UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

El problema de Cauchy de la clase de ecuaciones de dispersión generalizada de Benjamin-Ono bidimensionales

Julio del Carmen Lizarazo Osorio

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

El problema de Cauchy de la clase de ecuaciones de dispersión generalizada de Benjamin-Ono bidimensionales

Julio del Carmen Lizarazo Osorio

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D Félix Humberto Soriano Méndez

Línea de Investigación:
Ecuaciones diferenciales parciales

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

Dedicatoria

A mi esposa Xiomara Rojas y a mi hijo Julian, gracias por su paciencia al compartir su tiempo con mi posgrado

Agradecimientos

Muchas gracias al inmenso aporte, dedicación y consejos de parte de mi director Félix Soriano, a los profesores del grupo de análisis Guillermo Rodríguez y German Fonseca por sus enseñanzas y a mis compañeros de posgrado en particular a Fabian Sanchez y Miguel Pachón por su ayuda y compañia. Un agradecimiento especial a la Fundación universidad autónoma de Colombia por las horas que me otorgaron para terminar la tesis

Resumen

En este trabajo se estudió el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + D_x^\alpha u_x + \mathscr{H} u_{yy} + u^p u_x = 0, \\ u(0) = \psi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{0-1}$$

para $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, donde $\mathscr{H}$ denota la transformada de Hilbert en la primera variable espacial y D_x^α es la α-ésima derivada homogénea en x definida por $\widehat{D_x^\alpha f}(\xi,\eta) = |\xi|^\alpha \hat{f}(\xi,\eta)$.
Se examinó el buen planteamiento en espacios de Sobolev H^s no periódicos con y sin peso, la existencia de ondas solitarias y la continuación única de las soluciones usando la estrecha relación que esta ecuación tiene con ecuaciones bidimensionales de tipo Benjamin-Ono, la cuales se han estudiado recientemente y cuyas técnicas, junto a otras, han servido a los propósitos en este trabajo.

Palabras clave: Problema de Cauchy,Ecuación de Benjamin–Ono, Buen planteamiento local, Espacios de Sobolev anisotrópicos, Ondas solitarias, Teoría de Kato .

Abstract

In this work was studied the initial value problem

$$\begin{cases} u_t + D_x^\alpha u_x + \mathscr{H} u_{yy} + u^p u_x = 0, \\ u(0) = \psi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{0-2}$$

for $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, here $\mathscr{H}$ denotes the Hilbert transform in the first spatial variable, and D_x^α the fractional derivative via $\widehat{D_x^\alpha f}(\xi,\eta) = |\xi|^\alpha \hat{f}(\xi,\eta)$.

The local well posedness in Sobolev spaces H^s with and without weight, solitary wave existence and continuation unique of solutions was examined using its near connection with bidimensional extensions of the Benjamin–Ono equation recently studied, that's techniques and others was very helpful in this work.

Keywords: Cauchy Problem, Benjamin–Ono Equation, Local well posedness, Anisotropical Sobolev Spaces, Solitary Waves, Kato Theory

1 Introducción

Las ecuaciones no lineales de evolución juegan un importante papel en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería. Cabe mencionar algunas de ellas: la mecánica de fluidos, la física del plasma, la fibra óptica, la física del estado sólido, la cinética química, la física química y la geoquímica, entre otras. A partir del estudio de las soluciones de éstas, se intentan entender los efectos de dispersión, difusión, reacción y convección asociados a los modelos descritos por estas. Por ejemplo, la ecuación Korteweg-de Vries

$$u_t = u_{xxx} + uu_x \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{1-1}$$

que modela el comportamiento de las ondas de aguas en canales poco profundos, tiene como soluciones ondas solitarias que se comportan como partículas, por lo que Kruskal y Zabusky las llamaron *solitones* en su trabajo de 1965 ([Zabusky and Kruskal, 1965]). Estos solitones son estables, en el sentido de que si una solución de la ecuación KdV (ecuación (1-1)) que difiere, inicialmente, muy poco en su forma de las soluciones tipo solitón, a lo largo del tiempo, su forma mantendrá un aspecto que diferirá muy poco a la forma de una solución tipo solitón (vea [Benjamin, 1972] y [Bona, 1975]); de hecho, a la larga estas soluciones toman la forma de solitones (vea [Pego and Weinstein, 1994]). Desde el punto de vista práctico, la noción de estabilidad de solitones nos garantiza que, teniendo un meticuloso cuidado, en el laboratorio podremos reproducir estos fenómenos, observados por primera vez por J. Scott Russell en 1834.

La ecuación de Benjamin-Bona-Mahony

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \tag{1-2}$$

fue introducida en [Benjamin et al., 1972] con la intención de modelar la propagación de ondas largas de pequeña amplitud, donde el efecto dispersión es puramente no lineal. La manera en que esta fue obtenida, se perseguía llegar a una ecuación equivalente a la ecuación KdV (1-1). Es interesante observar que a pesar de esta intención, desde el punto de vista meramente matemático, estas ecuaciones presentan significativas e interesantes diferencias.

Otras ecuaciones unidimensionales son, una, la introducida, independientemente, por Benjamin en [Benjamin, 1967] y Ono en [Ono, 1975],

$$u_t + \mathscr{H} u_{xx} + uu_x = 0. \tag{1-3}$$

la cual modela las ondas internas en fluidos estratificados profundos, donde $\mathscr{H}$ es la transformada de Hilbert. La otra, es la regularizada Benjamin-Ono

$$u_t + u_x + uu_x + \mathscr{H} u_{xt} = 0 \tag{1-4}$$

donde $u = u(x,t)$ es una función real, con $x,t \in \mathbb{R}$. Está ecuación es un modelo para la evolución en el tiempo de ondas con crestas grandes en la interface entre dos fluidos inmisibles.
Existen versiones bidimensionales que extienden las ecuaciones anteriormente mencionadas. Para el caso de la ecuación KdV tenemos la ecuación Kadomtsev-Petviashvilli, vea [Kadomtsev and Petviashvili, 1970],

$$(u_t + auu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0, \tag{1-5}$$

que describe las ondas en películas delgadas de alta tensión superficial. Otra es la ecuación de Zakharov-Kuznetsov

$$u_t = (u_{xx} + u_{yy})_x + uu_x, \tag{1-6}$$

la cual surge en el estudio de la dinámica de fluidos geofísicos en conjuntos isotrópicos (medios en los cuales las características de los cuerpos no dependen de la dirección) y ondas acústicas iónicas en plasmas magnéticos.
Como extensión bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono consideramos la siguientes familias de ecuaciones

$$\left(u_t + u^p u_x + \mathscr{H}(u_{xx} + \alpha u_{yy})\right)_x - \gamma u_{yy} = 0 \quad p \in \mathbb{N}, \tag{1-7}$$

$$u_t + u^p u_x + \alpha \mathscr{H} u_{xx} + \beta u_{yyx} = 0 \quad p \in \mathbb{N} \tag{1-8}$$

y

$$u_t + u^p u_x + \alpha \mathscr{H} u_{xy} = 0 \quad p \in \mathbb{N}. \tag{1-9}$$

Estas son modelos del movimiento de ondas largas dispersivas débilmente no lineales en un sistema de dos fluidos, donde la interface es sujeta a capilaridad y el fluido de la parte inferior es infinitamente profundo (vease [Ablowitz and Clarkson, 1991], [Ablowitz and Segur, 1980] y [Kim, 2006]).
En este trabajo nos proponemos estudiar el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + D_x^{\alpha} u_x + \mathscr{H} u_{yy} + u^p u_x = 0, \\ u(0) = \psi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{1-10}$$

para $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, donde $\mathscr{H}$ denota la transformada de Hilbert definida por

$$\mathscr{H}(f) = \text{p.v.} \frac{1}{\pi} \int \frac{f(y)}{x-y}\, dy \quad f \in H^s(\mathbb{R}),$$

D_x^α es la α-ésima derivada homogénea en x definida por

$\widehat{D_x^\alpha f}(\xi,\eta) = |\xi|^\alpha \hat{f}(\xi,\eta)$.

Examinamos el buen planteamiento en espacios de Sobolev H^s no periódicos con y sin peso, la existencia de ondas solitarias y la continuación única de las soluciones
Señalemos que esta guarda una estrecha relación con ecuaciones bidimensionales de tipo Benjamin-Ono, la cuales se han estudiado recientemente y cuyas técnicas, junto a otras que incorporaremos han servido a nuestros propósitos en este trabajo.
Poco se ha hecho acerca de la ecuación ZK–BO. Para esta, usando reguralización parabólica Esfahani en [Esfahani and Pastor, 2011a] obtiene resultados de existencia local en $H^s(\mathbb{R}^2)$, para $s > 2$.
Acerca de la continuación única de la ecuación (1-8), Esfahani en [Esfahani and Pastor, 2011b], demuestra el siguiente resultado.

Teorema 1.0.1. *Sea u una solución suave de la ecuación* (1-8). *Sea $I = [-T, T]$ un intervalo de tiempo no trivial. Si, para algún $B > 0$,*

$\operatorname{supp} u(t) \subset [-B, B] \times [-B, B]$,

para $t \in I$, entonces $u \equiv 0$.

Usando teoría de Kato en [Preciado and Soriano,] se probó el buen planteamiento local de la ecuación (1-7) en $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > 2$, y haciendo uso del lema de paso de montaña se mostró la existencia de ondas solitarias, además de la suavidad de las mismas.
Sobre la ecuación (1-9) se demuestra en [Milanés, 2003] el buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > 2$, usando regularización parabólica, y buen planteamiento global para $s > 3$ con dato inicial en $L_1^1(\mathbb{R}^2) \cap H^s(\mathbb{R}^2)$ de norma pequeña. Además de la no existencia de ondas solitarias de tipo cuadrado integrable.
Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capitulo 1 daremos todos los resultados básicos que usaremos en todo el trabajo. Este incluye una generalización de los efectos suavizantes específicos relacionados al grupo de la ecuación lineal asociada al problema 1-10. En el capítulo 2 examinamos el buen planteamiento de 1-10 en los espacios de Sobolev usuales. En el capítulo 3 expondremos resultados de buen planteamiento en espacios de Sobolev con peso y examinaremos la persistencia y continuación única de soluciones de 1-10. Finalmente, en el capítulo 4 mostraremos la existencia y analiticidad de soluciones de tipo ondas solitarias de tipo montículo de 1-10

2 Preliminares

Lema 2.0.1. *Si $s \in (0, n/2)$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente inmerso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p = \dfrac{2n}{n-2s}$, es decir $s = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$. Más aún, para $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0, n/2)$*

$$\|f\|_{L^p} \leqslant C_{n,s}\|D^s f\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{H^s}$$

donde $D^l = (-\Delta)^{l/2} = \left((2\pi|\xi|)^l \hat{f}\right)^{\vee}$

Demostración. Vea Linares–Ponce [Linares and Ponce, 2009] pag, 48. □

El siguiente lema, debido a I. I. Hirschman, extiende el lema de las tres líneas a un conjunto de funciones analíticas de crecimiento exponencial restringido. Para ello necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.0.2. *Una función f, analítica en la banda $0 < \operatorname{Re} z < 1$ y continua en $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, se dice de* crecimiento admisible *si*

$$\sup_{\substack{|\operatorname{Im} z| \leqslant r \\ 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1}} \log|f(z)| \leqslant Ae^{ar},$$

para algunos $A > 0$ y $a < \pi$.

Lema 2.0.3 (Hirschman)**.** *Sea f una función admisible y supongamos que existen funciones a_0 y a_1 tales que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a_j(t)|e^{-\pi t}\,dt < \infty$$

y que

$$\log|f(j+iy)| \leqslant a_j(y),$$

para $j = 0, 1$ e $-\infty < y < \infty$. Entonces,

$$\log|f(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \omega(1-t, y)a_0(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t, y)a_1(y)\,dy,$$

para $0 \leqslant t \leqslant 1$, donde

$$\omega(t, y) = \frac{\tan(\pi t/2)}{2[\tan^2(\pi t/2) + \tanh^2(\pi y/2)]\cosh^2(\pi y/2)}.$$

Demostración. Vea [Hirschman, 1952]. □

Veamos ahora una interesante consecuencia del anterior lema.

Lema 2.0.4. *Supongamos que $D^{s_1} f \in L^p(\mathbb{R})$ y $D^{s_2} f \in L^q(\mathbb{R})$. Entonces, para todo $\theta \in [0,1]$, $D^s f \in L^r(\mathbb{R})$ y*

$$\|D^s f\|_{L^r} \leqslant C_{p,q,s_2} \|D^{s_1} f\|_{L^p}^{\theta} \|D^{s_2} f\|_{L^q}^{1-\theta},$$

donde $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$ y $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $s_1 = 0$ y que f está en el espacio Schwartz. Sea g una función C^∞ con soporte compacto de norma 1 en $L^{r'}(\mathbb{R})$. Sea G_z definida por

$$G_z(x) = |g(x)|^{\frac{\rho(z)}{r'}} \operatorname{sgn} g(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, donde $\rho(z) = \frac{z}{p'} + \frac{1-z}{q'}$, $\operatorname{sgn} u = \frac{u}{|u|}$, si $u \neq 0$, o 1 si $u = 0$, y p', q' y r' son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Veamos que la función ψ, definida por

$$\psi(z) = \int_{\mathbb{R}} D^{s_2 z} f(x) G_z(x)\, dx$$

para $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, satisface las condiciones del lema Hirschman (Lema 2.0.3). Obviamente ψ es una función continua en la banda $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, analítica en $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Además, del teorema Plancherel,

$$\|D^{s_2 z} f\|_{L^2} \leqslant \|(1 + D^{s_2}) f\|_{L^2}.$$

Por otro lado, ya que g es acotada de soporte compacto,

$$\|G_z\|_{L^2} \leqslant K,$$

uniformemente en z, para algún K positivo. La desigualdad de Cauchy–Schwarz implica que ψ es acotata en la banda $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$. En particular, ψ es admisible. Además, gracias a la desigualdad de Hölder y el teorema de Hormander,

$$|\psi(yi)| \leqslant \|D^{s_2 yi} f\|_{L^p} \leqslant C_p(s_2 y)\|f\|_{L^p}$$

y

$$|\psi(1 + yi)| \leqslant \|D^{s_2 + s_2 yi} f\|_{L^q} \leqslant C_q(s_2 y)\|D^{s_2} f\|_{L^q},$$

donde C_p y C_q son polinomios. Por lo tanto, se satisfacen las condiciones del lema de Hirschman. De aquí y un argumento de dualidad se sigue inmediatamente el lema. □

Definición 2.0.5. $X^\alpha = \left\{ f \in L^2_{xy}(\mathbb{R}^2) \quad | \quad D_x^{\alpha/2} f, \quad D_x^{-1/2}\partial_y f \in L^2_{xy}(\mathbb{R}^2) \right\}$

Lema 2.0.6. *Para $0 \leqslant p \leqslant 4\alpha/(3-\alpha)$ y toda $f \in X^\alpha$,*

$$\|f\|_{L^{p+2}_{xy}}^{p+2} \leqslant c \|f\|_{L^2_{xy}}^{2 - \left(\frac{3-\alpha}{2\alpha}\right)p} \|D_x^{\alpha/2} f\|_{L^2_{xy}}^{\frac{3p}{2\alpha}} \|D_x^{-1/2}\partial_y f\|_{L^2_{xy}}^{\frac{p}{2}} \tag{2-1}$$

Demostración. Sea $p^* = 4\alpha/(3-\alpha)$. Probaremos el lema primero para el caso $p = p^*$. Por los Lemas 2.0.1 y 2.0.4, tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p^*+2}^{p^*+2} = \int_{\mathbb{R}^2)} |f(x,y)|^{p^*+2} dxdy &\leqslant C \int_{\mathbb{R}^2} \|D_x^{p^*/2(p^*+2)} f(.,y)\|_0^{p^*+2} dy \\
&\leqslant C \int_{\mathbb{R}} \|D_x^{\alpha/2} f(.,y)\|^2 \|D_x^{(\alpha-1)/4} f(.,y)\|^{p^*}\, dy \\
&\leqslant C \|D_x^{\alpha/2} f\|^2 \sup_{y\in\mathbb{R}} \|D_x^{(\alpha-1)/4} f(.,y)\|^{p^*}
\end{aligned}$$

Por otro lado, para toda $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|D_x^{(\alpha-1)/4} f(.,y)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (D_x^{(\alpha-1)/4} f)^2(x,y) dx \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{y} D_x^{(\alpha-1)/4} f(x,y_1) D_x^{(\alpha-1)/4} \partial_y f(.,y_1) dy_1 dx \\
&= 2 \int_{-\infty}^{y} \int_{\mathbb{R}} D_x^{\alpha/2} f(x,y_1) D_x^{-1/2} \partial_{y_1} f(x,y_1) dx dy_1 \\
&\leqslant 2 \|D_x^{\alpha/2} f\| \|D_x^{-1/2} \partial_y f\|
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_{p^*+2}^{p^*+2} \leqslant C \|D_x^{\alpha/2} f\|^{\frac{3p^*}{2\alpha}} \|D_x^{-1/2} \partial_y f\|^{\frac{p^*}{2}}$$

ya que $2 + p^*/2 = 3p^*/2\alpha$.

Examinemos el caso $0 < p < p^*$. Sea θ tal que $p = \theta p^*$. De la desigualdad de Hölder,

$$\|f\|_{p+2}^{p+2} \leqslant \|f\|^{2(1-\theta)} \|f\|_{p^*+2}^{\theta(p^*+2)} \leqslant C \|f\|^{2-\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha}\right)p} \|D_x^{\alpha/2} f\|^{\frac{3p}{2\alpha}} \|D_x^{-1/2} \partial_y f\|^{\frac{p}{2}},$$

que era lo que queríamos demostrar. □

Definición 2.0.7. *Sea* $\mathcal{X}^0 = \{f \in L^2 |\, \partial_x f, \quad y\ \partial_x^{-1} f_{yy} \in L^2\}$. $\mathcal{X}^0$ *es un espacio de Hilbert con el producto interno*

$$\langle f, g\rangle_0 = \int_{\mathbb{R}^2} fg + \partial_x^{-1} f_{yy} \partial_x^{-1} g_{yy} dxdy.$$

Aquí también vale una afirmación totalmente análoga al hecho de que las funciones en el espacio de Shwartz son densas en los espacios de Sobolev de índice no negativo, a saber:

Proposición 2.0.8. *Para todo* n *entero positivo,* $\partial_x^n S$ *es contenido densamente en* $\mathcal{X}^0$.

Es evidente que $(\mathcal{X}^0, L^2)$ es un par compatible de interpolación (vea [Bergh and Löfström, 1976] y [Triebel, 1978]). Veamos que $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ es un espacio de interpolación entre $\mathcal{X}^0$ y L^2. Más precisamente, tenemos el siguente teorema.

Teorema 2.0.9. $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}} = (\mathcal{X}^0, L^2)_{[\frac{1}{2}]}$.

Demostración. Sea $\phi \in X^{\frac{1}{2}}$ y

$$f(z) = e^{-\delta(z-\frac{1}{2})^2}\left(\left[1+\left|\frac{\eta^2}{\xi}\right|\right]^{z-\frac{1}{2}}\hat{\phi}\right)^{\vee}.$$

Es obvio que

$$\begin{cases} f(z) \in L^2, & \text{para todo } 0 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant 1 \\ f \text{ es analítica sobre } 0 < \mathrm{Im}(z) < 1 & \\ f(it) \in \mathcal{X}^0, & \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ f(1+it) \in L^2, & \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ f(z) \to 0, & \text{cuando } |\,\mathrm{Im}(z)| \to \infty, \text{ para} \\ & \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ o } 1 \\ f(\frac{1}{2}) = \phi. & \end{cases} \tag{2-2}$$

Entonces $\phi \in (\mathcal{X}^0, L^2)_{[\frac{1}{2}]}$ y $\|\phi\|_{[\frac{1}{2}]} \leqslant c\|\phi\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}$.

Ahora sean $\phi \in (\mathcal{X}^0, L^2)_{[\frac{1}{2}]}$, $\hat{\phi}_n = \chi_{|(\xi,\eta)|\leqslant n}\hat{\phi}$, donde $\chi_{|(\xi,\eta)|\leqslant n}$ es la función característica de $|(\xi,\eta)| \leqslant n$, $\Phi_n(z) = \left((1+|\xi|^{-1}|\eta|^2)^{\frac{3}{2}-z}\hat{\phi}_n\right)^{\vee}$ y f una función sobre $0 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant 1$ en L_2 que satisface cada una de las condiciones en (2-2). Es claro que Φ_n es analítica sobre $\mathbb{C}$ con valores en L^2. Por lo tanto $(f(z), \Phi_n(z))_{L^2}$ es una función continua sobre $0 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant 1$ y analítica sobre $0 < \mathrm{Im}(z) < 1$. Además, $|(f(it), \Phi_n(it))_{L^2}| \leqslant \|f(it)\|_{\mathcal{X}^0}\|\phi_n\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}$ y $|(f(1+it), \Phi_n(1+it))_{L^2}| \leqslant \|f(1+it)\|_{L^2}\|\phi_n\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}$. Del lema de las tres líneas, se sigue que

$$|(f(z), \Phi_n(z))_{L^2}| \leqslant \text{máx}(\sup\|f(it)\|_{\mathcal{X}^0}, \sup\|f(1+it)\|_{L^2})\|\phi_n\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}.$$

Tomando $z = \frac{1}{2}$, tenemos que $\|\phi_n\|_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}} \leqslant \text{máx}(\sup\|f(it)\|_{\mathcal{X}^0}, \sup\|f(1+it)\|_{L^2})$, para todo n. Así pues, el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue nos permite concluir que $\phi \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$. □

Definición 2.0.10. *Sea Ω un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{R}^2$ y X o bien $\mathcal{X}^0$ o bien $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$. Denotaremos por $X(\Omega)$ el conjunto*

$\{f \in L^2(\Omega) \,|\, f = g$ para alguna $g \in X\}$. X dotado con la norma

$$\|f\|_{X(\Omega)} = \inf_{\substack{g|_{\Omega}=f \\ g\in X}} \|g\|_X,$$

$X(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Lema 2.0.11. *Sea $\Omega = (a,b) \times (c,d)$. Existe un operador de extensión, $E : \mathcal{X}^0(\Omega) \to \mathcal{X}^0$ y $H^{1,0}(\Omega) \to H^{1,0}$, en otras palabras, existe un operador lineal acotado E de $\mathcal{X}^0(\Omega)$ en $\mathcal{X}^0$ y de $H^{1,0}(\Omega)$ en $H^{1,0}$ tal que, para toda $u \in \mathcal{X}^0(\Omega) \cap H^{1,0}(\Omega)$, $Eu = u$ en Ω, $\|Eu\|_{L^2} \leqslant C\|u\|_{L^2(\Omega)}$, $\|Eu\|_{\mathcal{X}^0} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{X}^0(\Omega)}$ y $\|Eu\|_{H^{1,0}} \leqslant C\|u\|_{H^{1,0}(\Omega)}$, donde C depende únicamente de las longitudes de sus lados Ω.*

Demostración. Sea $u \in X_0(\Omega)$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $u = \partial_x f$ en Ω, para alguna $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ con $\|\partial_x^2 f\|_{\mathcal{X}^0} \leqslant 2\|u\|_{\mathcal{X}^0(\Omega)}$. Tomemos $f_0 = f - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$. Es evidente que $u = \partial_x f_0$ en Ω. Ahora consideremos f_1 definida sobre $[2a-b, 2b-a] \times [c,d]$ por

$$f_1(x,y) = \begin{cases} f_0(x,y) & \text{if } x \in [a,b] \\ \sum_{i=1}^3 a_i f_0(\frac{i+1}{i}b - \frac{1}{i}x, y) & \text{if } x \in [b, 2b-a] \\ \sum_{i=1}^3 a_i f_0(\frac{i+1}{i}a - \frac{1}{i}x, y) & \text{if } x \in [2a-b, a], \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} &= -1 \\ a_1 + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Claramente f_1 es una función C^2 sobre $[2a-b, 2b-a] \times [c,d]$ y satisface

$$\|\partial^m f_1\|_{L^2([2a-b,2b-a]\times[c,d])} \leqslant C\|\partial^m f_0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2-3}$$

para toda $m \in \mathbb{N}^2$ con $|m| \leqslant 2$. De la misma manera, a partir de f_1, podemos definir una función $f_2 \in C^3$ sobre $\tilde{\Omega} = [2a-b, 2b-a] \times [2c-d, 2d-c]$ tal que

$$\|\partial^m f_2\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leqslant 9\|\partial^m f_0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2-4}$$

para todo $m \in \mathbb{N}^2$ con $|m| \leqslant 2$. Ahora, sea η una función C^∞ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\eta \equiv 1$ en Ω y 0 fuera de $\tilde{\Omega}$. Para u, sea $Eu = \partial_x(\eta f_2)$ en $\tilde{\Omega}$ y 0 en $\mathbb{R}^2 - \tilde{\Omega}$. De (2-4) y el lema de Poincaré se sigue que $Eu = u$ en Ω, $\|Eu\|_{L^2} \leqslant C\|u\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|Eu\|_{\mathcal{X}^0} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{X}^0(\Omega)}$, donde C depende únicamente de las longitudes de los lados de Ω. □

Corolario 2.0.12. *Si* $\Omega = (a,b) \times (c,d)$ *entonces* $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}(\Omega) = [L^2(\Omega), \mathcal{X}^0(\Omega)]_{[\frac{1}{2}]}$.

Demostración. Es suficiente observar que el operador E definido en el Lema 2.0.11 es un coretracto del operador de restricción de $(\mathcal{X}^0, L^2)$ en $(\mathcal{X}^0(\Omega), L^2(\Omega))$. El corolario se sigue del Teorema 1.2.4 en [Triebel, 1978]. □

Lema 2.0.13. *Supongamos que* $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es un cubrimiento de* $\mathbb{R}^2$, *donde cada* Ω_i *es un cubo abierto cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, tienen longitud* R *y son tales que cada punto en* $\mathbb{R}^2$ *está contenido en a lo sumo tres de estos cubos. Entonces,*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|u\|^2_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}(\Omega_i)} \leqslant C\|u\|^2_{\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}}, \tag{2-5}$$

para toda $u \in \mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$.

Demostración. Procediendo como en la demostración del Lema 2.0.11, podemos demostrar que

$$\|E_i u\|_{\mathcal{X}^0}^2 \leqslant C \int_{\Omega_i} u^2 + \partial_x^{-1}\partial_y^2 u^2 \, dxdy,$$

donde cada E_i es el operador de extensión de $\mathcal{X}^0(\Omega_i)$ en $\mathcal{X}^0$. Ya que C sólo depende de la logitud del lado de Ω_i, C es independiente de i. Puesto que

$$\|u\|_{\mathcal{X}^0(\Omega_i)} \leqslant \|E_i u\|_{\mathcal{X}^0},$$

para todo i, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|u\|_{\mathcal{X}^0(\Omega_i)}^2 \leqslant C \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Omega_i} u^2 + (\partial_x^{-1}\partial_y^2 u)^2 \, dxdy \leqslant 3C\|u\|_{\mathcal{X}^0}^2.$$

Asimismo, evidentemente tenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|u\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \leqslant 3\|u\|_{L^2}^2.$$

Entonces el operador $u \mapsto (u_{\Omega_i})_{i\in\mathbb{N}}$ (u_{Ω_i} es la restricción de u en Ω_i) es continuo de L^2 en $\ell^2(L^2(\Omega_i))$ y de $\mathcal{X}^0$ en $\ell^2(\mathcal{X}^0(\Omega_i))$. Por el Teorema 1.18.1 en [Triebel, 1978], tenemos que el operador $u \mapsto (u_{\Omega_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es continuo de $\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}$ en $\ell^2(\mathcal{X}^{\frac{1}{2}}(\Omega_i))$. Por lo tanto, obtenemos (2-5). □

Lema 2.0.14. *Supongamos que $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de $\mathbb{R}^2$, donde cada Ω_i es un cubo abierto cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, tienen longitud R y son tales que cada punto en $\mathbb{R}^2$ está contenido en a lo sumo tres de estos cubos. Entonces,*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|u\|_{H^{\frac{\alpha}{2},0}(\Omega_i)}^2 \leqslant C\|u\|_{H^{\frac{\alpha}{2},0}}^2, \tag{2-6}$$

para toda $u \in H^{\frac{\alpha}{2},0}$.

Demostración. Sigue las mismas ideas de la demostración anterior. □

Corolario 2.0.15. *Supongamos que $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de $\mathbb{R}^2$, donde cada Ω_i es un cubo abierto cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, tienen longitud R y son tales que cada punto en $\mathbb{R}^2$ está contenido en a lo sumo tres de estos cubos. Entonces,*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|u\|_{X^\alpha(\Omega_i)}^2 \leqslant C\|u\|_{X^\alpha}^2, \tag{2-7}$$

para toda $u \in X^\alpha$.

Demostración. Basta observar que para cada i, $\|u\|_{X^\alpha(\Omega_i)} \leqslant \|E_i u\|_{H^{\alpha/2,0}} + \|E_i u\|_{\mathcal{X}^{1/2}}$. □

Lema 2.0.16. *El encaje $X^\alpha \hookrightarrow L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ es compacto, para $2 \leqslant p < (2\alpha+6)/(3-\alpha)$. En otras palabras, si (u_n) es una sucesión acotada en X^α y $R > 0$, entonces existe una subsucesión de (u_n) que converge fuertemente en $L^p(B_R)$.*

Demostración. Supongamos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en X^α. Sea Ω_R el cubo con centro en el órigen cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenados y tienen longitud R, y sea E_R el operador extensión de $L^2(\Omega_R)$ en L^2 como en la demostración de el Lema 2.0.11. Por interpolación, E_R es un operador continuo de $X^\alpha(\Omega)$ en X^α. Asimismo, es fácil ver que $E_R(u)$ es 0 fuera de Ω_{3R}, para toda $u \in X^\alpha$, donde Ω_{3R} es el cubo con centro en el órigen y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y tienen longitud $3R$. Ya que $u = E_R(u)$ en Ω, sin perdida de generalidad, podemos suponer que $u_n = E_R(u_n)$, para todo n. Ahora, puesto que (u_n) es acotada en X^α, también podemos suponer que $u_n \rightharpoonup u$ en X^α y sustituyendo, si es necesario, u_n por $u_n - u$, podemos suponer, además, que $u = 0$.
Sean

$Q_1 = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 / |\xi| \leqslant \rho, |\eta| \leqslant \rho\}$
$Q_2 = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 / |\xi| > \rho\}$
$Q_3 = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 / |\xi| \leqslant \rho, |\eta| > \rho\}$

Entonces $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^3 Q_i$ y $Q_i \bigcap Q_j = \varnothing$, $i \neq j$. Para $\rho > 0$, tenemos que

$$\int_{\Omega_{3R}} |u_n(x,y)|^2 dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{3} \int_{Q_i} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta$$

Es claro que

$$\int_{Q_2} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta = \int_{Q_2} \frac{1}{|\xi|} |\widehat{D_x^{\alpha/2} u_n}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta \leqslant \frac{C}{\rho^\alpha} \|D_x^{\alpha/2} u_n\|_0^2,$$

y

$$\int_{Q_3} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta = \int_{Q_3} \frac{|\xi|}{|\eta|^2} |\widehat{D_x^{-\frac{1}{2}} \partial_y u_n}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta.$$

Por lo tanto, para cualquier ϵ, existe $\rho > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{Q_2} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta + \int_{Q_3} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta \leqslant \epsilon/2.$$

Puesto que $u_n \rightharpoonup 0$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$ (en particular

$$\lim_{n\to 0} \widehat{u}_n(\xi,\eta) = \lim_{n\to 0} \int_{\Omega_{3R}} u_n(x,y) e^{-i(x\xi+y\eta)} dxdy = 0)$$

y $|\widehat{u}(\xi,\eta)| \leqslant \|u_n\|_1$, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue garantiza que

$$\int_{Q_1} |\widehat{u}_n(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta = 0,$$

cuando $n \to \infty$. Por consiguiente $u_n \to 0$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Por el Lema 2.0.6, $u_n \to 0$ en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ si $2 \leqslant p < (2\alpha+6)/(3-\alpha)$. □

Definición 2.0.17. *Espacios de Sobolev anisotrópicos* $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$

$$H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) := \{f \in \mathcal{S}' \mid (1 + |\xi|^{s_1} + |\eta|^{s_2})\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^2)\} \tag{2-8}$$

Definición 2.0.18. *Espacios de Sobolev con peso*

$$\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2) = H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \cap L^2_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2) \tag{2-9}$$

donde

$$L^2_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid (1 + |x|^{r_1} + |y|^{r_2})f \in L^2(\mathbb{R}^2)\} \tag{2-10}$$

Lema 2.0.19 (Sobolev)**.** *Sean s_1 y s_2 son números reales positivos tales que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$. Entonces, $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \subset C_\infty(\mathbb{R}^2)$ (el conjunto de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ que se anulan en infinito), con inclusión continua.*

Demostración. Ver [Sánchez Salazar, 2015] □

Definición 2.0.20. *[Stein, 1961] Para cada $b \in (0,1)$ y f medible en $\mathbb{R}^n$ con valores complejos definimos la* derivada de Stein *de orden b como*

$$\mathcal{D}^b f(x) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\, dy \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2-11}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Definición 2.0.21. *Para $s \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $L^p_s(\mathbb{R}^n)$ el espacio de todas las funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tales que $(1-\Delta)^{\frac{s}{2}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. La norma del espacio viene dada por*

$$\|f\|_{s,p} = \|(1-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_p,$$

para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

El siguiente teorema relaciona la derivada de Stein con la derivada fraccionaria, ver [Stein, 1961].

Teorema 2.0.22. *Supongamos que $b \in (0,1)$ y $\dfrac{2n}{n+2b} \leqslant p < \infty$. Entonces, $f \in L^p_b(\mathbb{R}^n)$ si, y sólo si,*

1. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$
2. $\mathcal{D}^b f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

Además,

$$\|f\|_{b,p} = \|(1-\Delta)^{\frac{b}{2}} f\|_p \cong \|f\|_p + \|D^b f\|_p \cong \|f\|_p + \|\mathcal{D}^b f\|_p$$

Definición 2.0.23. *Sea ω una función localmente integrable no negativa en $\mathbb{R}$. Diremos que ω satisface* la condición A_p, *si para $1 < p < \infty$, existe C un número real positivo, tal que*

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leqslant C \tag{2-12}$$

para todo intervalo I abierto, acotado y no vacío de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1. Un ejemplo de una función que cumple la condición A_p es $w(x) = (\gamma + |x|^{\alpha})^r$, para $\gamma > 0$ y $-1 < r\alpha < p - 1$

Teorema 2.0.24. *ω satisface la condición A_p si, y sólo si, la trasformada de Hilbert es un operador acotado en $L^p(\omega(x)dx)$. En otras palabras, ω satisface la condición A_p (ver [Duoandikoetxea Zuazo, 1990], [Hunt et al., 1973], [Muckenhoupt, 1972]) si, y sólo si,*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{H} f|^p \omega(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c^* \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^p \omega(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2-13}$$

para toda $f \in L^p(\omega(x)dx)$.

El siguiente lema es una extensión del teorema anterior para $p = 2$.

Lema 2.0.25. *Sean $0 \leqslant s \leqslant 1$ y $\varphi \in H^s$ tal que $\varphi(0) = 0$. Entonces, la función $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)$ está en H^s. Además,*

$$\|\operatorname{sgn}(\,\cdot\,)\varphi\|_{H^s} \leqslant \|\varphi\|_{H^s}.$$

Demostración. Para $s = 0$ es evidente. Para $s = 1$, se tiene que si $\varphi(0) = 0$, entonces $\operatorname{sgn}(\,\cdot\,)\varphi$ tiene derivada en $L^2(\mathbb{R})$ en el sentido de las distribuciones y su derivada es $\operatorname{sgn}(\,\cdot\,)\varphi'$. Por lo tanto, se tiene el lema en este caso.
Para $0 < s < 1$, sin perdida de generalidad, supondremos que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\|\psi\|_{H^{-s}} = 1$. Consideremos la función

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{sgn}(\,\cdot\,)(1 - \partial_x^2)^{(s-z)/2}\varphi)(1 - \partial_x^2)^{(-s+z)/2}\psi\, dx,$$

Claramente F es analítica en $0 < \operatorname{Re} z < 1$, continua y acotada en $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, y

$$|F(it)| \leqslant \|\varphi\|_{H^s}, \qquad |F(it + 1)| \leqslant \|\varphi\|_{H^s},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Del lema de las tres líneas se sigue que

$$|F(s)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\,\cdot\,)\varphi\psi\, dx\right| \leqslant \|\varphi\|_{H^s}.$$

De aquí se sigue el lema. □

Resultados muy relacionados con los anteriores, que articulados con éstos se convierten en herramientas poderosas usadas en diferentes contextos, son el teorema del conmutador de Calderón y su generalizacion que describimos a continuación.

Lema 2.0.26. *Para cualquier número real $p > 1$, m y n números enteros positivos*

$$\|\partial_x^l[\mathscr{H}; a]\partial_x^m f\|_{L^p} \leqslant \|\partial_x^{l+m} a\|_\infty \|f\|_{L^p},$$

donde c solo depende de p, l y m.

Demostración. Vea el Lema 3.1 en [Dawson et al., 2008] □

Teorema 2.0.27. *Sean $p \in (1,\infty)$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$. Si para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0+)$ y $f(x_0-)$ existen y son diferentes, entonces, para cualquier $\delta > 0$, $D^{1/p} f \notin L^p_{loc}(B(x_0,\delta))$. En particular, $f \notin L^p_{\frac{1}{p}}(\mathbb{R})$*

Demostración. Observese que $D^{1/p} f(x) \sim \dfrac{1}{|x-x_0|^{1/p}}$, cuando $x \to x_0$. □

Lema 2.0.28. *Sean a y b números reales positivos. Si $J_u = (1-\partial_u^2)^{1/2}$ y $\langle v\rangle = (1+v^2)^{1/2}$, entonces para cualquier $\theta \in (0,1)$,*

1. $$\left\|J_u^{\theta a}\left(\langle v\rangle^{(1-\theta)b} f\right)\right\| \leqslant c \left\|\langle v\rangle^b f\right\|^{1-\theta} \left\|J_u^a f\right\|^\theta$$

2. $$\left\|\langle v\rangle^{(1-\theta)b} J_u^{\theta a} f\right\| \leqslant c \left\|\langle v\rangle^b f\right\|^{1-\theta} \left\|J_u^a f\right\|^\theta$$

para $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, donde u y v pueden ser x e y indistintamente.

Demostración. La demostración es exactamente la misma del Lema 1 en [Fonseca and Ponce, 2011] □

Proposición 2.0.29. *Sea $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in [0,1)$ con $\alpha+\beta \in [0,1]$. Entonces, para cualquier p y $q \in (1,\infty)$ y cualquier $\delta > 1/q$ existe $C = C(\alpha,\beta,p,q,\delta) > 0$ tal que*

$$\|D^\alpha[D^{\alpha+\beta},\psi]D^{1-(\alpha+\beta)}u\|_{L^p} \leqslant C\|\Lambda_x^\delta \partial_x \psi\|_{L^q}\|u\|_{L^p}.$$

Demostración. Vea su demostración en [Dawson et al., 2008]. □

En la misma vía de la proposición anterior tenemos el siguiente lema.

Proposición 2.0.30. *Si $f \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ y $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces*

$$\|[D_x^{1/2},\rho]f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C\|\widehat{D_x^{1/2}\rho}\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2-14}$$

Demostración. Sea $f \in H^{1/2}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\begin{aligned} |([D^{1/2},\rho]f)^\wedge(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (|\xi|^{1/2} - |\eta|^{1/2}) |\widehat{\rho}(\xi-\eta)\widehat{f}(\eta)| \, d\eta \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} ||\xi-\eta|^{1/2}\widehat{\rho}(\xi-\eta)||\widehat{f}(\eta)| \, d\eta. \end{aligned}$$

Luego, de la desigualdad de Young y el teorema de Plancherel se sigue la proposición. □

Lema 2.0.31. *Suponga que f es una función en $\mathbb{R}$ que tiene derivada hasta de orden $n+1$ en $L^2(\mathbb{R})$ y es tal que $f^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, \cdots, n$. Entonces, existe una función en $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $f = x^{n+1}g$. Además,*

$$g(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(xt) \, dt$$

y

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\| \frac{f}{x^{n+1}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C_n \|f^{(n+1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Demostración. De la fórmula de Taylor con resto tenemos que

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(xt) \, dt.$$

Veamos que g, definida por

$$g(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(xt) \, dt,$$

está en L^2. En efecto, por la desigualdad integral de Minkowski,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(xt) \, dt \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \left(\int_{\mathbb{R}} (f^{(n+1)})^2(xt) \, dx \right)^{1/2} dt. \\ &\leqslant \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n! t^{1/2}} \, dt \right) \|f^{(n+1)}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.0.32. *Suponga que f es como en el lema anterior. Suponga además que la $f^{(n+1)}$ tiene derivada fraccionaria de orden α en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces, $g = \frac{f}{x^{n+1}}$ tiene derivada de orden α y*

$$\|D^\alpha g\|_{L^2} \leqslant \|D^\alpha \left(\frac{f}{x^{n+1}} \right) \|_{L^2} \leqslant C_\alpha \|D^{n+1+\alpha} f\|_{L^2}.$$

Demostración. Del lema anterior

$$g(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(xt)\, dt.$$

Consideremos la función h definida

$$h(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} t^\alpha D^\alpha f^{(n+1)}(xt)\, dt.$$

h esta en L^2. En efecto, como en la demostración del lema anterior,

$$\|h\|_{L^2} \leqslant \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^n t^{\alpha-1/2}}{n!}\, dt \right) \|D^{\alpha+n+1} f\|_{L^2}.$$

Veamos que $h = D^\alpha g$. La función $(1-t)^n f^{(n+1)}(t\,\cdot\,) D^\alpha \phi$ es integrable en $[0,1] \times \mathbb{R}$, para toda $\phi \in \mathrm{Dom}(D^\alpha)$. En efecto, gracias a la desigualdad de Cauchy–Schwartz,

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(tx)||D^\alpha \phi(x)|\, dxdt \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n! t^{1/2}} \|f^{(n+1)}\|_{L^2} \|D^\alpha \phi(x)\|_{L^2}.$$

La afirmación sigue del teorema de Tonelli. Del mismo modo se sigue que $(1-t)^n t^\alpha D^\alpha f^{(n+1)}(t\,\cdot\,)\phi$ es integrable en $[0,1] \times \mathbb{R}$, para toda $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Gracias al teorema de Fubini y a que D^α es autadjunto, tenemos que, para $\phi \in \mathrm{Dom}(D^\alpha)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g \overline{D^\alpha \phi}\, dx = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \left(\int_{\mathbb{R}} f^{(n+1)}(tx) \overline{D^\alpha \phi(x)} dx \right) dt = \\ = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \left(\int_{\mathbb{R}} t^\alpha D^\alpha f^{(n+1)}(tx) \overline{\phi(x)} dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} h \bar{\phi}\, dx. \end{aligned}$$

Esto demuestra el corolario. □

Lema 2.0.33. *Si $u \in C([0,T], H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ es solución del problema (**??**), entonces*

$$\|u(t)\|_0 = \|\varphi\|_0 \tag{2-15}$$

Para demostrar la suavidad de las soluciones tipo onda solitaria usaremos la siguiente generalización del teorema de multiplicadores de Hörmander–Mikhlin debida a Lizorkin [Lizorkin, 1967]

Teorema 2.0.34 (Lizorkin)**.** *Sea $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función C^n para $|\xi_j| > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Supongamos que existe $M > 0$ talque*

$$\left| \xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} \frac{\partial^k \Phi}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}(\xi) \right| \leqslant M$$

con $k_i = 0$ o 1, $k = k_1 + \ldots + k_n = 0, 1, \ldots, n$. Entonces $\Phi \in M_q(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leqslant q \leqslant \infty$. En otras palabras, Φ es un multiplicador de Fourier en $L^q(\mathbb{R}^n)$

2.1. Teoría de Kato

Haremos una breve presentación de la Teoría de Kato descrita en [Kato, 1975]. Con ésta se demuestra el buen planteamiento de problemas de Cauchy de ecuaciones lineales y cuasilineales de evolución.

2.1.1. Caso lineal

Supongamos que X e Y son espacios de Banach reflexivos con $Y \subseteq X$ de forma densa y continua, y sea $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ una familia de operadores tales que

1. $A(t) \in G(X,1,\beta)$. En otras palabras, $-A(t)$ genera un C_0 semigrupo tal que

   $\|e^{-sA(t)}\| \leqslant e^{\beta s}$,

   para todo $s \in [0,\infty)$.

2. Existe un isomorfismo $S : Y \to X$ tal que $SA(t)S^{-1} = A(t)+B(t)$, donde $B(t) \in B(X)$, para $0 \leqslant t \leqslant T$, $t \to B(t)x$ es fuertemente medible, para cada $x \in X$, y $t \to \|B(t)\|_X$ es integrable en $[0,T]$.

3. $Y \subseteq D(A(t))$, para $0 \leqslant t \leqslant T$, y $t \to A(t)$ es fuertemente continuo de $[0,T]$ a $B(Y,X)$

Teorema 2.1.1. *Bajo las anteriores condiciones, existe una familia de operadores* $\{U(t,s)\}_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}$ *tales que:*

1. *U es fuertemente continuo de $\Delta \to B(X)$, donde $\Delta = \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$.*

2. *$U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$ para (t,s) y $(s,r) \in \Delta$, y $U(s,s) = I$.*

3. *$U(t,s)Y \subset Y$ y U es fuertemente continuo de $\Delta \to B(Y)$.*

4. *$\dfrac{dU(t,s)}{dt} = -A(t)U(t,s)$, $\dfrac{dU(t,s)}{ds} = U(t,s)A(s)$, en el sentido fuerte dentro del espacio $B(X,Y)$ y son fuertemente continuas de $\Delta \to B(X,Y)$.*

La familia de operadores $\{U(t,s)\}_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}$ en el teorema anterior es denominada *familia de operadores de evolución* asociada a $A(t)$. Una consecuencia inmediata de este último teorema es que, para $\phi \in Y$, $u(t) = U(t,s)\phi$ es solución del problema de Cauchy

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = 0 \qquad \text{para } s \leqslant t \leqslant T, \text{ con}$$
$$u(s) = \phi.$$

Más aún, si $f \in C([0,T];X) \cap L^1([0,T];Y)$, entonces

$$u(t) = U(t,0)\phi + \int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

si y sólo si $u \in C([0,T];Y) \cap C^1((0,T);X)$ y

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + A(t)u &= f(t) \quad para \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad con\\ u(0) &= \phi.\end{aligned}$$

2.1.2. Caso Cuasilineal

Sean X e Y espacios de Banach reflexivos, $Y \subseteq X$, siendo la inclusión densa y continua. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{aligned}&\partial_t u + A(t,u)u = f(t,u) \in X,\ 0 < t,\\ &u(0) = u_0 \in Y,\end{aligned} \tag{2-16}$$

donde, para cada t, $A(t,u)$ es un operador lineal de Y en X y $f(t,u)$ es una función de $\mathbb{R} \times Y$ en X. Consideremos también las siguientes condiciones:
(X) Existe un isomorfismo isométrico S de Y en X.
Existen $T_0 > 0$ y W bola abierta de centro w_0 tales que:
(A_1) Para cada $(t,y) \in [0,T_0] \times W$, el operador lineal $A(t,y)$ pertenece a $G(X,1,\beta)$, donde β es un número real positivo. En otras palabras, $-A(t,y)$ genera un C_0 semigrupo tal que

$$\|e^{-sA(t,y)}\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant e^{\beta s},\ \text{ para } s \in [0,\infty).$$

Nótese que si X es un espacio de Hilbert, $A \in G(X,1,\beta)$ si, y sólo si,

a) $\langle Ay, y\rangle_X \geqslant -\beta\|y\|_X^2$ para todo $y \in D(A)$,

b) $(A + \lambda)$ es sobre para todo $\lambda > \beta$.

(Ver [Kato, 1995] o [Reed and Simon, 1975])
(A_2) Para cada $(t,y) \in [0,T_0] \times W$ el operador $B(t,y) = [S, A(t,y)]S^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ y es uniformemente acotado, es decir, existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\|B(t,y)\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \lambda_1 \ \text{ para todo } (t,y) \in [0,T_0] \times W,$$

Además, para algún $\mu_1 > 0$, se tiene que, para todo y y $z \in W$,

$$\|B(t,y) - B(t,z)\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \mu_1\|y - z\|_Y.$$

(A_3) $Y \subseteq D(A(t,y))$, para cada $(t,y) \in [0,T_0] \times W$, (la restricción de $A(t,y)$ a Y pertenece a $\mathcal{B}(Y,X)$) y, para cada $y \in W$ fijo, $t \to A(t,y)$ es fuertemente continua. Además, para cada $t \in [0,T_0]$ fijo, se satisface la siguiente condición de Lipschitz,

$$\|A(t,y) - A(t,z)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \leqslant \mu_2 \|y - z\|_X,$$

donde $\mu_2 \geqslant 0$ es una constante.
(A_4) $A(t,y)w_0 \in Y$ para todo $(t,y) \in [0,T] \times W$. Además, existe una constante λ_2 tal que

$$\|A(t,y)w_0\|_Y \leqslant \lambda_2, \text{ para toda } (t,y) \in [0,T_0] \times W$$

(f_1) f es una función acotada en $[0,T_0] \times W$ a Y, es decir, existe λ_3 tal que

$$\|f(t,y)\|_Y \leqslant \lambda_3, \text{ para todo } (t,y) \in [0,T_0] \times W,$$

Además, la función $t \in [0,T_0] \mapsto f(t,y) \in Y$ es continua con respecto a la topología de X y para todo y y $z \in Y$ se tiene que

$$\|f(t,y) - f(t,z)\|_X \leqslant \mu_3 \|y - z\|_X,$$

donde $\mu_3 \geqslant 0$ es una constante.

Teorema 2.1.2 (Kato). *Suponga que las condiciones (X), $(A_1)-(A_4)$ y (f_1) son satisfechas. Dado $u_0 \in Y$, existe $0 < T < T_0$ y una única $u \in C([0,T];Y) \cap C^1((0,T);X)$ solución de* (2-16). *Además, la aplicación $u_0 \to u$ es continua en el siguiente sentido: considere la sucesión de problemas de Cauchy,*

$$\begin{aligned} &\partial_t u_n + A_n(t,u_n)u_n = f_n(t,u_n) \quad t > 0 \\ &u_n(0) = u_{n_0} \;\; n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2-17}$$

Supongamos que las condiciones (X), (A_1)–(A_4) y (f_1) son satisfechas para todo $n \geqslant 0$ en (2-17)*, con los mismos X, Y y S, y las correspondientes β, λ_1–λ_3, μ_2–μ_3 pueden ser escogidas independientes de n. También supongamos que*

$$\begin{aligned} s\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n(t,w) &= A(t,w) \text{ en } B(X,Y) \\ s\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n(t,w) &= B(t,w) \text{ en } B(X) \\ \lim_{n\to\infty} f_n(t,w) &= f(t,w) \text{ en } Y \\ \lim_{n\to\infty} u_{n_0} &= u_0 \text{ en } Y, \end{aligned}$$

donde s-lím denota el límite fuerte. Entonces, T puede ser elegido de tal manera que $u_n \in C([0,T],Y) \cap C^1((0,T),X)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0.$$

Para una demostración de este teorema puede ver [Kato, 1975] y [Kobayasi, 1979].

2.2. Otros resultados

Proposición 2.2.1 (Desigualdad de Kato)**.** *Sean $f \in H^s$, $s > 2$, $\Lambda = (1-\Delta)^{1/2}$ y M_f el operador de multiplicación por f. Entonces, para $|\tilde{t}|, |\tilde{s}| \leqslant s-1$, $\Lambda^{-\tilde{s}}[\Lambda^{\tilde{s}+\tilde{t}+1}, M_f]\Lambda^{-\tilde{t}} \in B(L^2(\mathbb{R}^2))$ y*

$$\left\|\Lambda^{-\tilde{s}}[\Lambda^{\tilde{s}+\tilde{t}+1}, M_f]\Lambda^{-\tilde{t}}\right\|_{\mathbf{B}(L^2(\mathbb{R}^2))} \leqslant c\,\|\nabla f\|_{H^{s-1}}\,, \tag{2-18}$$

La siguiente proposición es una extensión a los espacios de Sobolev anisotrópicos $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ del resultado anterior muy importante para nuestros propósitos.

Proposición 2.2.2. *Supongamos que $s_1 \geqslant s_2 > 1$ son tales que $\frac{1}{s_1-1} + \frac{1}{s_2-1} < 2$. Sean f tal que $\nabla f \in H^{s_1-1,s_2-1} \times H^{s_1-1,s_2-1}$, $\Lambda_{s_1,s_2} = J_x^{s_1} + J_y^{s_2}$ y M_f el operador de multiplicación por f. Entonces, $[\Lambda_{s_1,s_2}, M_f]\Lambda_{s_1,s_2}^{-1}J_x \in B(L^2(\mathbb{R}^2))$ y*

$$\|[\Lambda_{s_1,s_2}, M_f]\Lambda_{s_1,s_2}^{-1}J_x\|_{B(L^2(\mathbb{R}^2))} \leqslant c\|\nabla f\|_{H^{s_1-1,s_2-1}} \tag{2-19}$$

Demostración. Haciendo uso de la transformada de Fourier, se tiene

$$\begin{aligned}&[\Lambda_{s_1,s_2}, M_f]\Lambda_{s_1,s_2}^{-1}J_x u = \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} (\langle\xi\rangle^{s_1} - \langle\xi_1\rangle^{s_1} + \langle\eta\rangle^{s_2} - \langle\eta_1\rangle^{s_2})\langle\xi_1\rangle\widehat{f}(\xi-\xi_1,\eta-\eta_1)\widehat{u}(\xi_1,\eta_1)\,d\xi_1 d\eta_1\,d\xi d\eta\end{aligned} \tag{2-20}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}|\langle\xi\rangle^{s_1} - \langle\xi_1\rangle^{s_1} + \langle\eta\rangle^{s_2} - \langle\eta_1\rangle^{s_2}| \leqslant& |\xi-\xi_1|(\langle\xi\rangle^{s_1-1} + \langle\xi_1\rangle^{s_1-1}) + \\ &+ |\eta-\eta_1|(\langle\eta\rangle^{s_2-1} + \langle\eta_1\rangle^{s_2-1}) \\ \leqslant& (|\xi-\xi_1|^2 + |\eta-\eta_1|^2)^{1/2} \times \\ &\times (\langle\xi\rangle^{s_1-1} + \langle\xi_1\rangle^{s_1-1} + \langle\eta\rangle^{s_2-1} + \langle\eta_1\rangle^{s_2-1})\end{aligned} \tag{2-21}$$

Por otro lado, ya que, de las hipótesis,

$$\langle\xi_1\rangle\langle\eta_1\rangle^{s_2-1} \leqslant \langle\xi_1\rangle^{s_2} + \langle\eta_1\rangle^{s_2} \leqslant \langle\xi_1\rangle^{s_1} + \langle\eta_1\rangle^{s_2}$$

tenemos que

$$(\langle\xi_1\rangle^{s_1-1} + \langle\eta_1\rangle^{s_2-1})\langle\xi_1\rangle \leqslant C(\langle\xi_1\rangle^{s_1} + \langle\eta_1\rangle^{s_2}) \tag{2-22}$$

Sea $g = (-\Delta)^{1/2}\tilde{f}$, donde $\widehat{\tilde{f}} = |\widehat{f}|$. Esta función está en H^{s_1-1,s_2-1} y

$$\|g\|_{H^{s_1-1,s_2-1}} \leqslant \|\nabla f\|_{H^{s_1-1,s_2-1}}.$$

Además, de (2-20), (2-21), (2-22), Lema 2.0.19 y el teorema de Plancherel, tenemos que

$$\begin{aligned}\|[\Lambda_{s_1,s_2}, M_f]\Lambda_{s_1,s_2}^{-1}J_x u\|_{L^2} \leqslant& \|g\Lambda_{s_1,s_2}^{-1}J_x u\|_{H^{s_1-1,s_2-1}} + \|g\Lambda_{s_1,s_2}^{-1}\Lambda_{s_1-1,s_2-1}J_x u\|_{L^2} \\ \leqslant& \|g\|_{H^{s_1-1,s_2-1}}\|\Lambda_{s_1,s_2}^{-1}\Lambda_{s_1-1,s_2-1}J_x u\|_{L^2} \\ \leqslant& C\|\nabla f\|_{H^{s_1-1,s_2-1}}\|u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Esto demuestra la proposición. □

Proposición 2.2.3 (Desigualdad de Kato-Ponce)**.** *Sean $s > 0$, $0 < p < \infty$, $\Lambda = (1-\Delta)^{1/2}$, y M_f el operador de multiplicación por f. Entonces*

$$\|[\Lambda^s, M_f]g\|_{L^p} \leqslant c\left(\|\nabla f\|_{L^\infty}\|\Lambda^{s-1}g\|_{L^p} + \|\Lambda^{s-1}f\|_{L^p}\|f\|_{L^\infty}\right), \tag{2-23}$$

Corolario 2.2.4. *Para $s > 0$ y $p \in (1\,\infty)$, $L^p_s \cap L^\infty$ es un álgebra, además*

$$|fg|_{s,p} \leqslant c(|f|_\infty |g|_{s,p} + |f|_{s,p}|g|_\infty) \tag{2-24}$$

Proposición 2.2.5. *sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua acotada tal que $\partial_x f$ existe, es continua y acotada. Entonces, si $A = f\partial_x$,*

$$\langle A(u), u\rangle_{L^2} \geqslant -\frac{1}{2}||\partial_x f||_{L^\infty}||u||^2_{L^2}, \tag{2-25}$$

para cada $u \in D(A)$, $A+\lambda$ es sobre, para todo $\lambda > \frac{1}{2}||f||_{L^\infty}$. En particular, $A \in G\left(L^2\left(\mathbb{R}^2\right), 1, \frac{1}{2}||f||_{L^\infty}\right)$

Demostración. La desigualdad 2-25 se obtiene inmediatamente después de hacer integración por partes. Veamos que $A+\lambda$ es sobre, si $\lambda > \frac{1}{2}||f||_{L^\infty}$. Supongamos que ψ es tal que $\langle (A+\lambda)(u), u\rangle_{L^2} = 0$, para todo $u \in D(A)$. Por lo tanto $\psi \in D(A^*) \subseteq D(A)$. De 2-25, se sigue que

$$0 \geqslant \langle (a+\lambda)(u), u\rangle_{L^2} \geqslant (\lambda - \frac{1}{2}||f||_{L^\infty})||\psi||^2_{L^2}.$$

Luego, $\psi = 0$ y, por lo tanto, $A+\lambda$ es sobre. □

2.3. Problema lineal

Sea X el espacio de funciones medibles tales que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_k^{k+1}|g(x)|\,dx\right)^p < \infty.$$

Es fácil observar que este es un espacio completo con norma definida por

$$\|g\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_k^{k+1}|g(x)|\,dx\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

El dual X^*, de este espacio, es el espacio de la funciones medibles esencialmente acotadas g tales que

$$\|g\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sup_{k\leqslant x<k+1}|g(x)|\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

De hecho el corchete de dualidad viene dado de la siguiente manera

$$f(g) = \int g(x)f(x)\,dx,$$

para $g \in X$ y $f \in X^*$. Examinemos las propiedades de las soluciones del siguiente problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t u + D_x^\alpha \partial_x u + \mathscr{H}_x \partial_y^2 u = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Recordemos que sus soluciones son dadas por $t \to W_\alpha(t)u_0$, donde $W_\alpha(t)$ es el grupo generado por $D_x^\alpha \partial_x + \mathscr{H}_x \partial_y^2$, en otras palabras,

$$W_\alpha(t)u_0 = e^{t(D_x^\alpha \partial_x + \mathscr{H}_x \partial_y^2)}u_0 = \left(e^{it(|\xi|^\alpha \xi + \mathrm{sgn}(\xi)\eta^2)}\widehat{u}_0\right)^\vee = I_\alpha(t) * u_0,$$

donde $I_\alpha(t)$ es la integral oscilatoria

$$I_\alpha(t)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t(|\xi|^\alpha \xi + \mathrm{sgn}(\xi)\eta^2) + x\xi + y\eta)}\,d\xi\,d\eta$$

En todas las discusiones posteriores haremos un uso sistemático del siguiente lema, que combina argumentos de dualidad y el argumento de Tomas (vea [Tomas, 1975]) muy usados en el contesto de las ecuaciones de evolución; éste fue enunciado por primera vez por Ginibre y Velo en [Ginibre and Velo, 1992]. Supongamos que X es un espacio vectorial normado y que J es un isomorfismo antilineal isométrico en X, e.d., J es una función tal que

$$J(x + \lambda y) = J(x) + \overline{\lambda} J(y),$$

Para toda $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\|J(x)\| = \|x\|$ para toda $x \in X$. Si X es un espacio normado, denotamos por X^* el dual topológico y X^+ el espacio de los funcionales antilineales continuos. El espacio X^+ es normado, con la norma definida por

$$\|\phi\| = \sup_{x \in X,\, \|x\| \leqslant 1} |\phi(x)|.$$

Notaremos por J^* la aplicación de X^* en X^+ tal que $J^*(\phi) = \phi \circ J$. Así definido, J^* resulta ser un isomorfismo lineal isométrico entre X^* y X^+. Ahora bien, la aplicación I de X^+ en X^* definida por

$$I(\phi)f = \overline{\phi(f)},$$

para toda $\phi \in X^+$ y toda $f \in X$, es un isomorfismo antilineal isométrico. Ya que no habrá riesgo a confusión, notaremos por J al isomorfismo antilineal isométrico de X^* en si mismo definido por $J = I \circ J^*$. Sea $\mathscr{D}$ un subespacio vectorial de X tal que $J(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$. Denotaremos por $\mathscr{D}_a^*$ el dual algebraico y por $\mathscr{D}_a^+$ el espacio vectorial de funciones antilineales sobre $\mathscr{D}$. Definimos el par entre $\mathscr{D}_a^*$ y $\mathscr{D}$ que es lineal en la primera componente y antilineal en la segunda componente a la expresión

$$\langle \phi, f \rangle_{\mathscr{D}} = \phi(J(f)),$$

donde $\phi \in \mathscr{D}_a^*$ y $f \in \mathscr{D}$. Observe que si ψ es una función antilineal sobre $\mathscr{D}$, entonces $\phi = \psi \circ J^{-1}$ es tal que

$$\psi(f) = \langle \phi, f \rangle_{\mathscr{D}}.$$

De hecho, $\phi \to \phi \circ J$ es un isomorfismo entre $\mathscr{D}_a^*$ y $\mathscr{D}_a^+$

Lema 2.3.1. *Sean X y $\mathscr{D}$ como en la discusión anterior tal que X es un espacio de Banach y $\mathscr{D}$ un subespacio denso de X. Sean, además, H un espacio de Hilbert, T una transformación lineal de $\mathscr{D}$ en H y T^* el operador adjunto definido por*

$$\langle T^* v, f \rangle_{\mathscr{D}} = \langle v, Tf \rangle,$$

donde $\langle\, , \,\rangle$ es el producto escalar en H. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. *Existe a, $0 \leqslant a < \infty$ tal que para todo $f \in \mathscr{D}$*

   $$\|Tf\| \leqslant a \|f\|_X.$$

2. *$\mathscr{R}(T^*) \subseteq X^*$ y existe a, $0 \leqslant a < \infty$ tal que para todo $v \in H$*

   $$\|T^* v\|_{X^*} \leqslant a \|v\|.$$

3. *$\mathscr{R}(T^* T) \subseteq X^*$ y existe a, $0 \leqslant a < \infty$ tal que para todo $f \in \mathscr{D}$*

   $$\|T^* T f\|_{X^*} \leqslant a^2 \|f\|_X,$$

donde $\| \cdot \|$ es la norma de H y a es la misma constante en las tres condiciones.

Demostración. Que 1. es equivalente a 2. es un hecho inmediato de la definición de T^* y el hecho de que J es un isomorfismo. Que 3. es equivalente a 1. y 2. sigue de la ecuación siguiente

$$\langle Tf, Tg \rangle = \langle T^* T f, g \rangle_{\mathscr{D}}.$$

$\square$

Recordemos algunas propiedades conocidas de las integrales oscilatorias en dimensión 1.

Lema 2.3.2. *Si* $I^1_{\alpha,a,b}(t)(x) = \displaystyle\int_a^b e^{i(t|\xi|^\alpha\xi + x\xi)}\,d\xi$ *y* $\gamma \in \left[0,\, \frac{\alpha-1}{2}\right]$, *entonces*

$$\left|D^{\gamma+i\beta} I^1_{\alpha,a,b}(t)(x)\right| = \left|\int_a^b e^{i(t|\xi|^\alpha\xi + x\xi)}\,d\xi\right| \leqslant c(1+|\beta|)|t|^{-\frac{\gamma+1}{\alpha+1}},$$

donde c *es independiente de* x, a *y* b.

La demostración de este lema puede ser encontrada en [Kenig et al., 1989]. Un inmediato corolario de éste es el siguiente lema

Lema 2.3.3. *Si* $I^2_{\pm}(t)(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\pm t\eta^2 + y\eta)}\,d\eta$, *entonces*

$$\left|I^2_{\pm}(t)(y)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\pm t\eta^2 + y\eta)}\,d\eta\right| \leqslant c|t|^{-\frac{1}{2}},$$

uniformemente en y.

Gracias el teorema de Fubini

$$I_\alpha(t)(x,y) = I^1_{\alpha,0,\infty}(t)(x) I^2_{+}(t)(y) + I^1_{\alpha,-\infty,0}(t)(x) I^2_{-}(t)(y). \tag{2-26}$$

Por lo tanto, de los dos anteriores lemas tenemos el siguiente

Lema 2.3.4. *Si* $\gamma \in \left[0,\, \frac{\alpha+1}{2}\right]$,

$$\left|D_x^{\gamma+i\beta} I_\alpha(t)(x,y)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t(|\xi|^\alpha\xi + \operatorname{sgn}(\xi)\eta^2) + x\xi + y\eta)} |\xi|^{\gamma+i\beta}\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant c(1+|\beta|)|t|^{-\left(\frac{\gamma+1}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\right)},$$

uniformemente en x *y en* y.

Corolario 2.3.5. *Para cualquier* $\gamma \in \left[0,\, \frac{\alpha-1}{2}\right]$ *y* $\theta \in [0,1]$, *se tiene que*

$$\left\|D_x^{\theta\gamma} I_\alpha(t) * v_0\right\|_{2/(1-\theta)} \leqslant c|t|^{-\theta\left(\frac{\gamma+1}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\right)} \|v_0\|_{2/(1+\theta)}$$

Demostración. Consideremos los siguientes operadores $T^z(v) = D_x^{z\gamma} I_\alpha * v$ para $v \in L^2 \cap L_1$. Gracias a que $v \to I_\alpha(t) * v$ es un grupo en el parámetro t fuertemente continuo de operadores unitarios y al lema anterior se tiene que la familia de operadores T^z satisface las condiciones del teorema de interpolación de Stein (Teorema 4.1 del Capítulo V en [Stein and Weiss, 1971]), de donde se sigue el siguiente corolario. □

Corolario 2.3.6. *Si* $\gamma \in [0, (\alpha-1)/2)$ *y* $\theta \in [0,1]$ *se sigue que*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|D_x^{\theta\gamma/2} I_\alpha(t) * v_0\|_p^q\,dt\right)^{1/q} \leqslant c\|v_0\|_2, \tag{2-27}$$

y

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{\theta\gamma} I_\alpha(t-\tau) * g(\cdot,\tau)\,d\tau\right\|_p^q dt\right)^{1/q} \leqslant c\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|g(\cdot,t)\|_{p'}^{q'}\,dt\right)^{1/q'}, \tag{2-28}$$

donde $p = 2/(1-\theta)$ *y* $q = 2\left(\theta\left(\frac{\gamma+1}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}$

Demostración. Un argumento de dualidad muestra que (2-27) es equivalente a

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{\theta\gamma/2} I_\alpha(t) * g(\cdot,t)\, dt \right\|_2 \leqslant c \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|g(\cdot,\, t)\|_{p'}^{q'}\, dt \right)^{1/q'}, \tag{2-29}$$

Por otro lado siguiendo el argumento de P. Tomas en [Tomas, 1975]

$$\int \left(\int D_x^{\theta\gamma/2} I_\alpha(t) * f(x,y,t)\, dt \right) \left(\int D_x^{\theta\gamma/2} \overline{I_\alpha(t) * g(x,y,t)}\, dt \right) dx\, dy =$$
$$= \iint f(x,y,t) \left(\int D_x^{\theta\gamma} I_\alpha(t-\tau) * \overline{g(x,y,\tau)}\, d\tau \right) dt\, dx\, dy.$$

Luego (2-28) es equivalente a (2-29), por lo tanto, equivalente a (2-27). Gracias al teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev, (2-28) sigue del corolario anterior. □

Corolario 2.3.7. *Bajo las hipótesis del anterior corolario tenemos*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|I_\alpha(t) * v_0\|_\infty^{q_\theta}\, dt \right)^{\frac{1}{q_\theta}} \leqslant c \|v_0\|_{H^{\theta+}} \tag{2-30}$$

donde $q_\theta = \dfrac{12}{5(1-\theta)}$, *para todo* $\theta \in [0,\, 1]$

Demostración. Del lema anterior con $\theta = 1$, y $\gamma = 0$ se tiene que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|I_\alpha(t) * v_0\|_\infty^{\frac{12}{5}}\, dt \right)^{\frac{5}{12}} \leqslant c \|v_0\|_{L^2}.$$

Ya que, del lema de Sobolev,

$$\|I_\alpha(t) * v_0\|_{L_t^\infty L_{xy}^\infty} \leqslant c \|v_0\|_{H^{1+}},$$

del teorema de interpolación de Stein se sigue el corolario. □

Examinemos algunos resultados de la función maximal. Para ello necesitamos el siguiente lema cuya prueba puede ser encontrada en [Kenig et al., 1991b]

Lema 2.3.8. *Sea* ψ *una función* C^∞ *con soporte en el intervalo* $[2^{k-1}, 2^{k+1}]$, *donde* k *es un número natural. Para* $\alpha \geqslant 1$ *la función* H_k^α *definida por*

$$H_k^\alpha(x) = \begin{cases} 2^k, & si \quad |x| \leqslant 1 \\ 2^{k/2}|x|^{-1/2} & si \quad 1 \leqslant |x| \leqslant c2^{k\alpha} \\ 1/(1+x^2) & si \quad |x| \geqslant c2^{\alpha k}, \end{cases}$$

satisface

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t|\xi|^\alpha \xi + x\xi)} \psi(\xi) d\xi \right| \leqslant c H_k^\alpha(x)$$

para $|t| \leqslant 2$, *donde* c *no depende de* t *y* k.

Teorema 2.3.9. *Para $s > (\alpha+1)/4$ y $r > 1/2$*

$$\|I_\alpha(t) * v_0\|_{L^2_x, L^\infty_{T,y}} \leqslant (1+T)^\rho \|(1+D_x)^s(1+D_y)^r v_0\|_{L^2} \tag{2-31}$$

Demostración. Supongamos primero que $T = 1$. En este caso, demostrar 2-31 es equivalente a demostrar que

$$\|I_\alpha(t) * (1-\partial_y^2)^{-r/2} v_0\|_{L^2_x, L^\infty_{T,y}} \leqslant \|(1+D_x)^s v_0\|_{L^2} \tag{2-32}$$

Con esto en mente, sea $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ una partición de la unidad C^∞ de $\mathbb{R}^+$ tal que

$$\operatorname{supp}\psi_k \subseteq [2^{k-1},\, 2^{k+1}]$$

para $k = 1, 2, \dots$ y que $\operatorname{supp}\psi_0 \subseteq [-1, 1]$. Sea

$$I_\alpha^k(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t(|\xi|^\alpha\xi + \operatorname{sgn}(\xi)\eta^2) + x\xi + y\eta^2)} \psi_k(|\xi|)\, d\xi d\eta,$$

$k = 0, 1, \dots$ Así pues, el soporte de $\left(I_\alpha^k(t) * (1-\partial_y^2)^{-r/2} v_0\right)^\wedge$ está contenido en $\{(\xi,\eta) \mid 2^{k-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1}\}$. Luego, es suficiente demostrar que

$$\left(\int_{-\infty}^\infty \sup_{t\leqslant 1,\ y\in\mathbb{R}} |I_\alpha^k(t) * (1-\partial_y^2)^{-r/2} v_0(x,y)|^2\right)^{1/2} \leqslant c 2^{k(\alpha+1)/4} \|v_0\|_{L^2}$$

Por el Lema 2.3.1, ésto equivale a demostrar que

$$\left(\int_{-\infty}^\infty \sup_{|t|\leqslant 1,\ y\in\mathbb{R}} \left|\int_{-1}^1 I_\alpha^k(t-\tau) * (1-\partial_y^2)^{-r} g(\cdot,\tau) d\tau\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c 2^{k(\alpha+1)/2} \left(\int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \int_{-1}^1 |g(x,y,\tau)|\, d\tau\, dy\right)^2 dx\right)^{1/2} \tag{2-33}$$

puesto que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t(|\xi|^\alpha\xi + \operatorname{sgn}(\xi)\eta^2) + x\xi + y\eta^2)} \psi_k(|\xi|)(1+\eta^2)^{-r}\, d\xi d\eta\right| \leqslant \\
&\left|\int_{\xi\geqslant 0} e^{i(t(|\xi|^\alpha\xi + \operatorname{sgn}(\xi)\eta^2) + x\xi + y\eta^2)} \psi_k(|\xi|)(1+\eta^2)^{-r}\, d\xi d\eta\right| + \\
&+ \left|\int_{\xi\leqslant 0} e^{i(t(|\xi|^\alpha\xi + \operatorname{sgn}(\xi)\eta^2) + x\xi + y\eta^2)} \psi_k(|\xi|)(1+\eta^2)^{-r}\, d\xi d\eta\right| \\
&\leqslant H_k^\alpha(x) \int_{\mathbb{R}} (1+\eta^2)^{-r}\, d\eta,
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\left|\int_{-1}^{1} I_\alpha^k(t-\tau) * (1-\partial_y^2)^{-r} g(\cdot,\tau) d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_r \int_{\mathbb{R}} H_k^\alpha(\tilde{x}) \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |g(x-\tilde{x},\tilde{y},\tau)|\, d\tau\, d\tilde{y}\right) d\tilde{x},$$

Así pues, de esta última desigualdad y de la desigualdad de Young,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{|t|\leqslant 1,\ y\in\mathbb{R}} \left|\int_{-1}^{1} I_\alpha^k(t-\tau) * (1-\partial_y^2)^{-r} g(\cdot,\tau) d\tau\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_r \int_{\mathbb{R}} \left(H_k^\alpha * \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |g(\cdot,y,t)|\, dt\, dy\right)^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{k(\alpha+1)/2} C_r \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{1} |g(x,y,\tau)|\, dt\, dy\right)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Para T arbitrario, haciendo $t = t'T$ se tiene que

$$I_\alpha(t) * v_0(x,y) = I_\alpha(t') * v_1\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{\alpha+1}}}, \frac{y}{T^{\frac{1}{2}}}\right),$$

donde $\widehat{v}_1(\xi,\eta) = T^{-\left(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\right)} \widehat{v}_0\left(\frac{\xi}{T^{\frac{1}{\alpha+1}}}, \frac{\eta}{T^{\frac{1}{2}}}\right)$. Luego,

$$\|I_\alpha(t) * v_0\|_{L_x^2, L_{T,y}^\infty} = \left\| I_\alpha(t) * v_1\left(\frac{\cdot}{T^{\frac{1}{\alpha+1}}}, \frac{\cdot}{T^{\frac{1}{2}}}\right)\right\|_{L_x^2, L_{y,1}^\infty} =$$

$$= T^{\left(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\right)/2} \|I_\alpha(t) * v_1\|_{L_x^2, L_{y,1}^\infty} \leqslant T^{\left(\frac{s}{\alpha+1}+\frac{r}{2}\right)/2} \|(1+D_x)^s (1+D_y)^r v_0\|_{L^2}.$$

Ahora si $\rho > 1/4$, sea $s_0 > (\alpha+1)/4$ y $r_0 > 1/2$ tales que $\rho(1+\alpha) \geqslant s_0$ y $2\rho \geqslant r_0$. Si $s \leqslant s_0$ y $r \leqslant r_0$ 2-31 se sigue directamente de la anterior desigualdad. Si $s \geqslant s_0$ o $r \geqslant r_0$ el lado izquierdo de 2-31 es acotado por $T^\rho \|(1+D_x)^{\tilde{s}} (1+D_y)^{\tilde{r}} v_0\|_{L^2} \leqslant T^\rho \|(1+D_x)^s (1+D_y)^r v_0\|_{L^2}$, donde $\tilde{s} = \min(s,s_0)$ y $\tilde{r} = \min(r,r_0)$ □

Teorema 2.3.10. *Para $s > (\alpha+1)/4$ y $r > 1/2$*

$$\|I_\alpha(t) * v_0\|_{L_{x,y}^2, L_T^\infty} \leqslant (1+T)^\rho \|(1+D_x)^s (1+D_y)^r v_0\|_{L^2}. \tag{2-34}$$

Demostración. Primero supongamos que $T = 1$. Observe que basta demostrar que

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sup_{t\leqslant 1} \sup_{j\leqslant x\leqslant j+1} \sup_{l\leqslant y\leqslant l+1} |I_\alpha(t) * v_0(x,y)|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c \|(1+D_x)^s (1+D_y)^r v_0\|_{L^2}$$

Sea $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ una partición de la unidad C^∞ de $\mathbb{R}^+$ tal que

$$\operatorname{supp}\psi_k \subseteq [2k-1,\, 2^{k+1}]$$

para $k = 1, 2, \ldots$ y $\operatorname{supp}\psi_0 \subseteq [-1, 1]$. Sea $I_\alpha^{k,i}(t)$ tal que

$$\widehat{I_\alpha^{k,i}(t)} = \widehat{I_\alpha(t)}\psi_i(|\eta|).$$

Así pues, el soporte de $(I_\alpha^{k,i}(t) * v_0)^\wedge$ está contenido en $\{(\xi,\eta) \quad | \quad 2^{k-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1} \quad \text{y} \quad 2^{i-1} \leqslant |\eta| \leqslant 2^{i+1}\}$. Luego, es suficiente demostrar que

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sup_{t\leqslant 1}\sup_{j\leqslant x\leqslant j+1}\sup_{l\leqslant y\leqslant l+1}|I_\alpha^{k,i}(t) * v_0(x,y)|^2\right)^{1/2} \leqslant c2^{k(\alpha+1)/4+i/2}\|v_0\|_{L^2}$$

Por el lema 2.3.1, ésto equivale a demostrar que

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sup_{t\leqslant 1}\sup_{j\leqslant x\leqslant j+1}\sup_{l\leqslant y\leqslant l+1}\left|\int_{-1}^{1} I_\alpha^{k,i}(t-\tau) * g(\cdot,\tau)\,d\tau\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c2^{k(\alpha+1)/2+i}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}\int_{j}^{j+1}\int_{l}^{l+1}|g(x,y,\tau)|\,dx\,dy\,d\tau\right)^2\right)^{1/2}. \quad (2\text{-}35)$$

Para esto observemos que

$$\left|\left(\int_{-1}^{1} I_\alpha^{k,i}(t-\tau) * g(\cdot,\tau)\,d\tau\right)(x,y)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} H_k^\alpha(\tilde{x})H_i^1(\tilde{y})\int_{-1}^{1}|g(x-\tilde{x},y-\tilde{y},\tau)|\,d\tau\,d\tilde{x}\,d\tilde{y} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m,n} H_k^\alpha(|m|)H_i^1(|n|)\int_{Q_{m,n}}\int_{-1}^{1}|g(x-\tilde{x},y-\tilde{y},\tau)|\,d\tau\,d\tilde{x}\,d\tilde{y},$$

donde $Q_{m,n} = [m, m+1] \times [n, n+1]$. Así que el lado izquierdo de la desigualdad 2-35 es acotado por

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j,l}\sup_{(x,y)\in Q_{j,l}}\left(\sum_{m,n}H_k^\alpha(|m|)H_i^1(|n|)\int_{Q_{m,n}}\int_{-1}^1|g(x-\tilde{x},y-\tilde{y},\tau)|\,d\tau\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}\right)^2\right)^{1/2}\\
&\leqslant\left(\sum_{j,l}\left(\sum_{m,n}H_k^\alpha(|m|)H_i^1(|n|)\int_{\tilde{Q}_{j,l,m,n}}\int_{-1}^1|g(\tilde{x},\tilde{y},\tau)|\,d\tau\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}\right)^2\right)^{1/2}\\
&\leqslant\sum_{m,n}H_k^\alpha(|m|)H_i^1(|n|)\left(\sum_{j,l}\left(\int_{\tilde{Q}_{j,l,m,n}}\int_{-1}^1|g(\tilde{x},\tilde{y},\tau)|\,d\tau\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}\right)^2\right)^{1/2}\\
&\leqslant 16\sum_{m,n}H_k^\alpha(|m|)H_i^1(|n|)\left(\sum_{j,l}\left(\int_{Q_{j,l}}\int_{-1}^1|g(\tilde{x},\tilde{y},\tau)|\,d\tau\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}\right)^2\right)^{1/2}\\
&\leqslant c2^{k(\alpha+1)/2+i}\left(\sum_{j,l}\left(\int_{Q_{j,l}}\int_{-1}^1|g(\tilde{x},\tilde{y},\tau)|\,d\tau\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}\right)^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

donde $\tilde{Q}_{j,l,m,n}=[m-j+2,m-j-1]\times[n-l+2,n-l-1]$, lo que demuestra 2-35.
Para T arbitrario, haciendo $t=t'T$ se tiene que

$$I_\alpha(t)*v_0(x,y)=I_\alpha(t')*v_1\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{\alpha+1}}},\frac{y}{T^{\frac{1}{2}}}\right),$$

donde $\widehat{v}_1(\xi,\eta)=T^{-\left(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\right)}\widehat{v}_0\left(\frac{\xi}{T^{\frac{1}{\alpha+1}}},\frac{\eta}{T^{\frac{1}{2}}}\right)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha(t)*v_0\|_{L^2_{x,y},L^\infty_T}&=\left\|I_\alpha(t)*v_1\left(\frac{\cdot}{T^{\frac{1}{\alpha+1}}},\frac{\cdot}{T^{\frac{1}{2}}}\right)\right\|_{L^2_{x,y},L^\infty_1}=\\
&=T^{(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{2})/2}\|I_\alpha(t)*v_1\|_{L^2_{x,y},L^\infty_1}\leqslant T^{(\frac{s}{\alpha+1}+\frac{r}{2})/2}\|(1+D_x)^s(1+D_y)^r v_0\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Ahora si $\rho>1/4$, sea $s_0>(\alpha+1)/4$ y $r_0>1/2$ tales que $\rho(1+\alpha)\geqslant s_0$ y $2\rho\geqslant r_0$. Si $s\leqslant s_0$ y $r\leqslant r_0$ 2-34 se sigue directamente de la anterior desigualdad. Si $s\geqslant s_0$ o $r\geqslant r_0$ el lado izquierdo de 2-34 es acotado por $T^\rho\|(1+D_x)^{\tilde{s}}(1+D_y)^{\tilde{r}}v_0\|_{L^2}\leqslant T^\rho\|(1+D_x)^s(1+D_y)^r v_0\|_{L^2}$, donde $\tilde{s}=\text{mín}(s,s_0)$ y $\tilde{r}=\text{mín}(r,r_0)$ □

Ahora examinemos una extensión natural del teorema 2.5 en [Kenig et al., 1991a] a dos dimensiones.

Teorema 2.3.11. *Para $u_0\in L^2$ se tiene que*

$$\|I_\alpha(t)*u_0\|_{L^4_{x,y}L^\infty_t}\leqslant c_\alpha\|D_x^{1/4}D_y^{1/4}u_0\|_{L^2} \tag{2-36}$$

Demostración. Haciendo un cambio de variable y usando el lema 2.7 en [Kenig et al., 1991a], tenemos que

$$
\begin{aligned}
|D_x^{-1/2} I^1_{\alpha,a,b}(t)(x)| &= \left| \int_a^b e^{i(t|\xi|^\alpha \xi + x\xi)} |\xi|^{-1/2}\, d\xi \right| \\
&= \left| \int_a^b e^{i(t\tilde{\xi} + x\tilde{\xi}|\tilde{\xi}|^{1/(\alpha+1)-1})} |\tilde{\xi}|^{-(1+2\alpha)/2(\alpha+1)}\, d\tilde{\xi} \right| \\
&\leqslant c_\alpha |x|^{-1/2}
\end{aligned}
$$

De la misma manera tenemos

$$|D_y^{-1/2} I^2_{\pm}(t)(y)| \leqslant C|y|^{-1/2}.$$

Así pues, de 2-26 tenemos que

$$|D_x^{-1/2} D_y^{-1/2} I_\alpha(t)| \leqslant C_\alpha |x|^{-1/2} |y|^{-1/2}.$$

Gracias al lema 2.3.1, demostrar 2-36 es equivalente a demostrar que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} D_y^{-1/2} I_\alpha(t-\tau) * g(\cdot,\cdot,\tau)\, d\tau \right\|_{L^4_{x,y} L^\infty_t} \leqslant c\|g\|_{L^{3/4}_{x,y} L^1_t}. \tag{2-37}$$

Pero ya que

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} D_y^{-1/2} I_\alpha(t-\tau) * g(\cdot,\cdot,\tau)(x,y)\, d\tau \right|_{L^4_{x,y} L^\infty_t} &\leqslant \\
\leqslant C_\alpha \int_{\mathbb{R}} |x-\tilde{x}|^{-1/2} |y-\tilde{y}|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} |g(\tilde{x},\tilde{y},\tau)|\, d\tau\, d\tilde{x}\, d\tilde{y},
\end{aligned}
$$

y gracias a la desigualdad de Minkowski y al teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev, se tiene que, para x fijo

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sup_t |D_x^{-1/2} D_y^{-1/2} I_\alpha(t-\tau) * g(\cdot,\cdot,\tau)(x,y)| \right)^4 d\tau \right)^{1/4} &\leqslant \\
\leqslant C_\alpha \int_{\mathbb{R}} |x-\tilde{x}|^{1/2} \|g(\tilde{x},\cdot,\cdot)\|_{L^{3/4}_y L^1_t}\, d\tilde{x}.
\end{aligned}
$$

De esta última desigualdad y del teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev se sigue 2-37. Esto demuestra el teorema. □

Así mismo, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.12. *Para $u_0 \in L^2$ y $r > 1/2$ se tiene que*

$$\|I_\alpha(t) * u_0\|_{L^4_{x,y}L^\infty_t} \leqslant c_\alpha \|D_x^{1/4}(1-\partial_y^2)^{-r/2}u_0\|_{L^2}. \tag{2-38}$$

Demostración. Haciendo un cambio de variable y usando el lema 2.7 en [Kenig et al., 1991a], tenemos que

$$\begin{aligned}|D_x^{-1/2} I^1_{\alpha,a,b}(t)(x)| &= \left| \int_a^b e^{i(t|\xi|^\alpha \xi + x\xi)} |\xi|^{-1/2}\, d\xi \right| \\ &= \left| \int_a^b e^{i(t\tilde{\xi} + x\tilde{\xi}|\tilde{\xi}|^{1/(\alpha+1)-1})} |\tilde{\xi}|^{-(1+2\alpha)/2(\alpha+1)}\, d\tilde{\xi} \right| \\ &\leqslant c_\alpha |x|^{-1/2}\end{aligned}$$

De la misma manera tenemos

$$|(1-\partial_y^2)^{-r} I^2_{\pm}(t)(y)| \leqslant C((1+\eta^2)^{-r})^\vee(y).$$

Así pues, de 2-26 tenemos que

$$|D_x^{-1/2}(1-\partial_y^2)^{-r} I_\alpha(t)| \leqslant C_\alpha |x|^{-1/2}((1+\eta^2)^{-r})^\vee(y).$$

Gracias al lema 2.3.1, demostrar 2-38 es equivalente a demostrar que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}(1-\partial_y^2)^{-r} I_\alpha(t-\tau) * g(\cdot,\cdot,\tau)\, d\tau \right\|_{L^4_{x,y}L^\infty_t} \leqslant c\|g\|_{L_x^{3/4}L^1_{y,t}}. \tag{2-39}$$

Pero ya que

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}(1-\partial_y^2)^{-r} I_\alpha(t-\tau) * g(\cdot,\cdot,\tau)(x,y)\, d\tau \right|_{L^4_{x,y}L^\infty_t} \leqslant \\ &\qquad \leqslant C_\alpha \int_{\mathbb{R}} |x-\tilde{x}|^{-1/2}((1+\eta^2)^{-r/2})^\vee(y-\tilde{y}) \int_{\mathbb{R}} |g(\tilde{x},\tilde{y},\tau)|\, d\tau\, d\tilde{x}\, d\tilde{y},\end{aligned}$$

y gracias a la desigualdad de Minkowski y al teorema de Young para la convolución, se tiene que, para x fijo

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sup_t |D_x^{-1/2}(1-\partial_y^2)^{-r} I_\alpha(t-\tau) * g(\cdot,\cdot,\tau)(x,y)| \right)^4 d\tau \right)^{1/4} \leqslant \\ &\qquad \leqslant C_\alpha \int_{\mathbb{R}} |x-\tilde{x}|^{1/2} \|g(\tilde{x},\cdot,\cdot)\|_{L^1_y L^1_t}\, d\tilde{x}.\end{aligned}$$

De esta última desigualdad y del teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev se sigue 2-39. Esto demuestra el teorema. □

Veamos la siguiente extensión del lema 2.1 en [Kenig et al., 1991b].

Teorema 2.3.13. *Sea $v_0 \in L^2$. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |D_x^{\alpha/2} I_\alpha(t) * v_0(x,y)|^2 \, dtdy \leqslant c_\alpha \|v_0\|_2^2,$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$

Demostración. Sea

$$I_\alpha^\pm(t)(x,y) = \int_{\pm\xi \geqslant 0} e^{i(t(|\xi|^\alpha \xi + \pm\eta^2) + x\xi + y\eta)} \, d\xi d\eta.$$

Es claro que $I_\alpha(t) = I_\alpha^+(t) + I_\alpha^-(t)$, así que solo basta demostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |D_x^{\alpha/2} I_\alpha^\pm(t) * v_0(x,y)|^2 \, dt \, dy \leqslant c_\alpha \|v_0\|_2^2$$

Haciendo el cambio de variable $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = (|\xi|^\alpha \xi + \eta^2, \, \eta)$ y, sin peligro de confusión, denotando por $(\xi, \, \eta) = (\xi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}), \eta(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}))$ las componentes de su función inversa, tenemos

$$\begin{aligned} D_x^{\alpha/2} I_\alpha^\pm(t) * v_0(x,y) &= \int_{\xi \geqslant 0} e^{i(t(|\xi|^\alpha \xi + \pm\eta^2) + x\xi + y\eta)} \widehat{v}_0(\xi,\eta) \, d\xi d\eta \\ &= \int_{\xi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) \geqslant 0} e^{i(x\xi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) + t\tilde{\xi} + y\tilde{\eta})} |\xi(\tilde{\xi},\tilde{\eta})|^{-\alpha/2} \widehat{v}_0(\xi,\eta) \, d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \end{aligned}$$

Luego, del teorema de Plancherel y haciendo el cambio de variable inverso, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |D_x^{\alpha/2} I_\alpha^\pm(t) * v_0(x,y)|^2 \, dt \, dy &= c \int_{\xi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) \geqslant 0} |\xi(\tilde{\xi},\tilde{\eta})|^{-\alpha} |\widehat{v}_0(\xi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}), \eta(\tilde{\xi},\tilde{\eta}))| \, d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \\ &= c \int_{\xi \geqslant 0} |\widehat{v}_0(\xi,\eta)|^2 \, d\xi d\eta \end{aligned}$$

□

Para complementar el anterior teorema tenemos el siguiente lema.

Lema 2.3.14. *Si $f \in H^{\alpha/2,0}$, entonces*

$$\|I_\alpha(t) * f\|_{L_x^\infty L_{y,T}^2} \leqslant c_\alpha T^{1/2} \|f\|_{H^{\alpha/2,0}}.$$

Demostración. Supongamos $f \in \mathscr{S}$. Entonces,

$$I_\alpha(t) * f = \big(g *_x \big((1 - \partial_x^2)^{\alpha/4} I_\alpha(t) * f\big)\big)$$

donde $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{g}(\xi) = (1+\xi^2)^{-\alpha/4}$. Usando la desigualdad de Minkowski y la desigualdad de Cauchy–Schwarz tenemos

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha(t) * f\|_{L_x^\infty L_{y,T}^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} g(x-\tilde{x})(1-\partial_x^2)^{\alpha/4} I_\alpha(t) * f(\tilde{x},y)d\tilde{x}\right|^2 dy\right)^{1/2} \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} g(x-\tilde{x}) \left(\int_{\mathbb{R}} |(1-\partial_x^2)^{\alpha/4} I_\alpha(t) * f(\tilde{x},y)|^2 dy\right)^{1/2} d\tilde{x} \\
&\leqslant \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f\|_{H^{\alpha/2,0}}.
\end{aligned}$$

De aquí se sigue inmediatamente el resultado. □

De una manera totalmente análoga se tienen los siguientes resultados.

Teorema 2.3.15. *Sea $v_0 \in L^2$. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |D_y^{1/2} I_\alpha(t) * v(x,y)|^2 dtdx \leqslant c_\alpha \|v_0\|_2^2,$$

para cualquier $y \in \mathbb{R}$

Lema 2.3.16. *Si $f \in H^{0,1/2}$, entonces*

$$\|I_\alpha(t) * f\|_{L_y^\infty L_{xT}^2} \leqslant c_\alpha T^{1/2} \|f\|_{H^{0,1/2}}.$$

El siguiente corolario es una consecuencia de los resultados anteriores y su demostración sigue las mismas lineas de las afirmaciones análogas en el Lema 1 de [Kenig et al., 2011]

Corolario 2.3.17. *1. Sea $v_0 \in L^2$. Entonces, para $0 \leqslant \beta < \alpha/2$*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |D_x^\beta I_\alpha(t) * v(x,y)|^2 dtdy \leqslant c_\beta T^\gamma \|v_0\|_2$$

para cualguier $x \in \mathbb{R}$.

2. Sea $v_0 \in H^{\alpha/2,0}$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x I_\alpha(t) * v(x,y)|^2 dtdy \leqslant c_\beta T^\gamma \|v_0\|_{H^{\alpha/2,0}},$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$

3. Para $0 \leqslant t \leqslant T$ y $h \in L_x^1 L_{yT}^2$

$$\left\| D_x^{\alpha/2} \int_0^t I_\alpha(t-\tau) * h(\cdot,\cdot,\tau) d\tau \right\|_{L_{xy}^2} \leqslant ||h||_{L_x^1 L_{yT}^2}.$$

4. *Para* $h \in L^1_x L^2_{yT}$

$$\left\| D^\alpha_x \int_0^t I_\alpha(t-\tau) * h(\cdot,\cdot,\tau) d\tau \right\|_{L^\infty_x L^2_{yT}} \leqslant c\|h\|_{L^1_x L^2_{yT}}.$$

5. *Para* $0 \leqslant \beta < \alpha$ *existe* $\gamma > 0$ *tal que*

$$\left\| D^\beta_x \int_0^t I_\alpha(t-\tau) * h(\cdot,\cdot,\tau) d\tau \right\|_{L^\infty_x L^2_{yT}} \leqslant cT^\gamma\|h\|_{L^1_x L^2_{yT}}.$$

6. *Para* $0 \leqslant t \leqslant T$ *y* $h \in L^1_x L^2_{yT}$

$$\left\| \int_0^t I_\alpha(t-\tau) * h(\cdot,\cdot,\tau) d\tau \right\|_{L^2_{xy}} \leqslant cT^\gamma\|h\|_{L^1_x L^2_{yT}}.$$

3 Buen planteamiento en espacios de Sobolev

En este capítulo examinaremos el buen planteamiento de (1-10) en los espacios de Sobolev H^{s_1,s_2} y X^s.

3.1. Buen planteamiento en los espacios $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, $s_1 > 3/2$

En esta sección usaremos la teoría de Kato para mostrar el buen planteamiento de (1-10) en los espacios H^{s_1,s_2}. Con más precisión tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. *Sean $s_1 \geqslant s_2 > 1$, tales que $\frac{1}{s_1-1} + \frac{1}{s_2-1} < 2$, y $p \geqslant s_1$. Para $\varphi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, existe $T > 0$, que depende solamente de $\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}}$, y una única $u \in C([0,T], H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,T], H^{s_1-2,s_2-2}(\mathbb{R}^2))$ solución del problema de Cauchy* (1-10)
Además, la transformación $\varphi \to u$ de H^{s_1,s_2} en $C([0,T], H^{s_1.s_2}(\mathbb{R}^2))$ es continua.

Demostración. Sea $V(t)$ el grupo de operadores definido por

$$V(t)\varphi = e^{t(D_x^\alpha \partial_x + \mathscr{H}\partial_y^2)}\varphi = \left(e^{it\,\mathrm{sgn}(\xi)(|\xi|^{\alpha+1}+\eta^2)}\widehat{\varphi}\right)^\vee,$$

para toda $\varphi \in H^{s_1,s_2}$. u es solución de la ecuación (1-10) si y sólo si $v = V(t)u$ es solución del problema

$$\begin{cases} v_t + A(t,v)v = 0 \\ v(0) = \phi, \end{cases} \tag{3-1}$$

donde $A(t,v) = V(t)F(V(-t)v)\partial_x V(-t)$. Veamos que este problema satisface cada una de las condiciones del teorema de Kato 2.1.2.
Sean $X = L^2(\mathbb{R}^2)$, $Y = H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ y $S = \Lambda_{s_1,s_2} = J_x^{s_1} + J_y^{s_2}$. Del teorema de Plancherel, es evidente que S isomorfismo entre X e Y
Con los siguientes lemas probaremos que se satisfacen las condiciones (A_1)-(A_4)

Lema 3.1.2. *$A(t,v) \in G(X, 1, \beta(v))$, donde $\beta(v) = \frac{1}{2}\sup_t \|\partial_x(F(V(t)v)\|_{L^\infty}$*

Demostración. Ya que $\{V(-t)\}$ es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios y que $F(u) \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, de la Proposición 2.2.5, se obtiene el resultado $\square$

Lema 3.1.3. *Para S dado como antes,*

$$SA(t,v)S^{-1} = A(t,v) + B(t,v),$$

donde $B(t,v)$ es un operador acotado en L^2, para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $v \in H^{s_1,s_2}$, y satisface las desigualdades

$$||B(t,v)||_{\mathcal{B}(L^2)} \leqslant \lambda(v) \tag{3-2}$$

$$||B(t,v) - B(t,v')||_{\mathcal{B}(L^2)} \leqslant \mu(v,v')||v - v'||_{H^{s_1,s_2}} \tag{3-3}$$

para $t \in \mathbb{R}$ y todos v y $v' \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$. Donde

$$\lambda(v) = \sup_t C_s \|\nabla F(V(-t)v)\|_{H^{s_1-1,s_2-1}}, \text{ y}$$

$$\mu(v,v') = C_{p,s}(||v||^{p-1}_{H^{s_1,s_2}} + ||v'||^{p-1}_{H^{s_1,s_2}}).$$

Demostración. Del Lema 2.2.2, se sigue que $[S, F(V(-t)v)]S^{-1} \in \mathcal{B}(L^2)$ y

$$\|[S, F(V(-t)v)]S^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2)} \leqslant C_s \|\nabla F(V(-t))v)\|_{H^{s_1-1,s_2-1}}.$$

Por lo tanto $B(t,v) \in \mathcal{B}(L^2)$ y satisface (3-2)
Al proceder como antes y teniendo en cuenta que

$$\|F(v) - F(v')\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant C_{p,s1,s_2} \left(\|v\|^{p-1}_{H^{s_1,s_2}} + \|v'\|^{p-1}_{H^{s_1,s_2}}\right) \|v - v'\|_{H^{s_1,s_2}},$$

para todo v y $v' \in H^{s_1,s_2}$, se muestra (3-3) $\square$

Lema 3.1.4. *$H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \subset D(A(t,v))$ y $A(t,v)$ es un operador acotado de $Y = H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ en $X = L^2(\mathbb{R}^2)$ con*

$$\|A(t,v)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \leqslant \lambda(v),$$

para todo $v \in Y$, y donde $\lambda(v) = \sup_t C_s \|\nabla F(V(-t)v)\|_{H^{s_1-1,s_2-1}}$. Además, la función $t \mapsto A(t,v)$ es fuertemente continua de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{B}(Y,X)$, para cada $v \in H^{s_1,s_2}$. Por otro lado, la función $v \mapsto A(t,v)$ satisface la siguiente condición de Lipschitz

$$\|A(t,v) - A(t,v')\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \leqslant \mu(v,v')\|v - v'\|_X,$$

donde μ es como en el lema anterior.

Demostración. Puesto que $\{V(t)\}$ es un grupo unitario en L^2, de la definición de $A(t,v)$, se sigue que $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \subset D(A(t,v))$. De hecho,

$$\begin{aligned}
\|A(t,v)f\|_{L^2} &= \|F(V(-t)v)\partial_x V(-t)f\|_{L^2} \\
&\leqslant C_{s_1,s_2} \|F(V(-t)v)\|_{H^{s_1,s_2}} \|\partial_x f\|_{L^2} \\
&\leqslant \lambda(v)\|f\|_{H^{s_1,s_2}}
\end{aligned}$$

para toda $f \in H^{s_1,s_2}$.
Ahora, para cada $t, t' \in \mathbb{R}$ y cada $f, v \in H^{s_1,s_2}$, tenemos

$$\begin{aligned}\|A(t,v)f - A(t',v)f\|_{L^2} &\leqslant \|\left(V(t) - V(t')\right) F(V(-t))\partial_x V(-t)f\|_{L^2} + \\ &+ \|(F(V(-t)v) - F(V(-t')))\partial_x V(-t)f\|_{L^2} + \\ &+ \|F(V(-t')v)\partial_x(V(-t) - V(-t'))f\|_{L^2}\end{aligned}$$

Como el grupo $\{V(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es fuertemente continuo y la función $v \to F(v)$ de H^{s_1,s_2} en si mismo es continua, $t \mapsto A(t,v)$ es fuertemente continua de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{B}(H^{s_1,s_2}, L^2)$. Finalmente, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|A(t,v)f - A(t,v')f\|_{L^2} &\leqslant \|F(V(-t)v) - F(V(-t)v')\|_{L^2}\|\partial_x V(-t)f\|_{L^\infty} \\ &\leqslant C_p(\|v\|_{L^\infty}^{p-1} + \|v'\|_{L^\infty}^{p-1})\|f\|_{H^{s_1,s_2}}\|v - v'\|_{L^2} \\ &\leqslant \mu(v,v')\|v - v'\|\,\|f\|_{H^{s_1,s_2}}\end{aligned}$$

esto termina la demostración del lema. □

Si tomamos W la bola abierta de los $v \in H^{s_1,s_2}$ tales que $\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} < R$ los lemas anteriores muestran que el problema de Cauchy (1-10) satisface las condiciones del Teorema 2.1.2. Por lo tanto, para cada $\varphi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, con $s > 2$, existen $T > 0$, que depende de $\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}}$, y una única $v \in C([0,T], H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,T], H^{s_1-1,s_2-1}(\mathbb{R}^2))$ solución del problema (3-1). Además, la aplicación $\varphi \to v$ es continua de $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ en $C([0,T], H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$. Ahora bien, de las propiedades del grupo $V(t)$ se puede verificar que $u(t) = V(-t)v$, es solución del problema de Cauchy (1-10) y satisface las propiedades enunciadas en el teorema. □

Teorema 3.1.5. *El tiempo de existencia para la solución del problema de Cauchy* (1-10) *puede ser elegido independiente de s_1 y s_2 en el siguiente sentido: si $u \in C([0,T], H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ es la solución de* (1-10) *con $\varphi \in H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, para algún $r_i > s_i$, $i = 1,2$, entonces $u \in C([0,T], H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2))$.*
En particular, si $\varphi \in H^\infty(\mathbb{R}^2)$, $u \in C([0,T], H^\infty(\mathbb{R}^2))$

Demostración. Sean $r_i > s_i$, $i = 1,2$, $u \in C([0,T], H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2))$, solución de (1-10) y $v = V(-t)u$. Supongamos que $r_i \leqslant s_i + 1$. Si aplicamos ∂_x^2 en ambos lados de la ecuación diferencial (3-1), llegamos a la siguiente ecuación de evolución lineal para $w(t) = \partial_x^2 v(t)$

$$\frac{dw}{dt} + A(t)w + B(t)w = f(t) \tag{3-4}$$

donde

$$A(t) = \partial_x V(t) F(u(t)) V(-t) \tag{3-5}$$

$$B(t) = 2V(t)\partial_x F'(u(t)) u_x(t) V(-t) \tag{3-6}$$

$$f(t) = -V(t)F''(u(t))(u_x(t))^3, \tag{3-7}$$

con $F'(u) = p|u|^{p-2}u$ y $F''(u) = p(p-1)|u|^{p-2}$.
Como $v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$, entonces $w \in C([0,T]; H^{s-2}(\mathbb{R}^2))$. Además $w(0) = \phi_{xx} \in H^r(\mathbb{R}^2)$ porque $\phi \in H^r(\mathbb{R}^2)$. Es necesario ver que $w \in C([0,T]; H^{r-2}(\mathbb{R}^2))$, para ésto probaremos que el problema de Cauchy para la ecuación lineal (3-4) está bien planteado para $1-s \leqslant k \leqslant s-1$, para lo cual tenemos el siguiente lema cuya demostración es similar a la del Lema 3.1 en [Kato, 1979]

Lema 3.1.6. *La familia $\{A(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ tiene una única familia de operadores de evolución $\{U(t,\tau)\}_{0\leqslant t\leqslant \tau\leqslant T}$ para los espacios $X = H^h$, $Y = H^k$, donde*

$$-s \leqslant h \leqslant s-2 \quad 1-s \leqslant k \leqslant s-1 \quad k+1 \leqslant h \tag{3-8}$$

En particular, $U(t,\tau) : H^r \to H^r$ para $-s \leqslant s \leqslant s-1$.

se tiene que w, satisface la ecuación

$$w(t) = U(t,0)\phi_{xx} + \int_0^t U(t,\tau)[-B(\tau)w(\tau) + f(\tau)]\,d\tau. \tag{3-9}$$

Como dijimos $\phi_{xx} \in H^{r-2}$, f, dada por (3-7), está en $C([0,T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^2)) \subset C([0,T]; H^{r-2}(\mathbb{R}^2))$, si $r \leqslant s+1$ y $B(t)$, dada por (3-6) es una familia de operadores en (H^{r-2}) que es fuertemente continuo para t en el intervalo $[0,T]$. Del lema (3.1.6) la solución de (3-9) está en $C([0,T]; H^{r-2}(\mathbb{R}^2))$. En otras palabras $\partial_x^2 u \in C([0,T]; H^{r-2}(\mathbb{R}^2))$
Si $w_1(t) = \partial_x\partial_y v(t)$, tenemos

$$\frac{dw_1}{dt} + A(t)w_1 + B_1(t)w_1 = f_1(t) \tag{3-10}$$

donde

$$B_1(t) = \mathcal{W}(t)(F'(u(t)))u_x(t)\mathcal{W}(-t) = \frac{1}{2}B(t) \tag{3-11}$$

$$f_1(t) = -\mathcal{W}(t)\left(\left[F''(u(t))(u_x(t))^2 + F'(u(t))u_{xx}(t)\right]u_y(t)\right) \tag{3-12}$$

Como antes tenemos que

$$w_1(t) = U(t,0)\phi_{xy} + \int_0^t U(t,\tau)(-B_1(\tau)w_1(\tau) + f_1(\tau))\,d\tau \tag{3-13}$$

Ya que $u_{xx} \in C([0,T]; H^{r-2}(\mathbb{R}^2))$, $f_1 \in C([0,T]; H^{r-2}(\mathbb{R}^2))$. Dado que además, $B_1(t) \in (H^{r-2}(\mathbb{R}^2))$ es fuertemente continuo en el intervalo $[0,T]$, argumentando como antes tenemos que $w_1 \in C([0,T]; H^{r-2}(\mathbb{R}^2))$, o lo que es equivalente $u_{xy} \in C([0,T]; H^{r-2}(\mathbb{R}^2))$.
Analogamente, si $w_2(t) = \partial_y^2 v(t)$, tenemos que

$$\frac{dw_2}{dt} + A(t)w_2 = f_2(t) \tag{3-14}$$

donde

$$f_2(t) = -\mathcal{W}(t)\left(F''(u(t))u_x(t)u_y(t) + F'(u)u_{xy}\right)u_y(t) \tag{3-15}$$

$$w_2(t) = U(t,0)\phi_{yy} + \int_0^t U(t,\tau)f_2(\tau)\,d\tau. \tag{3-16}$$

Ya que $u_{xy} \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$, $f_2 \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$. Repitiendo el argumento anterior, podemos concluir que $w_2 \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$, o equivalentemente, $\partial_y^2 u \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$. Luego, hemos mostrado que si $s < r \leqslant s+1$ y $\phi \in H^r$, $u \in C\left([0,T]; H^r\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$. para ver el caso $r > s+1$, como $\phi \in H^{s'}$, para $s' < r$, usando una y otra vez lo que hemos probado hasta ahora, se llega a que $u \in C\left([0,T]; H^r\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ □

3.2. Buen planteamiento en espacios de más baja regularidad

Ahora examinaremos el buen planteamiento del problema de Cauchy 1-10 en ciertos que detallaremos en los enunciados de los resultados que exponemos en este capítulo.

Teorema 3.2.1. *Sean $\alpha = 2$, $p = 1$ y $s > 7/4$. Para cualquier $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, existen $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ y una única función $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$ del problema de Cauchy 1-10 tal que*

1. $\|u\|_{L_x^2 L_{xT}^\infty} < \infty$
2. $\|D_x^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|D_y^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} < \infty$
3. $\|\nabla u\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} + \|\nabla u_x\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} < \infty$

Si $T' \in (0,T)$ existe una vecindad V en H^s de u_0 entonces la aplicación $v_0 \to$ la clase de funciones que cumplen las condiciones 2, 3 y 1, satisface la condición de Lipschitz, teniendo en cuenta las normas que se dan en las condiciones 2, 3 y 1.

Demostración. Consideramos el operador integral

$$\Psi(u)(t) = \Psi_{u_0}(u)(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t')(uu_x)(t')\,dt'$$

donde $W(t)\varphi = I_\alpha(t) * \varphi$. Consideremos el espacio métrico

$$\mathcal{X}_T^a = \{u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2)); \|u\| < a\}$$

donde a y T son números reales positivos y

$$\|u\| := \|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^\infty} + \|u\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} + \|D_x^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|D_y^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|\nabla u\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} + \|\nabla u_x\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty}$$

Suponemos que $s = 1 + \delta$, donde $3/4 < \delta < 1$ y $T < 1$. Sean $u \in \mathcal{X}_T$ y consideraremos cada una de las normas que definen a $\|\cdot\|$. Consideremos primero estimaciones de la norma en H^s de u. Así pues,

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t)(t)\|_{L_{xy}^2} &\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + c\int_0^T \|uu_x\|_{L_{xy}^2} dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + c\int_0^T \|u\|_{L_{xy}^\infty}\|u_x\|_{L_{xy}^2} dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + cT\|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s}
\end{aligned}$$

Por otro lado haciendo uso de la regla de Leibniz y la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}
\|D_x^s\Psi(t)(t)\|_{L_{xy}^2} &\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + c\int_0^T \|D_x^s(uu_x)\|_{L_{xy}^2} dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + c\int_0^T \left(\|D_x^\delta((u_x)^2)\|_{L_{xy}^2} + \|D_x^\delta((uu_{xx}))\|_{L_{xy}^2} dt\right)' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + c\int_0^T \|u_x\|_{L_{xy}^\infty}\|D_x^\delta u_x\|_{L_{xy}^2} dt' + \\
&\quad + c\int_0^T \|u_{xx}\|_{L_{xy}^\infty}\|D_x^\delta u\|_{L_{xy}^2} dt' + c\int_0^T \|uD_x^\delta u_{xx}\|_{L_{xy}^2} dt'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|D_x^s\Psi(t)(t)\|_{L_{xy}^2} &\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + cT^{1/2}\|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s}\|u_x\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} + cT^{1/2}\|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s}\|u_{xx}\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} + \\
&\quad + cT^{1/2}\|uD_x^\delta u_{xx}\|_{L_{xyT}^2} \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + cT^{1/2}\|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s}\|\nabla u\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} + \\
&\quad + cT^{1/2}\|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s}\|\nabla u_x\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} + cT^{1/2}\|u\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty}\|D_x^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2}
\end{aligned}$$

De la misma manera

$$
\begin{aligned}
\|D_y^s\Psi(t)(t)\|_{L^2_{xy}} &\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + c\int_0^T \|D_y^s(uu_x)\|_{L^2_{xy}}dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + c\int_0^T \|D_y^\delta(u_xu_y)\|_{L^2_{xy}} + \|D_y^\delta((uu_{xy}))\|_{L^2_{xy}}dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + c\int_0^T \|u_x\|_{L^\infty_{xy}}\|D_y^\delta u_y\|_{L^2_{xy}}dt' + c\int_0^T \|u_y\|_{L^\infty_{xy}}\|D_y^\delta u_x\|_{L^2_{xy}}dt' + \\
&+ c\int_0^T \|u_{xy}\|_{L^\infty_{xy}}\|D_y^\delta u\|_{L^2_{xy}}dt' + c\int_0^T \|uD_y^\delta u_{xy}\|_{L^2_{xy}}dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + cT^{1/2}\|u\|_{L^\infty_T H^s_{xy}}\|u_x\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + cT^{1/2}\|u\|_{L^\infty_T H^s_{xy}}\|u_y\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + \\
&+ cT^{1/2}\|u\|_{L^\infty_T H^s_{xy}}\|u_{xy}\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + cT^{1/2}\|uD_y^\delta u_{xy}\|_{L^2_{xyT}} \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H^s} + cT^{1/2}\|u\|_{L^\infty_T H^s_{xy}}\|\nabla u\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + \\
&+ cT^{1/2}\|u\|_{L^\infty_T H^s_{xy}}\|\nabla u_x\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + cT^{1/2}\|u\|_{L^2_x L^\infty_{yT}}\|D_y^s u_x\|_{L^\infty_x L^2_{yT}}
\end{aligned}
$$

Examinemos ahora las otras normas que aparecen en la definición de $\|\!|\cdot|\!\|$. En este caso tenemos que, gracias al teorema 2.3.9

$$
\begin{aligned}
\|\Psi(u)(t)\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} &\leqslant \|W(t)u_0\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} + \left\| \int_0^t W(t-t')(uu_x)(t')dt' \right\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} \\
&\leqslant \|u_0\|_{H^s_{xy}} + c\int_0^T \|\chi_{[0,T]}(t')W(t-t')(uu_x)(t')\|_{L^2_x L^\infty_{yT}}dt' \\
&\leqslant \|u_0\|_{H^s_{xy}} + c\int_0^T \|uu_x\|_{H^s_{xy}}dt',
\end{aligned}
$$

donde $\chi_{[0,T]}$ es la función característica del intervalo $[0,t]$. De la misma forma, gracias al efecto suavizante tipo Strichartz del grupo dada en el corolario 2.3.6, tenemos

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\Psi(u)(t)\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} &\leqslant \|W(t)\nabla u_0\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + \left\| \int_0^t W(t-t')\nabla(uu_x)(t')dt' \right\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} \\
&\leqslant \|W(t)\nabla u_0\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + \int_0^T \left\|\chi_{[0,T]}(t')W(t-t')\nabla(uu_x)(t')\right\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} dt' \\
&\leqslant cT^{\delta_1}\|\nabla D_x^{-\gamma/2}u_0\|_{L^2_{xy}} + cT^{\delta_1}\int_0^T \|D_x^{-\gamma/2}\nabla(uu_x)\|_{L^2_{xy}}dt' \\
&\leqslant cT^{\delta_1}\|u_0\|_{H^s_{xy}} + cT^{\delta_1}\int_0^T \|uu_x\|_{H^s_{xy}}dt'
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\partial_x\Psi(u)(t)\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} &\leqslant \|W(t)\nabla\partial_x u_0\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + \left\| \int_0^t W(t-t')\nabla\partial_x(uu_x)(t')dt' \right\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} \\
&\leqslant \|W(t)\nabla\partial_x u_0\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + \int_0^T \left\|\chi_{[0,T]}(t')W(t-t')\nabla\partial_x(uu_x)(t')\right\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} dt' \\
&\leqslant cT^{\delta_1}\|\nabla D_x^{1-\gamma/2}u_0\|_{L^2_{xy}} + cT^{\delta_1}\int_0^T \|D_x^{1-\gamma/2}\nabla(uu_x)\|_{L^2_{xy}}dt' \\
&\leqslant cT^{\delta_1}\|u_0\|_{H^s_{xy}} + cT^{\delta_1}\int_0^T \|uu_x\|_{H^s_{xy}}dt'
\end{aligned}
$$

Asimismo, gracias al efecto suavizante tipo Kato (Teorema 2.3.12)

$$
\begin{aligned}
\|D_x^s \partial_x \Psi(u)(t)\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} \leqslant & \|\partial_x W(t) D_x^s u_0\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \left\| \int_0^t \partial_x W(t-t') D_x^s (uu_x) dt' \right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} \\
\leqslant & \|\partial_x W(t) D_x^s u_0\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \int_0^T \left\| \chi_{[0,T]}(t') \partial_x W(t-t') D_x^s (uu_x) \right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} dt' \\
\leqslant & \, c \|D_x^s u_0\|_{L_{xy}^2} + c \int_0^T \|D_x^s (uu_x)\|_{L_{xy}^2} dt' \\
\leqslant & \, c \|u_0\|_{H_{xy}^s} + c \int_0^T \|uu_x\|_{H_{xy}^s} dt'
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\|D_y^s \partial_x \Psi(u)(t)\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} \leqslant & \|\partial_x W(t) D_y^s u_0\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \left\| \int_0^t \partial_x W(t-t') D_y^s (uu_x) dt' \right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} \\
\leqslant & \|\partial_x W(t) D_y^s u_0\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \int_0^T \left\| \chi_{[0,T]}(t') \partial_x W(t-t') D_y^s (uu_x) \right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} dt' \\
\leqslant & \, c \|D_y^s u_0\|_{L_{xy}^2} + c \int_0^T \|D_y^s (uu_x)\|_{L_{xy}^2} dt' \\
\leqslant & \, c \|u_0\|_{H_{xy}^s} + c \int_0^T \|uu_x\|_{H_{xy}^s} dt'
\end{aligned}
$$

Se tiene entonces que

$$\|\Psi(u)\| \leqslant c(s)\|u_0\| + c(s)T^{\delta_1}\|u\|^2.$$

Haciendo $a = 2c(s)\|u_0\|_{H^s}$ y tomando T en tal forma que

$$T^{\delta_1} c(s) a < 1/2$$

se tiene que Ψ es una función de $\mathcal{X}_T$ en sí mismo. Teniendo en cuenta que

$$uu_x - vv_x = (u-v)u_x + v(u-v)_x$$

y siguiendo la misma linea de razonamiento con que obtuvimos las anteriores desigualdades obtenemos que

$$\|\Psi(u) - \Psi()v\| \leqslant c(s)T^{\delta_1}(\|u\| + \|v\|)\|u - v\|.$$

Escogiendo ahora T que satisfaga también

$$2T^{\delta_1}c(s)a < 1/2,$$

se sigue que Ψ es una contracción en $\mathcal{X}_T$. Esto y un argumento estandar usado en ecuaciones diferenciales ordinarias demuestran el presente teorema. □

En el siguiente teorema haremos uso del efecto regularizante que tiene la no linealidad cuando la potencia es grande.

Teorema 3.2.2. *Sean $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$, $p \geqslant \frac{16}{5}$ fijos y δ positivo y muy pequeño. Sea $s_p = \max\{1 - \frac{7-2\gamma-12\delta}{5(p-1)}, 1 - \frac{6(1-2\delta)}{5(p-2)}, 1 - \frac{\gamma}{2}\}$. Entones para $\alpha = 2$, $s > s_p$, existe $T = T(\|\varphi\|_s) > 0$ y un subespacio $\mathcal{Y}_T \subset C([0,T]; H^s_{xy})$ tal que el problema de Cauchy 1-10 tiene una única solución en $\mathcal{Y}_T$ que depende continuamente del dato inicial.*

Demostración. Sean s tal que $s_p < s < 1$, $T \in [0,1]$, $p \geqslant \frac{16}{5}$ fijo, $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ y $0 < \delta \ll 1$. Consideremos la función norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\begin{aligned}\|u\| = \|u\|_{L^\infty_T H^s_{xy}} + \|u\|_{L^4_x L^\infty_{yT}} + \|u\|_{L_T^{12(p-1)/(7-2\gamma-12\delta)} L^\infty_{xy}} + \|u\|_{L_T^{2(p-2)/(1-2\delta)} L^\infty_{xy}} + \\ + \|\partial_x u\|_{L_T^{12/(5+2\gamma)} L^\infty_{xy}} + \|\partial_x D^s_x u\|_{L^\infty_x L^2_{yT}} + \|\partial_x D^s_y u\|_{L^\infty_x L^2_{yT}}\end{aligned}$$

Sea

$$\mathcal{Y}_T = \{u \in C([0,T], H^s_{xy}(\mathbb{R}^2)); \quad \|u\| < \infty\} \tag{3-17}$$

Veamos que la aplicación Ψ definida por

$$\Psi(u)(t) = W(t)u_0 + \int_0^T W(t-t')u^p u_x \, dt'$$

es una contracción en la bola cerrada de $\mathcal{Y}_T$

$$\mathcal{X}^a_T = \{u \in \mathcal{Y}_T; \quad \|u\| \leqslant a\}$$

para a y T convenientes que establecemos más adelante en el curso de la demostración. Para ello, como en la demostración del teorema anterior examinaremos las estimaciones de Ψ al aplicarle cada norma que aparece en la definición de $\|\cdot\|$ en la presente demostración. Veamos primero la norma en H^s. En este caso, haciendo uso de la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)(t)\|_{L^2_{xy}} &\leqslant c\|u_0\|_{L^2_{xy}} + c\int_0^T \|u^p u_x\|_{L^2_{xy}}\, dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{L^2_{xy}} + c\int_0^T \|u\|^{p-1}_{L^\infty_{xy}}\|u_x\|_{L^\infty_{xy}}\|u\|_{L^2_{xy}}\, dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{L^2_{xy}} + c\|u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}}\int_0^T \|u\|^{p-1}_{L^\infty_{xy}}\|u_x\|_{L^\infty_{xy}}\, dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{L^2_{xy}} + cT^\delta\|u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}}\|u\|^{p-1}_{L_T^{12(p-1)/(7-2\gamma-12\delta)}L^\infty_{xy}}\|u_x\|_{L_T^{12/(5+2\gamma)}L^\infty_{xy}}
\end{aligned} \tag{3-18}$$

Ahora bien, combinando el uso de la regla de Leibniz y la regla de la cadena para la derivada fraccionaria junto a la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
\|D^s_x\Psi(u)(t)\|_{L^2_{xy}} &\leqslant c\|D^s_x u_0\|_{L^2_{xy}} + c\int_0^T \|D^s_x\left(u^p u_x\right)\|\, dt' \\
&\leqslant c\|D^s_x u_0\|_{L^2_{xy}} + c\int_0^T \|u_x\|_{L^\infty_{xy}}\|D^s_x(u^p)\|_{L^2_{xy}} + \|u^p D^s_x\left(u_x\right)\|_{L^2_{xy}}\, dt' \\
&\leqslant c\|D^s_x u_0\|_{L^2_{xy}} + c\int_0^T \|u_x\|_{L^\infty_{xy}}\|D^s_x(u^p)\|_{L^2_{xy}} + \|u\|^{p-2}_{L^\infty_{xy}}\|u^2 D^s_x\left(u_x\right)\|_{L^2_{xy}}\, dt' \\
&\leqslant c\|D^s_x u_0\|_{L^2_{xy}} + cT^\delta\|D^s_x u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}}\|u\|^{p-1}_{L_T^{12(p-1)/(7-2\gamma-12\delta)}L^\infty_{xy}}\|u_x\|_{L_T^{12/(5+2\gamma)}L^\infty_{xy}} + \\
&\quad + cT^\delta\|u\|^{p-2}_{L_T^{2(p-2)/(1-2\delta)}L^\infty_{xy}}\|u^2 D^s_x\left(u_x\right)\|_{L^2_{xyT}} \\
&\leqslant c\|D^s_x u_0\|_{L^2_{xy}} + cT^\delta\|D^s_x u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}}\|u\|^{p-1}_{L_T^{12(p-1)/(7-2\gamma-12\delta)}L^\infty_{xy}}\|u_x\|_{L_T^{12/(5+2\gamma)}L^\infty_{xy}} + \\
&\quad + cT^\delta\|u\|^{p-2}_{L_T^{2(p-2)/(1-2\delta)}L^\infty_{xy}}\|u\|^2_{L^4_x L^\infty_{yT}}\|\partial_x D^s_x(u)\|_{L^\infty_x L^2_{yT}}
\end{aligned} \tag{3-19}$$

De la misma manera, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|D^s_y\Psi(u)(t)\|_{L^2_{xy}} &\leqslant c\|D^s_y u_0\|_{L^2_{xy}} + cT^\delta\|D^s_y u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}}\|u\|^{p-1}_{L_T^{12(p-1)/(7-2\gamma-12\delta)}L^\infty_{xy}}\|u_x\|_{L_T^{12/(5+2\gamma)}L^\infty_{xy}} + \\
&\quad + cT^\delta\|u\|^{k-2}_{L_T^{2(p-2)/(1-2\delta)}L^\infty_{xy}}\|u\|^2_{L^4_x L^\infty_{yT}}\|\partial_x D^s_y(u)\|_{L^\infty_x L^2_{yT}}
\end{aligned}$$

(3-20)

Examinemos ahora las estimativas correspondientes a las otras normas que aparecen en la definición $\|\!|\cdot|\!\|$. Así pues, teniendo en cuenta el corolario 2.3.7, con $\frac{12}{5(1-\theta)} = \frac{12(p-1)}{7-2\gamma-12\delta}$, es decir $\theta = 1 - \frac{7-2\gamma-12\delta}{5(p-1)}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)(t)\|_{L_T^{12(p-1)/(7-2\gamma-12\delta)}L_{xy}^{\infty}} &\leqslant \|W(t)u_0\|_{L_T^{12(p-1)/(7-2\gamma-12\delta)}L_{xy}^{\infty}} + \\
&\quad + \left\| \int_0^t W(t-t')(u^p u_x)\,dt' \right\|_{L_T^{12(p-1)/(7-2\gamma-12\delta)}L_{xy}^{\infty}} \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H_{xy}^s} + \int_0^T \left\|\chi_{[0,T]}(t')W(t-t')(u^p u_x)\right\|_{L_T^{12(p-1)/(7-2\gamma-12\delta)}L_{xy}^{\infty}} dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H_{xy}^s} + c\int_0^T \|u^p u_x\|_{H_{xy}^s}\,dt'
\end{aligned} \tag{3-21}$$

donde $\chi_{[0,T]}$ es la función característica del intervalo $[0,T]$. De la misma manera, de nuevo haciendo uso del corolario 2.3.7, con $\frac{12}{5(1-\theta)} = \frac{2(p-2)}{1-2\delta}$, osea $\theta = 1 - \frac{6(1-2\delta)}{5(p-2)}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)(t)\|_{L_T^{2(p-2)/(1-2\delta)}L_{xy}^{\infty}} &\leqslant \|W(t)u_0\|_{L_T^{2(p-2)/(1-2\delta)}L_{xy}^{\infty}} + \\
&\quad + \left\| \int_0^t W(t-t')(u^p u_x)\,dt' \right\|_{L_T^{2(p-2)/(1-2\delta)}L_{xy}^{\infty}} \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H_{xy}^s} + \int_0^T \left\|\chi_{[0,T]}(t')W(t-t')(u^p u_x)\right\|_{L_T^{2(p-2)/(1-2\delta)}L_{xy}^{\infty}} dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H_{xy}^s} + c\int_0^T \|u^p u_x\|_{H_{xy}^s}\,dt'
\end{aligned} \tag{3-22}$$

Haciendo uso del efecto suavizante de tipo Strichartz,

$$\begin{aligned}
\|\partial_x \Psi(u)(t)\|_{L_T^{12/(5+2\gamma)} L_{xy}^{\infty}} &\leqslant c\|W(t)u_0\|_{L_T^{12/(5+2\gamma)} L_{xy}^{\infty}} + \left\| c\int_0^t W(t-t')(u^p u_x)\, dt' \right\|_{L_T^{12/(5+2\gamma)} L_{xy}^{\infty}} \\
&\leqslant c\|D_x^{1-\delta} u_0\|_{L^2} + c\int_0^T \left\|\chi_{[0,T]}(t')W(t-t')(u^p u_x)\right\|_{L_T^{12/(5+2\gamma)} L_{xy}^{\infty}} dt' \\
&\leqslant c\|D_x^{1-\delta} u_0\|_{L^2} + c\int_0^T \left\|D_x^{1-\delta}(u^p u_x)\right\|_{L^2} dt' \\
&\leqslant c\|u_0\|_{H_{xy}^s} + c\int_0^T \|u^p u_x\|_{H_{xy}^s}\, dt'
\end{aligned} \tag{3-23}$$

Ahora, combinando la estimativa maximal, obtenemos

$$\|\Psi(u)(t)\|_{L_x^4 L_{yT}^{\infty}} \leqslant \|u_0\|_{H_{xy}^s} + c\int_0^T \|u^p u_x\|_{H_{xy}^s}\, dt' \tag{3-24}$$

Finalmente, el efecto regularizante de tipo Kato de grupo,

$$\|\partial_x D_x^{s_p} \Psi(u)(t)\|_{L_x^{\infty} L_{yT}^2} \leqslant \|D_x^s u_0\|_{L_{xy}^2} + c\int_0^T \|D_x^s(u^p u_x)\|_{L_{xy}^2}\, dt' \tag{3-25}$$

y

$$\|\partial_x D_y^s \Psi(u)(t)\|_{L_x^{\infty} L_{yT}^2} \leqslant \|D_y^s u_0\|_{L_{xy}^2} + c\int_0^T \|D_y^s(u^p u_x)\|_{L_{xy}^2}\, dt' \tag{3-26}$$

Teniendo dn cuenta que el término $\|u_0\|_{H_{xy}^s} + c\int_0^T \|u^p u_x\|_{H_{xy}^s}\, dt'$ ya se ha estimado en las desigualdades

De las lineas anteriores, podemos obtener 3-18, 3-19 y 3-20. Se tiene, de las desigualdades 3-18, 3-19, 3-20, 3-21, 3-22, 3-23, 3-24, 3-25 y 3-26, que

$$\|\Psi\| \leqslant c\|u_0\|_{H_{xy}^s} + cT^{\delta}\|u\|^{p+1} \tag{3-27}$$

El resto de la demostración sigue los mismos razonamientos de la demostración anterior.

□

4 Buen planteamiento en espacios de Sobolev con peso

4.1. Problema lineal

Examinemos el siguiente problema lineal

$$u_t + D_x^\alpha \partial_x u + \mathscr{H}\partial_y^2 u = 0,$$
$$u(0) = \varphi.$$

Usando la transformada de Fourier podemos ver que la solución viene dada por

$$u(t) = W(t)\varphi = e^{t(D_x^\alpha \partial_x + \mathscr{H}\partial_y^2)}\varphi = \left(e^{-it(|\xi|^\alpha \xi + \operatorname{sgn}(\xi)\eta^2)}\widehat{\varphi}\right)^\vee. \tag{4-1}$$

Veamos las propiedades de esta solución en los espacios de Sobolev con peso.

Lema 4.1.1.

$$\mathcal{D}_\xi^b\left(e^{-it(|\xi|^\alpha \xi)}\right) \leqslant c\left(t^{\frac{b}{\alpha+1}} + t^b|\xi|^{\alpha b}\right),$$

para cada $b \in \mathbb{R}$.

Demostración. De la definición de la derivada de Stein (Definición 2.0.20), tenemos

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{D}_\xi^b\big(e^{-it(|\xi|^\alpha \xi)}\big)\big)^2 &= \int_{|z|\leqslant|\xi|} \frac{\left|e^{-it(|\xi|^\alpha \xi)} - e^{-it(|\xi+z|^\alpha(\xi+z))}\right|^2}{|z|^{1+2b}}\,dz \\
&= t^{\frac{2b}{\alpha+1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|e^{-i(|t^{\frac{1}{\alpha+1}}\xi|^\alpha t^{\frac{1}{\alpha+1}}\xi} - e^{-it(|t^{\frac{1}{\alpha+1}}\xi+z|^\alpha(t^{\frac{1}{\alpha+1}}\xi+z)}\right|^2}{|z|^{1+2b}}\,dz \\
&= t^{\frac{2b}{\alpha+1}} I(t^{\frac{1}{\alpha+1}}\xi),
\end{aligned}$$

donde

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|e^{-i|y|^\alpha y} - e^{-i|y+z|^\alpha(y+z)}\right|^2}{|z|^{1+2b}}\,dz.$$

El lema se sigue una vez hayamos probado que

$$I(y) \leqslant C(1 + |y|^{2\alpha b}). \tag{4-2}$$

Sean

$$E_1 = \{z \in \mathbb{R} \mid |z| \geqslant |y|^{-\alpha}\}, \qquad E_2 = \{z \in \mathbb{R} \mid |z| \leqslant |y|^{-\alpha},\ |z| \leqslant |y|\} \quad \text{y}$$
$$E_3 = \{z \in \mathbb{R} \mid |y| \leqslant |z| \leqslant |y|^{-\alpha}\}.$$

Para E_1 tenemos

$$\int_{E_1} \frac{\left|e^{-i|y|^\alpha y} - e^{-i|y+z|^\alpha (y+z)}\right|^2}{|z|^{1+2b}}\, dz \leqslant 8 \int_{|y|^{-\alpha}}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+2b}} \leqslant \frac{4}{b}|y|^{2\alpha b}. \tag{4-3}$$

En E_2 se sigue

$$\begin{aligned} \int_{E_2} \frac{\left|e^{-i|y|^\alpha y} - e^{-i|y+z|^\alpha (y+z)}\right|^2}{|z|^{1+2b}}\, dz &\leqslant 2^{2\alpha}|y|^{2\alpha} \int_0^{|y|^{-\alpha}} z^{1-2b}\, dz \\ &\leqslant \frac{2^{2\alpha-1}}{1-b}|y|^{2\alpha b}. \end{aligned} \tag{4-4}$$

Observe que de (4-3) y (4-4) se sigue (4-2), cuando $|y| \geqslant 1$. Para $|y| < 1$, se necesita la siguiente estimativa en E_3

$$\begin{aligned} \int_{E_3} \frac{\left|e^{-i|y|^\alpha y} - e^{-i|y+z|^\alpha (y+z)}\right|^2}{|z|^{1+2b}}\, dz &\leqslant 2 \int_{|y|}^{1} z^{1-2b}\, dz + 4 \int_1^{|y|^{-\alpha}} \frac{dz}{z^{1+2b}} \\ &\leqslant C. \end{aligned} \tag{4-5}$$

□

Calculemos ahora las derivadas enteras de $e^{-it(|\xi|^\alpha \xi + \operatorname{sgn}(\xi)\eta^2)}\widehat{\varphi}$. Para abreviar la notación hagamos $V = V(\xi,\eta,t) = e^{-it(|\xi|^\alpha \xi + \operatorname{sgn}(\xi)\eta^2)}$. Veamos

$$\begin{aligned} \partial_\xi^m \{V\widehat{\varphi}\} &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (\partial_\xi^j V) \partial_\xi^{m-j} \widehat{\varphi} \\ &= \left\{ \partial_\xi^m \widehat{\varphi} + \sum_{j=1}^{m} Q_j \partial_\xi^{m-j}\widehat{\varphi} \right\} V + \sum_{j=1}^{m} -2i \sin(t\eta^2) \partial_\xi^{j-1} \widehat{\varphi}(0,\eta) \delta_\xi^{(m-j)} \end{aligned} \tag{4-6}$$

donde

$$Q_j = \sum_{k=0}^{j-1} c_{k,j,\alpha} (-it)^{j-k} |\xi|^{\alpha(j-k)-k} \operatorname{sgn}(\xi)^k$$

y $\delta_\xi^{(k)}$ es la k ésima derivada de la delta medida solo en la variable ξ

Lema 4.1.2. *Sean s_1 y $r \in [0,\infty)$, tales que $s_1 \geqslant \alpha r$. Entonces,*

1. *Para $r < \frac{1}{2}$, si $\varphi \in \mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}$, entonces $W(t)\varphi \in \mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}$.*

2. *Para $r \geqslant \frac{1}{2}$, $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}$ y $t \neq 0$, $W(t)\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}$ si sólo si $\partial^j_\xi \widehat{\phi}(0,\eta) = 0$, para casi todo η y $j = 0, 1, 2, \cdots, [r + \frac{1}{2}] - 1$ ($[\,\cdot\,]$ es la función parte entera).*

Además, para la condición sobre φ impuesta en 1. o en 2., se tiene que

$$\|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}} \leqslant P_r(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}}, \tag{4-7}$$

donde $P_r(t)$ es una función continua en t.

Demostración. Sean s_1 y r como en las hipótesis. Supongamos primero que $r < \frac{1}{2}$. Obsérvemos que

$$W(t) = e^{tD^\alpha_x \partial_x} \cos(t\partial^2 y) + \mathscr{H} e^{tD^\alpha_x \partial_x} \operatorname{sen}(t\partial^2 y).$$

Del Teorema 2.0.24 se sigue que

$$\|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}} \leqslant C(\|e^{tD^\alpha_x \partial_x}\varphi\|_{s_1,0} + \|x^r e^{tD^\alpha_x \partial_x}\varphi\|_{L^2}).$$

Del Lema 4.1.1 y el teorema de Plancherel, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x^r e^{tD^\alpha_x \partial_x}\varphi\|_{L^2} &\leqslant C(\|\varphi\|_{L^2} + \|\mathcal{D}^r_\xi(e^{t|\xi|^\alpha \xi}\widehat{\varphi})\|_{L^2}) \\
&\leqslant C(\|\varphi\|_{L^2} + \|\mathcal{D}^r_\xi(e^{t|\xi|^\alpha \xi})\widehat{\varphi}\|_{L^2} + \|e^{t|\xi|^\alpha \xi}\mathcal{D}^r_\xi\widehat{\varphi}\|_{L^2}) \\
&\leqslant C((1 + t^{\frac{b}{\alpha+1}})\|\widehat{\varphi}\|_{L^2} + t^b\||\xi|^{\alpha r}\widehat{\varphi}\|_{L^2} + \|\mathcal{D}^r_\xi\widehat{\varphi}\|_{L^2}) \\
&\leqslant P_r(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}}
\end{aligned}$$

Luego, se sigue 1.

Sea $1/2 \leqslant r < 1$. Supongamos que $t \neq 0$ y que φ y $W(t)\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}$. Entonces, $\mathscr{H} e^{tD^\alpha_x \partial_x} \operatorname{sen}(t\partial^2 y)\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}$. Luego, del Lema 2.0.27, se sigue que $\operatorname{sen}(t\eta^2)\widehat{\varphi}(0,\eta) = 0$, para casi todo η. Luego, $\widehat{\varphi}(0,\eta) = 0$, para casi todo η. Ahora supongamos que $\widehat{\varphi}(0,\eta) = 0$, para casi todo η. Entonces, del Lema 2.0.25, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}} &\leqslant C(\|e^{tD^\alpha_x \partial_x}\varphi\|_{s_1,0} + \|x^r \mathscr{H} e^{tD^\alpha_x \partial_x}\varphi\|_{L^2}) \\
&\leqslant C(\|e^{tD^\alpha_x \partial_x}\varphi\|_{s_1,0} + \|(1 + x^r)e^{tD^\alpha_x \partial_x}\varphi\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

De aquí en adelante procedemos como antes.

Supongamos que para n entero, si $r < n$, vale la afirmación del lema. Si $r = n$, por la hipótesis de inducción se tiene que si $W(t)\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}$, $\partial^j_\xi \widehat{\phi}(0,\eta) = 0$, para casi todo η y $j = 0, 1, 2, \cdots, [r + \frac{1}{2}] - 1$, ya que $W(t)\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,0}_{r-,0}$. Ahora bien, supongamos que φ es tal que

$\partial_\xi^j \widehat{\phi}(0,\eta)=0$, para casi todo η y $j=0,1,2,\cdots,[r+\frac{1}{2}]-1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}} =& \|W(t)\varphi\|_{s_1,0}+\|x^r W(t)\varphi\|_{L^2}\\
\leqslant& \|\varphi\|^2_{s_1,0}+\|\partial_\xi^r(V(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi})\|\\
\leqslant& \|\varphi\|^2_{s_1,0}+\left\|\partial_\xi^r\widehat{\varphi}+\sum_{j=1}^{r}Q_j\partial_\xi^{r-j}\widehat{\varphi}\right\|_{L^2}\\
\leqslant& \|\varphi\|_{s_1,0}+\|x^r\varphi\|_{L^2}+\\
&+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{j-1}c_{k,j,\alpha}t^k\||\xi|^{(j-k)\alpha-k}\partial_\xi^{r-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Si $(j-k)\alpha-k\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\||\xi|^{(j-k)\alpha-k}\partial_\xi^{r-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2} &\leqslant \|(1+\xi^2)^{\alpha j/2}(1+\partial_\xi^2)^{(r-j)/2}\widehat{\varphi}\|_{L^2}\\
&\leqslant \|(1+\xi^2)^{\alpha r/2}\widehat{\varphi}\|^{j/r}_{L^2}\|(1+\partial_\xi^2)^{r/2}\widehat{\varphi}\|^{(r-j)/r}_{L^2}\\
&\leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}}.
\end{aligned}$$

Ahora supogamos que $(j-k)\alpha-k<0$. Entonces, como $(j-k)\alpha-1\geqslant 0$,

$$\||\xi|^{(j-k)\alpha-k}\partial_\xi^{r-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2}=\left\||\xi|^{(j-k)\alpha-1}\frac{\partial_\xi^{r-j}\widehat{\varphi}}{\xi^{k-1}}\right\|_{L^2}$$

$$\begin{aligned}
\leqslant& \left\|\frac{\partial_\xi^{r-j}\widehat{\varphi}}{\xi^{k-1}}\right\|_{L^2}+\||\xi|^{(j-k)\alpha-1}\partial_\xi^{r-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2}\\
\leqslant& \|\partial_\xi^{r-j+k-1}\widehat{\varphi}\|_{L^2}+C\|(1+\xi^2)^{\alpha j/2}(1+\partial_\xi^2)^{(r-j)/2}\widehat{\varphi}\|_{L^2}\\
\leqslant& \|\partial_\xi^{r-j+k-1}\widehat{\varphi}\|_{L^2}+\\
&+C\|(1+\xi^2)^{\alpha r/2}\widehat{\varphi}\|^{j/r}_{L^2}\|(1+\partial_\xi^2)^{r/2}\widehat{\varphi}\|^{(r-j)/r}_{L^2}\\
\leqslant& \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}},
\end{aligned}$$

Esto demuestra el lema para $r=n$.
Ahora supongamos que $r=n+b$. Veamos primero que $W(t)x^n\varphi\in\mathcal{F}^{s_1b/r,0}_{b,0}$. En efecto, de la ecuación (4-6),

$$W(t)x^n\varphi=x^nW(t)\varphi-W(t)\left(\sum_{j=1}^{n}Q_j\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\right)^{\vee}.$$

Probemos que cada término de la suma en la parte derecha de la ecuación anterior están en $\mathcal{F}^{s_1b/r,0}_{b,0}$. Para el primer término que aparece tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(1+\partial_x^2)^{s_1b/2r}x^nW(t)\varphi\|_{L^2} &\leqslant \|(1+\partial_x^2)^{s_1/2}W(t)\varphi\|^{b/r}_{L^2}\|(1+x^2)^r x^nW(t)\varphi\|^{n/r}_{L^2}\\
&\leqslant \|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}}
\end{aligned}$$

y

$$\|x^b x^n W(t)\varphi\|_{L^2} \leqslant \|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}}.$$

Luego, $x^n W(t)\varphi \in \mathcal{F}^{s_1 b/r,0}_{b,0}$. Como cada término $(Q_j \partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi})^\vee$ es una combinación lineal de expresiones de la forma $(|\xi|^{(j-k)\alpha-k}\operatorname{sgn}(\xi)^k \partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi})^\vee$ es suficiente mostrar que cada uno de éstos está en $\mathcal{F}^{s_1 b/r,0}_{b,0}$ y se anula en 0. Veamos. Primero, si $(j-k)\alpha - k \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
&\|(1-\partial_x^2)^{s_1 b/r}(|\xi|^{(j-k)\alpha-k}\operatorname{sgn}(\xi)^k \partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi})^\vee\|_{L^2} = \\
&\qquad =\|(1+\xi^2)^{s_1 b/2r}|\xi|^{(j-k)\alpha-k}\operatorname{sgn}(\xi)^k \partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\
&\qquad \leqslant\|(1+\xi^2)^{s_1 b/2r+\alpha j/2}(1-\partial_\xi^2)^{(n-j)/2}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\
&\qquad \leqslant\|(1+\xi^2)^{s_1 (b+j)/2r}(1-\partial_\xi^2)^{(n-j)/2}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\
&\qquad \leqslant\|(1+\xi^2)^{s_1/2}\|_{L^2}^{(b+j)/r}\|(1-\partial_\xi^2)^{r/2}\widehat{\varphi}\|_{L^2}^{(n-j)/r} \\
&\qquad \leqslant\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}},
\end{aligned}$$

si $(j-k)\alpha - k < 0$,

$$\begin{aligned}
&\|(1-\partial_x^2)^{s_1 b/r}(|\xi|^{(j-k)\alpha-k}\operatorname{sgn}(\xi)^k \partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi})^\vee\|_{L^2} = \\
&\qquad =\|(1-\xi^2)^{s_1 b/r}|\xi|^{(j-k)\alpha-1}\operatorname{sgn}(\xi)^k \frac{\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}}{\xi^{k-1}}\|_{L^2} \\
&\qquad \leqslant C\|\frac{\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}}{\xi^{k-1}}\|_{L^2} + \|(1-\xi^2)^{s_1 b/r}|\xi|^{(j-k)\alpha-1}\operatorname{sgn}(\xi)^k \partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\
&\qquad \leqslant C\|\partial_\xi^{n-j+k-1}\widehat{\varphi}\|_{L^2} + \|(1+\xi^2)^{s_1 b/2r+\alpha j/2}(1-\partial_\xi^2)^{(n-j)/2}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\
&\qquad \leqslant C\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}}.
\end{aligned}$$

Segundo, ya que $\partial_\xi^{n-l}\widehat{\varphi}(0) = 0$, para $2 \leqslant l \leqslant n$, si $(j-k)\alpha - k \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
&\|(1-x^2)^b(|\xi|^{(j-k)\alpha-k}\operatorname{sgn}(\xi)^k \partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi})^\vee\|_{L^2} = \\
&\qquad =\|(1-\partial_\xi^2)^{b/2}|\xi|^{(j-k)\alpha-k}\operatorname{sgn}(\xi)^k \partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\
&\qquad \leqslant\|(1-\partial_\xi^2)^{b/2}(1+\xi^2)^{\alpha j/2}\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\
&\qquad \leqslant\|(1-\partial_\xi^2)^{(b+j)/2}\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2}^{b/(b+j)}\|(1+\xi^2)^{(\alpha(j+b))/2}\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2}^{j/(b+j)} \\
&\qquad \leqslant\|(1+\partial_\xi^2)^{r/2}\widehat{\varphi}\|_{L^2}^{(rb+j(n-j))/(r(b+j))}\|(1+\xi^2)^{\alpha r/2}\widehat{\varphi}\|_{L^2}^{j/r} \\
&\qquad \leqslant\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,0}_{r,0}},
\end{aligned}$$

y si $(j-k)\alpha - k < 0$,

$$
\begin{aligned}
&\|(1-x^2)^b(|\xi|^{(j-k)\alpha-k}\operatorname{sgn}(\xi)^k\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi})^\vee\|_{L^2} = \\
&\qquad = \left\|(1-\partial_\xi^2)^{b/2}|\xi|^{(j-k)\alpha-1}\operatorname{sgn}(\xi)^k\frac{\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}}{\xi^{k-1}}\right\|_{L^2} \\
&\qquad \leqslant \left\|(1-\partial_\xi^2)^{b/2}(1+\xi^2)^{\alpha(j-k)/2}\frac{\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}}{\xi^{k-1}}\right\|_{L^2} \\
&\qquad \leqslant \left\|(1-\partial_\xi^2)^{(b+j-k)/2}\frac{\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}}{\xi^{k-1}}\right\|_{L^2}^{b/(b+j-k)} \times \\
&\qquad\quad \times \left\|(1+\xi^2)^{(\alpha(j-k+b))/2}\frac{\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}}{\xi^{k-1}}\right\|_{L^2}^{(j-k)/(b+j-k)} \\
&\qquad \leqslant C\left\|(1-\partial_\xi^2)^{(b+j-k)/2}\partial_\xi^{n-j+k-1}\widehat{\varphi}\right\|_{L^2}^{b/(b+j-k)} \times \\
&\qquad\quad \times \|(1+\xi^2)^{(\alpha(j-k+b))/2}\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2}^{(j-k)/(b+j-k)} \\
&\qquad \leqslant \|(1-\partial_\xi^2)^{(r-1)/2}\widehat{\varphi}\|_{L^2}^{b/(b+j-k)} \times \\
&\qquad\quad \times \|(1+\xi^2)^{(\alpha(j-k+b))/2}\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2}^{(j-k)/(b+j-k)} \\
&\qquad \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}}.
\end{aligned}
$$

Así pues, $\left(\sum_{j=1}^n Q_j\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\right)^\vee \in \mathcal{F}_{b,0}^{s_1 b/r,0}$ y se anula en 0. De la hipótesis de inducción, $W(t)\left(\sum_{j=1}^n Q_j\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi}\right)^\vee \in \mathcal{F}_{b,0}^{s_1 b/r,0}$. Por lo tanto, $W(t)x^n\varphi \in \mathcal{F}_{b,0}^{s_1 b/r,0}$. Esto muestra además que $\partial_\xi^n\varphi(0) = 0$ si $b \geqslant 1/2$, o equivalentemente $r \geqslant n + 1/2$.
Ahora supongamos que $\varphi \in \mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}$ y que $\widehat{\varphi}^j(0) = 0$, para $j = 0, \cdots, [r+\frac{1}{2}]-1$. Ya que

$$\|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}} \leqslant \|W(t)\varphi\|_{s_1,0} + \|x^r W(t)\varphi\|_{L^2}$$

es suficientemente mostrar que

$$\|x^r W(t)\varphi\|_{L^2} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}}.$$

De la ecuación (4-6)

$$\|x^r W(t)\varphi\|_{L^2} \leqslant \|x^b W(t)x^n\varphi\|_{L^2} + \|x^b W(t)(\sum_{j=1}^n Q_j\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi})^\vee\|_{L^2}.$$

Por lo hecho en el paragrafo anterior, sabemos que $W(t)(\sum_{j=1}^n Q_j\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi})^\vee \in \mathcal{F}_{b,0}^{s_1 b/r,0}$ y

$$\|W(t)(\sum_{j=1}^n Q_j\partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi})^\vee\|_{\mathcal{F}_{b,0}^{s_1 b/r,0}} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}}.$$

En particular,

$$\|x^b W(t)(\sum_{j=1}^{n} Q_j \partial_\xi^{n-j}\widehat{\varphi})^\vee\|_{L^2} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}}.$$

Ahora bien como $x^n\varphi \in \mathcal{F}_{b,0}^{s_1 b/r,0}$ y $\partial_\xi^n\varphi(0) = 0$ cuando $b \geqslant 1/2$, se tiene que

$$\|W(t)x^n\widehat{\varphi}\|_{\mathcal{F}_{b,0}^{s_1 b/r,0}} \leqslant \|x^n\varphi\|_{\mathcal{F}_{b,0}^{s_1 b/r,0}} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}}.$$

En particular,

$$\|x^b W(t)x^n\widehat{\varphi}\|_{L^2} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}}.$$

Por lo tanto,

$$\|x^r W(t)\varphi\|_{L^2} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,0}}.$$

Esto demuestra el lema. □

Veamos como son las derivadas con repecto η de $e^{-it(|\xi|^\alpha\xi+\mathrm{sgn}(\xi)\eta^2)}\widehat{\varphi} = V\widehat{\varphi}$.

$$\begin{aligned}\partial_\eta^m\{V\widehat{\varphi}\} &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\{\partial_\eta^j V\}\partial_\eta^{m-j}\widehat{\varphi} \\ &= \left\{\partial_\eta^m\widehat{\varphi} + \sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\widetilde{Q}_j\partial_\eta^{m-j}\widehat{\varphi}\right\}V\end{aligned} \tag{4-8}$$

donde

$$\widetilde{Q}_j = \sum_{k=0}^{\lfloor j/2\rfloor}(2it\,\mathrm{sgn}(\xi))^{j-2k}c_{k,j}\eta^{j-2k}$$

y los $c_{k,j}$ son constantes reales.

Lema 4.1.3. *Sean s_2 y $r \in [0, \infty)$, tales que $s_2 \geqslant r$. Entonces*

$$\|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}} \leqslant P_r(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}} \tag{4-9}$$

donde $P_r(t)$ es una función continua en t.

Demostración. Para r entero, gracias a la ecuación (4-8),

$$\begin{aligned}\|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}} &= \|W(t)\varphi\|_{0,s_2} + \|y^r W(t)\varphi\|_{L^2} \\ &= \|\varphi\|_{0,s_2} + \|\partial_\eta^r\widehat{\varphi} + \sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}\widetilde{Q}_j\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\ &\leqslant \|\varphi\|_{0,s_2} + \|y^r\varphi\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}\|\widetilde{Q}_j\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\ &\leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}} + \sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}\sum_{k=0}^{\lfloor j/2\rfloor}|c_{k,j}|t^{j-2k}\|\eta^{j-2k}\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2}\end{aligned}$$

Ahora bien, para $2k \leqslant j$,

$$\begin{aligned}\|\eta^{j-2k}\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2} &\leqslant \|\langle\eta\rangle^{j-2k}J_\eta^{r-j}\widehat{\varphi}\|_{L^2}\\ &\leqslant \|\langle\eta\rangle^{r}\widehat{\varphi}\|_{L^2}^{j/r}\|J_\eta^{r}\widehat{\varphi}\|_{L^2}^{(r-j)/r}\\ &\leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}}.\end{aligned}$$

Esto demuestra el lema para r entero.
Supongamos que $0 < r < 1$. Como

$$\|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}} = \|W(t)\varphi\|_{0,s_2} + \||y|^r W(t)\varphi\|_{L^2}, \tag{4-10}$$

basta demostrar que

$$\||y|^r W(t)\varphi\|_{L^2} \leqslant \|W(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}}. \tag{4-11}$$

Ahora bien, del Lema 4.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned}\||y|^r W(t)\varphi\|_{L^2} =&\|D_\eta^r(\widehat{\varphi}e^{-ti\,\mathrm{sgn}(\xi)\eta^2})\|_{L^2}\\ \leqslant& c\|(t^{r/2}+t^r|\eta|^r)\widehat{\varphi}\|_{L^2}\\ \leqslant&(t^{r/2}+t^r)\|(1+D_y^r)\varphi\|_{L^2}\\ \leqslant&P_r(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}}.\end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que $r = n + b$, n entero positivo y b real entre 0 y 1. Como antes, ya que se tiene (4-10), debemos mostrar (4-11). Gracias a (4-8) se tiene que

$$|y|^r W(t)\varphi = |y|^b(\mathrm{sgn}(y))^n W(t)y^n\varphi + |y|^b(\mathrm{sgn}(y))^n W(t)(\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}\widetilde{Q}_j\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi})^\vee.$$

Obsérvese que si mostramos que $y^n\varphi$ y $(\sum\limits_{j=1}^{r}\binom{r}{j}\widetilde{Q}_j\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi})^\vee \in \mathcal{F}_{0,b}^{0,s_2b/r}$ y

$$\|y^n\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,b}^{0,s_2b/r}} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}} \quad \text{y} \quad \|(\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}\widetilde{Q}_j\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi})^\vee\|_{\mathcal{F}_{0,b}^{0,s_2b/r}} \leqslant C(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}},$$

donde $C(t)$ es un polinomio de t, queda demostrado el lema. Pues bien: primero

$$\|J^{s_1b/r}y^n\varphi\|_{L^2} \leqslant \|J_y^{s_1b/r}\langle y\rangle^n\varphi\|_{L^2} \leqslant \|J_y^{s_1}\varphi\|_{L^2}^{b/r}\|\langle y\rangle^r\varphi\|_{L^2}^{n/r} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}}$$

y

$$\|\langle y\rangle^b y^n\varphi\|_{L^2} \leqslant \|\langle y\rangle^r\varphi\|_{L^2} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}}.$$

Segundo, $(\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}\widetilde{Q}_j\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi})^\vee$ es una combinación lineal de téminos de la forma $t^{n-2k}\mathscr{H}^{n-2k}\partial_y^{n-2k}y^{n-j}\varphi$. La afirmación es válida para cada uno de estos términos. En efecto,

$$\begin{aligned}\|J_y^{s_1 b/r}\mathscr{H}^{j-2k}\partial_y^{n-2k}y^{n-j}\varphi\|_{L^2} &\leqslant \|J_y^{s_1(b+j)/r}\langle y\rangle^{n-j}\varphi\|_{L^2}\\ &\leqslant \|J_y^{s_1}\varphi\|_{L^2}^{(b+j)/r}\|\langle y\rangle^r\varphi\|_{L^2}^{(n-j)/r}\\ &\leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}}.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|\langle y\rangle^b\mathscr{H}^{j-2k}\partial_y^{j-2k}y^{n-j}\varphi\|_{L^2} &\leqslant \|\langle y\rangle^b J_y^j\langle y\rangle^{n-j}\varphi\|_{L^2}\\ &\leqslant \|J_y^{b+j}\langle y\rangle^{n-j}\varphi\|_{L^2}^{b/(b+j)}\|\langle y\rangle^r\varphi\|_{L^2}^{j/(b+j)}\\ &\leqslant \|J_y^r\varphi\|_{L^2}^{b/r}\|\langle y\rangle^r\varphi\|_{L^2}^{n/r}\\ &\leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{0,s_2}}.\end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del lema. □

4.2. Problema no lineal

Examinemos ahora la persistencia de soluciones en espacios con peso. Una primera cosa que haremos es probar la existencia de soluciones con peso en el espacio $X^s(\mathbb{R}^2)$, para $s > 2$.

Teorema 4.2.1. *Suponga que $\varphi \in X^s$ es tal que $\langle x\rangle^\theta\varphi \in L^2$, para $0 < \theta \leqslant 1$. Sea $u \in C([0,T], X^s)$ una solución del problema de Cauchy* (1-10)*. Entonces, $u \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^2, \langle x\rangle^\theta\, dxdy)$.*

Demostración. Sea w_n una función tal que

$$w_N(x) = \begin{cases}\langle x\rangle & \text{si } x \leqslant N,\\ 2N & \text{si } x \geqslant 3N,\end{cases}$$

y $w' \leqslant 1$ en todo $\mathbb{R}$. Multiplicando por $w_N^\theta(x)$ en ambos lados de la ecuación en (1-10) y haciendo, asimismo, el producto interno en L^2 con $w_N^\theta(x)u$ obtenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N^\theta u\|_{L^2}^2 = \\ = \langle w_N^\theta u, w_N^\theta D_x^\alpha\partial_x u\rangle_{L^2} + \langle w_N^\theta u, w_N^\theta\mathscr{H}\partial_y^2 u\rangle_{L^2} + \langle w_N^\theta u, w_N^\theta u^p\partial_x u\rangle_{L^2}^2. \quad (4\text{-}12)$$

Examinemos cada uno de los términos que aparecen al lado derecho de esta última ecuación. Para el primer término, examinamos los siguientes tres casos en α a saber, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ y $1 < \alpha < 2$. Para $\alpha = 1$ tenemos

$$w_N^\theta D_x\partial_x u = [\mathscr{H}, w_N^\theta]\partial_x^2 u - \mathscr{H}(\partial_x^2 w_N^\theta u) - 2\mathscr{H}(\partial_x w_N^\theta\partial_x u) + D_x\partial_x(w_N^\theta u).$$

Luego, teniendo en cuenta que el operador $D_x\partial_x$ es antisimétrico,

$$\begin{aligned}|\langle w_N^\theta u, w_N^\theta D_x^\alpha \partial_x u\rangle_{L^2}| \leqslant & C(\|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2} + \|\partial_x^2 w_N^\theta\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2})\|w_N^\theta u\|_{L^2} \\ \leqslant & C(\|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2} + \|\partial_x^2 w_N^\theta\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2})^2 + \|w_N^\theta u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Para el caso $\alpha = 2$ tenemos

$$w_N^\theta \partial_x^3 u = -\partial_x^3 w_N^\theta u - 3\partial_x^2 w_N^\theta \partial_x u - 3\partial_x w_N^\theta \partial_x^2 u + \partial_x^3 (w_N^\theta u).$$

Así pues, teniendo en cuenta que el operador ∂_x^3 es antisimétrico,

$$\begin{aligned}|\langle w_N^\theta u, w_N^\theta D_x^\alpha \partial_x u\rangle_{L^2}| \leqslant & C(\|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}\|\partial_x^2 u\|_{L^2} + \|\partial_x^2 w_N^\theta\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2} + \\ & + \|\partial_x^3 w_N^\theta\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2})\|w_N^\theta u\|_{L^2} \\ \leqslant & C(\|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}\|\partial_x^2 u\|_{L^2} + \|\partial_x^2 w_N^\theta\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2} + \\ & + \|\partial_x^3 w_N^\theta\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2})^2 + \|w_N^\theta u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

El caso $1 < \alpha < 2$ es un poco más largo y delicado. Aquí seguimos lo hecho en [Fonseca et al., 2013]. En este caso tenemos,

$$\begin{aligned} w_N^\theta D_x^\alpha \partial_x u = & -[D_x^{\alpha-1}, w_N^\theta] D_x\partial_x u + D_x^{\alpha-1}(w_N^\theta D_x \partial_x u) \\ = & -[D_x^{\alpha-1}, w_N^\theta] D_x\partial_x u - D_x^{\alpha-1}(\partial_x w_N^\theta D_x u) + \\ & + D_x^{\alpha-1}\partial_x(w_N^\theta D_x u) \\ = & -[D_x^{\alpha-1}, w_N^\theta] D_x\partial_x u - D_x^{\alpha-1}(\partial_x w_N^\theta D_x u) - \\ & - D_x^{\alpha-1}\partial_x([D_x, w_N^\theta]u) + D_x^\alpha \partial_x(w_N^\theta u) \\ = & A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \end{aligned} \tag{4-13}$$

Examinemos cada uno de los tres primeros términos. De la Proposición 2.0.29

$$\|A_1\| = \|[D_x^{\alpha-1}, w_N^\theta] D_x \partial_x u\|_{L^2} \leqslant C\|\Lambda_x^\delta \partial_x w_N^\theta\|_{L^q}\|D_x^{\alpha-1}\partial_x u\|_{L^2}. \tag{4-14}$$

Desafortunadamente si $\theta = 1$, $\|\Lambda_x^\delta \partial_x w_N^\theta\|_{L^q}$ no es uniformemente acotado en N. Así que este argumento no funciona para $\theta = 1$. Más adelante, en este trabajo, examinamos este situación de una manera más directa. Veamos que pasa con el segundo término de (4-13). De nuevo, haciendo uso de la Proposición 2.0.29, tenemos

$$\begin{aligned}\|A_2\| = & \|D_x^{\alpha-1}(\partial_x w_N^\theta D_x u\|_{L^2} \leqslant C\left(\|[D_x^{\alpha-1}, \partial_x w_N^\theta] D_x u\|_{L^2} + \|\partial_x w_N^\theta D_x^\alpha u\|_{L^2}\right) \\ \leqslant & C\left(\|\Lambda^\delta \partial_x^2 w_N^\theta\|_{L^q}\|D_x^{2-\alpha} u\|_{L^2} + \|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}\|D_x^\alpha u\|_{L^2}\right).\end{aligned} \tag{4-15}$$

Para el tercer término, obsérvese que

$$[D_x, w_N^\theta]u = \mathscr{H}(\partial_x w_N^\theta u) - [\mathscr{H}, w_N^\theta]\partial_x u.$$

Asi pues,

$$A_3 = -D_x^\alpha(\partial_x w_N^\theta u) + D_x^{\alpha-1}\partial_x[\mathscr{H}, w_N^\theta]\partial_x u. \tag{4-16}$$

Gracias a los Lemas 2.0.4 y 2.0.26 se tiene que

$$\begin{aligned}\|D_x^{\alpha-1}\partial_x[\mathscr{H}, w_N^\theta]\partial_x u\|_{L^2} &\leqslant C\|\partial_x^2[\mathscr{H}, w_N^\theta]\partial_x u\|_{L^2}^{\alpha-1}\|\partial_x[\mathscr{H}, w_N^\theta]\partial_x u\|_{L^2}^{2-\alpha}\\ &\leqslant C_\alpha\left(\|\partial_x^2[\mathscr{H}, w_N^\theta]\partial_x u\|_{L^2}+\|\partial_x[\mathscr{H}, w_N^\theta]\partial_x u\|_{L^2}\right)\\ &\leqslant C_\alpha\left(\|\partial_x^3 w_N^\theta\|_{L^\infty}+\|\partial_x^2 w_N^\theta\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Por otro lado, gracias a la desigualdad de Leibniz y a la Proposición 2.0.29,

$$\begin{aligned}\|D_x^\alpha(\partial_x w_N^\theta u)\|_{L^2} \leqslant&\|D_x^{\alpha-1}(\partial_x^2 w_N^\theta u)\|_{L^2}+\|D_x^{\alpha-1}(\partial_x w_N^\theta\partial_x u)\|_{L^2}\\ \leqslant& C\big(\|D_x^\alpha\partial_x w_N^\theta\|_{L^2}\|u\|_{L_x^\infty L_y^2}+\|\partial_x^2 w_N^\theta\|_{L^\infty}\|\|D_x^{\alpha-1}u\|_{L^2}+\\ &+\|[D_x^{\alpha-1},\partial_x w_N^\theta]\partial_x u\|_{L^2}+\|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}\|D_x^\alpha u\|_{L^2}\big)\\ \leqslant& C\big(\|D_x^\alpha\partial_x w_N^\theta\|_{L^2}\|\Lambda^\alpha u\|_{L^2}+\|\partial_x^2 w_N^\theta\|_{L^\infty}\|\|D_x^{\alpha-1}u\|_{L^2}+\\ &+\|\Lambda^\delta\partial_x^2 w_N^\theta\|_{L^q}\|D_x^{2-\alpha}u\|_{L^2}+\|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}\|D_x^\alpha u\|_{L^2}\big)\end{aligned}$$

Así pues, gracias a las dos últimas desigualdades y a la ecuación (4-16), tenemos que

$$\|A_3\|_{L^2}\leqslant C(w_N^\theta)\|\Lambda^\alpha u\|_{L^2} \tag{4-17}$$

Así pues, teniendo en cuenta (4-14), (4-15), (4-17) y que $D_x^\alpha\partial_x$ es antisimétrico se tiene que

$$\begin{aligned}|\langle w_N^\theta u, w_N^\theta D_x^\alpha\partial_x u\rangle_{L^2}| \leqslant& C\|\Lambda^\alpha u\|_{L^2}\|w_N^\theta u\|_{L^2}\\ \leqslant& C^2\|\Lambda^\alpha u\|_{L^2}^2+\|w_N^\theta u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Ahora, para el segundo término en (4-12), gracias a la antisimetría de $\mathscr{H}\partial_y^2$ y a la Proposición 2.0.26, tenemos

$$\begin{aligned}|\langle w_N^\theta u, w_N^\theta\mathscr{H}\partial_y^2 u\rangle_{L^2}| \leqslant&\langle w_N^\theta u,[w_N^\theta,\mathscr{H}]\partial_y^2 u\rangle_{L^2}\\ \leqslant& C\|w_N^\theta u\|_{L^2}\|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}\|\partial_x^{-1}\partial_y^2 u\|_{L^2}\\ \leqslant& C(\|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}^2\|\partial_x^{-1}\partial_y^2 u\|_{L^2}^2+\|w_N^\theta u\|_{L^2}^2)\end{aligned}$$

Y para el último término en el lado derecho en (4-12) tenemos

$$\begin{aligned}|\langle w_N^\theta u, w_N^\theta u^p\partial_x u\rangle_{L^2}| =&\left|\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^2} w_N^{2\theta}\partial_x u^{p+1}\,dxdy\right|\\ =&\left|\frac{2}{p+1}\int_{\mathbb{R}^2} w_N^\theta\partial_x w_N^\theta u^{p+1}\,dxdy\right|\\ \leqslant&\|w_N^\theta u\|_{L^2}\|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}^p\\ \leqslant& C(\|\partial_x w_N^\theta\|_{L^\infty}^2\|u\|_{H^s}^{2(p+1)}+\|w_N^\theta u\|_{L^2}^2)\end{aligned}$$

Así que de (4-12)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N^\theta u\|_{L^2}^2\leqslant C(\|u\|_{X^s})+\|w_N^\theta u\|^2. \tag{4-18}$$

De la desigualdad de Gronwall, tenemos que

$$\begin{aligned}\|w_N^\theta u\|_{L^2}^2 \leqslant & e^{Ct}(C(\sup_{t\in[0,T]}\|u\|_{X^s}) + \|w_N^\theta \varphi\|_{L^2}^2)\\ \leqslant & e^{Ct}(C(\sup_{t\in[0,T]}\|u\|_{X^s})^2 + \|\langle x\rangle^\theta \varphi\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

Del teorema de convergencia monótona de Lebesgue,

$$\|\langle x\rangle^\theta u\|_{L^2}^2 \leqslant e^{Ct}(C(\sup_{t\in[0,T]}\|u\|_{X^s}) + \|\langle x\rangle^\theta \varphi\|_{L^2}^2).$$

En particular, $\|w_N^\theta u\|_{L^2}$ es uniformemente acotada para $N \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,T]$. Un mismo procedimiento al hecho anteriormente nos permite mostrar que

$$\begin{aligned}\|\langle x\rangle^\theta (u-v)\|_{L^2}^2 \leqslant & e^{Ct}(C(\sup_{t\in[0,T]}\|u\|_{X^s}, \sup_{t\in[0,T]}\|v\|_{X^s})\sup_{t\in[0,T]}\|u-v\|_{X^s}+\\ & + \|\langle x\rangle^\theta(\varphi-\psi)\|_{L^2}^2),\end{aligned}$$

para $v \in C([0,T],X^s)$ solución de (**??**) tal que $v(t) \in L^2(\langle x\rangle^{2\theta}\,dxdy)$, para todo t. Finalmente, gracias a (4-18) y al hecho de que $\|w_N^\theta u\|_{L^2}$ es uniformemente acotada para N y t, se tiene que

$$|\|w_N^\theta u(t)\|_{L^2}^2 - \|w_N^\theta u(t')\|_{L^2}^2| \leqslant M|t-t'|,$$

para t y $t' \in [0,T]$, donde $M = \sup_{[0,T]}\left(\|w_N^\theta u\|_{L^2}^2 + C(\|u\|_{X^s})\right)$. Del teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se sigue que

$$|\|\langle x\rangle^\theta u(t)\|_{L^2}^2 - \|\langle x\rangle^\theta u(t')\|_{L^2}^2| \leqslant M|t-t'|.$$

En particular, $t \mapsto \|\langle x\rangle^\theta u(t)\|_{L^2}^2$ es continua. Ya que $t \mapsto u(t)$ es débilmente continua en $L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)$, se sigue que $t \mapsto u(t)$ es continua en $L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)$ □

Ahora examinemos que pasa en los espacios de Sobolev con peso $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R},\langle x\rangle^\theta)$ para $\theta \in [0,1/2)$.

Teorema 4.2.2. *Supongamos que, para* $s_1 \geqslant \alpha+1$ *y* $\theta \in (0,1/2)$, $\varphi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R},\langle x\rangle^\theta)$. *Entonces, si* $u \in C([0,T],H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}))$ *es la solución de* (1-10), $u \in C([0,T],H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$, *y la aplicación* $\varphi \to u$ *es continua de* $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}^2,\,\langle x\rangle^\theta\,dxdy)$ *en* $C([0,T],H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}^2,\langle x\rangle^\theta\,dxdy))$.

Demostración. Sean $s > \text{máx}(s_1,s_2)$ y supongamos que $\varphi \in X^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2,\,\langle x\rangle^\theta\,dxdy)$. En este caso si u es solución de (1-10) se tiene que $u \in C([0,T],X^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2,\langle x\rangle^\theta\,dxdy))$. Así pues, como u y $\partial_x u \in C([0,T],C_\infty(\mathbb{R}^2))$, $\partial(u^{p+1}) \in \mathcal{F}_{\theta,0}^{\alpha\theta,0}$ con

$$\|\partial(u^{p+1})\|_{\mathcal{F}_{\theta,0}^{\alpha\theta,0}} \leqslant C(\|u\|_{L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)} + \|u\|_{H^{s_1,s_2}})\|u\|_{H^{s_1,s_2}}^p.$$

Como
$$u(t) = W(t)\varphi + \int_0^t W(t-t')\partial_x v(t')\,dt',$$
donde $v = \dfrac{u^{p+1}}{p+1}$, se tiene que
$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)} \leqslant& C(T)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{\alpha\theta,0}_{\theta,0}} + \int_0^t c(t-t')\|\partial(u^{p+1})\|_{\mathcal{F}^{\alpha\theta,0}_{\theta,0}}(t')\,dt' \\ \leqslant& C(T)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{\alpha\theta,0}_{\theta,0}} + \\ &+ \int_0^t c(t-t')(\|u\|_{L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)} + \|u\|_{H^{s_1,s_2}})\|u\|^p_{H^{s_1,s_2}}\,dt' \\ \leqslant& C(T)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{\alpha\theta,0}_{\theta,0}} + K_1 + \int_0^t K_2\|u\|_{L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)}\,dt',\end{aligned}$$
donde
$$K_1 = \max_{t\in[0,T]} c(t) \max_{t\in[0,T]} \|u\|^{p+1}_{H^{s_1,s_2}}$$
y
$$K_2 = \max_{t\in[0,T]} c(t) \max_{t\in[0,T]} \|u\|^{p}_{H^{s_1,s_2}}.$$
Por lo tanto, de la desigualdad de Gronwall
$$\|u(t)\|_{L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)} \leqslant (C(T)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{\alpha\theta,0}_{\theta,0}} + K_1)e^{K_2T}. \tag{4-19}$$
Para cualquier $\varphi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, sea (φ_n) una sucesión de funciones en $X^s \cap L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ en $H^{s_1,s_2} \cap L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)$, cuando $n \to \infty$. Entonces, si u_n son las soluciones de (1-10) con $u_n(0) = \varphi_n$, se tiene que
$$\|u_n(t)\|_{L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)} \leqslant (C(T)\|\varphi_n\|_{\mathcal{F}^{\alpha\theta,0}_{\theta,0}} + K_{1,n})e^{K_{2,n}T}.$$
Del buen planteamiento del problema de Cauchy (1-10) la sucesión (φ_n) se puede tomar de tal manera que $K_{1,n}$ y $K_{2,n}$ son uniformemente acotadas en n. Así pues, $\|u_n(t)\|_{L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)}$ son uniformemente acotadas en n y t.
Haciendo un procedimiento análogo al que hicimos para obtener (4-19) llegamos a que
$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u_m(t)\|_{L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)} \leqslant& (C(T)\|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{F}^{\alpha\theta,0}_{\theta,0}} + \\ &+ \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u_m(t)\|_{H^{s_1,s_2}}\tilde{K}_1)e^{\tilde{K}_2T},\end{aligned}$$
donde
$$\tilde{K}_1 = (\max_{n\in\mathbb{N},t\in[0,T]} \|u_n\|_{H^{s_1,s_2}} + \sup_{n\in\mathbb{N},t\in[0,T]} \|u_n\|_{L^2(\langle x\rangle^\theta\,dxdy)})\tilde{K}_2$$
y
$$\tilde{K}_2 = \max_{t\in[0,T]} c(t) \sup_{n\in\mathbb{N},t\in[0,T]} \|u_n\|^p_{H^{s_1,s_2}}.$$

Esto muestra u_n converge a alguna función continua $\tilde{u}$ de $[0,T]$ en $L^2(\langle x\rangle^\theta\, dxdy)$. Ya que u_n converge también en L^2 a u, se tiene que $\tilde{u}=u$, para u la solución de (1-10) con $u(0)=\varphi$. El buen planteamiento sigue inmediatamente de los mismos argumentos. Esto termina la demostración del presente teorema. □

Nuestro próximo paso es mostrar el buen planteamiento en los espacios $H^{s_1,s_2}\cap L^2(\langle x\rangle^\theta\, dxdy,\mathbb{R}^2)$, con $1/2\leqslant\theta\leqslant 1$. En este caso se debe imponer una restricción sobre el dato inicial que describiremos en el siguiente teorema. Pero antes de que veamos ésto examinaremos el siguiente lema, muy necesario para la demostración de dicho teorema.

Lema 4.2.3. *Sean $s_1>1/2$, y $u\in C([0,T];H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ es solución del problema de Cauchy* (1-10). *Si $\widehat{\varphi}(0,\eta)=0$, para casi todo $\eta\in\mathbb{R}$, entonces $\widehat{u}(t,0,\eta)=0$ para todo $t\in[0,T]$ y casi todo $\eta\in\mathbb{R}$*

Demostración. Es claro que

$$u(t)=W(t)\varphi+\int_0^t W(t-t')\partial_x v(t')\,dt',$$

donde $v=\dfrac{u^{p+1}}{p+1}$. Como $u\in L^2_yL^{p+1}_x$, $v\in L^2_yL^1_x$, por lo que $\widehat{v}$ es continua en ξ para casi todo η. Así pues, como

$$\widehat{u}(t)=V\widehat{\varphi}+\int_0^t V(t-t')i\xi\widehat{v}\,dt',$$

$\widehat{u}(t,0,\eta)=0$, para casi todo η. □

Teorema 4.2.4. *Si $s_1\geqslant 1$ y $u\in C([0,T],H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ solución del problema de Cauchy* (1-10). *Si $u\in C([0,T],\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{1/2,0})$, para todo $t\in[0,T]$, entonces $\widehat{u}(t,0,\eta)=0$, para casi todo $(t,\eta)\in[0,T]\times\mathbb{R}$.*

Demostración. De la ecuación de Duhamel,

$$\widehat{u}(t,\xi,\eta)=V(t)\widehat{\varphi}+\int_0^t V(t-t')\widehat{w}(t')\,dt'$$

donde $\varphi=u(0)$, $w=u^p\partial_x u$ y $V(t)=e^{-it(\xi|\xi|^\alpha+\operatorname{sgn}(\xi)\eta^2)}$. Ya que $\varphi\in\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{1/2,0}$, gracias al Lema 4.1.2 y al anterior lema, es suficiente demostrar que $D^{1/2}_\xi(V(t)\chi\widehat{\varphi})\in L^2$, donde $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\chi=1$ en el intevalo $[-1/2,1/2]$.

$$\begin{aligned}\chi D^{1/2}_\xi\widehat{u}(t)=&\chi D^{1/2}_\xi(V(t)\widehat{\varphi})+\int_0^t\chi D^{1/2}_\xi\left(V(t-t')\widehat{w}(t')\right)\,dt'\\ =&[D^{1/2}_\xi,\chi](V(t)\widehat{\varphi})+\int_0^t[D^{1/2}_\xi,\chi]\left(V(t-t')\widehat{w}(t')\right)\,dt'+\\ &+D^{1/2}_\xi(V(t)\chi\widehat{\varphi})+\int_0^t D^{1/2}_\xi\left(V(t-t')\chi\widehat{w}(t')\right)\,dt'\\ =&A_1+A_2+A_3+A_4.\end{aligned}$$

Gracias al Lema 2.0.30, A_1 y $A_2 \in L^2$. Así que si mostramos que $A_4 \in L^2$ mostraremos que $A_3 = D_\xi^{1/2}(V(t)\chi\widehat{\varphi}) \in L^2$. Veamos. Puesto que $\widehat{w} = \dfrac{i\xi}{p+1}\widehat{u^{p+1}}$, entonces $\widehat{w}(t',0,\eta) = 0$, para cada $t' \in [0,T]$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|D_\xi^{1/2}(\chi\widehat{w}(t'))\| &\leqslant \|D_\xi^{1/2}(\xi\chi)\|_{L^2}\|\widehat{u^{p+1}}\|_{L^\infty} + \|\xi\chi\|_{L^\infty}\|\|D_\xi^{1/2}\widehat{u^{p+1}}\|_{L^2}\\ &\leqslant \|D_\xi^{1/2}(\xi\chi)\|_{L^2}\|u^{p+1}\|_{L^1} + \|\xi\chi\|_{L^\infty}\|\||x|^{1/2}u^{p+1}\|_{L^2}\\ &\leqslant \|D_\xi^{1/2}(\xi\chi)\|_{L^2}\|u^{p+1}\|_{L^1} + \|\xi\chi\|_{L^\infty}\|\||x|^{1/2}u^{p+1}\|_{L^2}\\ &\leqslant \|D_\xi^{1/2}(\xi\chi)\|_{L^2}\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|\xi\chi\|_{L^\infty}\|\||x|^{1/2}u\|_{L^2}\|u\|_\infty^p.\end{aligned}$$

Del Lema 4.1.2,

$$\|D^{1/2}(V(t-t')\chi\widehat{w}(t'))\|_{L^2} \leqslant c(t-t')\|u(t')\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{1/2,0}}.$$

para alguna función continua c en t. De aquí se tiene que $A_4 \in L^2$. Esto termina la demostración. □

Teorema 4.2.5. *Sean $s_1 \geqslant \alpha+1$ y que $1/2 \leqslant \theta \leqslant 1$. Supongamos que $\varphi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ es tal que $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2, \langle x\rangle^\theta\, dxdy)$ y que $\widehat{\varphi}(0,\eta) = 0$, para casi todo η. Si $u \in C([0,T], H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ es la solución del problema de Cauchy* (1-10)*, entonces $u \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^2, \langle x\rangle^\theta\, dxdy))$. Además, la aplicación $\varphi \to u$ es continua de $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}^2, \langle x\rangle^\theta\, dxdy)$ en $C([0,T], H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}^2, \langle x\rangle^\theta\, dxdy))$*

Demostración. Para $\theta < 1$ la demostración es escencialmente la misma que la hecha para el Teorema 4.2.2, solo hay que resaltar que en este caso usamos fuertemente la condición probada en el Lema 4.2.3.
Veamos que pasa para $\theta = 1$. En este caso se tiene que, si $xu \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^2))$,

$$x\partial_t u = D_x^\alpha\partial_x(xu) - (\alpha+1)D_x^\alpha u + \mathscr{H}\partial_y^2(xu) + xu^p\partial_x u. \tag{4-20}$$

Supongamos que $\alpha = 1$ o 2. En estos dos casos tenemos que, para $\varphi \in X^s$, con $s > \text{máx}(s_1,s_2)$, $xu \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^2))$, y, al multiplicar en ambos lados de la ecuación (4-20) por xu e integrar,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|xu\|_{L^2}^2 &= -(\alpha+1)\int_{\mathbb{R}^2} xuD_x^\alpha u\, dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} x^2u^{p+1}\partial_x u\, dxdy\\ &= -(\alpha+1)\int_{\mathbb{R}^2} xuD_x^\alpha u\, dxdy + \frac{2}{p+2}\int_{\mathbb{R}^2} xu^{p+2}\, dxdy.\end{aligned}$$

De aquí, se sigue que los mismos argumentos empleados para demostrar el Teorema 4.2.2 muestran el teorema para éstos casos. □

Teorema 4.2.6. *Supongamos que $s_1 > 2\alpha$ y que $u \in C([0,T], H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ solución del problema de Cauchy* (1-10)*. Si $u \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{3/2,0}$ y $\partial_\xi\widehat{u}(t,0,\eta) = 0$ para todo $(t,\eta) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, entonces $u \equiv 0$.*

Demostración. Al tomar transformada de Fourier en (**??**) tenemos que

$$i\partial_t\widehat{u} = |\xi|^\alpha\xi\widehat{u} + \operatorname{sgn}(\xi)\eta^2\widehat{u} + \xi\widehat{u^{p+1}}.$$

Al derivar con respecto a ξ, y teniendo en cuenta que $\widehat{u}(t,0,\eta) = 0$ para todo t, tenemos que

$$i\partial_t\partial_\xi\widehat{u} = (\alpha+1)|\xi|^\alpha\widehat{u} + |\xi|^\alpha\xi\partial_\xi\widehat{u} + \operatorname{sgn}(\xi)\eta^2\partial_\xi\widehat{u} + \frac{\widehat{u^{p+1}}}{p+1} + \xi\partial_\xi\frac{\widehat{u^{p+1}}}{p+1}.$$

Como $\partial_\xi\widehat{u}(t,0,\eta) = 0$, para todo t, del Teorema 2.0.27 se sigue que

$$0 = \widehat{u^{p+1}}(t,0,0) = \int_{\mathbb{R}^2} u^{p+1}\,dxy,$$

para todo t. Así pués, $u \equiv 0$, para todo $t \in [0,T]$, si $p+1$ es par □

Teorema 4.2.7. *Supongamos que* $s_1 > 2\alpha$ *y que* $u \in C([0,\,T],\,H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ *es la solución del problema de Cauchy* (1-10)*. Si* $u \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{3/2,0}$ *y existen* $0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant T$ *tales que* $\partial_\xi\widehat{u}(t_j,\,0,\,\eta) = 0$*, para todo* $\eta \in \mathbb{R}$*,* $j = 0,1$*, entonces* $u \equiv 0$*, para todo* $t \in [0,T]$

Demostración. Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $t_0 = 0$. Sea $\varphi = u(0)$. Como

$$\widehat{u}(t_1,\xi,\eta) = V(t_1)\widehat{\varphi} + \int_0^{t_1} V(t_1-t')\widehat{w}(t')\,dt'$$

donde $w = \partial_x(u^{p+1}/p+1)$, tenemos

$$\begin{aligned}\partial_\xi\widehat{u}(t_1) =&\{\partial_\xi\widehat{\varphi} + (-2it_1)(\alpha+1)|\xi|^\alpha\widehat{\varphi}\}V(t_1) + (-2i)\sin(t_1\eta^2)\widehat{\varphi}(0,\eta)\delta_\xi +\\ &+\int_0^{t_1}\{\partial_\xi\widehat{w}(t') + (-2i(t_1-t'))(\alpha+1)|\xi|^\alpha\widehat{w}(t')\}V(t_1-t')\,dt' +\\ &+(-2i)\int_0^{t_1}\sin((t_1-t')\eta^2)\widehat{w}(t',0,\eta)\delta_\xi\,dt'\end{aligned}$$

Como por hipótesis $\partial_\xi\widehat{u}(0,\eta,t_1) = \widehat{\varphi}(0,\eta) = 0$ y $\widehat{w}$ es una función continua (gracias al lema de Sobolev $u^{p+1} \in L^1(\mathbb{R}^2)$), tenemos que

$$\int_0^{t_1} V(t_1-t')\partial_\xi\widehat{w}(0,\eta,t')\,dt' = \int_0^{t_1} V(t_1-t')\frac{\widehat{u^{p+1}}}{p+1}(0,\eta,t')\,dt' = 0,$$

para todo $(\eta,t) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, del teorema del valor medio para integrales, se tiene que, para cada η, existe un $t^*_\eta \in [0,\,t_1]$ tal que

$$0 = \widehat{u^{p+1}}(t^*_\eta,0,\eta)$$

En particular,

$$\int_{\mathbb{R}^2} u^{p+1}(t_0^*)\, dxdy = \widehat{u^{p+1}}(t_0^*, 0, 0) = 0.$$

Si $p+1$ es par, $u(t_0^*) = 0$ en todo $\mathbb{R}^2$. Entonces, por la ley de conservación

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u(t_0^*)\|_{L^2}^2 = 0,$$

para todo $t \in [0, T]$. Por lo tanto, $u = 0$. Esto termina la demostración.

□

Para terminar esta sección vamos a examinar que pasa con los pesos en y, En este caso tenemos el siguiente teorema

Teorema 4.2.8. *Supongamos que* $\varphi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ *es una función tal que* $\langle y\rangle^r \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, *para* $r < s_2$. *Entonces, si* $u \in C([0,T], H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$, $u \in C([0,T], L^2(\, \mathbb{R}^2, \langle y\rangle^r\, dxdy))$. *Además,* $\varphi \in u$ *es continua de* $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\langle y\rangle^r\, dxdy))$.

Demostración. Para $N \in \mathbb{N}$, sea w_N la función como en la demostración del Teorema 4.2.1. Al multiplicar la ecuación (1-10) por $w_N^{2\theta}(y)u$ e integrando tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N^{\theta}(y)u\|^2 = \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^2} \left(w_N^{2\theta}(y)uD_x^{\alpha}\partial_x u + w_N^{2\theta}(y)u\mathscr{H}\partial_y^2 u + w_N^{2\theta}(y)u^{p+2}\partial_x u\right)\, dxdy.
\end{aligned}$$

Examinemos cada una de lo términos en la parte derecha de la anterior ecuación. Para el primer término tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} w_N^{2\theta}(y)uD_x^{\alpha}\partial_x u\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} w_N^{\theta}(y)uD_x^{\alpha}\partial_x w_N^{\theta}(y)u\, dxdy = 0.$$

Ahora bien el segundo satisface

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} w_N^{2\theta}(y)u\mathscr{H}\partial_y^2 u\, dxdy =& \int_{\mathbb{R}^2} 2w_N^{\theta}(y)u\mathscr{H}(\partial_y(w_N^{\theta}(y))\partial_y u)\, dxdy + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} w_N^{\theta}(y)u\mathscr{H}(\partial_y^2(w_N^{\theta}(y))\ u)\, dxdy + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} w_N^{\theta}(y)u\mathscr{H}\partial_y^2(w_N^{\theta}(y)u)\, dxdy \\
\leqslant& 2(\|\partial_y w_N^{\theta}(y)\|_{L^2}\|\partial_y u\|_{L^2} + \\
&\quad + \|\partial_y^2 w_N^{\theta}(y)\|_{L^2}\|u\|_{L^2})\|w_N^{\theta}(y)u\|_{L^2} \\
\leqslant& c\|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2 + \|w_N^{\theta}(y)u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Y para el tercero tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} w_N^{2\theta}(y)u^{p+1}\partial_x u\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x\left(\frac{w_N^{2\theta}(y)u^{p+2}}{p+2}\right)\, dxdy = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N^\theta u\|_{L^2}^2 \leqslant c\|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2 + \|w_N^\theta u\|_{L^2}^2. \tag{4-21}$$

Gracias al lema de Gronwall tenemos que

$$\begin{aligned}\|w_N^\theta u\|_{L^2}^2 \leqslant& e^{2T}(\|w_N^\theta \varphi\|_{L^2}^2 + c\sup_{[0,T]}\|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2)\\ \leqslant& e^{2T}(\|\langle y\rangle^\theta \varphi\|_{L^2}^2 + c\sup_{[0,T]}\|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2).\end{aligned}$$

Del teorema de convegencia monótona de Lebesgue se sigue que

$$\begin{aligned}\|\langle y\rangle^\theta u\|_{L^2}^2 \leqslant& e^{2T}(\|w_N^\theta(y)\varphi\|_{L^2}^2 + c\sup_{[0,T]}\|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2)\\ \leqslant& e^{2T}(\|\langle y\rangle^\theta \varphi\|_{L^2}^2 + c\sup_{[0,T]}\|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2).\end{aligned} \tag{4-22}$$

Así que $\|\langle y\rangle^\theta u\|_{L^2}^2$ es uniformemente acotada en $[0,T]$. En particular, $\|w_N^\theta u(t)\|_{L^2}^2$ es uniformemente acotada en N y t, para $N \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,T]$.
Para la continuidad de $t \mapsto u(t)$ de $[0,T]$ en $L^2(\langle y\rangle^\theta\, dxdy)$ repetiremos escencialmente los mismos argumentos que usamos en la demostración del Teorema 4.2.1. De (4-21) y la acotación uniforme de $\|w_N^\theta u(t)\|_{L^2}^2$, en N y t, se tiene que

$$|\|w_N^\theta u(t)\|_{L^2}^2 - \|w_N^\theta u(t')\|_{L^2}^2| \leqslant M|t-t'|,$$

para t y $t' \in [0,T]$, donde $M = \sup_{[0,T]}\big(\|w_N^\theta u\|_{L^2}^2 + c\|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2\big)$. Del teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se sigue que

$$|\|\langle y\rangle^\theta u(t)\|_{L^2}^2 - \|\langle y\rangle^\theta u(t')\|_{L^2}^2| \leqslant M|t-t'|.$$

Así pues, $t \mapsto \|\langle y\rangle^\theta u(t)\|_{L^2}^2$ es continua. Ya que $t \mapsto u(t)$ es débilmente continua en $L^2(\langle y\rangle^\theta\, dxdy)$, se sigue que $t \mapsto u(t)$ es continua en $L^2(\langle y\rangle^\theta\, dxdy)$.
El mismo procedimiento que usamos para llegar a la desigualdad (4-21) podemos obtener la siguiente desigualdad

$$\|\langle y\rangle^\theta(u-v)\|_{L^2}^2 \leqslant e^{2K}(\|\langle y\rangle^\theta(\varphi-\psi)\|_{L^2}^2 + c\sup_{[0,T]}\|u-v\|_{H^{s_1,s_2}}^2).$$

donde u y v son soluciones de (1-10), con $u(0)=\varphi$ y $v(0)=\psi$, y $K = C\sup_{[0,T]}(1+\|u\|_{H^{s_1,s_2}}^p + \|v\|_{H^{s_1,s_2}}^p)$. Esto demuestra la continuidad de $\varphi \mapsto u$ en $L^2(\langle y\rangle^\theta\, dxdy)$, para $\theta \in [0,1]$. Esto demuestra que el teorema es válido para $r \in [0,1]$.
Supongamos ahora que el teorema es válido para $r \in [0,n]$ y veamos que también lo es para $r \in (n, n+1]$. Para ésto, multipliquemos la ecuación en (**??**) por $w_N^{2(n+\theta)}u$ en ambos lados de la misma, de tal manera que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N^{n+\theta}u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2}\big(w_N^{2(n+\theta)}uD_x^\alpha\partial_x u + w_N^{2(n+\theta)}u\mathscr{H}\partial_y^2 u + w_N^{2(n+\theta)}u^p\partial_x u\big)\,dxdy.$$

Como en el caso para $r \in [0,1]$ es claro que que el primer y tercer términos del lado derecho de la anterior ecuación se hacen 0. Para el segundo término tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} w_N^{2(n+\theta)}(y) u \mathscr{H} \partial_y^2 u \, dxdy =& \int_{\mathbb{R}^2} -2 w_N^{n+\theta}(y) u \mathscr{H}(\partial_y(w_N^{n+\theta}(y)) \partial_y u) \, dxdy - \\ &- \int_{\mathbb{R}^2} w_N^{n+\theta}(y) u \mathscr{H}(\partial_y^2(w_N^{n+\theta}(y)) \; u) \, dxdy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} w_N^{n+\theta}(y) u \mathscr{H} \partial_y^2(w_N^{n+\theta}(y) u) \, dxdy \\ \leqslant& 2(\|\partial_y w_N^{n+\theta}(y) \partial_y u\|_{L^2} + \|\partial_y^2 w_N^{n+\theta}(y) u\|_{L^2}) \|w_N^{n+\theta}(y) u\|_{L^2} \\ \leqslant& C(1 + \|\langle y \rangle^{n-1+\theta} u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2) + \|w_N^{n+\theta}(y) u\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

ya que $\mathscr{H}\partial_y^2$ es antisimétrico, que, gracias al Lema 2.0.4,

$$\begin{aligned}\|\partial_y w_N^{n+\theta} \partial_y u\|_{L^2} \leqslant& (n+\theta) \|w_N^{n-1+\theta} \partial_y w_N \partial_y u\|_{L^2} \\ \leqslant& C \|w_N^{n-1+\theta} \partial_y u\|_{L^2} \\ \leqslant& C \|J_y^{n+\theta} u\|_{L^2}^{1/(n+\theta)} \|w_N^{n+\theta}(y) u\|_{L^2}^{(n-1+\theta)/(n+\theta)},\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}\|\partial_y^2 w_N^{n+\theta} u\|_{L^2} \leqslant& (n+\theta)(\|w_N^{n-1+\theta} \partial_y^2 w_N u\|_{L^2} + \\ &+ k_2(n) \|w_N^{\max(0,n-2+\theta)} \partial_y w_N^{k_1(n)} \partial_y w_N u\|_{L^2}) \\ \leqslant& C \|\langle y \rangle^{n-1+\theta} u\|_{L^2},\end{aligned}$$

donde $k_1(n) = \min(1, n-1+\theta)$ y $k_2(n) = \max(1, n-1+\theta)$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N^{n+\theta} u\|^2 \leqslant C(1 + \|\langle y \rangle^{n-1+\theta} u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2) + \|w_N^{n+\theta} u\|_{L^2}^2.$$

De la desigualdad de Gronwall se sigue que

$$\|w_N^{n+\theta} u\|^2 \leqslant e^{2T} \left(\|\langle y \rangle^{n+\theta} \varphi\|_{L^2}^2 + C \sup_{[0,T]} (1 + \|\langle y \rangle^{n-1+\theta} u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2) \right).$$

Del teorema de convergencia monotona de Lebesgue se sigue que

$$\|\langle y \rangle^{n+\theta} u\|^2 \leqslant e^{2T} \left(\|\langle y \rangle^{n+\theta} \varphi\|_{L^2}^2 + C \sup_{[0,T]} (1 + \|\langle y \rangle^{n-1+\theta} u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^{s_1,s_2}}^2) \right).$$

Repitiendo la misma argumentación anterior podemos concluir que el teorema sigue siendo válido para $r \in (n, n+1]$.

$\square$

5 Existencia de ondas solitarias

5.1. Existencia

$$u_t - D_x^\alpha u_x + \mathscr{H}\partial_y^2 u + u^p u_x = 0 \tag{5-1}$$

Si suponemos la existencia de una solución de tipo onda solitaria, es decir $u(x,y,t) = \phi(x - ct, y)$, con $c > 0$, entonces la ecuación (5-1) se transforma en

$$-c\phi_x - D_x^\alpha \phi_x + \mathscr{H}\partial_y^2 \phi + \phi^p \phi_x = 0 \tag{5-2}$$

Teniendo en cuenta que $\phi \in X^\alpha$ se tiene que

$$-c\phi + D_x^\alpha \phi - D_x^{-1}\partial_y^2 \phi - \frac{\phi^{p+1}}{p+1} = 0 \tag{5-3}$$

Esto nos motiva a considerar el siguiente funcional

$$I(\phi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{c\phi^2 + \left(D_x^{\alpha/2}\phi\right)^2 + \left(D_x^{-1/2}\partial_y \phi\right)^2}{2} - \frac{\phi^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\, dxy. \tag{5-4}$$

Los puntos críticos de este funcional son las soluciones de la ecuación (5-3).
Así pues, probemos la existencia de puntos críticos no nulos del funcional I usando el Lema de Paso de Montaña.

Lema 5.1.1. *Si (ϕ_n) es una sucesión acotada en X^α y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(c,d)\in\mathbb{R}^2} \int\limits_{\Omega(c,d,R)} |\phi_n|^2\, dxy = 0, \tag{5-5}$$

entonces $\lim_{n\to\infty} \phi_n = 0$ en $L^q(\mathbb{R}^2)$, para $2 < q < (2\alpha+6)/(3-\alpha)$. ($\Omega(c,d,R)$ es el cuadrado con lados paralelos a los ejes coordenados con centro en (c,d) y lado R).

Demostración. Usando la desigualdad de Hölder y el Lema 2.0.6, tenemos que para q como en las hipótesis,

$$\begin{aligned} ||\phi_n||_{L^q_{\Omega(c,d,R)}} &\leqslant ||\phi_n||^{1-\theta}_{L^2_{\Omega(c,d,R)}} \, ||\phi_n||^{\theta}_{L^{(2\alpha+6)/(3-\alpha)}_{\Omega(c,d,R)}}, \\ &\leqslant c\, ||\phi_n||^{1-\theta}_{L^2_{\Omega(c,d,R)}} \, ||\phi_n||^{\theta}_{X^\alpha_{\Omega(c,d,R)}} \end{aligned}$$

donde $\theta = \dfrac{(2\alpha+6)(q-2)}{4q\alpha}$. Supongamos ahora que q es tal que $\frac{\theta q}{2} = 1$. Denotemos dicho q como q_0. Entonces, de la última desigualdad, tenemos

$$\int_{\Omega(c,d,R)} |\phi_n|^{q_0}\, dx \leqslant ||\phi_n||^{q_0(1-\theta)}_{L^2_{\Omega(c,d,R)}} ||\phi_n||^2_{X^\alpha_{\Omega(c,d,R)}}$$

Cubriendo $\mathbb{R}^2$ con cuadrados de longitud R de lados paralelos a los ejes coordenados y de tal forma que cada punto esté en a lo sumo tres de dichos cuadrados, se tiene que

$$||\phi_n||^{q_0}_{L^{q_0}_{xy}} \leqslant C \sup_{(c,d)\in\mathbb{R}^2} ||\phi_n||^{q_0(1-\theta)}_{L^2_{\Omega(c,d,R)}} ||\phi_n||^2_{X^\alpha}.$$

Como (ϕ_n) es una sucesión acotada en X^α, de aquí se sigue inmediatamente el lema para $q = q_0$. Ya que $2 < q_0 < (2\alpha+6)/(3-\alpha)$, la desigualdad de Hölder implica el lema para todo $2 < q < (2\alpha+6)/(3-\alpha)$ □

Lema 5.1.2 (Paso de montaña)**.** *Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Banach e $I \in C^1(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ un funcional que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$I(0) = 0$, y existe un $r > 0$ tal que $I|_{\partial B_r(0)} \geqslant \delta > 0$*
2. *Existe $\varphi_0 \in \mathcal{X}\backslash\overline{B_r(0)}$ tal que $I(\varphi_0) \leqslant 0$*

Sean, asimismo, Γ el conjunto de todos los caminos que unen a 0 con φ_0, es decir

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], \mathcal{X}) \quad | \quad g(0) = 0, \quad g(1) = \varphi_0\},$$

y

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \tag{5-6}$$

Entonces, $c \geqslant \delta$ y existe una sucesión de Palais–Smale en el nivel c asociada a I, es decir, existe una sucesión (ϕ_n) tal que $I(\phi_n) \to c$ y $I'(\phi_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$

Veamos que I satisface las condiciones del Lema 5.1.2. Claramente $I(0) = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} I(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{c\phi^2 + \left(D_x^{\alpha/2}(\phi)\right)^2 + \left(D_x^{-1/2}\partial_y(\phi)\right)^2}{2} - \frac{\phi^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\, dxy \\ &\geqslant \frac{1}{2}\min\{c,1\}||\phi||^2_{X^\alpha} - \frac{1}{(p+1)(p+2)}||\phi||^{p+2}_{L^{p+2}_{xy}} \end{aligned} \tag{5-7}$$

Por lo tanto, del Lema 2.0.6, se sigue que $I|_{\partial B_r(0)} \geqslant \delta > 0$, para algún $r > 0$. Esto muestra 1).
Ahora, sea $\psi \in X^\alpha$ fija tal que $\int_{\mathbb{R}^2} \psi^{p+2}\, dxy > 0$. Para $\vartheta > 0$

$$I(\vartheta\psi) = \vartheta^2 \left(I(\psi) + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\psi^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\, dxy \right) - \vartheta^{p+2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\psi^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\, dxy$$

Es claro que para alguna ϑ lo suficientemente grande $I(\vartheta\psi) \leqslant 0$. Tomando $\beta = \vartheta\psi$ se muestra que I satisface 2). Así tenemos

Lema 5.1.3. *Para c como en el Lema 5.1.2, existe una sucesión (ϕ_n), tal que $I(\phi_n) \to c$ y $I'(\phi_n) \to 0$*

Teorema 5.1.4. *Existen soluciones no triviales de 5-3 en X^α*

Demostración. Sea (ϕ_n) la sucesión de Palais–Smale en el nivel c de I, garantizada por el Lema 5.1.3. Por lo tanto,

$$c + 1 + \|\phi_n\| \geqslant I(\phi_n) - \frac{1}{p+2} I'(\phi_n)(\phi_n) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+2}\right) \text{mín}\{c, 1\} ||\phi_n||^2_{X^\alpha}$$

para n suficientemente grande. Luego, la sucesión (ϕ_n) es acotada en X^α. Como

$$0 < c = \lim_{n\to\infty} I(\phi_n) - \frac{1}{2} I'(\phi_n)(\phi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{2(p+1)(p+2)} \int_{\mathbb{R}^2} \phi_n^{p+2}\, dxy,$$

del Lema 5.1.1, se tiene que

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \sup_{(c,d)\in\mathbb{R}^2} \int_{\Omega(c,d,1)} |\phi_n|^2\, dxy > 0. \tag{5-8}$$

Entonces, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que existe una sucesión (c_n, d_n) en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\int_{\Omega(c_n,d_n,1)} |\phi_n|^2\, dxy > \delta/2, \tag{5-9}$$

para n suficientemente grande. Sea $\tilde{\phi}_n = \phi_n(\cdot - (c_n, d_n))$. Luego, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que, para algún $\phi \in X^\alpha$, $\tilde{\phi}_n \to \phi$ en X^α. De (5-9) y el Lema 2.0.16 se sigue que $\phi \neq 0$. El Lema 2.0.16 y la continuidad de la función $u \mapsto u^{p+1}$ de L^{p+2} en $L^{\frac{p+2}{p+1}}$, implican que

$$I'(\phi)(w) = \lim_{n\to\infty} I'(\tilde{\phi}_n)(w) = 0,$$

para toda $w \in X^\alpha$ con soporte compacto. Esto demuestra el teorema. □

5.2. Suavidad y analiticidad de las ondas solitarias

En esta sección probaremos que las ondas solitarias asociadas a la ecuación (5-1)

Teorema 5.2.1. *Si $\phi \in X^\alpha$ es solución de 5-3, entonces $\phi \in H^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} H^n$. Además, ϕ es analítica.*

Demostración. Como $\phi \in X^{\alpha}$, del Lema 2.0.6, se tiene que $\phi \in L^{q+2}$, donde $q = \dfrac{4\alpha}{3-\alpha}$. Luego, $\phi^{p+1} \in L^{\frac{q+2}{p+1}}(\mathbb{R}^2)$. Ahora bien, de 5-3, se tiene que

$$(D_x^{\alpha+1} - \partial_y^2 + cD_x)\phi = D_x\left(\frac{\phi^{p+1}}{(p+1)}\right). \tag{5-10}$$

Si $\frac{q+2}{p+1} \geqslant 2$, $\phi^{p+1} \in L^2$ y, gracias al teorema de Plancherel y a la ecuación (5-10), $\phi \in H^{\alpha,1}$. Ahora supongamos por inducción que $\phi \in H^{n\alpha,n}$. Entonces, como $H^{n\alpha,n}$ es un álgebra de Banach, $\phi^{p+1} \in H^{n\alpha,n}$. De nuevo del teorema de Plancherel y de la ecuación (5-10), se sigue que $\phi \in H^{(n+1)\alpha,n+1}$. Por lo tanto, en este caso, $\phi \in H^{\infty}$.
Por otro lado, si $\frac{q+2}{p+1} < 2$, del lema de Lizörkin y la ecuación (5-10), $D_x^{\alpha}\phi \in L^{\frac{q+2}{p+1}}$. Del Lema 2.0.4, $D_x^{\alpha_1}\phi \in L^2$, donde $\alpha_1 = \frac{q}{p}\alpha > \alpha$. En otras palabras, $\phi \in X^{\alpha_1}$. Entonces, del Lema 2.0.6, $\phi \in L^{q_1+2}$, donde $q_1 = \frac{4\alpha_1}{3-\alpha_1}$. Si $\frac{q_1+2}{p+1} \geqslant 2$, estamos en la misma situación expuesta en el parágrafo anterior, por lo que tendremos que $\phi \in H^{\infty}$. En otro caso, repetimos el mismo argumento una y otra vez para obtener una sucesión de términos tales que $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, y $\frac{q_i+2}{p+1} < 2$, donde $q_i = \frac{4\alpha_i}{3-\alpha_i}$ y $\alpha_{i+1} = \frac{q_i}{p}\alpha$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, $\alpha_0 = \alpha$. Veamos que esta sucesión es finita. Si fuese infinita, como $\alpha_i < 2\alpha$, α_i convergería a un punto fijo de $f(x) = \frac{4x\alpha}{p(3-x)}$. Pero los únicos puntos de f son 0 y $3 - \frac{4\alpha}{p}$. Ya que $\alpha > \frac{3p}{p+4}$, estaríamos en una contradicción. Luego, esta sucesión no es infinita. Luego existe n tal que $\alpha_n \geqslant 3$ o $\frac{q_n+2}{p+1} \geqslant 2$. Como $\phi \in X^{\alpha_n}$, en cualquier caso, $\phi^{p+1} \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Por lo que volvemos a quedar en la misma situación del parágrafo anterior.
Para ver la analiticidad de ϕ es suficiente probar que

$$||\partial^{\beta}\phi||_{H^2} \leqslant c|\beta|!\left(\frac{R}{2}\right)^{|\beta|} \tag{5-11}$$

para algún $R > 0$ y todo $\beta \in \mathbb{N}^2$. Demostraremos que existe $R > 0$ tal que para todo $\beta \in \mathbb{N}^2$

$$||\partial^{\beta}\phi||_{H^2} \leqslant C\frac{(|\beta|-1)!}{(|\beta|+1)^s}\left(\frac{R}{2}\right)^{|\beta|-1}, \tag{5-12}$$

donde $s > 1$. Veamos esto por inducción. Para $|\beta| = 1$, la desigualdad 5-12 es evidente; es suficiente elegir C suficientemente grande. Supongamos ahora que (5-12) es válida para $|\beta| = 1, \ldots, n$ y R (que elegiremos convenientemente después). De la ecuación (5-3), tenemos que

$$\left(D_x^{\alpha+1} - \partial_y^2 + cD_x\right)\phi = \frac{1}{(p+1)}D_x\left(\phi^{p+1}\right) \tag{5-13}$$

Aplicando ∂^{β} en ambos lados de la ecuación y haciendo producto interno en H^2 con $\partial^{\beta}\phi$ en la ecuación 5-13 se sigue que

$$||D_x^{(\alpha+1)/2}\partial^{\beta}\phi||_{H^2}^2 + ||\partial_y\partial^{\beta}\phi||_{H^2}^2 + c||D_x^{1/2}\partial^{\beta}\phi||_{H^2}^2 \leqslant C_1\left\|\partial^{\beta}\left(\phi^{p+1}\right)\right\|_{H^2}||\partial_x\partial^{\beta}\phi||_{H^2}. \tag{5-14}$$

Como $\alpha > 1$, del Lema 2.0.4 se sigue que

$$||\nabla\partial^\beta\phi||_{H^2}^2 \leqslant C\left(||D_x^{(\alpha+1)/2}\partial^\beta\phi||_{H^2}^2 + ||\partial_y\partial^\beta\phi||_{H^2}^2 + c||D_x^{1/2}\partial^\beta\phi||_{H^2}^2.\right)$$

Luego,

$$||\nabla\partial^\beta\phi||_{H^2} \leqslant C||\partial^\beta(\phi^{p+1})||_{H^2} \tag{5-15}$$

Para terminar la demostración necesitamos del siguiente lema.

Lema 5.2.2. *[(a)]*

1. *Si f y $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces*

$$\partial^\beta\left(f(\phi)\right) = \sum_{j=1}^{|\beta|}\frac{f^{(j)}(\phi)}{j!}\sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_j=\beta\\ |\beta_i|\geqslant 1,\,\forall\, 1\leqslant i\leqslant j}}\frac{\beta!}{\beta_1!\ldots\beta_j!}\partial^{\beta_1}\phi\ldots\partial^{\beta_j}\phi$$

2. *para cada $(n_1,\ldots,n_j) \in \mathbb{N}^j$ tenemos que*

$$|\beta|! = \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_j=\beta\\ |\beta_i|=n_i,\,\forall 1\leqslant i\leqslant j}}\frac{\beta!|\beta_1|!\ldots|\beta_j|!}{\beta_1!\ldots\beta_j!}$$

3. *Para $s > 1$ existe C_2 tal que para todo j e $k \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k_1+\ldots+k_j=k}\frac{1}{(k_1+1)^s\ldots(k_j+1)^s} \leqslant \frac{C_2^{j-1}}{(k+1)^s}$$

Regresemos a la demostración del teorema. Por la parte (a) del lema 5.2.2, la desigualdad 5-15 y el hecho de que H^2 es un álgebra de Banach, se sigue

$$||\nabla\partial^\beta\phi||_{H^2} \leqslant C_1\sum_{j=1}^{2}\sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_j=\beta\\ |\beta_i|\geqslant 1,\,\forall\, 1\leqslant i\leqslant j}}\frac{\beta!}{\beta_1!\ldots\beta_j!}||\partial^{\beta_1}\phi||_{H^2}\ldots||\partial^{\beta_j}\phi||_{H^2}.$$

De la hipótesis de inducción y la parte (b) del mismo lema, tenemos que

$$\begin{aligned}||\nabla\partial^\beta\phi||_{H^2} &\leqslant C_1\sum_{j=1}^{2}C^jA^{|\beta|-j}\sum_{\substack{n_1+\ldots+n_j=|\beta|\\ n_i\geqslant 1,\,\forall\, 1\leqslant i\leqslant j}}\sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_j=\beta\\ |\beta_i|=n_i,\,\forall i}}\frac{\beta!}{\beta_1!\ldots\beta_j!}\frac{(|\beta_1|-1)!\ldots(|\beta_j|-1)!}{(|\beta_1|+1)^s\ldots(|\beta_j|+1)^s}\\ &\leqslant C_1\sum_{j=1}^{2}\tilde{C}^jA^{|\beta|-j}\sum_{\substack{n_1+\ldots+n_j=|\beta|\\ n_i\geqslant 1,\,\forall\, 1\leqslant i\leqslant j}}\frac{|\beta|!}{(n_1+1)^{s+1}\ldots(n_j+1)^{s+1}}\end{aligned}$$

donde $A = \dfrac{R}{2}$. De esta desigualdad y la parte (c) del lema 5.2.2 obtenemos que

$$||\nabla \partial^{\beta} \phi||_{H^2} \leqslant C_1 \frac{|\beta|!}{(|\beta|+2)^s} A^{|\beta|} \sum_{j=1}^{2} (\tilde{C} C_2)^j A^{-j}$$

Ahora elijamos R. Tomamos A suficientemente grande tal que $C_1 \sum_{j=1}^{2} (\tilde{C} C_2)^j A^{-j} \leqslant C$. Es claro que esta elección no depende de β. Por lo tanto, con $R = 2A$,

$$||\nabla \partial^{\beta} \phi||_{H^2} \leqslant C \frac{|\beta|!}{(|\beta|+2)^s} \left(\frac{R}{2}\right)^{|\beta|},$$

demostramos 5-12. Esto completa la demostración. □

Bibliografía

[Ablowitz and Clarkson, 1991] Ablowitz, M. J. and Clarkson, P. A. (1991). *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, volume 149 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge.

[Ablowitz and Segur, 1980] Ablowitz, M. J. and Segur, H. (1980). Long internal waves in fluids of great depth. *Stud. Appl. Math.*, 62(3):249–262.

[Benjamin, 1967] Benjamin, T. B. (1967). Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *J. Fluid Mech.*, 29:559–592.

[Benjamin, 1972] Benjamin, T. B. (1972). The stability of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A*, 328:153–183.

[Benjamin et al., 1972] Benjamin, T. B., Bona, J. L., and Mahony, J. J. (1972). Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 272(1220):47–78.

[Bergh and Löfström, 1976] Bergh, J. and Löfström, J. (1976). *Interpolation spaces: an introduction*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag.

[Bona, 1975] Bona, J. (1975). On the stability theory of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 344(1638):363–374.

[Dawson et al., 2008] Dawson, L., McGahagan, H., and Ponce, G. (2008). On the Decay Properties of Solutions to a Class of Schrödinger equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(6):2081–2090.

[Duoandikoetxea Zuazo, 1990] Duoandikoetxea Zuazo, J. (1990). *Análisis de Fourier*. Colección de Estudios. Universidad Autónoma de Madrid.

[Esfahani and Pastor, 2011a] Esfahani, A. and Pastor, A. (2011a). Ill-posedness results for the (generalized) Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(3):943–956.

[Esfahani and Pastor, 2011b] Esfahani, A. and Pastor, A. (2011b). On the unique continuation property for Kadomtsev-Petviashvili-I and Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equations. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(6):1130–1140.

[Fonseca et al., 2013] Fonseca, G., Linares, F., and Ponce, G. (2013). The IVP for the dispersion generalized Benjamin-Ono equation in weighted sobolev spaces. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 30(5):763 – 790.

[Fonseca and Ponce, 2011] Fonseca, G. and Ponce, G. (2011). The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces. *J. Funct. Anal.*, 260(2):436–459.

[Ginibre and Velo, 1992] Ginibre, J. and Velo, G. (1992). Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolut ion equations. *Comm. Math. Phys.*, 144(1):163–188.

[Hirschman, 1952] Hirschman, I. I. (1952). A convexity theorem for certain groups of transformations. *Journal d'Analyse Mathématique*, 2(2):209–218.

[Hunt et al., 1973] Hunt, R., Muckenhoupt, B., and Wheeden, R. (1973). Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 176:227–251.

[Kadomtsev and Petviashvili, 1970] Kadomtsev, B. B. and Petviashvili, V. I. (1970). On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersing Media. *Soviet Physics Doklady*, 15:539.

[Kato, 1975] Kato, T. (1975). Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. In *Spectral theory and differential equations (Proc. Sympos., Dundee, 1974; dedicated to Konrad Jörgens)*, volume 448 of *Lecture Notes in Math.*, pages 25–70. Springer, Berlin.

[Kato, 1979] Kato, T. (1979). On the Korteweg-de Vries equation. *Manuscripta Math.*, 28(1-3):89–99.

[Kato, 1995] Kato, T. (1995). *Perturbation theory for linear operators.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Reprint of the 1980 edition.

[Kenig et al., 2011] Kenig, C. E., Martel, Y., and Robbiano, L. (2011). Local well-posedness and blow-up in the energy space for a class of L^2 critical dispersion generalized Benjamin-Ono equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 28(6):853–887.

[Kenig et al., 1989] Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. (1989). On the (generalized) Korteweg-de Vries equation. *Duke Math. J.*, 59(3):585–610.

[Kenig et al., 1991a] Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. (1991a). Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(1):33–69.

[Kenig et al., 1991b] Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. (1991b). Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(2):323–347.

[Kim, 2006] Kim, B. (2006). *Three-dimensional solitary waves in dispersive wave systems.* PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Mathematics., Cambridge, MA.

[Kobayasi, 1979] Kobayasi, K. (1979). On a theorem for linear evolution equations of hyperbolic type. *J. Math. Soc. Japan*, 31(4):647–654.

[Linares and Ponce, 2009] Linares, F. and Ponce, G. (2009). *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Universitext (1979). Springer.

[Lizorkin, 1967] Lizorkin, P. I. (1967). Multipliers of Fourier integrals in the spaces $l_{p,\theta}$. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 89:269–290.

[Milanés, 2003] Milanés, A. (2003). Some results about a bidimensional version of the generalized BO. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2(2):233–250.

[Muckenhoupt, 1972] Muckenhoupt, B. (1972). Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165:207–226.

[Ono, 1975] Ono, H. (1975). Algebraic solitary waves in stratified fluids. *J. Phys. Soc. Japan*, 39(4):1082–1091.

[Pego and Weinstein, 1994] Pego, R. L. and Weinstein, M. I. (1994). Asymptotic stability of solitary waves. *Comm. Math. Phys.*, 164(2):305–349.

[Preciado and Soriano,] Preciado, G. and Soriano, F. H. On the cauchy problem of a two-dimesional benjamin-ono equation. To be submitted.

[Reed and Simon, 1975] Reed, M. and Simon, B. (1975). *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York.

[Sánchez Salazar, 2015] Sánchez Salazar, F. (2015). *El problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo rBO-ZK.* PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia.

[Stein, 1961] Stein, E. M. (1961). The characterization of functions arising as potentials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67:102–104.

[Stein and Weiss, 1971] Stein, E. M. and Weiss, G. L. (1971). *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Mathematical Series, No. 32. Princeton University Press, Princeton, N.J.

[Tomas, 1975] Tomas, P. A. (1975). A restriction theorem for the Fourier transform. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81(2):477–478.

[Triebel, 1978] Triebel, H. (1978). *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland mathematical library. North-Holland Pub. Co.

[Zabusky and Kruskal, 1965] Zabusky, N. and Kruskal, M. (1965). Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys. Rev. Lett.*, 15:240–243.