UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Facultad de Ciencias

Departamento de matemáticas

Tesis de Maestría

Estudio del núcleo de Riesz asociado al símbolo $\langle x\rangle = \mathbf{máx}\{|x|_p, p^\gamma\}$

Presentada por

Carlos Jhovany Pedraza Prieto

30 de enero de 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Facultad de Ciencias

Departamento de matemáticas

Tesis de Maestría

Estudio del núcleo de Riesz asociado al símbolo $\langle x \rangle = \text{máx}\{|x|_p, p^{\gamma}\}$

Presentada por

Carlos Jhovany Pedraza Prieto

Tesis presentada para obtener el título de Magíster en Ciencias-Matemáticas

Dirigida por
Jeanneth Galeano Peñaloza

Co-dirigida por
Óscar Casas Sánchez

30 de enero de 2018

Title in English

Study of Riesz's kernel associated to the symbol $\langle x\rangle = \max\{|x|_p, p^\gamma\}$.

Título en Español

Estudio del núcleo de Riesz asociado al símbolo $\langle x\rangle = \text{máx}\{|x|_p, p^\gamma\}$.

Abstract

This dissertation is dedicated to the study of the Fourier's transform k_α of the symbol $\langle x\rangle = \max\{|x|_p, p^\gamma\}$, we show that the family of kernels k_α behave as a semigroup of convolution with the final purpose to find fundamental solutions to the pseudodifferential equation $D^\alpha u = \psi$, where $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$.

Resumen

Esta tesis está dedicada al estudio de la transformada de Fourier k_α del símbolo $\langle x\rangle = \text{máx}\{|x|_p, p^\gamma\}$. Se muestra que la familia de núcleos k_α, forman un semigrupo de convolución con el fin de encontrar soluciones fundamentales para la ecuación pseudodiferencial $D^\alpha u = \psi$, donde $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$.

Keywords

Riesz's kernel, Fourier's Transform, Distributions, Test functions, Pseudo-differential Operators, p-adic Fields.

Palabras clave

Núcleo de Riesz, Transformada de Fourier, Distribuciones, Funciones de Prueba, Operadores Pseudodiferenciales, Campos p-ádicos.

Índice general

Introducción

Usualmente en ciertos ámbitos de las matemáticas y la física se utilizan números reales, considerando a $\mathbb{R}^3$ como el espacio físico, para el cual en teoría se pueden hacer mediciones tan precisas como se quiera. No obstante, según la física cuántica no es posible medir distancias que sean menores que la constante de Planck, $l_{pl} = 10^{-33}cm$.
Por lo tanto es preciso preguntarse ¿qué problema hay en el campo de los números reales para que no se pueda utilizar en la medición de tales distancias?, la *Propiedad Arquimediana* de los números reales, es una propiedad física relacionada con el proceso de *medición*, y que intuitivamente significa que podemos medir distancias tan pequeñas como se quiera, pero como se enunció antes la distancia de Planck es la más pequeña que puede ser medida, este hecho sugiere que se debe buscar otro campo numérico que como espacio métrico sea no-arquimediano.
Para tal propósito se ha propuesto utilizar números p-ádicos en los procesos relacionados con este tipo de mediciones. Dado que en la práctica, al hacer mediciones se utilizan números racionales, se hace necesario hablar de normas, por lo cual surge la pregunta: *¿Qué normas se pueden definir sobre* $\mathbb{Q}$*?*. Un resultado importante conocido como el Teorema de Ostrowski, ver [1], dice que sobre $\mathbb{Q}$ existen solamente dos normas no-equivalentes y no triviales: la del valor absoluto usual y la norma p-ádica para algún primo p. Si completamos el campo $\mathbb{Q}$ con la norma usual se obtienen los números reales, y si la completación se hace con la norma p-ádica se obtiene el campo $\mathbb{Q}_p$ de los números p-ádicos, que es no-arquimediano.
Esta tesis está organizada en dos capítulos. En el primero presentamos algunos resultados básicos acerca de los números p-ádicos. Allí se mencionan propiedades relacionadas con la construcción del campo $\mathbb{Q}_p$, la representación canónica de los números p-ádicos y algunas propiedades de la topología no-arquimediana de $\mathbb{Q}_p$; además se define la integración sobre ciertos subconjuntos de $\mathbb{Q}_p$ y se calculan algunas integrales simples sobre ellos, también se muestran algunos teoremas importantes sobre integración, tales como el Teorema de Fubini y el de la Convergencia Dominada (ver Teoremas 1.4 y 1.5). Se define el espacio de las funciones de prueba, denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ y el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$, y se definen el producto directo y la convolución de distribuciones mostrando algunas propiedades que cumplen estas operaciones.

En el segundo capítulo definimos el símbolo $\langle x\rangle^{\alpha} = \text{máx}\{|x|_p, p^{\gamma}\}$ que nos permitirá definir el operador pseudodiferencial $D^{\alpha}\varphi = \mathcal{F}^{-1}\left[\langle\xi\rangle^{\alpha}\mathcal{F}(\varphi)\right]$, donde $\mathcal{F}$ representa la transformada de Fourier. De manera similar, en [9] se define el símbolo $\langle x\rangle = \max\{1, |x|_p\}$ con el propósito de definir el operador de Bessel.

El estudio de este símbolo se inicia mostrando que $\langle x\rangle^{\alpha} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ para $\mathrm{Re}(\alpha) < -1$ y luego utilizando la continuación analítica del operador de Vladimirov, se halla su transformada de Fourier k_α, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1 + \dfrac{2\pi i k}{\ln p}$, $\alpha \neq 0$. A continuación se define $k_{-1+\alpha_k}$ y k_0 de tal manera que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $\widehat{k_\alpha} = \langle x\rangle^{\alpha}$. Se tiene que los k_α se comportan como un semigrupo de convolución, i.e. $k_\alpha * k_\beta = k_{\alpha+\beta}$, lo que nos permite manipular y resolver fácilmente la ecuación del tipo $D^{\alpha}u = \psi$.

Estado del arte

El campo de los números p-ádicos se obtiene completando $\mathbb{Q}$ con respecto a la norma p-ádica $|.|_p$. Este campo resulta un campo topológico localmente compacto, por lo tanto es posible definir la transformada de Fourier.

La transformada de Fourier es una poderosa herramienta que nos permite definir los operadores pseudodiferenciales (al no poder definir derivada como cociente de diferencias) y dar solución a las ecuaciones que involucran dichos operadores.

En [10] Vladimirov define el operador pseudodiferencial

$$D^{\alpha}\varphi := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|_p^{\alpha}\,\mathcal{F}\varphi),$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, el espacio de funciones localmente constantes con soporte compacto, que se conoce como el operador de Vladimirov. Aquí $|\xi|_p$ se conoce como el símbolo del operador D^{α}, y estudia la ecuación $D^{\alpha}\varphi = u$.

En [6] y [8] Kochubei, Rodríguez-Vega y Zúñiga-Galindo respectivamente, generalizan este operador a dimensión n como

$$D^{\alpha}\varphi := \mathcal{F}^{-1}(\|\xi\|_p^{\alpha}\mathcal{F}\varphi),$$

donde $\|\xi\|_p = \max\{|\xi_i|_p\}$ para $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ conocido como el operador de Taibleson y buscan soluciones fundamentales para la misma ecuación.

Más adelante, en [11] Zúñiga-Galindo define un polinomio elíptico $f(\xi) \in \mathbb{Q}_p[\xi_1, ..., \xi_n]$ como un polinomio homogéneo no constante que se anula solamente en el origen, considera el operador

$$f(D,\alpha)\,\varphi = \mathcal{F}^{-1}(|f(\xi)|_p^{\alpha}\,\mathcal{F}\varphi)$$

y establece la existencia de una solución fundamental para ecuaciones pseudodiferenciales p-ádicas con símbolos polinomiales.

En [4] Casas-Sánchez y Zúñiga-Galindo, estudian los núcleos de Riesz

$$k_\alpha(x) = \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-2}}\,|f(x)|_p^{\alpha-2}\,, \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \alpha \neq 2 + \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\ln p}\mathbb{Z},$$

donde f es una forma cuadrática elíptica de dimensión 4 y encuentran que k_α visto como una distribución en $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^4)$, admite una continuación analítica dada por

$$\langle k_\alpha, \varphi\rangle = \varphi(0)\frac{1-p^{-2}}{1-p^{\alpha-2}}$$
$$+\frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-2}}\left[\int_{\|x\|_p>1}\varphi(x)\,|f(x)|_p^{\alpha-2}\,d^4x+\int_{\|x\|_p\leq 1}(\varphi(x)-\varphi(0))\,|f(x)|_p^{\alpha-2}\,d^4x\right]$$

para todo $\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq 2+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\ln p}\mathbb{Z}$.
También demuestran que k_α tiene estructura de semigrupo de convolución, es decir que $k_{\alpha+\beta}=k_\alpha * k_\beta$ para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

En este trabajo definimos para el símbolo $\langle x\rangle=$ máx $\{|x|_p\,,p^\gamma\}$ su núcleo de Riesz como

$$k_\alpha(x)=\left[\frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}}|x|_p^{-\alpha-1}+p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^\alpha}{1-p^{\alpha+1}}\right]\Omega(p^\gamma|x|_p),$$

excepto en los polos donde se define como en la Definición 2.2, y buscamos la continuación analítica del símbolo como función de α.

La razón de esta definición es que la transformada de Fourier de k_α está dada por $\widehat{k_\alpha}=\langle\xi\rangle^\alpha$ para todo $\alpha\in\mathbb{C}$, ver Teorema 2.3.

Adicionalmente mostramos que la familia de núcleos k_α se comporta como un semigrupo de convolución, esto es, $k_\alpha * k_\beta = k_{\alpha+\beta}$ para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, ver Teorema 2.4. Esto nos permite resolver fácilmente la ecuación $D^\alpha u=\psi$, pues es posible escribir el operador como $D^\alpha u = k_\alpha * u=\psi$, con lo que obtenemos la solución fundamental $u=k_{-\alpha}*\psi$, ver Teorema 2.6.

Capítulo 1

Resultados acerca de los números p-ádicos

A continuación enunciamos algunos hechos básicos que serán de utilidad a lo largo del documento, las demostraciones son bien conocidas y pueden consultarse por ejemplo en [1], [7] o [10], incluiremos solo algunas de las más interesantes.

Inicialmente en las Secciones 1.1, 1.2 y 1.3 damos la definición de norma sobre cualquier campo y mostramos condiciones necesarias y suficientes para que dos normas definidas en él sean equivalentes; luego se define la norma p-ádica sobre el campo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, se muestra un teorema importante acerca de la no existencia de otras normas diferentes a la usual y a la p-ádica sobre $\mathbb{Q}$ y se menciona cómo realizar la construcción de $\mathbb{Q}_p$ como la completación de $\mathbb{Q}$ respecto a la Norma p-ádica.

Seguidamente en la Sección 1.5 se mencionan algunas propiedades que cumple la topología no-arquimediana de $\mathbb{Q}_p$ que permitirán calcular integrales sobre algunos subconjuntos de este espacio, luego en la Sección 1.6 se define la medida de Haar sobre $\mathbb{Q}_p$, con la cual se podrá hacer integración; se calculan algunas integrales simples y se enuncia el Teorema de Fubini que bajo ciertas condiciones permite cambiar el orden de integración, así como el Teorema de la Convergencia Dominada que posibilita intercambiar un límite con el símbolo de integral.

Finalmente en la Sección 1.7 se definen las funciones de prueba y distribuciones en $\mathbb{Q}_p$ y se muestran algunas propiedades de la transformada de Fourier de una distribución; también allí se definen el producto directo y la convolución de distribuciones y se exhiben algunas propiedades de estas dos operaciones.

1.1. Normas sobre un campo

Definición 1.1. *Sea F un campo. Una norma sobre F es una aplicación $\|\cdot\| : F \to [0, \infty)$ tal que:*

(1) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(2) Para todo $x, y \in F$, $\|xy\| = \|x\|\|y\|$.

(3) Para todo $x, y \in F$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

Decimos que una norma $\|\cdot\|$ es **trivial** si $\|0\| = 0$ y $\|x\| = 1$ para todo $x \neq 0$; una norma se dice **no-arquimediana** si satisface la desigualdad triangular fuerte, es decir para todo $x, y \in F$ se tiene $\|x + y\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$.

Naturalmente toda norma sobre un campo F induce una métrica sobre F definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, la cual genera una topología sobre F.

Definición 1.2. *Dos normas $\|x\|_1$ y $\|x\|_2$ sobre F son **equivalentes** si las métricas inducidas por ellas generan la misma topología sobre F.*

Un criterio para decidir cuándo dos normas sobre F son equivalentes lo da el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sean $\|x\|_1$ y $\|x\|_2$ dos normas sobre un campo F. Entonces ellas son equivalentes si y sólo si existe un número real positivo α tal que*

$$\|x\|_1 = \|x\|_2^\alpha \qquad \forall x \in F.$$

Demostración. Ver Teorema 1.2.2, Página 3 de [1]. □

El caso que nos interesa es $F = \mathbb{Q}$, el campo de los números racionales, nos preguntamos cuántas normas existen sobre $\mathbb{Q}$ y si es posible caracterizarlas.

Proposición 1.1. *La aplicación $\|x\| = |x|^\alpha$ es una norma sobre $\mathbb{Q}$ si y sólo si $\alpha \leq 1$, en este caso es equivalente a la norma usual $|x|$.*

Demostración. Sea $\alpha \leq 1$, es inmediato que se cumplen las propiedades (1) y (2) de la Definición 1.1; verifiquemos la desigualdad triangular. Supongamos sin perder generalidad que $|y| \leq |x|$, entonces

$$\begin{aligned} |x + y|^\alpha &\leq (|x| + |y|)^\alpha = |x|^\alpha \left(1 + \frac{|y|}{|x|}\right)^\alpha \\ &\leq |x|^\alpha \left(1 + \frac{|y|}{|x|}\right) \leq |x|^\alpha \left(1 + \frac{|y|^\alpha}{|x|^\alpha}\right) \leq |x|^\alpha + |y|^\alpha. \end{aligned}$$

Si $\alpha > 1$, la desigualdad triangular no se cumple, por ejemplo $|1 + 1|^\alpha = 2^\alpha > |1|^\alpha + |1|^\alpha = 2$. □

El siguiente teorema nos muestra un criterio para que una norma sea no-arquimediana.

Teorema 1.2. *Una norma $\|\cdot\|$ sobre F es no-arquimediana si y sólo si $\|n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde $n = n \cdot 1_F$.*

Demostración. Ver Teorema 1.2.4, Página 4 de [1]. □

De este resultado se deduce trivialmente la siguiente propiedad de cualquier norma no-arquimediana.

Proposición 1.2. *Si un campo normado F es no-Arquimediano, entonces para todo $x, y \in F$*

$$\|x\| \neq \|y\| \Longrightarrow \|x + y\| = \textit{máx}\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Demostración. Ver Proposición 1.2.6, Página 5 de [1]. □

1.2. Norma p-ádica

Se sabe que el valor absoluto usual es una norma sobre $\mathbb{Q}$, es natural preguntarse si existen otras normas no equivalentes a ésta y además no triviales, veremos como describir tales normas.

Definición 1.3. *Sea p un número primo. Definimos el orden p-ádico $ord_p(x)$ de un número racional $x \in \mathbb{Q}$ de la siguiente manera*

(i) *Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $ord_p(x)$ es la mayor potencia de p que divide a x.*

(ii) *Si $x = \dfrac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $ord_p(x) = ord_p(a) - ord_p(b)$.*

(iii) *$ord_p(0) = \infty$.*

Se puede demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$\mathrm{ord}_p(xy) = \mathrm{ord}_p(x) + \mathrm{ord}_p(y),$$

$$\mathrm{ord}_p(x + y) \geq \mathrm{mín}\{\mathrm{ord}_p(x), \mathrm{ord}_p(y)\},$$

ver por ejemplo en la Página 7 de [1]. De donde se deduce que la aplicación $|\cdot| : \mathbb{Q} \to [0, \infty)$ definida como

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-ord_p(x)} & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

es una norma no-arquimediana sobre $\mathbb{Q}$.

Un resultado importante dice que no existen otras normas sobre $\mathbb{Q}$ no equivalentes y no triviales además de $|\cdot|$ y $|\cdot|_p$.

Teorema 1.3 (**Ostrowski**). *Toda norma no trivial $\|.\|$ sobre el campo $\mathbb{Q}$ es equivalente o bien a la norma usual $|.|$ o bien a la norma p-ádica $|.|_p$ para algún primo p*

Demostración. Analizaremos solamente el caso en el que $\|\cdot\|$ es no-Arquimediana, entonces por el Teorema 1.2 tenemos que $\|n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como esta norma es no trivial entonces podemos escoger el más pequeño $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|n_0\| < 1$. Mostraremos que tal n_0 debe ser primo. En efecto si tuvieramos $n_0 = n_1 n_2$ con n_1 y n_2 enteros positivos menores que n_0, se tendría que $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$, y por lo tanto $\|n_0\| = 1$, que es una contradicción, así que n_0 debe ser un número primo. Llamemos a este primo p.

Probamos ahora que si $n \in \mathbb{Z}$ no es divisible por p, entonces $\|n\| = 1$. Por el algoritmo de la división tenemos que $n = rp + s$, donde $0 < s < p$. Por la minimalidad de p, $\|s\| = 1$. También se tiene que $\|rp\| < 1$ puesto que $\|p\| < 1$ y $\|r\| < 1$. En consecuencia

$$\|n - s\| = \|rp\| < 1$$

y por la Proposición 1.2 $\|n\| = \|(n - s) + s\| = \text{máx}\{\|n - s\|, \|s\|\} = \|s\| = 1$. Finalmente, cualquier $n \in \mathbb{Z}$, se puede expresar en la forma $n = p^k r$, donde r no es divisible por p, entonces

$$\|n\| = \|p^k r\| = \|p\|^k,$$

sea $u := \|p\| < 1$, entonces $u = \left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha}$ para algun real positivo α. Luego

$$\|n\| = \left(\frac{1}{p}\right)^{k\alpha} = |n|_p^{\alpha}$$

Ahora usando la propiedad (2) de la norma, es inmediato que la fórmula anterior se mantiene reemplazando n por cualquier racional distinto de cero x. En virtud del Teorema 1.1, tenemos que $\|.\|$ es equivalente a $|.|_p$. Con esto el teorema queda probado para este caso. $\square$

1.3. Completación de un campo normado

Recordemos que un campo normado $(F, \|.\|)$ es completo si toda sucesión de Cauchy en F converge a un elemento de F. Si tenemos un campo normado arbitrario $(F, \|.\|)$ no necesariamente completo, es posible construir un campo F^* completo que contiene a F y que está dotado de una norma inducida por la norma $\|.\|$ de F, para ello en el conjunto $\{F\}$ de todas las sucesiones de Cauchy en F definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$(a_n)_n \sim (b_n)_n \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0,$$

Lo que nos permite definir

$$F^* = \{F\}/\sim,$$

el cual resulta ser un campo normado completo con las operaciones y norma dadas por

$$[(a_n)_n] + [(b_n)_n] = [(a_n + b_n)_n],$$

$$[(a_n)_n] \cdot [(b_n)_n] = [(a_n \cdot b_n)_n],$$

$$\|[(a_n)_n]\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|.$$

Se puede demostrar fácilmente que estas expresiones no dependen del representante, además F resulta ser isomorfo a un sub-campo de F^* dado que se puede identificar a F con el conjunto de clases de la forma $[\{a, a, a, ...\}]$ con $a \in F$, a este campo F^* se le conoce como el completado de F.

En particular para el campo $\mathbb{Q}$ se puede construir su completado con respecto a la norma $|\cdot|_p$ el cual se denota por $\mathbb{Q}_p$, el **campo de los números p-ádicos**.

Además los elementos de $\mathbb{Q}_p$ son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ con respecto a la norma p-ádica y $\mathbb{Q}$ puede ser identificado como un sub-campo de $\mathbb{Q}_p$ que consiste de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy constantes. Para $x \in \mathbb{Q}_p$ sea $(x_n)_n$ un representante de su clase, entonces es posible definir la norma p-ádica como

$$|x|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p.$$

1.4. Representación canónica de los números p-ádicos

Todo número p-ádico $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$ puede ser representado de manera única mediante la siguiente forma canónica

$$x = p^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^j$$

donde $\gamma = \gamma(x) = ord_p(x) \in \mathbb{Z}$, $x_0 \neq 0$, $x_j \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$, $j = 0, 1, 2, ...$, esta serie es convergente con la norma p-ádica.

En virtud de esta representación, definimos la parte fraccionaria de $x \in \mathbb{Q}_p$ de la siguiente manera

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } ord_p(x) \geq 0, \\ p^{ord_p(x)} \sum_{j=0}^{-ord_p(x)-1} x_j p^j & \text{si } ord_p(x) < 0. \end{cases}$$

El conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\},$$

esto es, tales que $ord_p(x) \geq 0$ o $\{x\}_p = 0$, es llamado el anillo de los **enteros p-ádicos**. Es fácil verificar que $\mathbb{Z}_p$ consiste de todos los números p-ádicos de la forma

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k$$

y resulta ser un subanillo de $\mathbb{Q}_p$.

1.5. Topología no-arquimediana sobre $\mathbb{Q}_p$

La norma $|\cdot|_p$ induce una métrica sobre $\mathbb{Q}_p$ definida como $d_p(x-y) = |x-y|_p$, que hace de $\mathbb{Q}_p$ un espacio métrico completo.

A partir de esta métrica consideramos la topología donde las bolas y las esferas se definen de la siguiente manera

$$B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq p^\gamma\},$$
$$S_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p = p^\gamma\}.$$

Esta topología cumple ciertas propiedades interesantes y que no ocurren en $\mathbb{R}$, por ejemplo, dadas dos bolas o son disyuntas o una está contenida en la otra; cada punto de una bola es su centro; el conjunto de todas las bolas es numerable; entre otras. Una de las propiedades importantes de esta topología es que permite expresar a $\mathbb{Q}_p$ como unión numerable de esferas disyuntas S_γ de la siguiente manera

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{\gamma=-\infty}^{\infty} S_\gamma(0) = \bigcup_{\gamma=-\infty}^{\infty} \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = p^\gamma\}, \tag{1.1}$$

que nos permitirá definir las integrales sobre $\mathbb{Q}_p$ como la suma (infinita) de integrales sobre esferas.

Las demostraciones de estas propiedades de la topología de $\mathbb{Q}_p$ pueden ser consultadas en la Sección 1.8, Página 21 de [1].

1.6. Integración p-ádica y medida de Haar

Como $(\mathbb{Q}_p, +)$ es un grupo abeliano topológico localmente compacto, se tiene que existe una medida de Haar, dx, que es invariante bajo traslaciones (es decir que $dx = d(x+a)$ para todo $a \in \mathbb{Q}_p$); dicha medida es única si se normaliza mediante la relación $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$, donde $\mathbb{Z}_p = B_0(0)$ es el anillo de los enteros p-ádicos.

Gracias a la expresión de $\mathbb{Q}_p$ como unión de esferas disyuntas (1.1) es posible definir la integral impropia de una función de variable p-ádica como

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \int_{S_\gamma} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{N} \int_{S_\gamma} f(x)dx,$$

siempre que la serie sea convergente.

Como es frecuente en teoría de integración, se pueden hacer cambios de variable, para ello basta notar que $d(x+a) = dx$, para a una constante. Pero la propiedad más importante es que

$$d(ax) = |a|_p dx,$$

que se usará en las integrales que se muestran en la sección siguiente. La demostración se puede consultar en el la Proposición 3.2.1, Página 48 de [1].

1.6.1. Algunas integrales simples

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, se deducen ciertas integrales elementales como

$$\int_{B_\gamma} dx. \tag{1.2}$$

Haciendo el cambio de variable $y = p^\gamma x$ se tiene que $dy = |p^\gamma|_p dx = p^{-\gamma} dx$, como $x \in B_\gamma$, esto es $|x|_p \leq p^\gamma$, entonces $|y|_p = |p^\gamma x|_p = p^{-\gamma}|x|_p \leq p^{-\gamma}p^\gamma = 1$, i.e. $y \in \mathbb{Z}_p$, luego la integral (1.2) se convierte en

$$\int_{B_0} p^\gamma dy = p^\gamma \int_{\mathbb{Z}_p} dy = p^\gamma. \tag{1.3}$$

Usando el ejemplo anterior tenemos que

$$\int_{S_\gamma} dx = \int_{B_\gamma} dx - \int_{B_{\gamma-1}} dx = p^\gamma - p^{\gamma-1} = p^\gamma \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.1. *A partir de* (1.2) *y* (1.3) *se tiene que para* $Re(\alpha) > 0$

$$\begin{aligned}\int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1} dx &= \sum_{k=-\infty}^{0} \int_{S_k} |x|_p^{\alpha-1} dx = \sum_{k=-\infty}^{0} p^{k(\alpha-1)} \int_{S_k} dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{0} p^{k(\alpha-1)} \left(p^k - p^{k-1}\right) \\ &= \left(1 - p^{-1}\right) \sum_{k=-\infty}^{0} p^{k\alpha} = \left(1-p^{-1}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \left(p^{-\alpha}\right)^r = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Note que la serie en (1.5) *converge si* $p^{-\alpha} < 1$ *y esto es equivalente a* $Re\ (\alpha) > 0$.

Sea χ_p el carácter aditivo definido por

$$\chi(x) = \chi_p\,(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}. \tag{1.6}$$

Se dice aditivo porque satisface

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y), \quad |\chi(x)| = 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}_p.$$

Entonces tenemos el siguiente resultado

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(x\xi) d\xi = \begin{cases} p^\gamma & \text{si } |x|_p \leq p^{-\gamma}, \\ 0 & \text{si } |x|_p \geq p^{-\gamma+1}. \end{cases} \tag{1.7}$$

En efecto, si $|x|_p \leq p^{-\gamma}$ entonces $|x\xi|_p \leq 1$, luego $x\xi \in \mathbb{Z}_p$ y así $\{x\xi\}_p = 0$, de donde $\chi_p(x\xi) = e^0 = 1$, luego por (1.3) se obtiene la relación (1.7).

Ahora si $|x|_p \geq p^{-\gamma+1}$, entonces $|x|_p p^{\gamma} \geq p$, esto es $|p^{-\gamma}x|_p \geq p$; por lo tanto $\chi_p(p^{-\gamma}x) \neq 1$. Luego haciendo el cambio de variable $y = \xi + p^{-\gamma}$, y teniendo en cuenta que en $\mathbb{Q}_p$ todo punto de una bola es su centro, obtenemos

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(x\xi)d\xi = \int_{B_\gamma(p^{-\gamma})} \chi_p\left(x\left(y - p^{-\gamma}\right)\right)dy = \chi_p\left(-xp^{-\gamma}\right)\int_{B_\gamma} \chi_p(xy)\,dy,$$

lo que implica la segunda igualdad en (1.7).

Sea A un subconjunto medible en $\mathbb{Q}_p$. Denotamos por $\mathcal{L}^p(A)$ al conjunto de todas las funciones medibles $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{Q}_p$, tales que

$$\int_A |f(x)|^p dx < \infty.$$

Para cada $f \in \mathcal{L}^p(A)$, se define la norma como

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposición 1.3. *Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{Q}_p$ y sea $C_0(\mathcal{O})$ el conjunto de todas las funciones φ con soporte compacto en $\mathcal{O}$. Entonces $C_0(\mathcal{O})$ es denso en $\mathcal{L}^p(\mathcal{O})$, $1 \leq p < \infty$*

Demostración. Ver la Proposición 3.2.2, Página 49 de [1]. □

Definición 1.4. *Sea $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{Q}_p$ un subconjunto abierto. Denotamos por $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathcal{O})$ al conjunto de todas las funciones $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ tales que $f \in \mathcal{L}^1(K)$ para todo compacto $K \subseteq \mathcal{O}$. Es claro que $\mathcal{L}^1(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{L}^1_{loc}(\mathcal{O})$.*

Teorema 1.4. *Si una función $f : \mathbb{Q}_p^2 \to \mathbb{C}$ es tal que la integral iterada*

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\left(\int_{\mathbb{Q}_p} f(x,y)dy\right)dx$$

existe entonces $f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{Q}_p^2\right)$ y las siguientes igualdades se tienen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_p}\left(\int_{\mathbb{Q}_p} f(x,y)dy\right)dx &= \int_{\mathbb{Q}_p^2} f(x,y)dydx \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p}\left(\int_{\mathbb{Q}_p} f(x,y)dx\right)dy.\end{aligned}$$

Demostración. Ver Teorema 3.2.3, Página 50 de [1]. □

1.6.2. Convergencia dominada

Ahora presentamos un resultado que indica bajo qué condiciones se puede intercambiar el límite con el símbolo de integral, el cual es conocido como el **Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue** para $\mathbb{Q}_p$.

Teorema 1.5. *Si una sucesión de funciones $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p)$, $k \to \infty$, converge casi en toda parte en $\mathbb{Q}_p$ a una función f, es decir*

$$f_k(x) \to f(x), \qquad k \to \infty, \qquad x \in \mathbb{Q}_p$$

y existe una función $\psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ tal que

$$|f_k(x)| \leq |\psi(x)|, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad x \in \mathbb{Q}_p$$

entonces se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_k(x)dx = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx$$

Demostración. Ver Teorema 3.2.4, Página 50 de [1]. □

Cabe destacar que si en el Teorema 1.5 cambiamos **sucesión de funciones** f_k por **colección de funciones** f_α, $\alpha \to a \in \mathbb{C}$, el resultado también se mantiene.

1.7. Funciones de prueba y distribuciones

Definición 1.5. *Una función $\varphi : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ es localmente constante si para cada $x \in \mathbb{Q}_p$ existe un entero $l(x)$ tal que $\varphi(x + x') = \varphi(x)$ para todo $x' \in B_{l(x)}(x)$, el conjunto de las funciones localmente constantes lo notaremos por $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p)$*

Ejemplo 1.2. *Los caracteres aditivos definidos por $\chi(x) = \chi_p(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}$ son funciones localmente constantes.*

Ejemplo 1.3. *También lo es la función característica de la bola $B_l(a)$ definida por*

$$\Delta_l(x-a) = \Omega(p^{-l}|x-a|_p), \qquad a \in \mathbb{Q}_p, \qquad x \in \mathbb{Q}_p$$

donde

$$\Omega(t) = \begin{cases} 1, & si \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \\ 0, & si \qquad t > 1, \end{cases}$$

es la función característica en el intervalo $[0,1]$, pues se cumple que $\Delta_l(x + y + a) = \Delta_l(x-a)$ para todo $y \in B_l$ y todo $x \in \mathbb{Q}_p$, en efecto si suponemos que $|x-a|_p \leq p^l$, se tiene que $\Delta_l(x-a) = 1$ y

$$|x+y-a|_p \leq máx\{|x-a|_p, |y|_p\} \leq p^l$$

con lo cual $\Delta_l(x+y-a)=1$. *Ahora suponiendo que* $|x-a|>p^l$, *tenemos que* $\Delta_l(x-a)=0$, *y como* $|y|\leq p^l$, *entonces* $|x-a|_p \neq |y|_p$, *luego por la Proposición 1.2, se tiene que*

$$|x+y-a|_p = máx\{|x-a|_p, |y|_p\} = |x-a|_p > p^l$$

con lo cual $\Delta(x+y-a)=0$, *y así se tiene el resultado.*

Teorema 1.6. *Sea* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p)$ *y sea* K *un subconjunto compacto de* $\mathbb{Q}_p$, *entonces existe* $l \in \mathbb{Z}$ *tal que*

$$\varphi(x+y)=\varphi(x), \quad y\in B_l, \quad x\in K.$$

Demostración. Ver Lema 4.2.1, Página 55 de [1]. □

La convergencia en $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p)$ es definida de la siguiente manera: $\psi_k \to 0$, $k\to\infty$ en $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p)$ si para todo compacto $K \subseteq \mathbb{Q}_p$

$$\psi_k \overset{x\in K}{\Longrightarrow} 0, \qquad k\to\infty$$

donde $\Longrightarrow$ denota la convergencia uniforme.

Definición 1.6. *Una función* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p)$ *es una* ***función de prueba*** *si su soporte es compacto, el conjunto de todas las funciones de prueba será denotado por* $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, *también conocido como espacio de Bruhat-Schwartz.*

Denotamos por $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ *el conjunto de todos los funcionales lineales sobre* $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, *el cual es llamado el conjunto de distribuciones en* $\mathbb{Q}_p$.

Ejemplo 1.4. *Se puede comprobar fácilmente que las funciones* $\Delta_l(x)$ *y* $\Delta_l(x)\chi_p(x)$ *son funciones de prueba.*

Por el Teorema 1.6 se tiene que si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, entonces existe $l\in\mathbb{Z}$ tal que

$$\varphi(x+y)=\varphi(x), \quad y\in B_l, \quad x\in\mathbb{Q}_p. \tag{1.8}$$

Definición 1.7. *El mayor de todos los números enteros* $l=l(\varphi)$ *que satisfacen* (1.8) *es llamado el* ***parámetro de constancia*** *de la función* φ.

1.7.1. Transformada de Fourier de una función de prueba

Para cada $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ y cada $\xi\in\mathbb{Q}_p$ definimos la Transformada de Fourier $\mathcal{F}\varphi$ como

$$\widehat{\varphi}(\xi)=(\mathcal{F}\varphi)(\xi)=\int_{\mathbb{Q}_p}\chi_p(\xi x)\varphi(x)dx.$$

Teorema 1.7. *La transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ en $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, con lo cual existe la transformada inversa que está dada por la siguiente fórmula de inversión*

$$(\mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi})(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(-\xi x)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\varphi\right](-\xi)\right](x) = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\varphi\right]\right](-x) = \varphi(x). \tag{1.9}$$

Demostración. Ver Teorema 4.8.2, Página 69 de [1]. □

La transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ de una distribución $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ se define mediante la siguiente relación

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p). \tag{1.10}$$

Denotamos por $\mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p)$ al espacio de dimensión finita de todas las funciones de prueba con soporte en la bola B_N y parámetro de constancia l (Ver sección 4.3, Página 56 de [1]). La convergencia en $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ es definida de la siguiente manera: $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ en $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ si y sólo si

(i) $\varphi_k \in \mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p)$ donde N y l no dependen de k.

(ii) $\psi_k \overset{x\in\mathbb{Q}_p}{\Longrightarrow} 0$, $\;k \to \infty$, donde $\Longrightarrow$ denota la convergencia uniforme.

1.7.2. El espacio vectorial $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$

Toda función $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{Q}_p)$ define una distribución $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ por medio de la fórmula

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\varphi(x)dx.$$

Además tenemos que para $a \in \mathbb{C}$ y $\varphi, \mu \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$

$$\langle f, a\varphi + \mu \rangle = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\left(a\varphi + \mu\right)(x)dx = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\left(a\varphi(x) + \mu(x)\right)dx$$

$$= a\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\varphi(x)dx + \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\mu(x)dx = a\langle f, \varphi \rangle + \langle f, \mu \rangle.$$

Así f es lineal, ahora mostramos que f es continua y está bien definida como distribución de la siguiente manera: se tiene que $|\varphi(x)| \le \|\varphi\|_{C(\mathrm{supp}(\varphi))}$, donde $\|\varphi\|_{C(\mathrm{supp}(\varphi))} = \max\{|\varphi(x)| : x \in \mathrm{supp}(\varphi)\}$, de donde $|\varphi(x)f(x)| \le \|\varphi\|_{C(\mathrm{supp}(\varphi))}|f(x)|$ y como $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$ también $f\varphi \in \mathcal{L}^1_{loc}$ y

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\varphi(x)dx \right| \le \int_{\mathbb{Q}_p} |f(x)\varphi(x)|dx \le \left(\int_{\mathbb{Q}_p} |f(x)|dx \right) \|\varphi\|_{C(\mathrm{supp}(\varphi))}.$$

Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{Q}_p$. Decimos que una distribución $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ se anula sobre $\mathcal{O}$, o que $f(x) = 0$, $x \in \mathcal{O}$, si $\langle f, \varphi \rangle = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Denotamos el **soporte** de f por $\text{supp}(f)$; y decimos que $x \in \text{supp}(f)$ si f no se anula en ninguna vecindad del punto x.

La convergencia en $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ se define como la convergencia débil de operadores de la siguiente manera: $f_k \to 0$, $k \to \infty$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ si

$$\langle f_k, \varphi \rangle \to 0, \quad k \to \infty, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p).$$

Definición 1.8. *La función δ de Dirac es definida por*

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p).$$

Es inmediato que $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ y que $\delta(x) = 0$ para todo $x \neq 0$; de donde $\text{supp}(\delta) = \{0\}$.

Definimos en $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ una **1-sucesión canónica** como

$$\Delta_k(x) = \Omega(p^{-k}|x|_p), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

y una **δ-sucesión canónica** como

$$\delta_k(x) = p^k \Omega(p^k |x|_p), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Se tiene que $\Delta_k \to 1$, $k \to \infty$, en $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p)$; en efecto, sea $K \subseteq \mathbb{Q}_p$ compacto, entonces $K \subseteq B_N$ para algún $N \in \mathbb{Z}$, luego para todo $x \in K$ y todo $k \geq N$ se cumple que $|x|_p \leq p^N$, de donde $p^{-k}|x|_p \leq p^{N-k} \leq 1$, con lo cual $\Omega\left(p^{-k}|x|_p\right) = 1$ para todo $k \geq N$ y todo $x \in K$.

También se cumple que $\delta_k \to \delta$ $k \to \infty$, en $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$, la demostración de hecho puede ser consultada por ejemplo en la Página 61 de [1].

Definición 1.9. *Sean $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$. Su producto directo se define por medio de la fórmula*

$$\langle f(x) \times g(y), \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^2)$$

La demostración de que esta operación está bien definida como distribución puede consultarse en la Sección 4.5, Página 63 de [1].

Definición 1.10. *Sean $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$. La convolución de estas distribuciones está definida como el funcional lineal*

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle f(x) \times g(y), \Delta_k(x) \varphi(x + y) \rangle, \tag{1.11}$$

siempre que el límite exista.

Enunciamos ahora algunas propiedades que cumple esta convolución, cuyas demostraciones pueden ser consultadas, por ejemplo en [1] y [10].

Teorema 1.8. *Si* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$*,* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ *entonces*

$$(f * \psi)(x) = \langle f(y), \psi(x-y) \rangle \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p), \; x \in \mathbb{Q}_p.$$

Demostración. Ver Proposición 4.7.3, Página 67 de [1]. □

Teorema 1.9. *Sean* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$*. Si la convolución* $f * g$ *existe, entonces también existe* $g * f$*, y ellas son iguales*

$$f * g = g * f.$$

Demostración. Ver Teorema 4.7.1, Página 65 de [1]. □

Teorema 1.10. *Si* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ *y supp* $g \subseteq B_N$ *entonces la convolución* $f * g$ *existe y*

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x) \times g(y), \Delta_N(y)\varphi(x+y) \rangle. \tag{1.12}$$

Demostración. Ver Lema 4.7.2, Página 66 de [1]. □

El siguiente teorema es tal vez el más importante de este capítulo, pues nos muestra el uso de la transformada de Fourier para alcanzar nuestro objetivo, pues transforma convolución en producto, lo que nos permite resolver la ecuación $D^\alpha u = k_\alpha * u = \psi$.

Teorema 1.11. *Si para las distribuciones* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ *la convolución* $f * g$ *existe, entonces*

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g] \tag{1.13}$$

Demostración. Ver Teorema 4.9.5, Página 74 de [1]. □

Teorema 1.12. *Para todo* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$

$$f * \delta = \delta * f = f,$$

esto es, la delta de Dirac actúa como elemento neutro para la convolución.

Demostración. Ver Ejemplo 4.7.1, Página 66 de [1]. □

Capítulo 2

Estudio del símbolo $\langle x\rangle^{\alpha}$ y su núcleo de Riesz k_{α}.

En este capítulo iniciamos calculando la integral sobre $\mathbb{Q}_p$ de $\langle x\rangle^{\alpha}$ y se establece que $\langle x\rangle^{\alpha} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p)$; para Re $(\alpha) < -1$, ver Teorema 2.1; luego mostramos que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene que $\langle x\rangle^{\alpha} \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$, ver Teorema 2.2.

Seguidamente definimos el núcleo de Riesz k_{α} (Re $\alpha < 0$) como la transformada de Fourier del símbolo $\langle x\rangle^{\alpha}$, ver Definición 2.1. En la Definición 2.2 extendemos la definición de k_{α} para todo α complejo.

Finalmente en las Secciones 2.3, 2.4 y 2.5 se establece la existencia de la convolución $k_{\alpha} * k_{\beta}$ como distribución para todos los valores complejos de α y β (ver Teorema 2.4), y se muestra que $k_{\alpha} * k_{\beta} = k_{\alpha+\beta}$, en otras palabras, los núcleos k_{α} se comportan como un semigrupo de convolución, lo que permite resolver fácilmente la ecuación $D^{\alpha}u = \varphi$ de la siguente manera:

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}u &= \psi \\
k_{\alpha} * u &= \psi \\
k_{-\alpha} * (k_{\alpha} * u) &= k_{-\alpha} * \psi \\
(k_{-\alpha} * k_{\alpha}) * u &= k_{-\alpha} * \psi \\
k_0 * u &= k_{-\alpha} * \psi \\
\delta * u &= k_{-\alpha} * \psi \\
u &= k_{-\alpha} * \psi
\end{aligned}$$

(ver Teoremas 2.5 y 2.6).

2.1. Transformada de Fourier del símbolo $\langle x\rangle^{\alpha}$

Empezamos calculando la integral del símbolo $\langle x\rangle^{\alpha}$ sobre todo $\mathbb{Q}_p$ de la siguiente manera

Teorema 2.1. *Para Re* $(\alpha) < 1$, $\langle x\rangle^{\alpha} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Q}_p} \langle x\rangle^{\alpha} dx &= \int_{\mathbb{Q}_p} (\text{máx}\{|x|_p, p^{\gamma}\})^{\alpha} dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{S_k} (\text{máx}\{|x|_p, p^{\gamma}\})^{\alpha} dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\text{máx}\{p^k, p^{\gamma}\})^{\alpha} \int_{S_k} dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\text{máx}\{p^k, p^{\gamma}\})^{\alpha} p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\gamma} (p^{\gamma})^{\alpha} p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \sum_{k=\gamma+1}^{\infty} (p^k)^{\alpha} p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{\gamma\alpha} \sum_{s=-\gamma}^{\infty} \frac{1}{p^s} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=\gamma+1}^{\infty} (p^{\alpha+1})^k.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Haciendo $j = s + \gamma$ y $l = k - \gamma - 1$ en la primera y segunda sumatoria respectivamente, se tiene que la integral (2.1) se convierte en

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[p^{\gamma\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j+\gamma} + \sum_{l=0}^{\infty} \left(p^{\alpha+1}\right)^{l+\gamma+1} \right] \\
&= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[p^{\gamma\alpha+\gamma} \left(\frac{1}{1-p^{-1}}\right) + \left(p^{\alpha+1}\right)^{\gamma+1} \frac{1}{1-p^{\alpha+1}} \right] \\
&= p^{\gamma\alpha+\gamma} + \frac{p^{(\alpha+1)(\gamma+1)}\left(1-p^{-1}\right)}{1-p^{\alpha+1}} \\
&= p^{\gamma\alpha+\gamma} + \frac{p^{(\alpha+1)(\gamma+1)} - p^{(\alpha+1)(\gamma+1)-1}}{1-p^{\alpha+1}} \\
&= \frac{p^{\gamma\alpha+\gamma} - p^{\gamma\alpha+\gamma+\alpha+1} + p^{\gamma\alpha+\gamma+\alpha+1} - p^{\gamma\alpha+\alpha+\gamma}}{1-p^{\alpha+1}} \\
&= \frac{p^{\gamma\alpha+\gamma}\left(1-p^{\alpha}\right)}{1-p^{\alpha+1}}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Notemos que la serie del segundo sumando en (2.2) converge solamente cuando $|p^{\alpha+1}| < 1$, es decir que si $\alpha = a + bi$ entonces

$$|p^{\alpha+1}| = |p^{a+1+bi}| = |p^{a+1}||p^{bi}| = |p^{a+1}||\exp(ib\ \text{ln}p)| = |p^{a+1}| = p^{a+1} < 1$$

esto se tiene cuando $a + 1 < 0$, es decir $\text{Re}(\alpha) < -1$, luego la integral existe sólo para estos valores. $\square$

Además la función del Teorema 2.1 tiene singularidades donde $1-p^{\alpha+1}=0$, es decir $p^{a+1+bi}=1$, luego

$$p^{a+1}\left(\exp\left(ib\ \ln p\right)\right)=1$$

$$p^{a+1}\left(\cos\left(b\ \ln p\right)+i\mathrm{sen}\left(b\ \ln p\right)\right)=1+0i.$$

De donde

$$p^{a+1}\cos\left(b\ \ln p\right)=1 \text{ y } p^{a+1}\mathrm{sen}\left(b\ \ln p\right)=0$$

Así $b=\dfrac{2k\pi i}{\ln p}$ con $k\in\mathbb{Z}$ y $p^{a+1}=1$, ósea $a=-1$, luego

$$\alpha=-1+\frac{2k\pi i}{\ln p} \tag{2.3}$$

con $k\in\mathbb{Z}$.

Teorema 2.2. *El símbolo $\langle x\rangle^{\alpha}$ es una función en $\mathcal{L}^1\left(\mathbb{Q}_p\right)$ que define una distribución en $\mathcal{D}'\left(\mathbb{Q}_p\right)$ como*

$$\left\langle\langle x\rangle^{\alpha},\varphi\right\rangle=\int_{\mathbb{Q}_p}\langle x\rangle^{\alpha}\varphi\left(x\right)dx;\ \ para\ \alpha\in\mathbb{C},\quad\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{Q}_p\right).$$

Demostración. Como φ tiene soporte compacto entonces existe el entero más pequeño k tal que supp $\varphi\subseteq B_k$, luego se tiene que

$$\begin{aligned}\left\langle\langle x\rangle^{\alpha},\varphi\right\rangle=\int_{\mathbb{Q}_p}\langle x\rangle^{\alpha}\varphi\left(x\right)dx&=\int_{B_k}\text{máx}\{|x|_p,p^{\gamma}\}^{\alpha}\varphi(x)dx\\&\leq\|\varphi\|_{B_k}\int_{B_k}\text{máx}\{|x|_p,p^{\gamma}\}^{\alpha}dx.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Si $k\leq\gamma$ entonces $|x|_p\leq p^k\leq p^{\gamma}$, luego por (2.4) se tiene que existe una constante $C=C\left(\text{supp }\varphi\right)>0$ tal que

$$\left\langle\langle x\rangle^{\alpha},\varphi\right\rangle\leq C\int_{B_k}p^{\gamma\alpha}dx<\infty.$$

Si $\gamma<k$ entonces

$$\begin{aligned}\int_{B_k}\text{máx}\{|x|_p,p^{\gamma}\}^{\alpha}dx&=\int_{|x|_p<p^{\gamma}}\text{máx}\{|x|_p,p^{\gamma}\}^{\alpha}dx+\int_{p^{\gamma}\leq|x|_p\leq p^k}\text{máx}\{|x|_p,p^{\gamma}\}^{\alpha}dx\\&=p^{\gamma k}p^{\gamma}+\int_{p^{\gamma}\leq|x|_p\leq p^k}|x|_p^{\alpha}dx=p^{\gamma\alpha+\gamma}+\sum_{j=\gamma}^{k}p^{j\alpha}\int_{|x|_p=p^j}dx\\&=p^{\gamma(\alpha+1)}+\sum_{j=\gamma}^{k}p^{j\alpha}p^{j}\left(1-p^{-1}\right)<\infty.\end{aligned}$$

Luego se concluye que para todo $\alpha\in\mathbb{C}$, $\langle x\rangle^{\alpha}$ define una distribución sobre $\mathcal{D}\left(\mathbb{Q}_p\right)$. $\square$

Análogo a la Ecuación (1.5) de [10], Página 117, definimos la distribución π_α por la formula:

$$\langle \pi_\alpha, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^\alpha \varphi(x)dx \quad \text{Re } (\alpha) > -1,$$

esta distribución admite una continuación analítica para todo $\alpha \neq -1 + \dfrac{2k\pi i}{\ln p}$ con $k \in \mathbb{Z}$, dada por

$$\langle |x|_p^\alpha, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{Q}_p\setminus B_\gamma} |x|_p^\alpha \varphi(x)dx + \int_{B_\gamma} |x|_p^\alpha \left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] dx + \varphi(0)\int_{B_\gamma} |x|_p^\alpha dx. \tag{2.5}$$

Utilizando (2.5) se tiene que

$$\langle |\xi|_p^\alpha, \hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^\alpha \hat{\varphi}\left(\xi\right) d\xi = \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^\alpha \left(\hat{\varphi}(\xi) + \hat{\varphi}(0) - \hat{\varphi}(0)\right) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_p\setminus B_\gamma} |\xi|_p^\alpha \hat{\varphi}\left(\xi\right) d\xi + \int_{B_\gamma} |\xi|_p^\alpha \left(\hat{\varphi}(\xi) - \hat{\varphi}(0)\right) d\xi + \hat{\varphi}(0)\int_{B_\gamma} |\xi|_p^\alpha d\xi. \tag{2.6}$$

Ahora teniendo en cuenta que $\langle x\rangle^\alpha = |x|_p^\alpha(1-\Omega(p^{-\gamma}|x|_p)) + p^{\gamma\alpha}\Omega(p^{-\gamma}|x|_p)$, calculamos $\langle |\xi|_p^\alpha \Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p), \hat{\varphi}\rangle$ de la siguiente manera

$$\langle |\xi|_p^\alpha \Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p), \hat{\varphi}\rangle = \langle |\xi|_p^\alpha, \Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p)\hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^\alpha \Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p)\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^\alpha \left[\Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p)\hat{\varphi}(\xi) + \Omega(p^{-\gamma}|0|_p)\hat{\varphi}(0) - \Omega(p^{-\gamma}|0|_p)\hat{\varphi}(0)\right] d\xi$$

$$\begin{aligned} = \int_{B_\gamma} |\xi|_p^\alpha \left[\Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p)\hat{\varphi}(\xi) - \Omega(p^{-\gamma}|0|_p)\hat{\varphi}(0)\right] d\xi + \int_{\mathbb{Q}_p\setminus B_\gamma} \Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p)\hat{\varphi}(\xi)|\xi|_p^\alpha d\xi \\ + \Omega(p^{-\gamma}|0|_p)\hat{\varphi}(0)\int_{B_\gamma} |\xi|_p^\alpha d\xi \end{aligned} \tag{2.7}$$

Restando (2.6) con (2.7) y teniendo en cuenta que en $\mathbb{Q}_p\setminus B_\gamma$, $1-\Omega\left(p^{-\gamma}|\xi|_p\right) = 1$; se tiene que

$$\begin{aligned} \langle |\xi|_p^\alpha (1-\Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p)), \hat{\varphi}\rangle &= \int_{\mathbb{Q}_p\setminus B_\gamma} \hat{\varphi}(\xi)|\xi|_p^\alpha d\xi \\ &= \int_{|\xi|_p > p^\gamma} |\xi|_p^\alpha \left(\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\varphi(x)dx\right) d\xi \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tenemos que en (2.8) la integral iterada

$$\int_{|\xi|_p > p^\gamma} |\xi|_p^\alpha \left(\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\varphi(x)dx \right) d\xi \tag{2.9}$$

existe, en efecto

$$\left| \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\varphi(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{Q}_p} |\chi_p(\xi x)\varphi(x)|\, dx = \int_{\mathbb{Q}_p} |\varphi(x)|\, dx \tag{2.10}$$

ya que $|\xi x| = 1$, también por la Proposición 1.3 tenemos que $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ por tener φ soporte compacto, de donde existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{Q}_p$

$$\left| \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\varphi(x)dx \right| \leq C. \tag{2.11}$$

Luego por (2.11) y (2.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\xi|_p > p^\gamma} |\xi|_p^\alpha \left(\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\varphi(x)dx \right) d\xi \right| &\leq C \left| \int_{|\xi|_p > p^\gamma} |\xi|_p^\alpha d\xi \right| \\ &= \left| \frac{C\left(1-p^{-1}\right)\left(p^{\alpha+1}\right)^{\gamma+1}}{1-p^{\alpha+1}} \right| \end{aligned}$$

Con lo cual la integral iterada (2.9) existe y así por el Teorema 1.4 se puede cambiar el orden de integración, con lo que la integral (2.9) se convierte en

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x) \left(\int_{|\xi|_p > p^\gamma} |\xi|_p^\alpha \chi_p(\xi x) d\xi \right) dx \tag{2.12}$$

Hacemos el cambio de variable $z = \xi x$ en (2.12), de donde $dz = |x|_p d\xi$ y $\xi = zx^{-1}$, luego la integral (2.12) se convierte en

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x) \left(\int_{|zx^{-1}|_p > p^\gamma} |zx^{-1}|_p^\alpha |x^{-1}|_p \chi_p(z) dz \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)|x|_p^{-\alpha-1} \left(\int_{|zx^{-1}|_p > p^\gamma} |z|_p^\alpha \chi_p(z) dz \right) dx. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Calculamos la integral interna en (2.13) haciendo $|x|_p p^\gamma = p^m$, considerando dos casos: cuando $|x|_p \geq p^{1-\gamma}$ y cuando $|x|_p \leq p^{-\gamma}$ y usando el siguiente resultado

$$\int_{|z|_p=p^k} \chi_p(z)dz = \begin{cases} p^k(1-p^{-1}) & \text{si } k \le 0, \\ -p^{k-1} & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k > 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

En el primer caso tenemos que $p^\gamma |x|_p \ge p$ por tanto $|z|_p > p$, de donde por (2.14)

$$\int_{|zx^{-1}|_p > p^\gamma} |z|^\alpha \chi_p(z)dz = \sum_{k=m+1}^{\infty} p^{\alpha k} \int_{|z|_p=p^k} \chi_p(z)dz = 0. \tag{2.15}$$

En el segundo caso, como $|x|_p \le p^{-\gamma}$ se tiene que $p^\gamma |x|_p \le 1$, de donde $p^m \le 1$ y así $m \le 0$, luego

$$\begin{aligned}
\int_{|zx^{-1}|_p > p^\gamma} |z|^\alpha \chi_p(z)dz &= \sum_{k=m+1}^{\infty} p^{\alpha k} \int_{|z|_p=p^k} \chi_p(z)dz \\
&= \sum_{k=m+1}^{0} p^{\alpha k} \int_{|z|_p=p^k} \chi_p(z)dz + p^\alpha(-1) \\
&= \sum_{k=m+1}^{0} p^{\alpha k} p^k (1-p^{-1}) - p^\alpha \\
&= (1-p^{-1}) \sum_{k=0}^{-m-1} (p^{-\alpha-1})^k - p^\alpha \\
&= (1-p^{-1}) \frac{1-p^{-m(-\alpha-1)}}{1-p^{-\alpha-1}} - p^\alpha \\
&= \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} - \frac{(1-p^{-1})(p^\gamma |x|_p)^{\alpha+1}}{1-p^{-\alpha-1}} - p^\alpha \\
&= \frac{1-p^{-1}-p^\alpha+p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} - \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} (p^\gamma)^{\alpha+1} |x|_p^{\alpha+1} \\
&= \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} - \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} (p^\gamma)^{\alpha+1} |x|_p^{\alpha+1}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Reemplazando (2.16) en (2.12) y luego en (2.8) y usando (2.15), tenemos que

$$\begin{aligned}
&\langle |\xi|_p^\alpha (1-\Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p)), \hat{\varphi} \rangle \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p} \left(\frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} |x|^{-\alpha-1} - \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} (p^\gamma)^{\alpha+1} \right) \Omega(p^\gamma |x|_p) \varphi(x) dx \\
&= \langle \mathcal{F}(|\xi|_p^\alpha (1-\Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p))), \varphi \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}} |x|^{-\alpha-1} - \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} (p^\gamma)^{\alpha+1} \right) \Omega(p^\gamma |x|_p), \varphi \right\rangle .
\end{aligned} \tag{2.17}$$

En la integral del primer renglón de (2.17) se multiplica por $\Omega\left(p^{\gamma}|x|_p\right)$ dado que para calcular la integral interna en (2.13) se consideraron los dos casos $|x|_p \geq p^{1-\gamma}$ y $|x|_p \leq p^{-\gamma}$ y en el primer caso se obtuvo como resultado 0, luego por (2.17)

$$\mathcal{F}(|\xi|_p^{\alpha}(1-\Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p))) = \left(\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}}|x|^{-\alpha-1} - \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}}(p^{\gamma})^{\alpha+1}\right)\Omega(p^{\gamma}|x|_p). \tag{2.18}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p)) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\Omega\left(p^{-\gamma}|\xi|_p\right) d\xi \\
&= \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) d\xi \\
&= \begin{cases} p^{\gamma} & \text{si } |x|_p \leq p^{-\gamma}, \\ 0 & \text{si } |x|_p \geq p^{-\gamma+1} \end{cases} \\
&= p^{\gamma}\Omega\left(p^{\gamma}|x|_p\right).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Entonces, usando (2.18) y (2.19) se obtiene

$$\begin{aligned}
\widehat{\langle\xi\rangle^{\alpha}} &= \mathcal{F}(|\xi|_p^{\alpha}(1-\Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p))) + p^{\gamma\alpha}\mathcal{F}(\Omega(p^{-\gamma}|\xi|_p)) \\
&= \left(\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}}|x|^{-\alpha-1} - \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}}(p^{\gamma})^{\alpha+1}\right)\Omega(p^{\gamma}|x|_p) + p^{\gamma\alpha}p^{\gamma}\Omega(p^{\gamma}|x|_p) \\
&= \left[\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}}|x|^{-\alpha-1} - p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^{-1}-1+p^{-\alpha-1}}{1-p^{-\alpha-1}}\right]\Omega(p^{\gamma}|x|_p) \\
&= \left[\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}}|x|^{-\alpha-1} + p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{\alpha+1}}\right]\Omega(p^{\gamma}|x|_p).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Hemos probado entonces la siguiente Proposición

Proposición 2.1. *La transformada de Fourier del símbolo $\langle\xi\rangle^{\alpha}$ está dada por*

$$\mathcal{F}\left[\langle\xi\rangle^{\alpha}\right] = \left[\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}}|x|^{-\alpha-1} + p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{\alpha+1}}\right]\Omega(p^{\gamma}|x|_p),$$
$$\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq -1 + \frac{2\pi i k}{ln\ p}.$$

2.2. Núcleo de Riesz

Definición 2.1. *Con base en el resultado de la Proposición 2.1 definimos*

$$k_{\alpha}(x) = \left[\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}}|x|_p^{-\alpha-1} + p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{\alpha+1}}\right]\Omega(p^{\gamma}|x|_p). \tag{2.21}$$

Por (2.20) y (2.21) se tiene que

$$\widehat{\langle\xi\rangle^{\alpha}}(x) = k_{\alpha}(x), \ \alpha \in \mathbb{C}, \ \alpha \neq -1+\alpha_k, \ \alpha \neq 0, \tag{2.22}$$

de lo cual se puede deducir el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Para todo $\xi \in \mathbb{Q}_p$ y todo $\alpha \neq -1+\alpha_k$, $\alpha \neq 0$*

$$\langle\xi\rangle^{\alpha} = \widehat{k_{\alpha}}(\xi).$$

Demostración. Aplicando la fórmula de inversión (1.9) a (2.22) se tiene que

$$\langle\xi\rangle^{\alpha} = \mathcal{F}\left[\widehat{\langle\xi\rangle^{\alpha}}(-x)\right](\xi) = \mathcal{F}\left[k_{\alpha}(-x)\right](\xi). \tag{2.23}$$

Como $|x|_p = |-x|_p$, entonces

$$\begin{aligned} k_{\alpha}(-x) &= \left[\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}}|-x|_p^{-\alpha-1} + p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{\alpha+1}}\right]\Omega(p^{\gamma}|-x|_p) \\ &= \left[\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}}|x|_p^{-\alpha-1} + p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^{\alpha}}{1-p^{\alpha+1}}\right]\Omega(p^{\gamma}|x|_p) \\ &= k_{\alpha}(x). \end{aligned} \tag{2.24}$$

De donde por (2.23) y (2.24), se obtiene

$$\langle\xi\rangle^{\alpha} = \mathcal{F}\left[k_{\alpha}(x)\right](\xi) = \widehat{k_{\alpha}}(\xi).$$

$\square$

2.2.1. Definición del núcleo de Riesz en los polos

Para definir k_{α} en los polos, primero calculamos el $\lim\limits_{\alpha\to -1+\alpha_k} k_{\alpha}(x)$ así:

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha\to -1+\alpha_k} k_{\alpha}(x) \\ &= \lim_{\alpha\to -1+\alpha_k} \Omega(p^{\gamma}|x|_p)(1-p^{\alpha})\left(\frac{-p^{\alpha+1}|x|_p^{-\alpha-1} + p^{(\alpha+1)\gamma}}{1-p^{\alpha+1}}\right) \\ &= (1-p^{-1})\Omega(p^{\gamma}|x|_p)\lim_{\alpha\to -1+\alpha_k}\frac{-(p|x|_p^{-1})^{\alpha+1}\ln\,(p|x|_p^{-1}) + \gamma p^{(\alpha+1)\gamma}\ln\, p}{(-p^{\alpha+1})\ln\, p} \\ &= (1-p^{-1})\Omega(p^{\gamma}|x|_p)\left(\frac{\ln\, p - \ln\,|x|_p - \gamma\ln\, p}{\ln\, p}\right) \\ &= (1-p^{-1})\Omega(p^{\gamma}|x|_p)((1-\gamma) - \log_p|x|_p). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Observemos que en el segundo renglón de (2.25), como $|x|_p = p^m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, entonces en el límite del lado derecho se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to -1+\alpha_k} -(p|x|_p^{-1})^{\alpha+1} + p^{(\alpha+1)\gamma} &= \lim_{\alpha \to -1+\alpha_k} -\left(pp^{-m}\right)^{\alpha+1} + p^{(\alpha+1)\gamma} \\ &= -\left(p^{\alpha_k}\right)^{-m+1} + \left(p^{\alpha_k}\right)^{\gamma} \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Puesto que $p^{\alpha_k} = 1$, también

$$\lim_{\alpha \to -1+\alpha_k} 1 - p^{\alpha+1} = 1 - p^{\alpha_k} = 1 - 1 = 0. \tag{2.27}$$

Luego por (2.26) y (2.27), es posible aplicar la Regla de L'Hôpital al límite del lado derecho en el segundo renglón de (2.25) y se llega al resultado allí obtenido.

Esto sugiere definir

$$k_{-1+\alpha_k}(x) = (1 - p^{-1})\Omega(p^{\gamma}|x|_p)((1-\gamma) - \log_p|x|_p), \quad x \neq 0. \tag{2.28}$$

Veamos que tiene sentido esta definición, considerando $k_{-1+\alpha_k}$ como una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ de la siguiente manera: Para φ localmente constante y con soporte compacto tenemos que

$$\langle k_{-1+\alpha_k}, \varphi\rangle = \lim_{\alpha \to -1+\alpha_k} \int_{\mathbb{Q}_p} k_\alpha(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{Q}_p} k_{-1+\alpha_k}(x)\varphi(x)dx. \tag{2.29}$$

Mostremos ahora que la igualdad (2.29) se cumple verificando que se cumplen las condiciones del Teorema 1.5:

La función $f(z) = e^z$ tiene el desarollo en serie de potencias

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

de donde

$$|e^z - 1| = |z| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right|. \tag{2.30}$$

En particular, reemplazando $z = (\alpha+1)\ln\left(\frac{p^{1-\gamma}}{|x|_p}\right)$ en (2.30) y si $|\alpha+1| \leq 1$ entonces existe una constante K (que depende de x y p pero no de α) tal que

$$\left| e^{(\alpha+1)\ln\left(\frac{p^{1-\gamma}}{|x|_p}\right)} - 1 \right| \leq K \left| (\alpha+1)\ln\left(\frac{p^{1-\gamma}}{|x|_p}\right) \right|. \tag{2.31}$$

También tenemos que la función $g(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ admite un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$\frac{z}{e^z - 1} = B_0 + B_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} = 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!},$$

para $|z| < 2\pi$, de donde

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n z^{n-1}}{n!}$$

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + z\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n z^{n-2}}{n!}. \tag{2.32}$$

En particular tomando $|\alpha + 1| < \dfrac{1}{\ln\, p}$ y reemplazando $z = (\alpha + 1)\ln\, p$ en (2.32) se tiene que existe una constante $C_1 > 0$ que depende de p pero no de α tal que

$$\left|\frac{1}{e^{(\alpha+1)\ln\, p} - 1}\right| \leq \left|\frac{1}{(\alpha+1)\ln\, p}\right| + C_1. \tag{2.33}$$

Multiplicando ahora las desigualdades (2.31) y (2.33) tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{(\alpha+1)\ln\left(\frac{p^{1-\gamma}}{|x|_p}\right)} - 1}{e^{(\alpha+1)\ln\, p} - 1}\right| &\leq K\left|\frac{\ln\left(\frac{|x|_p}{p^{1-\gamma}}\right)}{\ln\, p}\right| + KC_1\left|(\alpha+1)\ln\left(\frac{|x|_p}{p^{1-\gamma}}\right)\right| \\ &\leq K\left|\frac{\ln\left(\frac{|x|_p}{p^{1-\gamma}}\right)}{\ln\, p}\right| + KC_1\left|\ln\left(\frac{|x|_p}{p^{1-\gamma}}\right)\right|.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Tomando $|\alpha + 1| \leq 1$ en (2.34), se tiene que existe una constante $A > 0$ independiente de α tal que para todo $x \in \operatorname{supp}\varphi$

$$\left|\frac{e^{(\alpha+1)\ln\left(\frac{p^{1-\gamma}}{|x|_p}\right)} - 1}{e^{(\alpha+1)\ln\, p} - 1}\right| \leq A\left|\ln\left(\frac{|x|_p}{p^{1-\gamma}}\right)\right|. \tag{2.35}$$

Con la estimación (2.35), en virtud del Teorema 1.5, se hace legítimo intercambiar el límite con el símbolo de integral. Con lo cual tiene sentido la siguiente definición

Definición 2.2. *Para $\alpha = -1 + \alpha_k$ definimos su núcleo de Riesz como*

$$k_{-1+\alpha_k}(x) = (1 - p^{-1})\Omega(p^{\gamma}|x|_p)((1-\gamma) - log_p|x|_p), \quad x \neq 0. \tag{2.36}$$

2.2.2. Transformada de Fourier de $k_{-1+\alpha_k}$

Calculamos $\widehat{k_{-1+\alpha_k}}$ de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
\langle \widehat{k_{-1+\alpha_k}}, \varphi \rangle &= \langle k_{-1+\alpha_k}, \widehat{\varphi} \rangle \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p} k_{-1+\alpha_k}(x) \widehat{\varphi}(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p} \Omega(p^{\gamma}|x|_p)(1-p^{-1}) \left((1-\gamma) - \log_p |x|_p\right) \widehat{\varphi}(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p} \Omega(p^{\gamma}|x|_p)(1-p^{-1}) \left((1-\gamma) - \log_p |x|_p\right) \left(\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi)\chi_p(\xi x) d\xi \right) dx.
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

La integral iterada (2.37) existe puesto que

$$
\left| \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi)\chi_p(\xi x)\, d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{Q}_p} |\varphi(\xi)\chi_p(\xi x)|\, d\xi = \int_{\mathbb{Q}_p} |\varphi(\xi)| d\xi \tag{2.38}
$$

y como por la Proposición 1.3 se tiene que $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ por tener φ soporte compacto, entonces se tiene en (2.38) que existe una constante $C > 0$ tal que

$$
\left| \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi)\chi_p(\xi x)\, d\xi \right| \leq C. \tag{2.39}
$$

Luego por (2.39) tenemos que

$$
|\langle \widehat{k_{-1+\alpha_k}}, \varphi \rangle| \leq C \left| \int_{\mathbb{Q}_p} \left((1-\gamma) - \log_p |x|_p\right) \Omega\left(p^{\gamma}|x|_p\right) dx \right|, \tag{2.40}
$$

donde la integral del lado derecho en (2.40) existe, como se verá en (2.42), luego en virtud del Teorema de Fubini, podemos cambiar el orden de integración en (2.37) convirtiendo esta integral en

$$
\begin{aligned}
&(1-p^{-1}) \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi) \left(\int_{\mathbb{Q}_p} \Omega(p^{\gamma}|x|_p) \left((1-\gamma) - \log_p |x|_p\right) \chi_p(\xi x) dx \right) d\xi \\
&= (1-p^{-1}) \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi) \left(\int_{|x|_p \leq p^{-\gamma}} \left((1-\gamma) - \log_p |x|_p\right) \chi_p(\xi x) dx \right) d\xi.
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Calculamos ahora la integral interna en (2.41), suponiendo primero que $|\xi|_p \leq p^{\gamma}$, en cuyo caso $\chi_p(\xi x) = 1$, por lo tanto esta integral se convierte en

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|_p \le p^{-\gamma}} \big((1-\gamma) - \log_p |x|_p\big)\, dx &= (1-\gamma) \int_{|x|_p \le p^{-\gamma}} dx - \int_{|x|_p \le p^{-\gamma}} \log_p |x|_p dx \\
&= (1-\gamma)p^{-\gamma} - \sum_{k=-\infty}^{-\gamma} \int_{|x|_p = p^k} \log_p |x|_p dx \\
&= (1-\gamma)p^{-\gamma} - (1-p^{-1}) \sum_{k=-\infty}^{-\gamma} k p^k \\
&= (1-\gamma)p^{-\gamma} - (1-p^{-1}) \sum_{j=\gamma}^{\infty} (-j) p^{-j} \\
&= (1-\gamma)p^{-\gamma} + (1-p^{-1}) p^{-\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} i p^{-i} \\
&+ (1-p^{-1})\gamma p^{-\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} p^{-i}.
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

Para calcular estas últimas sumas utilizamos el hecho de que para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$, se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}. \tag{2.43}$$

Derivando término a término la serie en (2.43) tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = (-1)(1-z)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-z)^2}. \tag{2.44}$$

Luego multiplicando por z en (2.44) se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}. \tag{2.45}$$

En particular haciendo $z = p^{-1}$ en (2.43) y (2.45), la integral (2.42) se convierte en

$$
\begin{aligned}
(1-\gamma)p^{-\gamma} + (1-p^{-1})p^{-\gamma}\frac{p^{-1}}{(1-p^{-1})^2} &+ (1-p^{-1})\gamma p^{-\gamma}\frac{1}{1-p^{-1}} \\
&= p^{-\gamma} - \gamma p^{-\gamma} + \frac{p^{-\gamma-1}}{1-p^{-1}} + \gamma p^{-\gamma} \\
&= p^{-\gamma} + \frac{p^{-\gamma-1}}{1-p^{-1}} \\
&= \frac{p^{-\gamma} - p^{-\gamma-1} + p^{-\gamma-1}}{1-p^{-1}} \\
&= \frac{p^{-\gamma}}{1-p^{-1}} = \frac{\langle\xi\rangle^{-1}}{1-p^{-1}}.
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

De donde por (2.41) y (2.46) se obtiene $\langle \widehat{k_{-1+\alpha_k}}, \varphi\rangle = \langle \langle\xi\rangle^{-1}, \varphi\rangle$ si $|\xi|_p \leq p^{\gamma}$; ahora para el caso en el que $|\xi|_p > p^{\gamma}$ tenemos que $\int_{|x|_p \leq p^{-\gamma}} \chi_p(\xi x)dx = 0$, luego la integral interna en (2.41) se convierte en

$$
\begin{aligned}
(1-\gamma)\int_{|x|_p\leq p^{-\gamma}} \chi_p(\xi x)dx - &\int_{|x|_p\leq p^{-\gamma}} \log_p|x|_p \chi_p(\xi x)dx \\
&= -\int_{|x|_p\leq p^{-\gamma}} \log_p|x|_p \chi_p(\xi x)dx.
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Hacemos el cambio de variable $z = \xi x$ en (2.47), de donde $x = z\xi^{-1}$ y $dz = |\xi|_p dx$, luego la integral 2.47 se convierte en

$$
-\int_{|z|_p\leq p^{-\gamma}|\xi|_p} \log_p|z\xi^{-1}|_p \chi_p(z)|\xi|_p^{-1}dz = -|\xi|_p^{-1}\int_{|z|_p\leq p^{-\gamma}|\xi|_p} \log_p|z\xi^{-1}|_p \chi_p(z)dz.
\tag{2.48}
$$

Haciendo $|\xi|_p = p^m$, la expresión (2.48) se convierte en

$$
\begin{aligned}
-|\xi|_p^{-1} &\sum_{k=-\infty}^{-\gamma+m}\left(\log_p p^k p^{-m}\int_{|z|_p=p^k}\chi_p(z)dz\right) \\
&= -|\xi|_p^{-1}\left(\sum_{k=-\infty}^{0}(k-m)p^k(1-p^{-1}) + (-(1-m))\right) \\
&= |\xi|_p^{-1}(1-p^{-1})\frac{p^{-1}}{(1-p^{-1})^2} + |\xi|_p^{-1}(1-p^{-1})m\frac{1}{1-p^{-1}} \\
&- m|\xi|_p^{-1} + |\xi|_p^{-1} \\
&= \frac{|\xi|_p^{-1}p^{-1}}{1-p^{-1}} + m|\xi|_p^{-1} - m|\xi|_p^{-1} + |\xi|_p^{-1} = \frac{|\xi|_p^{-1}p^{-1}}{1-p^{-1}} + |\xi|_p^{-1} \\
&= \frac{|\xi|_p^{-1}p^{-1} + |\xi|_p^{-1} - |\xi|_p^{-1}p^{-1}}{1-p^{-1}} = \frac{|\xi|_p^{-1}}{1-p^{-1}} = \frac{\langle\xi\rangle^{-1}}{1-p^{-1}}.
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

En ambos casos se concluye que

$$\int_{|x|_p \leq p^{-\gamma}} \left((1-\gamma) - \log_p |x|_p\right) \chi_p(\xi x) dx = \frac{\langle \xi \rangle^{-1}}{1-p^{-1}}. \tag{2.50}$$

Por lo tanto por (2.50) se tiene que

$$\begin{aligned}\langle k_{1+\alpha_k}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{k_{-1+\alpha_k}}, \varphi \rangle &= (1-p^{-1}) \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi) \frac{\langle \xi \rangle^{-1}}{1-p^{-1}} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi) \langle \xi \rangle^{-1} d\xi = \langle \langle \xi \rangle^{-1}, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Hemos demostrado que

Proposición 2.3. *La transformada de Fourier de $k_{-1+\alpha_k}$ está dada por*

$$\widehat{k_{-1+\alpha_k}} = \langle \xi \rangle^{-1}. \tag{2.51}$$

Definición 2.3. *Para $\alpha = 0$ definimos $k_0 = \delta$.*

Proposición 2.4.

$$\mathcal{F}[\delta] = 1.$$

Demostración. De acuerdo con (1.10) se tiene que

$$\langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = F[\varphi](0) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(0 \cdot x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

□

La Proposición 2.2, la Proposición 2.3, la Definición 2.3 y la Proposición 2.4 se pueden resumir en el siguiente teorema

Teorema 2.3. *La transformada de Fourier de k_α está dada por $\langle \xi \rangle^\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.*

2.3. Existencia de la convolución de los k_α y propiedad de semigrupo

En este sección establecemos la existencia de la convolución de los núcleos k_α para diferentes casos, con el fin de mostrar que estos k_α se comportan como un semigrupo de convolución, es decir que $k_\alpha * k_\beta = k_{\alpha+\beta}$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, para ello empezamos con el siguente lema

Lema 2.1. *Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ y supp$(\varphi) \subseteq B_N$, entonces para todo $|x|_p > p^N$ se tiene que*

(1) Si $\alpha \neq -1 + \alpha_k$*, entonces*

$$\begin{aligned}
&\langle k_\alpha(y), \varphi(x+y)\rangle \\
&= \left[\frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}}|x|_p^{-\alpha-1} + p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^\alpha}{1-p^{\alpha+1}}\right]\Omega(p^\gamma|x|_p)\int_{\mathbb{Q}_p}\varphi(z)dz.
\end{aligned}$$

(2) Si $\alpha = -1 + \alpha_k$*, entonces*

$$\langle k_\alpha(y), \varphi(x+y)\rangle = (1-p^{-1})\Omega(p^\gamma|x|_p)((1-\gamma) - log_p|x|_p)\int_{\mathbb{Q}_p}\varphi(z)dz.$$

Demostración. Sea $\alpha \neq -1+\alpha_k$. Para $|x|_p > p^N$, tenemos que $\varphi(x) = 0$ y $|x-z|_p = |x|_p$ para $z \in \operatorname{supp}(\varphi)$ puesto que $|z|_p < |x|_p$, de donde $|x-z|_p = \max\{|x|_p, |z|_p\} = |x|_p$; luego se sigue que

$$\begin{aligned}
&\langle k_\alpha(y), \varphi(x+y)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p}\left[\frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}}|y|_p^{-\alpha-1} + p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^\alpha}{1-p^{\alpha+1}}\right]\Omega(p^\gamma|y|_p)\varphi(x+y)dy.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Haciendo el cambio de variable $z = x+y$ la integral se convierte en

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Q}_p}\left[\frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}}|z-x|_p^{-\alpha-1} + p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^\alpha}{1-p^{\alpha+1}}\right]\Omega(p^\gamma|z-x|_p)\varphi(z)dz \\
&= \left[\frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}}|x|_p^{-\alpha-1} + p^{\gamma(\alpha+1)}\frac{1-p^\alpha}{1-p^{\alpha+1}}\right]\Omega(p^\gamma|x|_p)\int_{\mathbb{Q}_p}\varphi(z)dz.
\end{aligned}$$

El caso en el que $\alpha = -1+\alpha_k$ se considera de manera análoga.

□

Teorema 2.4. *Las siguientes convoluciones existen y además se cumplen las siguientes igualdades, para* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

1. $k_{-1+\alpha_k} * k_\beta = k_{-1+\alpha_k+\beta}$.
2. $k_0 * k_\alpha = k_\alpha$.
3. $k_\alpha * k_{-\alpha} = k_0 = \delta$.
4. $k_\alpha * k_\beta = k_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \neq 0, -1+\alpha_k$.

Demostración. Por definición de convolución tenemos que para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$

$$\begin{aligned}
\langle k_{-1+\alpha_k} * k_\beta, \varphi\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle k_{-1+\alpha_k}(x)\times k_\beta(y), \Delta_n(x)\varphi(x+y)\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{Q}_p} k_{-1+\alpha_k}(x)\Delta_n(x)\langle k_\beta(y), \varphi(x+y)\rangle dx \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p} k_{-1+\alpha_k}(x)\langle k_\beta(y)\varphi(x+y)\rangle dx,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

puesto que $\Delta_n(x) \to 1$ cuando $n \to \infty$; es legítimo, en virtud del Teorema de la convergencia dominada introducir el límite bajo el símbolo de integral en (2.53), ya que por el Lema 2.1 existen constantes que no dependen de x: A, B, C y D_φ positivas, tales que

$$\begin{aligned} &|k_{-1+\alpha_k}(x)\Delta_n(x)\langle k_\beta(y), \varphi(x+y)\rangle| \\ &\leq D_\varphi \left|A|x|_p^{-\beta-1} + B\right| \left|C - \log_p|x|_p\right| \Omega\left(|x|_p p^\gamma\right) \end{aligned} \tag{2.54}$$

para $|x|_p > R_\varphi$ y $n \geq N$, la función de lado derecho en (2.54) está en $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ puesto que si supp $\varphi \subseteq B_N$ y $|x|_p > p^N$, entonces la integral sobre $\mathbb{Q}_p$ de la misma queda reducida a la integral sobre $p^N < |x|_p \leq p^{-\gamma}$, es decir que se convierte en una suma finita. Por tanto la convolución $k_{-1+\alpha_k} * k_\alpha$ existe y así por el Teorema 1.11

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[k_{-1+\alpha_k} * k_\beta\right] &= \mathcal{F}\left[k_{-1+\alpha_k}\right] \mathcal{F}\left[k_\beta\right] = \langle\xi\rangle^{-1+\alpha_k} \langle\xi\rangle^\beta = \langle\xi\rangle^{-1+\alpha_k+\beta} \\ &= \mathcal{F}\left[k_{-1+\alpha_k+\beta}\right]. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Como por el Teorema 1.7 la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ en $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, en particular es inyectiva, por tanto

$$k_{-1+\alpha_k} * k_\beta = k_{-1+\alpha_k+\beta}.$$

Ahora como $\operatorname{supp}(\delta) = \{0\}$, entonces la convolución $f * \delta$ existe para todo $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$, en particular existe $k_\alpha * \delta = k_\alpha * k_0$ y así

$$\widehat{k_0 * k_\alpha} = \widehat{k_0}\widehat{k_\alpha} = 1 \cdot \langle\xi\rangle^\alpha = \langle\xi\rangle^\alpha = \widehat{k_\alpha}$$

de donde $k_0 * k_\alpha = k_\alpha * k_0 = k_\alpha$.

Para la parte 3, sea $\alpha \neq -1 + \alpha_k$ con $-\alpha \neq -1 + \alpha_k$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \langle k_\alpha * k_{-\alpha}, \varphi\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle k_\alpha(x) \times k_{-\alpha}(y), \Delta_n(x)\varphi(x+y)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{Q}_p} k_\alpha(x)\Delta_n(x)\langle k_{-\alpha}(x), \varphi(x+y)\rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} k_\alpha(x)\langle k_{-\alpha}(x), \varphi(x+y)\rangle dx, \end{aligned} \tag{2.56}$$

puesto que $\Delta_n \to 1$ cuando $n \to \infty$; haciendo un razonamiento análogo al de la parte 1 se tiene que es válido intercambiar el límite con el símbolo de integral en (2.56) ya que por el Lema 2.1 existen constantes A, B, C, D, $E_\varphi > 0$ que no dependen de x tales que

$$|k_\alpha(x)\Delta_n(x)\langle k_{-\alpha}(y), \varphi(x+y)\rangle| \leq E_\varphi \left(A|x|_p^{-\alpha-1} + B\right)\left(C|x|_p^{\alpha-1} + D\right)\Omega\left(p^\gamma|x|_p\right) \tag{2.57}$$

para todo $|x|_p > R_\varphi$ y $n \geq N$, así la convolución $k_\alpha * k_{-\alpha}$ existe, el caso $\alpha = -1 + \alpha_k$ puede analizarse de manera similar. Así por el Teorema 1.11

$$\mathcal{F}\left(k_\alpha * k_{-\alpha}\right) = \widehat{k_\alpha}\widehat{k_{-\alpha}} = \langle\xi\rangle^\alpha\langle\xi\rangle^{-\alpha} = 1 = \widehat{k_0}, \tag{2.58}$$

de donde $k_\alpha * k_{-\alpha} = k_0 = \delta$.

La parte 4 se deduce de manera análoga teniendo en cuenta que existen constantes $A,\ B,\ C,\ D,\ E_\varphi > 0$ que no dependen de x tales que

$$|k_\alpha(x)\Delta_n(x)\langle k_\beta(y), \varphi(x+y)\rangle| \leq E_\varphi \left(A|x|_p^{-\alpha-1} + B\right)\left(C|x|_p^{-\beta-1} + D\right)\Omega\left(p^\gamma|x|_p\right) \tag{2.59}$$

para todo $|x|_p > R_\varphi$ y $n \geq N$. $\square$

En virtud del Teorema 2.4, se tiene que los núcleos de Riesz k_α se comportan como un semigrupo de convolución, esto es que $k_\alpha * k_\beta = k_{\alpha+\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, esto va a permitir como se verá en la Sección 2.5 hallar las soluciones de la ecuación pseudodiferencial $D^\alpha u = \psi$.

2.4. El operador pseudodiferencial D^α

En vista del Teorema 2.4, tiene sentido para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ definir el operador $D^\alpha : \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ por:

$$D^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}\left(\langle\xi\rangle^\alpha \widehat{u}\right).$$

Ver la primera ecuación de la página 144 de [10].

Veamos que este operador está bien definido; en efecto, sea $u \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, como la transformada de Fourier envía una función de prueba en una función de prueba, entonces $\widehat{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, también como $\langle\xi\rangle^\alpha \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{Q}_p$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{supp}\left(\langle\xi\rangle^\alpha\right) = \mathbb{Q}_p$, con lo cual

$$\operatorname{supp}\left(\langle\xi\rangle^\alpha \widehat{u}\right) = \operatorname{supp}\left(\widehat{u}\right) \cap \operatorname{supp}\left(\langle\xi\rangle^\alpha\right) = \operatorname{supp}\left(\widehat{u}\right) \cap \mathbb{Q}_p = \operatorname{supp}\left(\widehat{u}\right),$$

de donde $\langle\xi\rangle^\alpha \widehat{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ y como $\mathcal{F}^{-1}$ envía también una función de prueba en una función de prueba, entonces se concluye que D^α está bien definido.

Teorema 2.5. *Para cada $u \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ tenemos que*

$$D^\alpha u = k_\alpha * u,$$

donde $k_\alpha * u$ se define como en el Teorema 1.8. Además

$$D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta} u.$$

Demostración. Mostramos primero que la convolución $k_\alpha * u$ existe, en efecto tenemos que $\operatorname{supp} k_\alpha \subseteq B_{-\gamma}$ porque si $a \notin B_{-\gamma}$, entonces $|a|_p > p^{-\gamma}$, luego para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}\left(B_{|a|_p - p^{-\gamma}}(a)\right)$

$$\langle k_\alpha, \varphi\rangle = \int_{B_{|a|_p - p^{-\gamma}}} k_\alpha(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{B_{|a|_p - p^{-\gamma}}} 0\varphi(x)\,dx = 0$$

puesto que $k_\alpha(x) = 0$ en $B_{|a|_p - p^{-\gamma}}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, así k_α como distribución se anula en $B_{|a|_p - p^{-\gamma}}$ y por lo tanto $a \notin \operatorname{supp} k_\alpha$, luego se tiene dicha contenencia.

Entonces por el Teorema 1.10, la convolución $u * k_\alpha$ existe para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y por el Teorema 1.9 también existe la convolución $k_\alpha * u$ y son iguales.

Por la definición de D^α tenemos que se cumplen las siguientes igualdades

$$D^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}\left(\langle\xi\rangle^\alpha \widehat{u}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{k_\alpha}\widehat{u}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left[k_\alpha * u\right]\right) = k_\alpha * u. \tag{2.60}$$

Por otro lado, usando la asociatividad de $*$ y el resultado (2.60), se obtiene

$$D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^\alpha\left(k_\beta * u\right) = k_\alpha * \left(k_\beta * u\right) = \left(k_\alpha * k_\beta\right) * u = \left(k_{\alpha+\beta}\right) * u = D^{\alpha+\beta} u.$$

□

2.5. La ecuación pseudodiferencial $D^\alpha u = \psi$

Por medio del siguiente resultado y usando el Teorema 2.5 encontramos la solución para la ecuación pseudodiferencial $D^\alpha u = \psi$

Teorema 2.6. *Para cada $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, la solución $u \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ de la ecuación pseudodiferencial $D^\alpha u = \psi$ está dada por*

$$u = k_{-\alpha} * \psi.$$

Demostración. Haciendo un razonamiento análogo al del Teorema 2.5 tenemos que supp $k_{-\alpha} \subseteq B_{-\gamma}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, luego por el Teorema 1.10 la convolución $\psi * k_{-\alpha}$ existe y por el Teorema 1.9 también existe la convolución $k_{-\alpha} * \psi$; por tanto, teniendo en cuenta que por el Teorema 2.4 $k_{-\alpha} * k_\alpha$ existe, se tiene que las siguientes igualdades son válidas

$$\begin{aligned} D^\alpha u &= \psi \\ k_\alpha * u &= \psi \\ k_{-\alpha} * \left(k_\alpha * u\right) &= k_{-\alpha} * \psi \\ \left(k_{-\alpha} * k_\alpha\right) * u &= k_{-\alpha} * \psi \\ k_0 * u &= k_{-\alpha} * \psi \\ \delta * u &= k_{-\alpha} * \psi \\ u &= k_{-\alpha} * \psi. \end{aligned}$$

□

Bibliografía

[1] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov and V. M. Shelkovich, *Theory of p-adic Distributions. Linear and Nonlinear Models*, London Mathematical Society Lecture Note Series 370, Cambridge University Press (2010).

[2] O. F. Casas-Sánchez, J. Galeano-Peñaloza, J.J. Rodriguez-Vega, *Parabolic-type pseudodifferential equations with elliptic symbols in dimension 3 over p-adics*, p-Adic Numbers Ultrametric Analysis and Applications 7(1)(2015), 1-16.

[3] O. F. Casas-Sánchez, J. J. Rodriguez-Vega, *Parabolic type equations on p-adic balls*, Boletín de Matemáticas, 22 (1) (2015), 97-106.

[4] O. Casas-Sánchez, W. A. Zuñiga-Galindo, *Riesz kernels and pseudodifferential operators attached to quadratic forms over p-adic fields*, p-Adic Numbers Ultrametric Analysis Applications, 5 (3) (2013), 177-193.

[5] S. Katok, *p-adic analysis compared with real*, American Mathematical Society, (2007).

[6] A. N. Kochubei, *Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedian fields*, Pure and Applied Mathematics **244**, Marcel Dekker, New York, 2001.

[7] N. Koblitz, *p-Adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta functions*, Second edition, Springer-Verlag, New York, 1984.

[8] J.J Rodriguez, W. A. Zuñiga-Galindo, *Taibleson operators, p-adic parabolic equations and ultrametric diffusion*, Pacific Journal of Mathematics, 237 (2008), 327-347.

[9] M. H. Taibleson, *Fourier Analysis on local fields*, Princeton University Press, 1975, Página 137.

[10] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. I. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, Series on Soviet and East European Mathematics **1**, World Scientific, River Edge, NJ, 1994.

[11] W.A. Zuñiga-Galindo, *Fundamental solutions of Pseudodifferential operators over p-adic Fields*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 109 (2003), 241-245.