecuación es lineal pero además es de variables separables luego

$$\frac{dp}{1 + p} = \frac{1}{2}\,\frac{dx}{1 - x}$$

cuya solución es $p = \dfrac{C}{(1 - x)^{1/2}} - 1$

entonces reemplazando en la E.D. original tenemos

$$y = -\left(\frac{C}{(1 - x)^{1/2}} - 1\right)^2 x + \left(\frac{C}{(1 - x)^{1/2}} - 1\right)^2 - 1$$

es la solución general.

EJERCICIOS 3.4.

1) Demuestrese que la E.D. de Lagrange puede tener soluciones singulares de la forma $y = xf(C) + g(C)$ donde C es una raíz de la ecuación $f(C) - C = 0$.

3.5. LA E.D. DE ORDEN SUPERIOR QUE PERMITEN REDUCIR SU ORDEN

Las E.D. de n-ésimo orden tienen la forma

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots\ldots\ldots\ldots,y^{(n-1)})$$

o bien

$$F(x,y,y',y'',\ldots\ldots\ldots\ldots,y^{(n-1)},y^{(n)}) = 0$$

La primera de dichas ecuaciones se presenta cuando es posible despejar de la E.D. la derivada n-ésima y la segunda cuando es imposible,o muy difícil hacerlo. En ciertos casos,el orden de la E.D. puede ser reducido lo que permite facilitar su integración.Señalaremos tres clases de estas ecuaciones.

a) $y^{(n)} = f(x)$ Véase pag 17 de estas notas.

b) La E.D. no contiene la función buscada y sus derivadas hasta el orden k - 1 inclusive.

Esto quiere decir que la E.D. es de la forma

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots\ldots\ldots,y^{(n)}) = 0$$

En este caso,el orden de la E.D. dada puede reducirse a n-k mediante un cambio de variables.Este cambio es $y^{(k)} = q$ y por tanto $y^{(k+1)} = q',\ldots\ldots\ldots\ldots,y^{(n)} = q^{(n-k)}$

Luego $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots\ldots\ldots,y^{(n)}) = 0$

se reduce a $Q(x,q,q',\ldots\ldots\ldots,q^{(n-k)}) = 0$

De esta ecuación encontramos su solución general que contendrá n-k constantes arbitrarias y que será de la forma

$$Q(x,C_1,C_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,C_{n-k}) = q$$

y hallamos la función buscada y aplicando el caso a).En otras palabras,como $y^{(k)} = q$ entonces $y^{(k)} = Q(x,C_1,C_2,\ldots\ldots,C_{n-k})$

así que integrando k veces obtenemos la función buscada.

En particular,si la E.D. es de segundo orden y ésta no contiene a y entonces la sustitución $y' = p$ nos conduce a una E.D. de primer orden.

Ej.3.5.1.- Resolver $\dfrac{d^5y}{dx^5} - \dfrac{1}{x}\dfrac{d^4y}{dx^4} = 0$

Hagamos $q = \dfrac{d^4y}{dx^4}$ entonces la E.D. se convierte en

$$\frac{dq}{dx} - \frac{1}{x}q = 0$$

que es de variables separables así que integrando obtenemos

$$q = Cx$$

luego

$$\frac{d^4y}{dx^4} = Cx$$

integrando cuatro veces logramos la solución general que es

$$y = (C/5!)x^5 + (A/4!)x^4 + (B/3!)x^3 + (D/2!)x^2 + Ex + F$$

c) La E.D. no contiene a la variable independiente.O sea que es de la forma

$$F(y,y',y'',\ldots\ldots\ldots\ldots,y^{(n)}) = 0$$

Haciendo $y' = p$ la E.D. dada se reduce en su orden en una unidad.

En este caso se considrra p como una función en términos de y por eso todas las derivadas ($y^{(k)}$) deben expresarse en términos de las derivadas de la nueva función p con respecto a y así:

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)$$

$$= p\left(p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)$$

y asi sucesivamente las que siguen.

Particularmente, si la E.D. es de segundo orden y no contiene la variable independiente entonces la sustitución de la variable anteriormente señalada nos conduce a una E.D. de primer orden

Ej.3.5.2.- Resolver
$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

Sea $p = \frac{dy}{dx}$ entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

reemplazando en la E.D. tenemos

$$py\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

$$p\left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0$$

entonces a) $p = 0$ lo que implica que $y = C$ C cte

b) $y\frac{dp}{dy} - p = 0$ o sea $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$ cuya solución es

$p = Cy$ pero $p = y'$ por lo que $\frac{dy}{y} = Cdx$ que tiene por solución a la expresión $y = Ae^{Cx}$

EJERCICIOS 3.5.

Resolver las siguientes E.D.

1) $y''' = x\ln x$ si $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$

2) $y''' = x + \cos x$

3) $(y'')^2 - 5y' + 6 = 0$

4) $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$

5) $(y'')^2 - 2y''y' + 3 = 0$

6) $xy'' = y'\ln(\frac{y'}{x})$

7) $y''(1 + 2\ln y') = 1$

8) $(y'')^2 - y'y''' = (\frac{y'}{x})^2$

9) $y''(y' + 2)e^{y'} = 1$

10) $y'' = (1 + (y')^2)^{1/2}$

11) $y'' = y'\ln y'$ si $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$

12) $(1 - x^2)^{1/2}y'' + (1 - (y')^2)^{1/2} = 0$

13) $y''' = 3y\,y'$ si $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = 2/3$

EJERCICIOS 3.5.

1) $y = \frac{x^4}{24} \operatorname{Ln} x - \frac{13}{288} x^4 + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{9} + \frac{1}{32}$

2) $y = \frac{x^4}{24} - \operatorname{sen} x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

3) $y + C_2 = \frac{6}{5}(x + C_1) + \frac{5}{12}(x + C_1)^3$

4) $y = (1 + C_1^2)\operatorname{Ln}(x + C_1) - C_1 x + C_2$

5) $x + C_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} t + \frac{3}{4t^2}$

$y + C_2 = \frac{1}{4} t + \frac{3}{4t^3}$ $\qquad t = y''$

6) $y = (C_1 x - C_1^2)\, e^{(x/C_1)} + 1$

7) $x + C_2 = z\,(2\operatorname{Ln} z - 1)$

$y + C_1 = z^2 \operatorname{Ln} z$ $\qquad z = y'$

8) $y = C_2(xe^{C_1 x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1 x}) + C_3$

9) $x + C_2 = e^z(z + 1)$ $\qquad z = y'$

$y + C_1 = z^2 e^z$

10) $y = \cosh(x + C_1) + C_2$

11) $y = x$

12) $y = c_2 - \frac{1}{2}(1 - c_1^2)^{1/2} x^2 + \frac{1}{2} c_1 x(1 - x^2)^{1/2} + \frac{1}{2} c_1 \operatorname{sen}^{-1} x$

13) $y = \frac{4}{(x - 2)^2}$