SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TRABAJO COOPERATIVO: UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA A DESARROLLAR EN TRIGONOMETRÍA

Por:

BEATRIZ EUGENIA TANGARIFE MEJÍA

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora

ROSA FRANCO ARBELÁEZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

2012

CONTENIDO

PRELIMINARES

PROBLEMS SOLVING AND COOPERATIVE WORK: A TEACHING STRATEGY TO DEVELOP IN TRIGONOMETRY

ABSTRACT

The purpose of this study is to determine the impact that the problem-solving strategies and cooperative work have for teaching and learning of mathematics in young of first semester of college. Cooperative work and problem solving is a didactic proposal done to develop mathematics in the classroom, because through group work, students share the knowledge gained in class, they unite them and support them to improve the learning process. Problem solving in the light of George Poyle or Miguel de Guzman leads the student to think mathematically and to face to problem situations without fear. The implementation of these strategies generated significant learning in the students, which were reflected in improved academic performance; commitment, responsibility and participation in class were also improved with the implementation of the methodology.

KEY WORDS:

Significant Learning, Cooperative Work, Problem Solving, Action-Research.

RESUMEN

El propósito de este trabajo es determinar la repercusión que tienen las estrategias de solución de problemas y trabajo cooperativo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en jóvenes de primer semestre de universidad. El trabajo cooperativo y la solución de problemas, es una propuesta didáctica que se hace para desarrollar las matemáticas en el aula, ya que a través del trabajo en grupo los estudiantes intercambian el conocimiento adquirido en la clase, se unen y se apoyan para mejorar el proceso de aprendizaje. La solución de problemas a la luz de George Polya o de Miguel de Guzmán lleva al estudiante a pensar matemáticamente y a enfrentarse a situaciones problemas sin ningún temor. La aplicación de estas estrategias generó en los estudiantes aprendizajes significativos, que se vieron plasmados en una mejoría en los resultados académicos; el compromiso, la responsabilidad y la participación en la clase también fueron mejorando con la implementación de la metodología.

PALABRAS CLAVES:

Aprendizaje Significativo, Trabajo Cooperativo, Resolución de Problemas, Investigación-Acción.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se realiza con 35 estudiantes del primer semestre de Matemáticas Básicas de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. El grupo está formado por estudiantes de diferentes ingenierías quienes presentaron deficiencia en la prueba de ingreso a la universidad, en conocimientos matemáticos. Este curso se crea para nivelarlos y puedan así tener un mejor desempeño académico.

La Universidad ofrece formación en diferentes ingenierías, haciéndose necesario el manejo de la Trigonometría como base fundamental de éstas. En el programa académico se destina a la Trigonometría 5 clases de dos horas cada una, tiempo muy reducido para la asimilación de conceptos tan importantes; por tal motivo este proyecto busca fortalecer esta temática, implementando las estrategias didácticas de solución de problemas y trabajo cooperativo.

Este trabajo está enmarcado dentro de la modalidad de Investigación-Acción, donde el docente tiene un doble papel, el de investigador y el de participante. La investigación se realiza durante todo el curso de matemáticas básicas y las estrategias didácticas se aplican en la solución de problemas trigonométricos.

El objetivo general es plantear y solucionar problemas como estrategia metodológica para el aprendizaje de la Trigonometría, trabajando en el aula cooperativamente con estudiantes del primer semestre en la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Los objetivos específicos a desarrollar:

- Diagnosticar en el contexto del aula, las necesidades que presentan los estudiantes en conocimientos matemáticos y que requieren para el trabajo de la Trigonometría.
- Aplicar estrategias metodológicas para el aprendizaje de la Trigonometría dentro del aula.
- Evaluar el resultado que se obtiene al aplicar las estrategias planificadas y desarrolladas en el aula.

Durante las clases se proponen varios problemas trigonométricos que son desarrollados por los estudiantes, estos en pequeños grupos cooperativos y aplicando el método utilizado por Polya, buscan la solución. El docente pasa por cada uno de los grupos observando el trabajo de los estudiantes, planteando preguntas y motivando a los estudiantes para que las respondan. Este diálogo va generando aprendizajes significativos, puesto que van relacionando los conocimientos ya existentes con los nuevos conocimientos que van adquiriendo; luego se motiva para que los estudiantes compartan las estrategias que utilizaron en cada grupo nombrando un monitor para que socialice el trabajo realizado. .

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos son los resultados obtenidos en cada uno de los parciales aplicados durante el semestre, el trabajo de campo y los problemas resueltos por los estudiantes. Para analizar la información se utilizó la técnica de triangulación de fuentes, la cual permitió observar algunos cambios en los resultados de los estudiantes luego de ser aplicadas las estrategias metodológicas propuestas.

Con la puesta en marcha de las estrategias se notó en un primer momento que los estudiantes estuvieron reacios al trabajo cooperativo. Muchos de ellos preferían trabajar solos porque al hacerlo en equipo demandaban más tiempo y se requería de mayor esfuerzo de aquellos que tenían fortalezas en matemáticas. En la solución de problemas también se encontró gran dificultad porque la capacidad de análisis estaba muy limitada y tenían poca disciplina de trabajo. Poco a poco se fue notando mejoría en los estudiantes, iban superando sus dificultades y se notaban más seguros frente a las situaciones problemas, aunque algunos de ellos, a pesar de los esfuerzos, no lograron resultados positivos.

En general, podemos concluir que se hace necesario fomentar dentro del aula estrategias que vayan en mejora del aprendizaje significativo. En matemáticas por su misma naturaleza, es prioritario promover la solución de problemas ya que allí radica la importancia y esencia de esta disciplina. Los estudiantes se sienten temerosos e inseguros al enfrentarse a ellos y a pesar del conocimiento que puedan tener, no saben cómo relacionar estos en una determinada situación problema. Estamos en un mundo globalizado que requiere cada día de personas con capacidad para el trabajo en equipo y es en el aula donde esta capacidad se puede desarrollar. Los estudiantes no están preparados para afrontar esta situación ya que los docentes han insistido mucho en el trabajo individual y no permiten que en el aula se comparta ni se construya conocimiento.

El trabajo consta de seis capítulos distribuidos de la siguiente manera: En el **primer** capítulo se desarrolla el marco conceptual donde se presentan los autores quienes validan las estrategias utilizadas como son: David Ausubel, George Polya, De Guzmán, quienes hacen sus aportes a la solución de problemas. En el **segundo** capítulo se presenta la metodología utilizada, la información recolectada, la población y la muestra utilizada. En el **tercero y cuarto** capítulo se presentan los resultados y el análisis respectivo que nos permite validar o rechazar la utilización de las estrategias metodológicas implementadas en las clases de Trigonometría. En el **quinto** capítulo se hace una propuesta para la universidad Nacional "SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TRABAJO COOPERATIVO: UNA

ESTRATEGIA DIDÁCTICA A DESARROLLAR EN TRIGONOMETRÍA. **En el capítulo sexto** se presentan las conclusiones del trabajo.

1. MARCO TEÓRICO

“El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante pre existente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras”. (Vásquez Naranjo, Maderos Ramos, & Barrios Herrero, 2005). El aprendizaje significativo de las matemáticas, es el que se lleva a cabo a través de la resolución de problemas a los cuales se les debe dar un tratamiento adecuado, analizando estrategias y técnicas de resolución.

La solución de problemas se plantea por el método de los cuatro pasos propuesto por George Polya (Fuentes, 2008).

1. Entender el problema.
2. Configurar un plan
3. Ejecutar el plan
4. Mirar hacia atrás

Paso 1: Entender el Problema.

¿Entiende todo lo que dice?

¿Puede replantear el problema en sus propias palabras?

¿Distingue cuáles son los datos?

¿Sabe a qué quiere llegar?

¿Hay suficiente información?

¿Hay información extraña?

¿Es este problema similar a algún otro que haya resuelto antes?

Paso 2: Configurar un Plan.

¿Puede usar alguna de las siguientes estrategias?

1. Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura).
2. Usar una variable.
3. Buscar un Patrón
4. Hacer una lista.
5. Resolver un problema similar más simple.
6. Hacer una figura.
7. Hacer un diagrama
8. Usar razonamiento directo.
9. Usar razonamiento indirecto.
10. Usar las propiedades de los Números.
11. Resolver un problema equivalente.
12. Trabajar hacia atrás.
13. Usar casos
14. Resolver una ecuación
15. Buscar una fórmula.
16. Usar un modelo.
17. Usar análisis dimensional.
18. Identificar sub-metas.
19. Usar coordenadas.
20. Usar simetría.

Paso 3: Ejecutar el Plan.

Implementar la(s) estrategia(s) que escogió hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción le sugiera tomar un nuevo curso.

Concédase un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tiene éxito solicite una sugerencia o haga el problema a un lado por un momento. No tenga miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

Paso 4: Mirar hacia atrás.

¿Es su solución correcta? ¿Su respuesta satisface lo establecido en el problema?
¿Advierte una solución más sencilla?
¿Puede ver cómo extender su solución a un caso general?

Otro autor que también trata la solución de problemas es Miguel de Guzmán: “Para resolver los problemas en Matemáticas podemos seguir el siguiente modelo, llamado “Modelo de Guzmán”” (Agudelo Valencia, Bedoya Quintero, & Restrepo Morales, 2008).

1. Familiarización con el problema.
2. Búsqueda de estrategias.
3. Llevar adelante la estrategia.
4. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

Este método de trabajar en matemáticas a través de la solución de problemas, debe estar acompañado de un trabajo de grupo, cooperativo. “El trabajo en grupo permite que los alumnos se unan, se apoyen mutuamente, que tengan mayor voluntad, consiguiendo crear más y cansándose menos, ya que los esfuerzos individuales articulados en un grupo cooperativo cobran más fuerza (…) El aprendizaje cooperativo favorece la integración de los estudiantes. Cada alumno aporta al grupo sus habilidades y conocimientos; está quien es más analítico, quien es más activo en la planificación del trabajo o del grupo; quien es más sintético, facilita la coordinación; quien es más manipulativo, participa en las producciones materiales. Pero lo más interesante, según las investigaciones realizadas, es el hecho de que no es dar o recibir ayuda lo que mejora el aprendizaje en el grupo, sino la conciencia de necesitar ayuda, la necesidad consciente de comunicarlo y el esfuerzo en verbalizar y tener que integrar la ayuda de quien la ofrece en el propio trabajo. La retroalimentación es un elemento clave para explicar los efectos positivos del aprendizaje cooperativo" (Caldeiro & Vizcarra, 2005).

El trabajo cooperativo debe tener en cuenta los siguientes momentos:

Primer momento: El estudiante se enfrenta solo a la solución de un problema propuesto por el profesor.

Segundo momento: El profesor conforma grupos heterogéneos de cuatro estudiantes donde cada uno comparte la solución que obtuvo en el trabajo individual, de esta manera se produce una discusión en el pequeño grupo donde los que lo resolvieron por distintos caminos confrontan y validan sus desarrollos, mientras que los que no pudieron lograrlo aclaran sus dudas y tratan de resolverlo con las explicaciones de los compañeros.

Tercer momento: Cada grupo nombra un relator, quien sale al tablero para compartir con los demás compañeros su solución, en este momento se da una discusión frente a la solución de cada equipo, el profesor debe mediar la situación, cuidando que se discuta el proceso más no el resultado, sin intervenir en la solución del problema que están tratando.

El educador juega un papel muy importante para generar en el estudiante la curiosidad y a través de la pregunta llevarlo a que se motive a descubrir el conocimiento y comparta con sus pares estrategias aplicadas:

“El profesor tiene en sus manos la llave del éxito ya que, si es capaz de estimular en los estudiantes la curiosidad, podrá despertar en ellos el gusto por el pensamiento independiente; pero, si por el contrario dedica el tiempo a ejercitarles en operaciones de tipo rutinario, matará en ellos el interés.(...) Más que enseñar a los estudiantes a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones y, en este sentido, los propios problemas serán las "herramientas" que les llevarán a ello” (Urdiain, 2006).

2. METODOLOGÍA

2.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN:

Este trabajo está enmarcado dentro de la modalidad de Investigación-Acción, la cual pretende determinar el impacto que se produce en el rendimiento académico de los estudiantes el aplicar las estrategias de solución de problemas y la de trabajo cooperativo. La primera estrategia se observa más durante el desarrollo de la temática de Trigonometría por la aplicación que allí se da y la segunda estrategia se realiza durante todas las clases.

Este estudio se llevó a cabo a través de cuatro pasos:

DIAGNÓSTICO: Describe la institución, grado, programa, recursos, estudiantes.

PLANIFICACIÓN: Se describen las estrategias metodológicas para los contenidos, se prevén los recursos para el desarrollo de ella.

EJECUCIÓN: Se relaciona con el proceso de control y de registro de la puesta en marcha de la estrategia. Para la interpretación de los resultados se presentan análisis de evaluaciones, resultados de las pruebas, notas de campo.

REFLEXIÓN Y EVALUACIÓN: Se analizan, sintetizan, interpretan, explican y elaboran conclusiones, se examinan las consecuencias y se piensa en implicaciones y propuestas para la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín.

2.2 POBLACIÓN Y MUESTRA

Características de la población escogida: El estudiante es del primer semestre de cualquier programa brindado por la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, que haya presentado falencias en la prueba de ingreso a la universidad en los conocimientos matemáticos. La población estuvo constituida por 12 grupos de aproximadamente 30 estudiantes cada uno y 11 de 70 estudiantes.

Se toma como muestra el grupo 17, conformado por 34 estudiantes entre 17 y 24 años, de los programas de Economía, Ingeniería Administrativa, Ingeniería de Petróleos, Ingeniería Química, Estadística; de los cuales uno (1) nunca asistió, tres (3) se retiraron, finalizando el proceso 30 estudiantes, de los cuales 17 eran hombres y 13 eran mujeres.

CONTENIDO GENERAL DE LA ASIGNATURA:

Este programa consta de seis capítulos, que en el semestre 01 de 2011 se dictaron de acuerdo con la siguiente distribución de clases por capítulo:

1. Geometría Elemental (Clases 1 a 3).
2. Conjuntos y Sistemas numéricos (Clases 4 y 5).
3. Álgebra (Clases 6 a 11).
4. Ecuaciones y Desigualdades (Clases 12 a 14).
5. Funciones Reales (Clases 15 a 24).
6. Trigonometría (Clases 25 a 29).

2.3. DESCRIPCIÓN DE LAS ESTRATEGIAS IMPLEMENTADAS

La metodología que se implementa en el aula es la solución de problemas y el trabajo cooperativo, el cual permite compartir con los compañeros los conocimientos que se tienen y dar solución a situaciones planteadas. Luego de discutir en pequeños grupos la posible solución se animan para que salgan al tablero y compartan con los demás estudiantes el procedimiento utilizado.

Al finalizar cada clase se propone para el próximo encuentro un problema que los estudiantes resolverán en sus casas y que luego compartirán en el grupo, éste problema será el punto de partida para desarrollar el tema correspondiente de la clase siguiente.

Por ejemplo, se propone a los estudiantes el siguiente problema: **¿En qué cuadrante se encuentra situado el lado terminal de un ángulo si su tangente es positiva y su seno es negativo?**

Este problema lleva a un estudiante a consultar sobre ángulos, funciones trigonométricas, plano cartesiano, ángulos positivos y negativos y con estos conocimientos previos el desarrollo de la clase se hace participativa y los aprendizajes son más significativos.

Al final de cada capítulo se plantean unos ejercicios y problemas que los estudiantes irán trabajando como preparación para los parciales.

Se aplicaron las estrategias metodológicas planeadas, éstas permitieron observar cambios significativos en la actitud de los estudiantes frente a su proceso de aprendizaje.

La metodología de solución de problemas y trabajo cooperativo se lleva a cabo después de haber dado la explicación del tema correspondiente y de compartir en clase la solución del ejercicio o problema propuesto para ella, a pesar de que el tiempo de clase era escaso para toda la temática que se debía desarrollar, se dedicaban 20 minutos para trabajar un problema propuesto sobre el tema y determinar los posibles vacíos que quedaron y retroalimentar en la clase siguiente.

Por ejemplo en una de las clases se trabajó el siguiente problema que puede ser resuelto aplicando el Teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas.

PROBLEMA DE APLICACIÓN:

Un observador ubicado a x metros del pie de una torre observa el punto más alto de ésta con un ángulo de elevación de 60 grados. Se desplaza 100 metros alejándose de la torre y observa el mismo punto con un ángulo de 30 grados.

Determinar:

* La altura de la torre.

* La distancia del ojo del observador a la parte más alta de la torre cuando se ha desplazado 100 metros y observa con un ángulo de elevación de 30º.

Los estudiantes en pequeños grupos aplicaban el método de los 4 pasos de Polya, la profesora pasaba por los grupos asesorando a los estudiantes, guiándolos, formulándoles preguntas para confrontar sus conocimientos previos como:

P: ¿Qué datos se conocen en el problema?

E: Los dos ángulos de elevación (60º y 30º) con que realizó las observaciones y la distancia (100 metros) que existe entre los puntos en que realizó éstas observaciones.

P: ¿Qué datos preguntan en el problema?

E: La altura de la torre y la distancia del ojo del observador a la parte más alta de la torre cuando se ha desplazado 100 metros y observa con un ángulo de elevación de 30º.

P: ¿Qué es un ángulo de elevación?

E: Es el ángulo formado por la línea horizontal del observador y la línea de Mira. La línea de Mira está por encima de la línea horizontal.

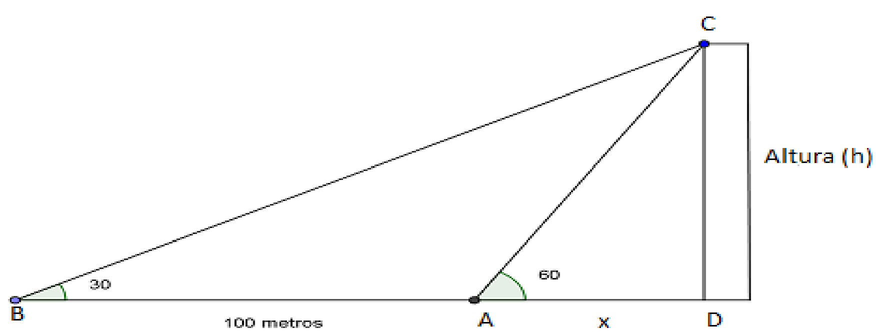
P: ¿Qué relación existe entre la altura y el ángulo de elevación?

E: La altura está opuesta al ángulo de elevación.

P: ¿Podrían representar la situación?

E:

Gráfica N° 2



P: ¿Qué figura geométrica se genera con los datos del problema?

E: Un triángulo rectángulo.

P: ¿Qué es un triángulo rectángulo?

E: Es el triángulo que tiene un ángulo recto (90º).

P: ¿Qué es una altura?

E: Es un segmento perpendicular que parte de un vértice y llega al lado opuesto o a su prolongación.

P: ¿Cómo se llaman los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo?

E: Estos lados se llaman catetos.

P: ¿Cómo se llama el lado opuesto al ángulo recto?

E: Este lado se llama hipotenusa.

P: ¿Qué relación existe entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo?

E: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

P: ¿Qué representa la altura de la torre en el triángulo rectángulo?

E: Representa el cateto opuesto al ángulo de elevación.

P: La distancia del ojo del observador a la parte más alta de la torre, ¿cómo está representada en el triángulo rectángulo?

E. Por la hipotenusa.

P: ¿Qué función trigonométrica relaciona los datos dados con los pedidos?

E: La tangente.

SOLUCIÓN:

1º COMPRENDER EL PROBLEMA:

AB = 100 metros   ∢A = 60º   ∢B = 30º

Se debe hallar la altura h de la torre y la distancia del ojo del observador a la parte más alta de la torre que la llamaremos BC.

2º CONFIGURAR UN PLAN:

Para resolver el problema debemos hallar el valor de x, con este valor se puede hallar el valor de la altura y con el valor de x y de la altura, hallamos la distancia del ojo del observador a la parte más alta de la torre que la llamaremos BC.

Considerando los triángulos rectángulos BDC y ADC, tenemos:

$$tan\ (60) = \frac{h}{x}$$

$$\tan\ (30) = \frac{h}{100+x}$$

$Teorema\ de\ Pitágoras$: $(BC)^2 = (BD)^2 + (CD)^2$

3º EJECUTAR EL PLAN:

Solucionado el sistema de ecuaciones anteriores, se tiene:

$$tan\ (60) = \frac{h}{x}$$

$$h = x * tan 60$$

$$\tan\ (30) = \frac{h}{100+x}$$

$$h = (100 + x) * \tan\ (30)$$

Igualando las expresiones anteriores, se tiene:

$$x * \tan(60) = (100 + x) * \tan\ (30)$$

$$x * \tan(60) = 100 * \tan(30) + x * \tan(30)$$

$$(\tan(60) - \tan(30)) * x = 100 * \tan(30)$$

$$x = \frac{100 * \tan(30)}{(\tan(60) - \tan(30))}$$

$$x = 50\, metros$$

Por lo tanto,

$$h = 50 * tan60 = 50\sqrt{3} metros$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$(BC)^2 = (BD)^2 + (CD)^2$$

$$(BC)^2 = (150)^2 + (50\sqrt{3})^2$$

$$(BC)^2 = 22500 + 7500$$

$$(BC)^2 = 30000$$

$$BC = 100\sqrt{3}$$

4º MIRANDO HACIA ATRÁS:

Verificando las respuestas:

$$tan\,(60) = \frac{h}{x}$$

$$\tan(60) = \frac{50\sqrt{3}}{50}$$

$$\tan(60) = \sqrt{3}$$

Por lo tanto la solución es correcta.

Podemos concluir que:

- La altura de la torre es de $50\sqrt{3} metros$

- La distancia de la base de la torre al lugar donde se hizo la primera observación era de:

$x = 50\ metros$

- La distancia del ojo del observador a la parte más alta de la torre cuando se ha desplazado 100 metros y observa con un ángulo de 30º es de $100\sqrt{3}$ metros.

3. RESULTADOS

Los resultados obtenidos fueron extraídos de los parciales realizados durante el semestre, al igual que de las observaciones de los comportamientos que presentaron los estudiantes durante las clases.

Cada parcial comprendió la siguiente temática:

PRIMER PARCIAL	Conceptos geométricos, operaciones con los números reales y teoría de conjuntos.
SEGUNDO PARCIAL	Operaciones con polinomios, factorización, teorema del factor y ecuaciones
TERCER PARCIAL	Inecuaciones y funciones.
CUARTO PARCIAL	Razones trigonométricas, ecuaciones trigonométricas, identidades, solución de problemas y transformación de funciones trigonométricas.

En la siguiente tabla se presenta los resultados de los cuatro parciales realizados en el semestre.

PARCIAL	1o		2º		3o		4º	
NOTA DE 0-5	FR. ABSO	%	FR. ABSO	%	FR. ABSO	%	FR. ABSO	%
0 - 0,9	5	16.66	5	16.66	1	3.33	1	3.33
1 - 1,9	6	20	3	10	2	6.66	3	10
2 - 2.9	9	30	5	16.66	7	23.33	2	6.66
3 - 3,9	6	20	9	30	5	16.66	6	20
4 - 5	4	13.33	8	26.66	15	50	18	60
TOTAL	30	100	30	100	30	100	30	100

De la tabla podemos extraer la siguiente información:

En el primer parcial el 33.33% gana la prueba.

En el segundo parcial el 56.68% gana la prueba.

En el tercer parcial el 66.66% gana la prueba.

En el cuarto parcial el 80% gana la prueba.

Durante las primeras clases se observó que los estudiantes no tenían disciplina de estudio, dedicaban poco tiempo a afianzar el conocimiento que estaban adquiriendo. El desarrollo de los temas de geometría se les dificultaba, al igual que el trabajo con los números racionales. En la primera prueba presentaron dificultades en la parte operativa de las matemáticas: operaciones con números reales (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación); falencias muy delicadas que muestran el poco conocimiento matemático que se tiene.

El trabajo cooperativo no fue bien asimilado por todos los estudiantes, mostrando cierta resistencia hacia él. Varios de los estudiantes no se adaptaban a las normas que se establecían dentro de cada grupo, igualmente no les gustaba sentirse criticados por los compañeros, ni sentir la exigencia de ellos.

Para que se dé un aprendizaje significativo debe existir una buena actitud por parte de los estudiantes, en otras palabras, deben querer aprender y desafortunadamente algunos de ellos no quisieron a pesar de las estrategias utilizadas y de otras sugeridas como fueron: asesorías extra clase, disponibilidad del correo electrónico de la docente para posibles inquietudes.

La resolución de problemas requiere de contenidos conceptuales, de buena actitud frente al trabajo y del deseo de superar sus limitantes. Estas características no todos los estudiantes las poseían y frente a la menor dificultad se sentían frustrados y claudicaban fácilmente.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Como puede apreciarse en la información, los estudiantes iban dejando las notas de 0 a 0,9 e iban aumentando el porcentaje de 4 a 5. Para el tercer parcial ya la mitad del grupo obtenía notas entre 4 y 5, un progreso muy significativo ya que las notas entre 0 y 0,9 pasaron de un 16.66% en el primer parcial a un 3.33% en el tercer parcial. En el último parcial que comprendió la parte de la Trigonometría, las notas entre 0 y 0,9 pasaron a un 3.33% y las notas de 4 a 5 pasaron a un 60%

El progreso que fueron teniendo los estudiantes se vio reflejado en los resultados de los parciales y en el último, que comprendió la temática de Trigonometría, el 80% de los estudiantes aprobaban la prueba.

Al iniciar los temas de Trigonometría se pudo determinar que los estudiantes durante las clases previas a éstas habían adquirido aprendizajes significativos, ya que la temática vista con anterioridad facilitó el adquirir los nuevos conocimientos en funciones, ecuaciones e identidades trigonométricas, al igual la solución de problemas que originaban triángulos rectángulos y triángulos no rectángulos.

La aplicación de las estrategias solución de problemas y trabajo cooperativo, condujo a logros significativos, reflejados en el rendimiento académico, el cual fue mejorando gradualmente. Sin embargo, como se deduce de la tabla, aproximadamente con el 20% de los estudiantes las estrategias implementadas no fueron suficientes, porque estos no se involucraron en el trabajo cooperativo, ya que de las instituciones educativas de donde provenían no se les inculcó este tipo de trabajo, ellos sólo se dedicaban a copiar de los compañeros, no hacían aportes, no se comprometían y no aceptaban las sugerencias de los compañeros. En la solución de problemas presentaron falencias porque con los pocos conocimientos que tenían en matemáticas no lograban comprender el problema y no encontraban como darle solución. La actitud dentro del aula era pasiva, esto llevaba a que no realizaran preguntas para aclarar sus inquietudes y a no aprovechar las oportunidades de las explicaciones extra clase.

Aunque los resultados obtenidos en términos generales fueron positivos, se genera el siguiente interrogante: ¿Qué otra estrategia metodológica es necesario implementar para alcanzar mejores resultados?

5. “SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TRABAJO COOPERATIVO: UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA A DESARROLLAR EN TRIGONOMETRÍA”

Propuesta para la escuela de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín

La propuesta para la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, para el trabajo de la temática de Trigonometría está basado en resolución de problemas y el trabajo cooperativo. A través de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos, los estudiantes tienen dos responsabilidades: aprender la temática trabajada en el aula y asegurarse de que todos los compañeros de su grupo de trabajo también lo hagan, y se beneficien tanto por la acción de enseñar, como por recibir enseñanza de sus compañeros.

A continuación se presenta el desarrollo de “La Unidad Didáctica: Solución de Triángulos” que pertenece a la temática de Trigonometría.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA-SEDE MEDELLIN

MATEMÁTICAS BÁSICAS.

SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

INTRODUCCIÓN:

Esta unidad didáctica pretende que el estudiante se familiarice con las distintas clases de triángulos y adquiera la habilidad para desarrollarlos.

En muchas aplicaciones utilizamos la trigonometría y en particular la solución de triángulos para resolver situaciones de navegación, levantamientos topográficos, astronomía, entre otras.

El estudiante para el desarrollo de esta unidad requiere tener conocimientos en operaciones con los números reales, concepto de ángulo, concepto y clases de triángulos, solución de sistemas de ecuaciones, definición de las funciones trigonométricas, identidades trigonométricas.

CONTENIDO:

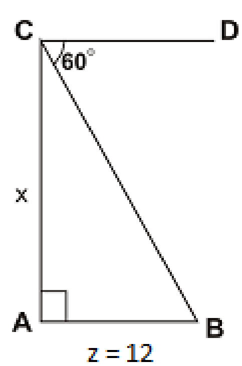
SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS:

Solucionar un triángulo es determinar los valores de los tres lados y los tres ángulos a partir de la información que se tenga acerca del triángulo.

Ejemplo1. (Triángulo rectángulo)

Dada la gráfica 7, los segmentos CD y AB son paralelos. Encuentre los elementos del triángulo rectángulo CAB.

Gráfica N° 7



Solución aplicando el método de los cuatro pasos:

1º COMPRENDER EL PROBLEMA:

El triángulo CAB es rectángulo en A.

El ángulo ABC = 60^{o} porque el ángulo BCD es alterno interno con el ángulo ABC, por hipótesis: CD paralelo a AB.

El ángulo ACB = 30º, porque la suma de los ángulos interiores de todo triángulo suman 180º.

Se debe hallar el valor de x, que viene a ser el cateto AC en el triángulo rectángulo.

Para resolver el problema se debe aplicar la definición de las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras.

2º CONFIGURAR UN PLAN:

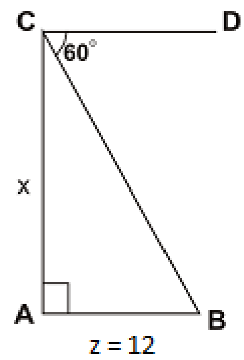
Se utiliza la función trigonométrica seno para el ángulo de 30º y se aplica el teorema de Pitágoras.

$a. \quad sen\, 30 = \frac{12}{CB}$

$b.\ Teorema\ de\ Pitágoras:\ (CB)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

3º EJECUTAR UN PLAN:

Se resuelve aplicando el teorema de Pitágoras, pero para ello se debe hallar primero el valor de CB, aplicando la función trigonométrica seno para el ángulo de 30º.



$$sen\,30 = \frac{12}{CB}$$

$$CB = \frac{12}{sen\,30}$$

$$CB = 24\,unidades$$

Para hallar el valor de AC aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$Teorema\ de\ Pitágoras{:}\ (CB)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

$$(CB)^2 - (AB)^2 = (AC)^2$$

$$(24)^2 - 12^2 = (AC)^2$$
$$576 - 144 = (AC)^2$$

$$432 = (AC)^2$$

$$\sqrt{432} = AC$$

$12\sqrt{3}$ = AC

4º **MIRANDO HACIA ATRÁS:**

Otra manera de resolver el problema es aplicando funciones trigonométricas.

Para hallar el valor del lado CB aplicamos la función seno para el ángulo de 30º.

$$sen\,60 = \frac{AC}{CB}$$

$sen\,60 * CB = AC$

$\frac{\sqrt{3}}{2} * 24 = AC$

$12\sqrt{3}$ = AC

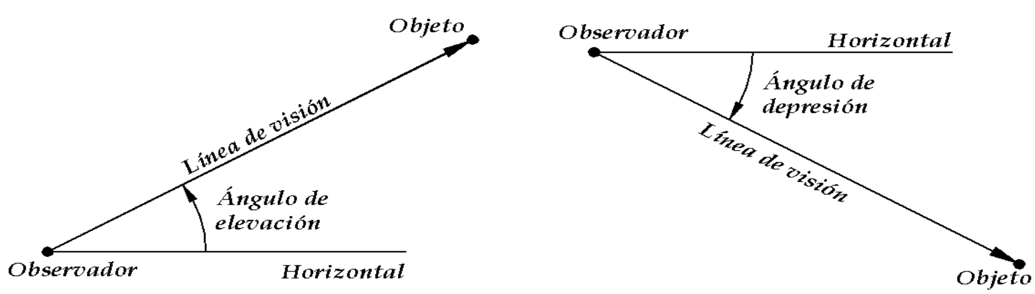
Queda verificado por los dos métodos que $AC = 12\sqrt{3}$

Definición:

Ángulo de elevación y ángulo de depresión.

Si un observador está mirando un objeto, entonces, la línea del ojo del observador al objeto se llama línea de visión. Si el objeto que está siendo observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama ángulo de elevación. Si el objeto está abajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama ángulo de depresión.

Gráfica No. 8



Fuente: hotmath.com/.../angles-of-elevation-and-depression.ht... - Estados Unidos

Ley de Seno y Ley de Coseno

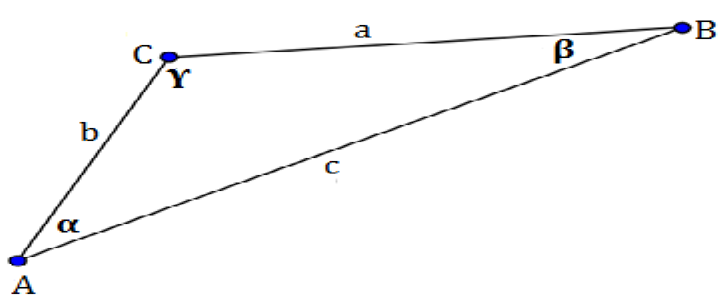
Para resolver algunos problemas de aplicación se hallan uno o más elementos de un triángulo rectángulo, y para ello se usa la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo y el Teorema de Pitágoras, que sólo es válido para triángulos rectángulos. Se presentan además problemas en los cuales se deben hallar uno o más elementos de un triángulo acutángulo u obtusángulo, en los que no se puede usar de manera directa el Teorema de Pitágoras ni la definición de las funciones trigonométricas.

A continuación se muestran dos herramientas llamadas Ley de Seno y Ley de coseno, que expresan ciertas relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo cualquiera.

Ley de Seno

En todo triangulo ABC (ver la Gráfica 9)

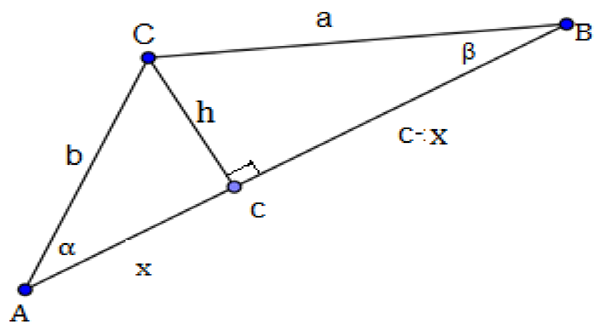
Gráfica 9



$$\frac{sen\propto}{\mathrm{a}}=\frac{sen\beta}{b}=\frac{sen\gamma}{c}$$

Prueba: Trazamos la altura h desde el vértice C.

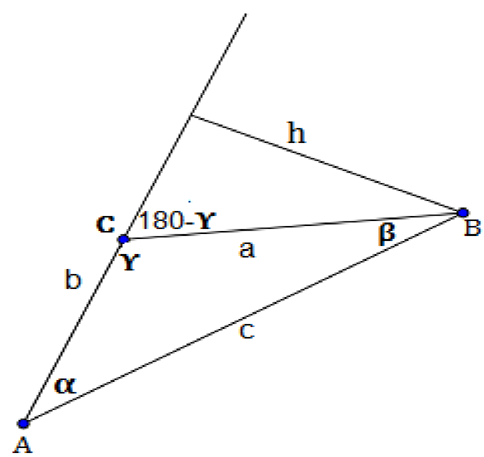
Gráfica N°10



De la gráfica 10 se tiene:

$b * sen\alpha = h = \mathrm{a} * sen\beta$, luego $\dfrac{sen\alpha}{\mathrm{a}} = \dfrac{sen\beta}{b}$

Gráfica N°11



Por otra parte, de la gráfica 11 se tiene que:

$$c * sen\alpha = h = \mathrm{a} * sen(180 - \gamma)$$
$$c * sen\alpha = \mathrm{a} * (sen180 * cos\gamma - sen\gamma * cos180) = \mathrm{a} * sen\gamma$$

Se sabe que $sen180 = 0 \quad y \; cos180 = -1$

Se tiene entonces que: $\frac{sen\alpha}{\mathrm{a}} = \frac{sen\gamma}{c}$

Observaciones:

Si en un triángulo se conocen un lado y dos ángulos o dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados, se puede usar la Ley de Seno para resolver el triángulo.

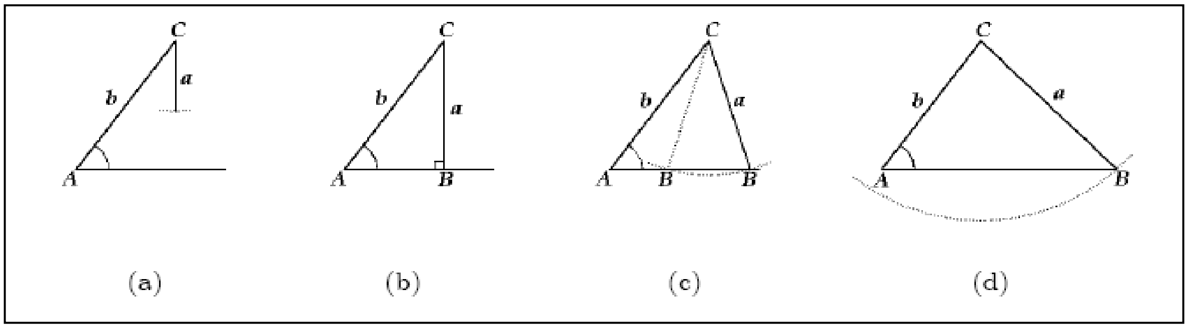
- En el primer caso, conocidos un lado y dos ángulos, el tercer ángulo se calcula usando el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. Para hallar cada uno de los otros dos lados, se aplica la Ley de Seno usando la proporción entre la razón que involucra el lado conocido y la que involucra el lado que queremos hallar. En este caso existe un único triángulo que cumple las condiciones dadas.

- En el segundo, si se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se usa la Ley de Seno para hallar el ángulo opuesto al otro lado conocido, luego se halla el tercer ángulo y finalmente el tercer lado se calcula usando nuevamente la Ley de Seno.
  En este caso puede ocurrir que dos triángulos, un triángulo o ningún triángulo cumplan las condiciones dadas, razón por la cual se conoce como el caso ambiguo.

Existen cuatro posibilidades, como se muestra en la gráfica 12.

En el caso (a), no existe un triángulo con las condiciones dadas, porque la longitud del lado a es menor que la requerida para formar un triángulo que las cumpla. En (b), se obtiene un triángulo rectángulo que se resuelve más fácilmente usando el Teorema de Pitágoras y la definición de las funciones trigonométricas.

Gráfica N°12

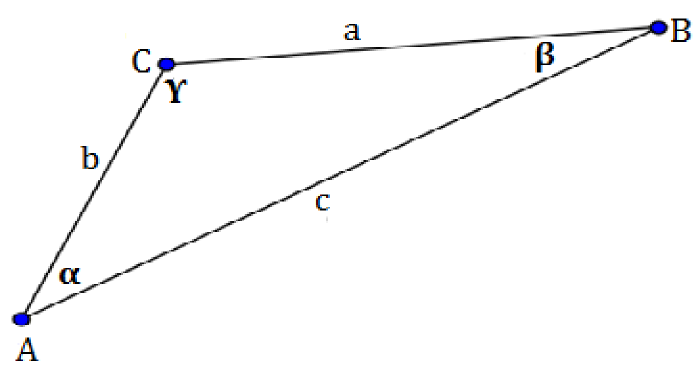


En (c), existen dos triángulos que cumplen las condiciones y por tanto hay dos soluciones posibles y, en (d), la solución es única.

Ley del coseno

En todo triángulo ABC (ver la gráfica No. 13)

Gráfica N°13.



Se tiene que:

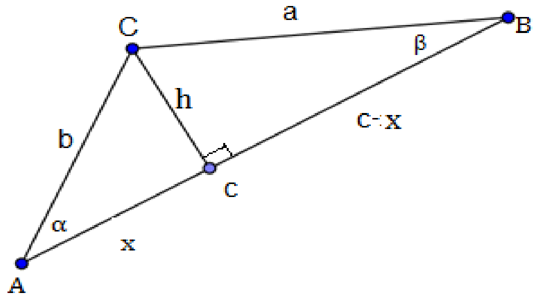
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\gamma$$

Prueba: Dada la gráfica

Gráfica N°14



Se tiene que:

$a^2 = h^2 + (c-x)^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2$, donde $h = bsen\alpha$ y $x = bcos\ \alpha$

$a^2 = (bsen \propto)^2 + c^2 - 2cb\ cos\alpha + (bcos\alpha)^2$

$a^2 = b^2sen^2\alpha + c^2 - 2cb\ cos\alpha + b^2cos^2\alpha$

$a^2 = b^2(sen^2\alpha + cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\ cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\alpha$

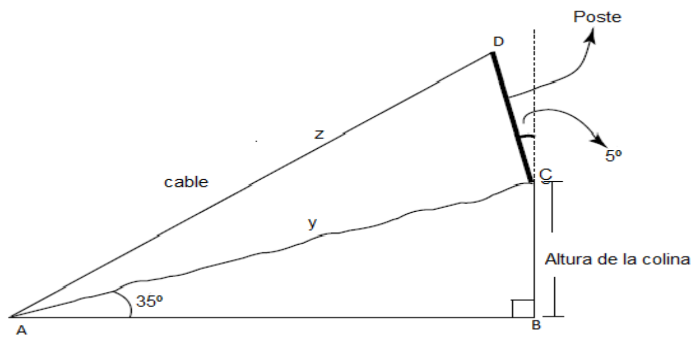
De manera similar se obtiene:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\beta$

Ejemplo ilustrativo:

Un poste de 6 metros de largo se encuentra clavado en la cima de una colina de 10 metros de altura. Debido a un cable que se extiende desde la base de la colina hasta la parte superior del poste, éste se inclina 5 grados respecto a la vertical. Si se sabe que el ángulo de elevación de la colina con respecto a la horizontal es de 35 grados, determine la longitud del cable. (Ver la gráfica 15).

Gráfica N°15



Fuente www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/.../examenes/.../4-PARCIAL

SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE LOS CUATRO PASOS:

Comprender el problema:

¿Qué se conoce del problema?:

Largo del poste = 6 metros.

Altura de la colina (h) = 10 metros.

Inclinación del poste respecto de la vertical = 5º

Ángulo de elevación de la montaña respecto de la horizontal = 35º

¿Qué se pide?

Hallar la longitud del cable.

Configurar el plan:

Se deben aplicar:

-Las funciones trigonométricas.

-Suma de ángulos interiores en todo triángulo.

-Ángulos suplementarios.

-La ley de cosenos.

Ejecutar el plan:

Sea:

y : distancia entre el punto de observación y el punto más alto de la colina.

z : Longitud del cable.

Lo que se debe hacer es hallar el valor de y en el triángulo ABC aplicando el Teorema de Pitágoras; para esto se debe hallar el valor del lado AB utilizando la definición de la función tangente para el ángulo de 35º, luego de conocer el valor de y se halla el valor de z por ley de coseno en el triángulo ACD.

Aplicando la definición de tangente de 35º:

$$\tan(35) = \frac{10}{AB}$$

$$AB = \frac{10}{\tan(35)}$$

$$AB \approx 14.28$$

$$y^2 = AB^2 + h^2$$

$$y^2 = (14.28)^2 + 10^2$$

$$y^2 = 203.91 + 100$$

$y^2 = 303.91$

$y = \sqrt{303.91}$

$y = 17.43$

Por lo tanto $y = 17.43$

El ángulo formado por AC con el poste es de 120º, ya que:

En el triángulo ABC los ángulos interiores tienen una medida de 35º, 55º y 90º porque la suma de los ángulos interiores de todo triángulo suma 180º.

Ahora en el punto C y con la recta AC se forman ángulos suplementarios y como el ángulo C del triángulo ABC mide 55º, su suplemento mide 125º, sabemos por los datos del problema que el poste se inclinó 5º respecto de la vertical, entonces:

$125^\circ - 5^\circ = 120^\circ$

Ahora en el triángulo superior (que no es un triángulo rectángulo) se cumple que:

$z^2 = (17.43)^2 + 6^2 - 2(17.43)(6)cos120$

$z = \sqrt{(17.43)^2 + 6^2 - 2(17.43)(6)cos120}$

$z \approx 21.08\, metros$

Por lo tanto la longitud del cable es de 21.08 metros.

Mirando hacia atrás:

Hallamos el valor del lado AB utilizando la definición de la función trigonométrica seno de 55º, para esto hallamos el valor del lado y aplicando la función trigonométrica seno de 35º, verificando así que da el mismo resultado.

$Sen35 = \frac{10}{y} \Longrightarrow y = \frac{10}{sen35}$

$y = 17.43$

Ahora,

$$Sen\,55 = \frac{AB}{y} \Longrightarrow \quad AB = \ y * Sen\,55$$

$$AB = 17.43 * 0.819$$

$$AB = \ 14{,}277 \cong 14{,}28$$

ACTIVIDAD PROPUESTA PARA REALIZAR EN GRUPOS DE TRABAJO:

El docente propone en el grupo la siguiente actividad: “Realizar diferentes medidas de alturas utilizando el goniómetro.”

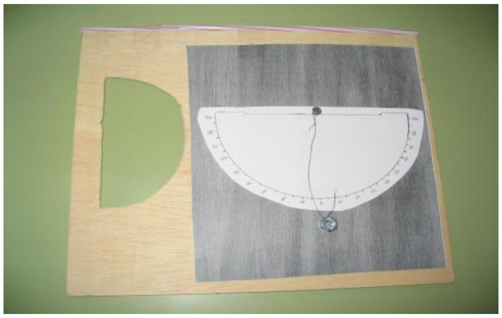
El profesor forma grupos de cuatro estudiantes quienes elaborarán el goniómetro y realizarán la medida de la altura de un edificio, la pendiente de una calle, la altura de un árbol; ellos se reúnen para asignarse responsabilidades.

CÓMO CONSTRUIR EL GONIÓMETRO

El goniómetro es un aparato medidor de ángulos.

Materiales: Un trozo de madera, una fotocopia de un transportador o graduador, un pitillo, hilo, una tuerca y cinta de pegar (Hernández Cárceles, n.d.).

Figura N°1



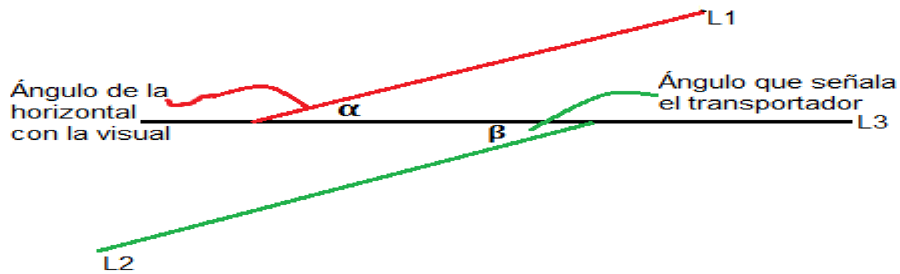
El pitillo se pega en la parte superior de la madera con la cinta, como se muestra en la imagen. Se pega la fotocopia del transportador o graduador a la madera. El tornillo se clava como se ve en la imagen sujetando el hilo con la tuerca que hará de contrapeso.

Para utilizar el goniómetro se ubica el objeto que se desea observar a través del pitillo, el tornillo que está sujeto al hilo se mueve de su punto de equilibrio determinando en el transportador el ángulo que se genera con la línea horizontal y la visual.

Figura N° 2

Por geometría se puede demostrar que el ángulo que muestra el graduador es igual al ángulo de la horizontal con la visual, observa la figura 3.

Figura N°3



En la figura se puede apreciar que la recta L1 es paralela a la recta L2, la recta L3 es secante a las rectas L1 y L2, por tanto los ángulos α y **β** son congruentes por ser ángulos alternos internos.

Para medir la altura de un edificio se procede de la siguiente manera:

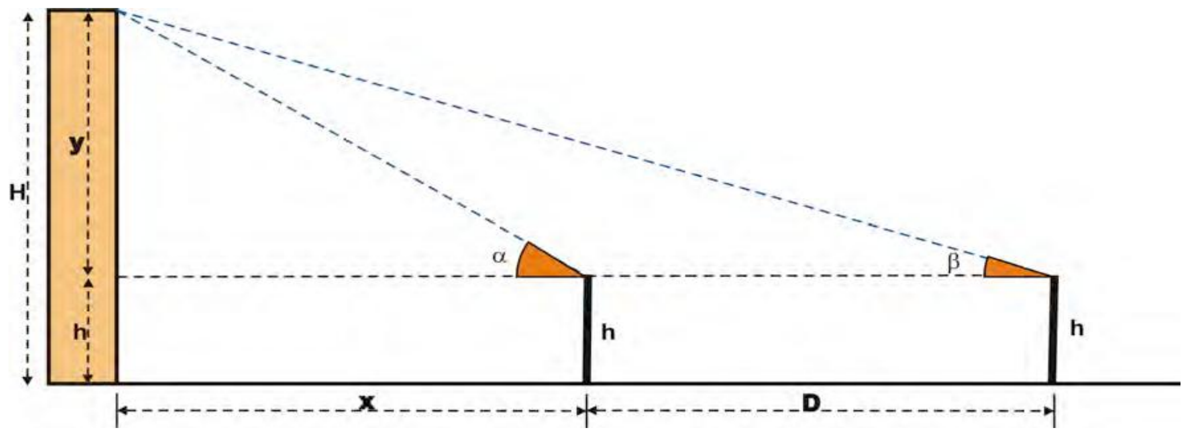
- Un estudiante se ubica a una distancia determinada del edificio y dirige el goniómetro apuntando a la parte superior del edificio.

- Otro compañero lee el ángulo que señala en el goniómetro la cuerda con la plomada (tornillo).

- Los observadores se alejan del edificio una distancia conocida y hacen otra medición.

- Se obtienen así dos ángulos de elevación y con ellos se puede calcular la altura del edificio.

Gráfica N° 16



Fuente: Trabajo www.esdelibro.es/.../trabajos07/...trigonometría/200700075_trigono

Para medir la pendiente de una carretera se colocan dos estudiantes a una distancia considerable (más o menos 18 metros), se mide la distancia entre los estudiantes y el ángulo que se forma con la horizontal. Usando las razones trigonométricas se calcula la pendiente de la carretera.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS APLICANDO EL MÉTODO DE LOS CUATROS PASOS DE POLYA Y EL TRABAJO COOPERATIVO.

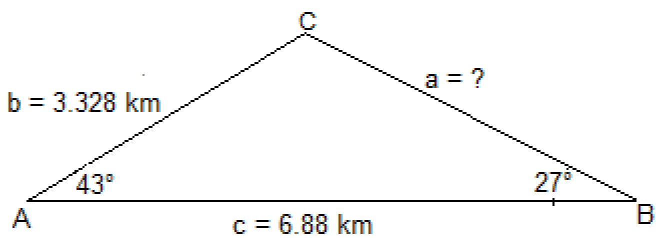
Al utilizar la estrategia del trabajo cooperativo en el aula se tuvo en cuenta los tres momentos enunciados en el marco teórico.

Primer problema

Un observador desde un punto A divisa un punto C con un ángulo de elevación de 43º a una distancia de 3.328 km, se retira del punto A en línea recta hasta el punto B distante 6.88 km, desde allí realiza otra observación al punto C con un ángulo de elevación de 27º como lo muestra la gráfica 17. ¿Cuál es la distancia que hay entre el punto C y el punto B?

En esta primera parte el estudiante se enfrenta solo a la solución del problema.

Gráfica N° 17



El profesor conforma grupos heterogéneos de cuatro estudiantes donde cada uno comparte la solución que obtuvo en el trabajo individual, de esta manera se produce una discusión en el pequeño grupo donde los que lo resolvieron por distintos caminos confrontan y validan sus desarrollos, mientras que los que no pudieron lograrlo aclaran sus dudas y tratan de resolverlo con las explicaciones de los compañeros. De las soluciones, los estudiantes en cada grupo escogen la más adecuada.

SOLUCIÓN APLICANDO EL MÉTODO DE LOS CUATRO PASOS.

Del problema se conoce:

$\measuredangle A = 43º$ $\measuredangle B = 27º$

b = 3.328 km c = 6.88 km

Se debe hallar el valor del lado a aplicando la ley de seno:

$$\frac{\mathrm{a}}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B}$$

$$\frac{\mathrm{a}}{Sen\ 43} = \frac{3.328}{Sen\ 27}$$

$$\mathrm{a} = \frac{3.328 * sen43}{Sen\ 27}$$

$$\mathrm{a} = 4{,}99\ km$$

Existe otra manera de resolver el problema hallando primero la medida del ángulo C por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y luego aplicando la ley de senos para hallar la medida del lado **a.**

Cada grupo nombra un relator, quien sale al tablero para compartir con los demás compañeros su solución, en este momento se da una discusión frente a la solución de cada equipo, el profesor debe mediar la situación, cuidando que se discuta el proceso más no el resultado, sin intervenir en la solución del problema que están tratando.

Otra solución aplicando el método de los cuatro pasos:

Del problema se conoce:

∢ A = 43º ∢ B = 27º

b = 3,328 km c = 6,88 km

Se debe hallar el valor del ángulo C por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y el valor del lado a aplicando la ley de seno:

$\measuredangle$ C = 180º - (43º + 27º)

$\measuredangle$ C = 180º - 70º

$\measuredangle$ C = 110º

$$\frac{c}{Sen\ C} = \frac{\mathrm{a}}{Sen\ A}$$

$$\frac{6.88}{Sen\ 110} = \frac{\mathrm{a}}{Sen\ 43}$$

$$\mathrm{a} = \frac{6.88 * sen\ 43}{Sen\ 110}$$

$$\mathrm{a} = 4.99\ km$$

Se verifica que el valor de a sí corresponde, ya que por los dos métodos dio el mismo resultado.

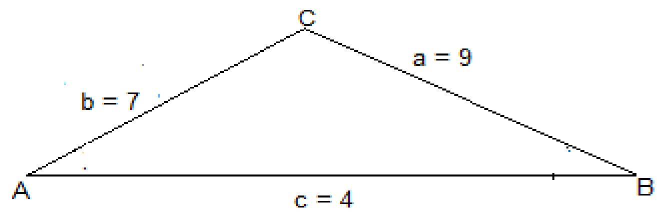
Finalizado el tercer momento el profesor interviene para dar las aclaraciones necesarias y dar las conclusiones a que se llegue en la discusión.

Segundo Problema:

El estudiante se enfrenta solo al siguiente problema: Hallar la medida del ángulo B sabiendo que la medida de los lados son:

a = 9 b = 7 c = 4

Gráfica N°18



El profesor conforma grupos heterogéneos de cuatro estudiantes donde cada uno comparte la solución que obtuvo en el trabajo individual, de esta manera se produce una discusión en el pequeño grupo donde los que lo resolvieron por distintos caminos confrontan y validan sus desarrollos, mientras que los que no pudieron lograrlo aclaran sus dudas y tratan de resolverlo con las explicaciones de los compañeros.

SOLUCIÓN APLICANDO EL MÉTODO DE LOS CUATRO PASOS.

Del problema se conoce:

a = 9 b = 7 c = 4

Se debe hallar el valor del ángulo B aplicando la ley de coseno.

$b^2 = \mathrm{a}^2 + c^2 - 2\mathrm{a}c\ cosB$

$$7^2 = 9^2 + 4^2 - 2 * 4 * 9 * \ cosB$$

$49 - 81 - 16 = -72\ cosB$

$$\frac{-48}{-72} = \ cosB$$

$$B = 48.19°$$

El problema también puede resolverse aplicando ley de seno y ley de coseno.

Cada grupo nombra un relator, quien sale al tablero para compartir con los demás compañeros su solución, en este momento se da una discusión frente a la solución de cada equipo, el profesor debe mediar la situación, cuidando que se discuta el proceso más no el resultado, sin intervenir en la solución del problema que están tratando.

Otra solución, aplicando el método de los cuatro pasos:

Del problema se conoce:

a = 9 b = 7 c = 4

Primero se halla el valor del ángulo A o del ángulo C aplicando la ley de coseno.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ac\ cosA$$

$$9^2 = 7^2 + 4^2 - 2 * 4 * 7 *\ cosA$$

$$81 - 49 - 16 = -56\ cosA$$

$$\frac{16}{-56} = cosA$$

$$A = 106.6^{\circ}$$

Conociendo el valor del ángulo A, se puede hallar el valor del ángulo B aplicando ley de seno.

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B}$$

$$Sen\ B = \frac{b\ Sen\ A}{a}$$

$$Sen\ B = \frac{7\ Sen\ 106{,}6}{9}$$

$$B = 48.19$$

Este grupo aunque siguió un procedimiento más largo, llegó al resultado correcto.

Al final el profesor interviene para dar las aclaraciones necesarias y dar las conclusiones a que se llegue en la discusión.

ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE:

ACTIVIDAD 1

Calcular el área de un terreno triangular de modo que sus lados midan 780 cm y 123 cm y forman un ángulo de 68º.

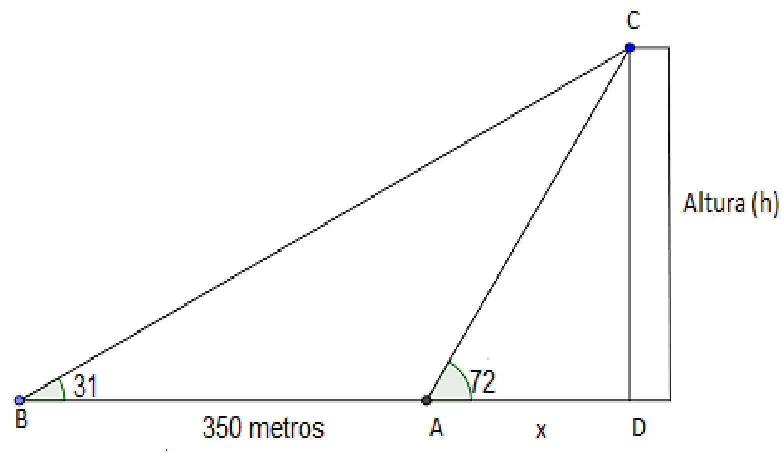
ACTIDAD 2

Calcular la altura de un árbol si se observa su copa desde un punto ubicado a 210 cm de su base y con un ángulo de 58º.

ACTIVIDAD 3

Se observa el punto más alto de un edificio con un ángulo de 72º sobre la horizontal como lo muestra la gráfica 19. Si se aleja 350 metros, se observa con un ángulo de 31º. ¿Cuál es la altura del edificio?

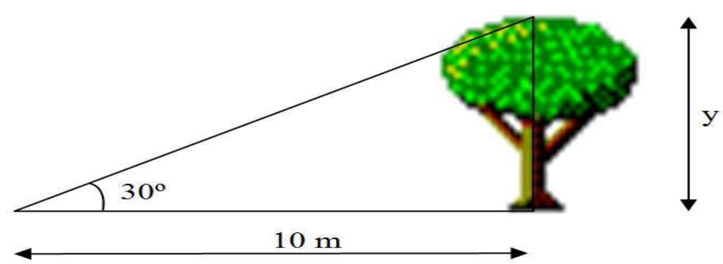
Gráfica N°19



ACTVIDAD 4

Cuál es la altura de un árbol que se observa a una distancia de 10 metros con un ángulo de elevación de 30º, tal como se muestra en la gráfica 20.

Gráfica N°20



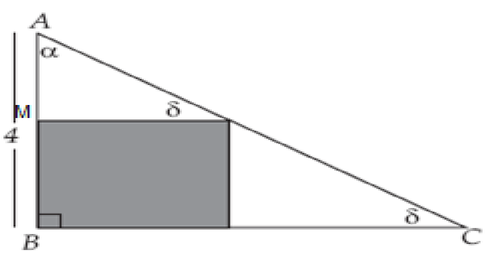
Fuente: www.scribd.com/doc/72018831/problemas-resueltos-trigonometria

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN[1]

Ejercicios propuestos.

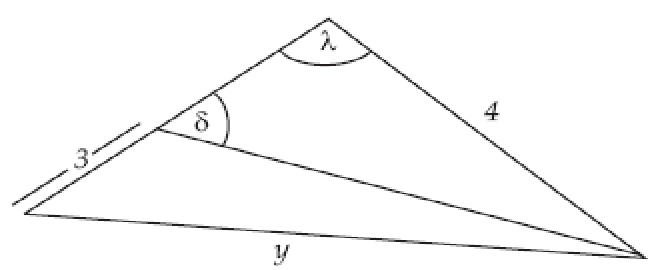
1. Considere la gráfica 21. Si $\alpha = \pi/3$ y $\delta = \pi/6$, determine las dimensiones del triángulo ABC y halle el área de la figura sombreada, sabiendo que M es punto medio del lado AB

Gráfica N° 21



2. Considere la gráfica 22, si $\lambda = 100^{\circ}$ y $\delta = 50^{\circ}$ determine el valor de y.

Gráfica N° 22



3. Desde un punto A, ubicado a una altura de 10 metros, un observador ve la cúspide de un edificio con un ángulo de elevación de 28° y la base del mismo con

[1] Tomado de http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/MATEGENERAL/practicas/09PracEcuFunTrig/pracEcuFunTrig.pdf

un ángulo de depresión de 15°. Determine la altura del edificio sabiendo que la altura del observador está dada con respecto a la base del edificio.

6. CONCLUSIÓN

El aprendizaje significativo obtenido con los estudiantes del curso de matemáticas básicas se genera gracias a las estrategias didácticas utilizadas como fueron, la solución de problemas y el trabajo cooperativo, ya que en su aplicación se logró poco a poco que los estudiantes se sintieran motivados y comprometidos con su proceso de aprendizaje. Dentro del aula se generó un ambiente de confianza donde se podía preguntar sin temor al ridículo, el trabajo cooperativo propició la participación y la responsabilidad, cada uno se preocupaba por el aprendizaje del otro y buscaban espacios donde pudieran mejorar y compartir los conocimientos adquiridos. La solución de problemas permitió aplicar los conceptos asimilados generando seguridad ya que se sentían temerosos por la poca familiarización con los problemas.

A los estudiantes que no alcanzaron un aprendizaje significativo les faltó más compromiso con su proceso de aprendizaje, no quisieron trabajar en equipo y la solución de problemas se les dificultó por su poco conocimiento matemático. No descubrieron la importancia de estas estrategias dentro de su formación y las competencias que se podían desarrollar a través de ellas.

Estamos en un mundo globalizado que requiere de personas con capacidad para trabajar en equipo, con habilidad para resolver problemas y aquellos dedicados a la enseñanza deben propiciar estos espacios, porque es en el aula de clase donde estas competencias se pueden potencializar.

7. RECOMENDACIONES

Dentro de la clase se debe tener en cuenta lo siguiente:

-Generar ambientes de confianza donde los estudiantes no sientan temor de preguntar ni de equivocarse.

-Realizar talleres grupales donde se participe activamente para aclarar dudas alrededor de los conceptos trabajados durante la clase, generando espacios para la colaboración y las relaciones entre los estudiantes.

-Utilizar herramientas tecnológicas para implementar la comunicación mediante el correo electrónico para aclarar dudas, enviar material de trabajo, entre otros.

-Proponer como trabajo extra clase una serie de tareas, talleres y consultas que permitan al estudiante profundizar sobre la temática trabajada durante las clases y logre afianzar sus conocimientos.

BIBLIOGRAFÍA

Agudelo Valencia, G. B., Bedoya Quintero, V., & Restrepo Morales, A. M. (2008). Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos.

Caldeiro, G. P., & Vizcarra, M. (2005). *El trabajo cooperativo en el aula*.

de Serrentino, M. T., & Rivera, L. P. (n.d.). Aprendizaje cooperativo: una experiencia constructivista en clase de matemática.

Fuentes, X. V. (2008). Resolución de Problemas Matemáticos: Un Cambio Epistemológico con Resultados Metodológicos. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, (003), 36–58.

García García, J. J. (1998). *Didáctica de las ciencias. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad.* (1st ed.). Medellín, Colombia: Colciencias - Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

Hernández Cárceles, D. (n.d.). Trigonometría, una herramienta para medir alturas. Retrieved from http://redesformacion.jccm.es/pv_obj_cache/pv_obj_id_9F35C1D7316DEBC77AD5EF7921292DFF04001300/filename/Trigonometria._una_herramienta_para_medir_alturas_.pdf

Jaramillo Atehortúa, A., Mejía Laverde, C. E., & Mesa Betancur, O. (2001). *Modelos de razonamiento lógico-matemático implementados en situaciones problema, en algunos temas específicos de la matemática.* Medellín, Colombia.

Stigliano, D., & Gentile, D. (2006). *Enseñar y aprender en grupos cooperativos*. Noveduc Libros.

Urdiain, I. E. (2006). *Matemáticas resolución de problemas*. Navarra: Fondo de Publicaciones del Gobierno de Navarra.

Vásquez Naranjo, O., Maderos Ramos, N., & Barrios Herrero, L. (2005). Algunas consideraciones sobre el aprendizaje. Aprendizaje significativo. Retrieved from http://www.ilustrados.com/tema/6959/Algunas-consideraciones-sobre-aprendizaje-Aprendizaje-significativo.html