UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Actividades con regla y compás, Algoritmo de Mascheroni, Algoritmo de Poncelet-Steiner

Victor Manuel Serrano Riaño

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de ciencias básicas
Bogotá, Colombia
2011

Actividades con regla y compás, Algoritmo de Mascheroni, Algoritmo de Poncelet-Steiner

Victor Manuel Serrano Riaño

Trabajo de profundización presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales

Director:

Alberto campos

Profesor Honorario

Universidad Nacional de Colombia

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de ciencias básicas

Bogotá, Colombia

2011

A mi madre, esposa y familiares por su comprensión y apoyo.

La geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal.

Poincaré

Agradecimientos

A todas aquellas personas que hicieron este trabajo posible, con sus aportes significativos.

Al Doctor Alberto Campos porque con su paciencia, constancia y vastos conocimientos en matemáticas dirigió este trabajo y me proporcionó gran información para la elaboración del mismo.

Al Maestro Raúl Humberto Albarracín quien se tomó el tiempo de leer apartes de este trabajo para su posterior corrección.

Al matemático Diego Arévalo el cual sugirió y aportó diversos caminos para la construcción y demostración de algunos enunciados.

Resumen

Este trabajo consiste en proponer actividades a los docentes de la asignatura dibujo técnico en secundaria que los induzcan a tener plena confianza en su personal conocimiento de los algoritmos de construcción o con regla y compás o con solo regla o con solo compás que puedan potenciar para adecuarlas y proponerlas a sus alumnos, con el propósito de responder a la pregunta ¿Cómo resolver problemas o con regla y compás o con solo regla o con solo compás?.
Estas actividades están tomadas de dos ensayos notables, el uno de Mascheroni [6], el otro de Steiner [8]. Son problemas propuestos, resueltos y expuestos, por Mascheroni los de construcciones con solo compás, los de construcciones con solo regla, por Steiner.
Ambos, ilustres geómetras demuestran con base en *Elementos* de Euclides [5], que las construcciones una vez realizadas responden a las condiciones de los problemas enunciados.
Las gráficas fueron realizadas con el software Cabri Geometry II Plus, el cual se pretende sea una ayuda para el docente.

Palabras clave: Construcción, Compás, Regla, Algoritmo de Mascheroni, Algoritmo de Poncelet-Steiner.

Abstract

This work consist of construction activities for technical drawing teachers in secondary school in order to lead them to have self-confidence in the personal knowledge of the algorithms construction with ruler and compass or with only one rule or with only one compass to show it to their students and to solve the following question: how to solve problems with ruler and compass or with only one rule or with only one compass?.
These activities are taken from two remarkable essays, one of Mascheroni [6], the other of Steiner [8]. There are problems proposed, solved and exposed; by Mascheroni the problems related with construction with only the compass and by Steiner the problems related with building only with a rule. Both illustrious geometers demonstrate taking as a

basis the Euclid´s Elements [5] that after the completion of constructions the solutions to the enunciated problems are the required.
The graphics were made with the software Cabri Geometry II Plus which try to be a tool to the teacher.
Keywords: Construction, compasses, rulers, Mascheroni algorithm, Poncelet-Steiner algorithm.

Contenido

Lista de símbolos y abreviaturas

1. Circunferencia de centro O y radio r: $\mathrm{circ}(\mathrm{O},\mathrm{r})$

2. Circunferencia de centro A y radio AB: $\mathrm{circ}(\mathrm{A},\mathrm{B})$

3. Circunferencia de centro A y radio OB: $\mathrm{circ}(\mathrm{A},\mathrm{OB})$

4. Arco AB: $\widehat{\mathrm{AB}}$

5. Triángulo con vértices A,B y C: $\Delta\mathrm{ABC}$

6. Ángulo con vértice en B y con lados que pasan por A y por C: $\sphericalangle\mathrm{ABC}$

En los talleres se utilizan los colores rojo, azul verde y negro en el orden de la construcción, siendo las rojas las primeras y las negras las últimas. Algunos trazos (datos) iniciales permanecen de color negro.

Introducción

Aunque la geometría constituye un importante capítulo de la matemática se identifican diversas dificultades en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de los conceptos fundamentales de ella, en los diferentes grados; se supone que los docentes tengan un buen conocimiento de los temas, pero, además se requiere que logren hablar un lenguaje que no solamente sea entendido por los alumnos sino que incite a estos a querer saber cada vez más y mejor de modo que desarrollen una buena disposición para aprender y adquieran los conocimientos mínimos para iniciarse en la disciplina.

La finalidad de este trabajo es proponer actividades para los docentes de la asignatura dibujo técnico en secundaria que los induzcan a tener plena confianza en su personal conocimiento de los algoritmos de construcción o con regla y compás o con solo regla o con solo compás, que puedan potenciar para adecuarlas y proponerlas a sus alumnos.

Objetivos específicos son los siguientes

Exponer algunos elementos teóricos y los pasos adecuados para realizar construcciones con regla y compás, con solo regla o con solo compás.

Desarrollar algunas aplicaciones de los métodos de construcción con regla y compás, con solo regla o con solo compás.

Diseñar talleres que permitan ver a docentes y alumnos cómo aplicar el conocimiento de los algoritmos.

Revisar algunos trabajos desarrollados diferentes al formal, como los elaborados con Cabri y C.a.R. para comparar las llamadas construcciones formales y las dinámicas.

No se desarrollará a fondo la geometría con regla y compás o con solo regla o con solo compás, sino solo las construcciones que permiten mostrar que toda construcción que se puede realizar con regla y compás también es construible o con solo regla o con solo compás.

La presente elección de temas figura el Dörrie [2]. Son tratados apenas los problemas básicos, lo cual responde específicamente a las condiciones estrechas de la enseñanza técnica y del aprendizaje en secundaria.

Los problemas de Mascheroni y de Steiner, escogidos, están aquí prácticamente listos para ser trabajados como talleres por profesores de dibujo técnico.

Se pretende que el tema de este trabajo sea de utilidad para aquellos docentes de educación media que deseen fundamentar y mostrar a sus estudiantes de una manera más didáctica y con fundamentación geométrica las construcciones con regla y compás o con solo regla o con solo compás.

1. Preliminares

En la antigüedad los griegos determinaron que los números construibles eran aquellos que se podían hallar utilizando como únicos instrumentos la regla y el compás, a partir de un segmento unitario. La regla griega no tiene marcas lo cual impide medir con ella, es decir que solo se utiliza para trazar líneas; en cuanto al compás su uso se restringe al trazo de circunferencias.

En el año 1797 el matemático italiano Lorenzo Mascheroni publicó su obra *Geometría del compás*. En esta obra mostró que todos los problemas de construcción que se resuelven con ayuda del compás y la regla, pueden resolverse con precisión empleando solo compás.

Es permitido trazar una circunferencia dado su centro y su radio usando el compás, pero no es posible trazar rectas. Una línea recta se considera terminada por dos cualesquiera de sus puntos de sus puntos.

Ya en 1759 Lambert había realizado una serie de construcciones geométricas con solo regla las cuales plasmó en su libro *freie perspektive*, que se publicó en Zurich ese año. Él se considera el creador del término "geometría de la regla". Posteriormente algunos matemáticos franceses, como Poncelet y Brianchon, utilizaron también la geometría de la regla sobre todo después de la publicación de Mascheroni.

Usando únicamente la regla, es posible representar expresiones algebraicas de forma racional, dejando por fuera las raíces cuadradas, que sí son construibles con regla y compás, lo cual lleva a Steiner a adicionar un círculo fijo, es decir con centro y radio fijados en el mismo plano en el que se desea dibujar con solo regla, así se puede trazar todas las expresiones algebraicas construibles con regla y compás.

Posteriormente retomó este trabajo Jakob Steiner (1796 - 1863), el más grande geómetra desde la época de Apolonio, en su célebre libro *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines Festen Kreises* (Construcciones geométricas ejecutadas mediante líneas rectas y un círculo fijo), publicada en Berlín, 1833.

Hartshorne en su obra *Enclid and Beyond* describe algunas características de las construcciones realizadas por Euclides utilizando regla y compás, además del uso que se le da a estas herramientas geométricas, de las cuales se pueden destacar las siguientes.

Para Euclides es válido realizar una figura utilizando la regla únicamente para trazar líneas dados dos puntos y el compás para trazar círculos con centro y radio dados. En la actualidad se sigue enseñando en secundaria la Geometría con las construcciones de Euclides aunque se relega muchas veces del programa por darle prioridad a la aritmética y al algebra.

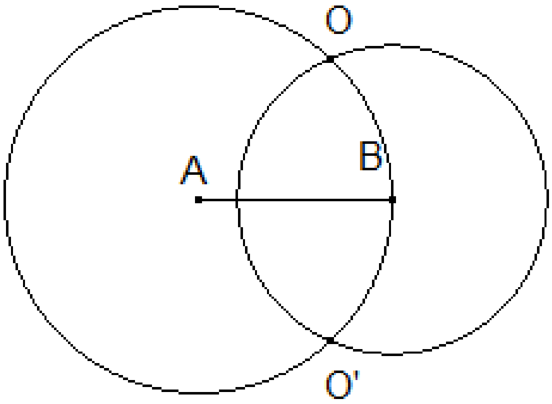
Las pruebas que realiza Euclides dependen únicamente de los postulados y nociones comunes expuestos al iniciar la obra. Además del compás plegable para algunos ejercicios se emplea el "compás oxidado" es decir el que al levantarlo del papel no se cierra, permite así trasladar distancias.

Una manera para medir la complejidad de una construcción, consiste el contar los pasos que se requieren para realizarla. Se asumen como pasos los dos siguientes. Primero, la construcción de una línea nueva dados dos puntos o puntos dados o construidos anteriormente. Segundo, la construcción de círculos dado su centro o un punto construido anteriormente y su radio igual a la distancia entre dos puntos dados o construidos anteriormente. No se considera un paso, el extender una línea dada o construida anteriormente, tomar un punto al azar de una recta o un círculo dado y la obtención de puntos de intersección.

1.1 Definiciones y teoremas importantes

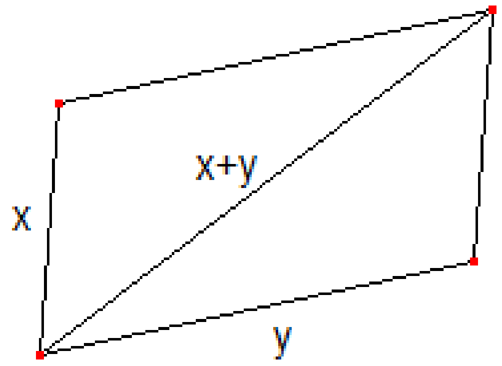
1.1.1 Imagen especular de un punto: Dado un punto O su imagen especular sobre una línea recta AB es el punto de intersección de la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{A}, \mathrm{AO})$ y la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{B}, \mathrm{BO})$. (Figura 1-1)

Figura 1-1



1.1.2 Teorema (propiedad del paralelogramo): La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es equivalente al doble de la suma de los cuadrados de los dos lados de dicho paralelogramo. (Figura 1-2) $||\mathrm{x}+\mathrm{y}||^2 + ||\mathrm{x}-\mathrm{y}||^2 = 2(||\mathrm{x}||^2 + ||\mathrm{y}||^2)$

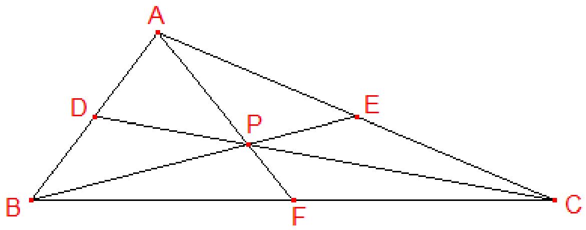
Figura 1-2



Se llama ceviana al segmento de recta que une el vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto o de su prolongamiento.

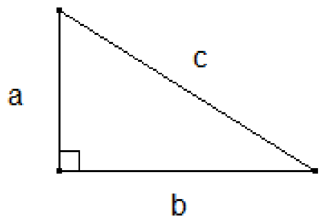
1.1.3 Teorema de Ceva: Las tres cevianas AF, BE y DC del triángulo ΔABC se cortan en un punto P si y solamente si se verifica que $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$. (Figura 1-3)

Figura 1-3



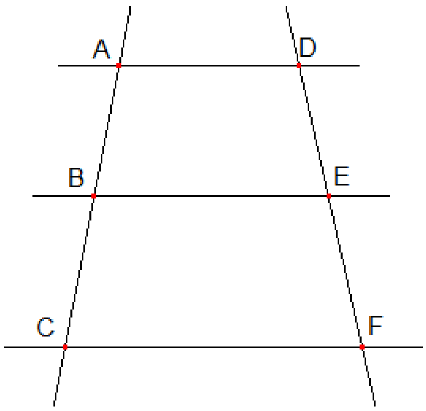
1.1.4 Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es equivalente al cuadrado de la hipotenusa. Es decir $\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2$. (Figura 1-4)

Figura 1-4



1.1.5 Teorema de Tales: Si tres o más rectas son interceptados por dos rectas transversales, los segmentos de las transversales determinados por las paralelas son proporcionales. (Figura 1-5)

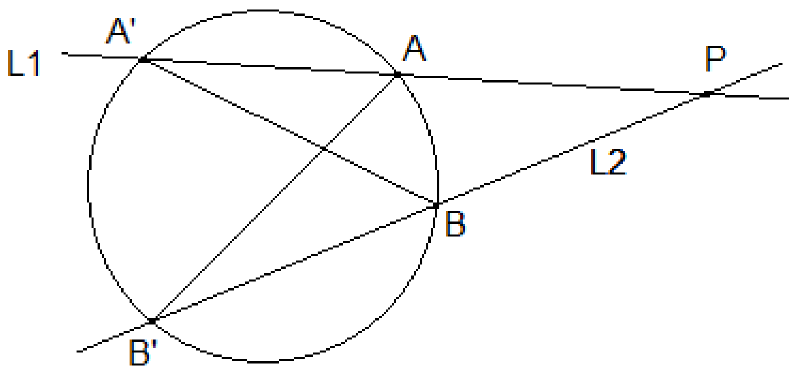
Figura 1-5



$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{DE}}{\mathbf{EF}}$$

1.1.6 Potencia de un punto respecto de una circunferencia: Dada una circunferencia C y un punto P exterior a ella; dada la recta L_1 que pasa por P y que corta a C en los puntos A y A'; dada L_2 otra recta que pasa por P y corta a C en los puntos B y B'; entonces $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$. (Figura 1-6)

Figura 1-6



1.1.7 Quinto postulado de Euclides: Por un punto exterior a una recta, en el plano determinado por el punto y por la recta pasa a lo más una paralela a dicha recta. (Hilbert, *fundamentos de la geometría*)

1.2 Definiciones, teoremas relativos a congruencia y semejanza de triángulos

Las siguientes definiciones son tomadas del libro V de [3].

1.2.1 Definición 3: Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.

1.2.2 Definición 6: Llámese proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.

Las siguientes proposiciones son tomadas del libro VI de [3]. En los enunciados cuando Euclides dice “triángulos equiángulos” hace referencia a triángulos semejantes.

1.2.3 Proposición 4: En dos triángulos equiángulos los lados opuestos a los ángulos iguales son proporcionales.

1.2.4 Proposición 5: Si dos triángulos tienen los lados proporcionales, serán equiángulos y los ángulos iguales corresponderán a los lados subtendidos.

1.2.5 Proposición 6: Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales, los triángulos son equiángulos y los ángulos iguales serán los correspondientes a los lados subtendidos.

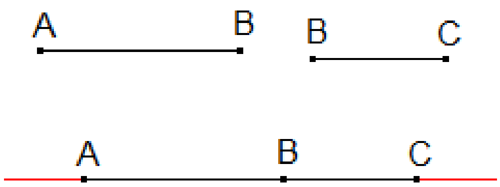
1.2.6 Proposición 7: Si dos triángulos tienen un ángulo igual, los lados que forman los otros ángulos son proporcionales y los ángulos restantes ambos menores o no menores que un recto; entonces, los triángulos serán equiángulos, siendo iguales los ángulos cuyos lados son proporcionales.

1.2.7 Proposición 8: Si en un triangulo rectángulo se traza la perpendicular del vértice a la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al triángulo total entre sí. (En este caso la base del triángulo total es su hipotenusa)

1.3 Construcciones con regla y compás

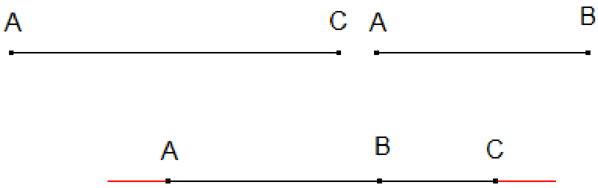
1.3.1 Suma de segmentos: Dados los segmentos AB y BC, se debe colocar sobre una misma recta el segmento BC a continuación del segmento AB, de esta forma el segmento $\mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$, como se indica en la figura 1-7

Figura 1-7



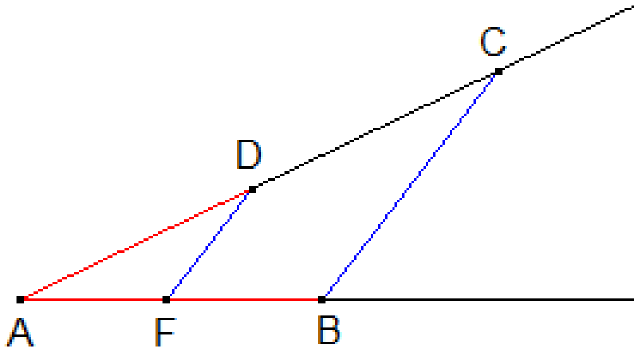
1.3.2 Resta de segmentos: Dados los segmentos AC y AB, se debe colocar sobre una misma recta el segmento AB sobre el segmento AC haciéndolos coincidir en el punto A, de esta forma el segmento $\mathrm{BC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AB}$, como se indica en la figura 1-8.

Figura 1-8



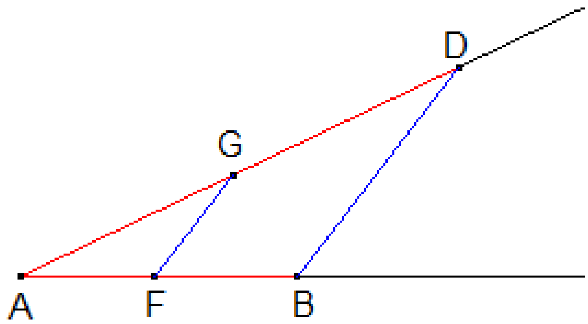
1.3.3 Multiplicación de segmentos: Dados los segmentos AB y AD, y tomando como segmento unidad a $\mathrm{AF} = 1$ se debe formar un ángulo cualquiera con los segmentos AB y AD con vértice en A; colocamos la unidad sobre el segmento AB a partir de A; luego se traza el segmento BC con C sobre el lado AD de modo que sea paralelo al segmento FD. Como $\Delta\mathrm{ACB}$ y $\Delta\mathrm{ADF}$ son semejantes se tiene que $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AF}}$ es decir $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AD}}{1}$ de donde $\mathrm{AC} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD}$, como se indica en la figura 1-9.

Figura 1-9



1.3.4 División de segmentos: Dados los segmentos AB y AD, y tomando como segmento unidad a AF $= 1$ se debe formar un ángulo cualquiera con los segmentos AB y AD con vértice en A; colocamos la unidad AF sobre el segmento AB a partir de A; luego se traza el segmento FG con G sobre el lado AD que sea paralelo al segmento BD. Como ΔADB y ΔAGF son semejantes se tiene que $\frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AB}$ es decir $\frac{AG}{AD} = \frac{1}{AB}$ de donde $AG = \frac{AD}{AB}$, como se indica en la figura 1-10.

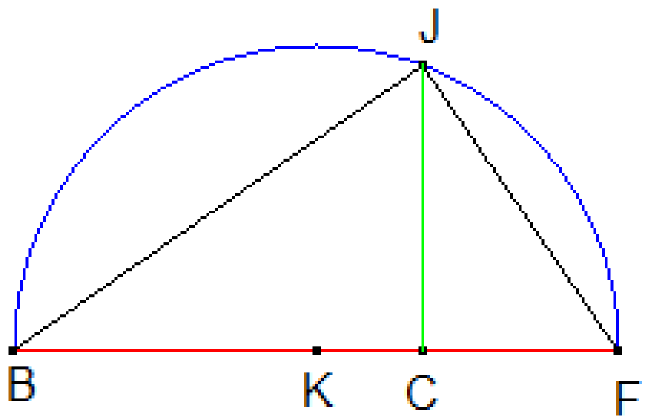
Figura 1-10



1.3.5 Raíz cuadrada de un segmento: Para calcular la raíz cuadrada del segmento BC se le adiciona el segmento unitario CF; se halla el punto medio K, del segmento BF a continuación se traza la semicircunferencia de radio KB y centro en K; por último se traza la perpendicular al segmento BF por el punto C hasta que corte la semicircunferencia en un punto J.

La raíz cuadrada de BC es el segmento CJ. Esto debido a que ΔBCJ y ΔJCF son semejantes, entonces se tiene que $\frac{BC}{CJ} = \frac{CJ}{CF}$ como $CF = 1$ se tiene $\frac{BC}{CJ} = \frac{CJ}{1}$ de donde $BC = (CJ)^2$ es decir que. $CJ = \sqrt{BC}$, como se indica en la figura 1-11.

Figura 1-11

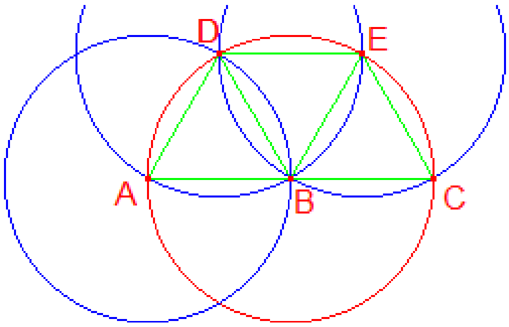


Realizando de forma iterativa las construcciones anteriormente explicadas suma, resta multiplicación y división podemos construir cualquier segmento que represente un número racional a partir de una unidad dada, constituyendo lo que se llama un cuerpo de números. La construcción de la raíz cuadrada permite extender el campo a lo que conocemos como campo racional extendido, dando en él soluciones a algunas ecuaciones de segundo grado.

1.3.6 Dados los puntos A, B, construir un punto C tal que $AB = BC$: Dados los puntos A,B se traza una circunferencia $\mathrm{circ}(B, A)$, a continuación a partir de A se trazan tres arcos consecutivos llamando a las intersecciones con la circunferencia $\mathrm{circ}(B, A)$ D, E y C respectivamente . Ver figura 1-12.

Se tiene que AB = AD = DB = DE = BE = EC = BC; así los triángulos ADB, DEB y BEC son equiláteros, es decir que cada uno de los ángulos de cada uno de los triángulos mide $\pi/3$ por lo tanto el ángulo ABC es igual a dos rectos. Es decir AB = BC, como se indica en la figura 1-12.

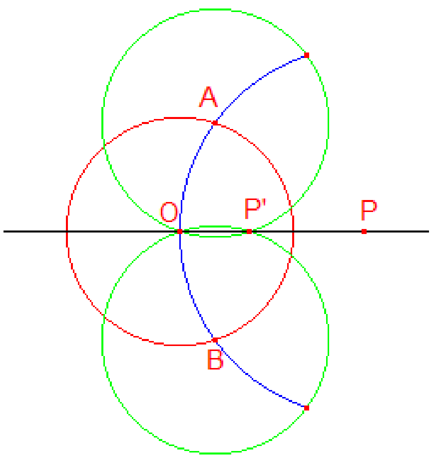
Figura 1-12



El proceso anterior se puede iterar cuantas veces se requiera y de esa manera construir un segmento AD = nAB, para valores enteros de n.

1.3.7 Inversión de un punto P respecto del círculo $\mathrm{circ}(O, r)$: Para construir el inverso de un punto P exterior a la circunferencia $\mathrm{circ}(O, r)$, trazamos la circunferencia $\mathrm{circ}(P, OP)$. Sean A , B los puntos de intersección entre las circunferencias $\mathrm{circ}(O, r)$ y $\mathrm{circ}(P, OP)$; a continuación trazar los círculos $\mathrm{circ}(A, AO)$, $\mathrm{circ}(B, BO)$. Estos círculos se encuentran en P'. Decimos que P' es el inverso de P respecto a la círculo $\mathrm{circ}(O, r)$ dado. (Figura 1-13).

Figura 1-13



Trazando la recta PA y nombrando con C y D los puntos de intersección entre ella y la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{A}, \mathrm{AO})$, con C el más lejano de P.

Se tiene que $\mathrm{AO} = \mathrm{AP}' = \mathrm{AC} = \mathrm{AD}$;

Calculando la potencia de P respecto a la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{A}, \mathrm{AO})$.

Se llega a $\mathrm{PO} \cdot \mathrm{PP}' = \mathrm{r}^2$, ver 1.1.6.

En efecto

Dado a que $\mathrm{PP}' = \mathrm{PO} - \mathrm{P}'\mathrm{O}$ y $\mathrm{PO} = \mathrm{PA}$ se obtiene

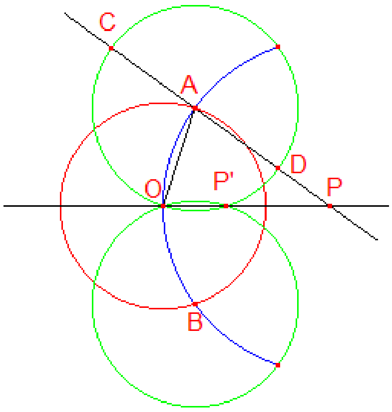
$\mathrm{PO} \cdot \mathrm{PP}' = \mathrm{PO}(\mathrm{PO} - \mathrm{P}'\mathrm{O}) = \mathrm{PO}^2 - \mathrm{PO} \cdot \mathrm{P}'\mathrm{O}$, entonces $\mathrm{PO} \cdot \mathrm{PP}' = \mathrm{PA}^2 - \mathrm{PO} \cdot \mathrm{P}'\mathrm{O}$.

Por definición de potencia $\mathrm{PO} \cdot \mathrm{P}'\mathrm{O} = \mathrm{r}^2$ y como $\mathrm{r}^2 = \mathrm{AO}^2$, se obtiene $\mathrm{PO} \cdot \mathrm{PP}' = \mathrm{PA}^2 - \mathrm{AO}^2$

Por definición es desde luego, $\mathrm{PA}^2 - \mathrm{AO}^2 = \mathrm{r}^2$. (Figura 1-14).

Finalmente se llega a $\mathrm{PO} \cdot \mathrm{PP}' = \mathrm{r}^2$ como era requerido.

Figura 1-14



La construcción anterior es válida para puntos P que estén ubicados a una distancia del centro de inversión O mayor o igual a $r/2$.

Si el punto P está ubicado a una distancia del centro de inversión O menor a $r/2$, se debe realizar la siguiente construcción.

Se toma el punto P y se construye un punto Q tal que OQ = nOP, con n un entero suficientemente grande tal que OQ sea mayor a $r/2$, a continuación se construye Q' el inverso de Q; por último se construye el punto P' tal que OP' = nOQ'. Como ya se demostró que $\mathrm{OQ} \cdot \mathrm{OQ}' = \mathrm{OA}^2 = \mathrm{r}^2$ y dado que $\mathrm{OQ} = \mathrm{nOP}$ y $\mathrm{OP}' = \mathrm{nOQ}'$, realizando las sustituciones se tiene $\mathrm{nOP} \cdot \mathrm{OP}'/\mathrm{n} = \mathrm{OA}^2 = \mathrm{r}^2$, simplificando $\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OP}' = \mathrm{OA}^2 = \mathrm{r}^2$.

2. Talleres de construcciones con solo compás, algoritmo de Mascheroni.

2.1 Problema. Determinar el punto medio de un arco

Dados: Círculo $\mathrm{circ}(O, OA)$

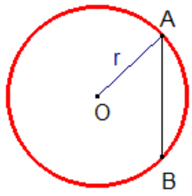
Los puntos A y B sobre la circunferencia.

Arco $\widehat{AB}$

Construir: El punto medio X del arco dado $\widehat{AB}$

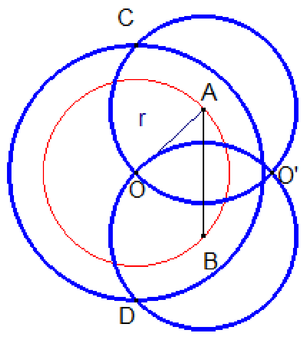
Paso 1.Concideramos la distancia AB y las distancias iguales OA y OB. (Figura 2-1)

Figura 2-1



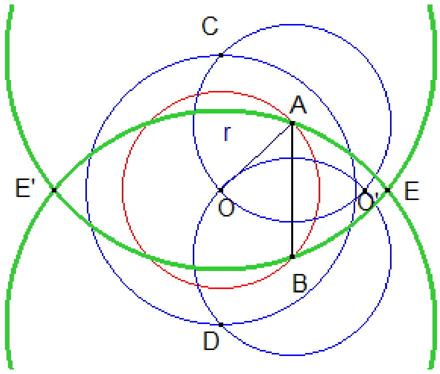
Paso 2. Trazar (círculos en azul) $\mathrm{circ}(O, AB)$, $\mathrm{circ}(A, OA)$ y $\mathrm{circ}(B, OB)$. Nombrar con O' el punto de intersección de $\mathrm{circ}(A, OA)$ con $\mathrm{circ}(B, OB)$, con C el punto de intersección de $\mathrm{circ}(O, AB)$ con $\mathrm{circ}(A, OA)$ y con D el punto de intersección de $\mathrm{circ}(O, AB)$ con $\mathrm{circ}(B, OB)$.(Figura 2-2)

Figura 2-2



Paso 3. Trazar (círculos en verde) $\mathrm{circ}(C, CB)$ y $\mathrm{circ}(D, DA)$, nombrar con E y E' sus puntos de intersección. (Figura 2-3)

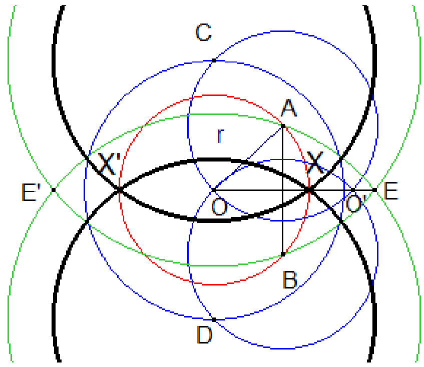
Figura 2-3



Paso 4. Trazar (círculos en negro) $\mathrm{circ}(C, OE)$ y $\mathrm{circ}(D, OE)$, nombrar con X y X' los puntos de intersección de $\mathrm{circ}(C, OE)$ con $\mathrm{circ}(C, OE)$.

El punto de intersección de $\mathrm{circ}(C, OE)$ con $\mathrm{circ}(D, OE)$ es un punto del arco dado AB, que es el punto medio buscado del arco dado AB. Es el punto X en figura 2-4.

Figura 2-4



Argumentación:

Se tiene que:

$OC = OD$ por ser radios de $\mathrm{circ}(O, AB)$.

O' es la imagen especular de O con respecta a AB, ver preliminar 1.1.

C es la imagen especular de D con respecto a OO', ver preliminar 1.1.

Como $CO = OD$, $CO' = DO'$, $OO' = OO'$ se tiene que $\Delta COO' = \Delta DOO'$

Además, $\sphericalangle O'CO + \sphericalangle COO' + \sphericalangle OO'C = \pi$, $\sphericalangle 0D0' + \sphericalangle DOO' + \sphericalangle OO'D = \pi$,

$\sphericalangle O'CO = \sphericalangle ODO'$,$\sphericalangle COO' = \sphericalangle DOO'$, $\sphericalangle OO'C = \sphericalangle OO'D$.

De lo anterior $\sphericalangle COD = \pi$, es decir C, O, D son colineales.

E está sobre la prolongación de OO'. Por ser E y E' imagen especular uno de otro con respecto a CD.

ΔCED es isósceles, ΔCXD es isósceles, $\sphericalangle COE = \sphericalangle DOE = \sphericalangle COX = \sphericalangle DOX = \frac{\pi}{2}$.

OX es perpendicular a AB.

X biseca a $\widehat{AB}$ si $OX = OA$.

En el paralelogramo ABOC se tiene que $OA^2 + BC^2 = 2OB^2 + 2AB^2$, ver preliminar 1.2

Como $OA = OB$ se tiene que $BC^2 = OA^2 + 2AB^2$. (1)

Del ΔCOE se tiene que $CE^2 = BC^2 = OC^2 + OE^2$.(2)

Igualando (1) y (2) se tiene $OA^2 + 2AB^2 = OC^2 + OE^2$ es decir $OE^2 = AB^2 + OA^2$

Del ΔCOX se tiene entonces que

$OX = \sqrt{CX^2 - OC^2} = \sqrt{OE^2 - OC^2} = \sqrt{AB^2 + OA^2 - AB^2} = OA$ como había que demostrar.

Para poder realizar construcciones con solo compás es necesario enunciar las cinco operaciones fundamentales siguientes.

2.2 Problema. Trazar la suma de dos segmentos dados $\mathbf{OQ}$ y $\mathbf{QX}$.

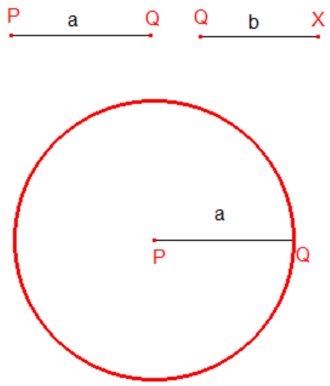
Dados: Segmento $\mathrm{PQ} = \mathrm{a}$ (el más largo)

Segmento $\mathrm{QX} = \mathrm{b}$

Construir: $\mathrm{PX} = \mathrm{PQ} + \mathrm{QX} = \mathrm{a} + \mathrm{b}$

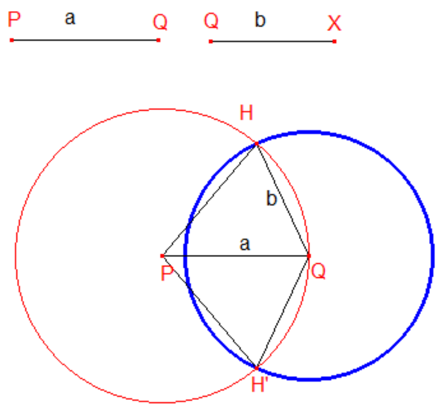
Paso 1. Trazar la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{P}, \mathrm{PQ})$. (Figura 2-5)

Figura 2-5



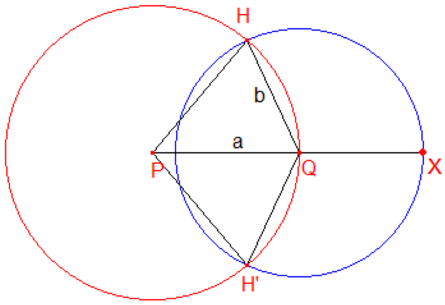
Paso 2. Trazar la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{Q}, \mathrm{QX})$. Marcar los puntos de intersección entre $\mathrm{circ}(\mathrm{P}, \mathrm{PQ})$ y $\mathrm{circ}(\mathrm{Q}, \mathrm{QX})$ como H y $\mathrm{H'}$. Q es el punto medio del arco $\mathrm{HH'}$ sobre la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{P}, \mathrm{PQ})$. (Figura 2-6)

Figura 2-6



Paso 3. Trazar el punto medio del arco HH' sobre la circunferencia $circ(Q, QX)$ y marcar el punto del lado derecho del arco como X. (Figura 2-7)

Figura 2-7



Argumentación:

H' es la imagen especular de H respecto a PQ, ver preliminar 1.1.

$PH = PH'$

$QH = QH'$

$PQ = PQ$

Por lo tanto los triángulos $\Delta PHQ = \Delta PH'Q$ son congruentes

Se tiene que el punto X esta sobre las prolongación de PQ, por lo tanto el segmento $PX = PQ + QX = a + b$.

2.3 Problema. Dibujar la diferencia de dos segmentos dados $\mathbf{OQ}$ y $\mathbf{QX}$.

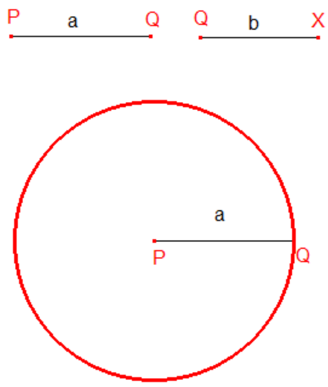
Dados: Segmento $\mathrm{PQ} = \mathrm{a}$ (el más largo)

Segmento $\mathrm{QX} = \mathrm{b}$

Construir: $\mathrm{PX} = \mathrm{PQ} - \mathrm{QX} = \mathrm{a} - \mathrm{b}$

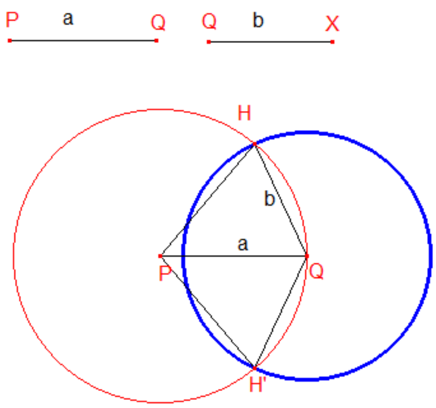
Paso 1. Trazar la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{P}, \mathrm{PQ})$. (Figura 2-8)

Figura 2-8



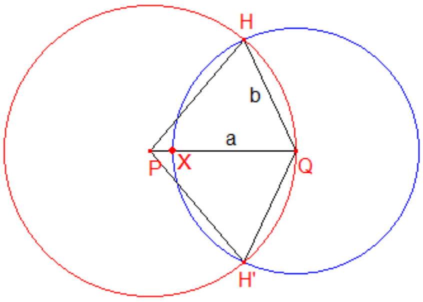
Paso 2. Trazar la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{Q}, \mathrm{QX})$. Marcar los puntos de intersección entre $\mathrm{circ}(\mathrm{P}, \mathrm{PQ})$ y $\mathrm{circ}(\mathrm{Q}, \mathrm{QX})$ como H y $\mathrm{H'}$. Q es el punto medio del arco $\mathrm{HH'}$ sobre la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{P}, \mathrm{PQ})$. (Figura 2-9)

Figura 2-9



Paso 3. Trazar el punto medio del arco HH' sobre la circunferencia $\mathrm{circ}(Q, QX)$ y marcar el punto del lado izquierdo del arco como X. (Figura 2-10)

Figura 2-10



Argumentación:

H' es la imagen especular de H respecto a PQ. Ver preliminar 1.1.

$PH = PH'$

$QH = QH'$

$PQ = PQ$

Por lo tanto los triángulos $\Delta PHQ = \Delta PH'Q$ son congruentes

Se tiene que el punto X esta sobre PQ, por lo tanto el segmento $PX = PQ - QX = a - b$.

2.4 Problema. Dados tres segmentos m, n y s (donde m es el mayor, n el menor) determinar un cuarto proporcional.

Dados: Segmento m (mayor)

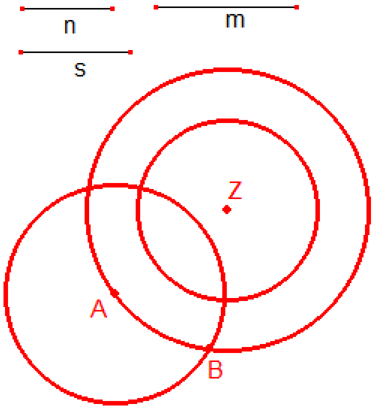
Segmento n (menor)

Segmento s

Construir: El segmento x que es cuarto y proporcional a los segmentos dados

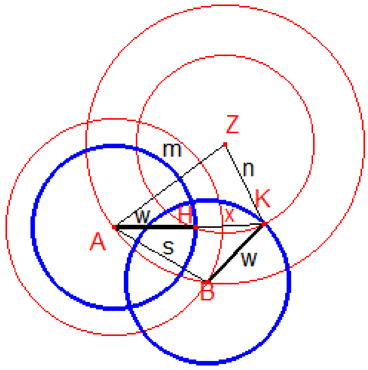
Paso 1. Trazar las circunferencias concéntricas $\mathrm{circ}(\mathrm{Z}, \mathrm{m})$ y circ(Z, n), desde un punto Z cualquiera; tomar un punto A sobre la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{Z}, \mathrm{m})$ y trazar la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{A}, \mathrm{s})$, llamar a uno de sus puntos de intersección B. (Figura 2-11)

Figura 2-11



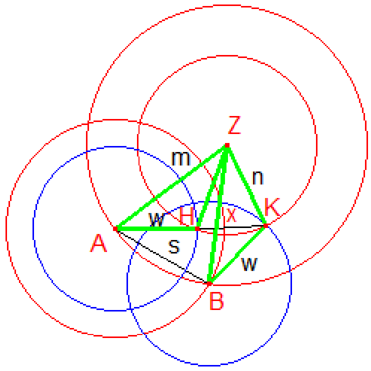
Paso 2. Con una distancia arbitraria w (tal que corte a los círculos $\mathrm{circ}(\mathrm{Z}, \mathrm{m})$ y $\mathrm{circ}(\mathrm{Z}, \mathrm{n})$) trazamos las circunferencias $\mathrm{circ}(\mathrm{A}, \mathrm{w})$ y $\mathrm{circ}(\mathrm{B}, \mathrm{w})$ y nombramos con H y K los puntos de intersección de ella con la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{Z}, \mathrm{n})$. (Figura 2-12)

Figura 2-12



Paso 3. Trazar los triángulos ΔAZBy ΔHZK. (Figura 2-13)

Figura 2-13



Argumentación:

los triángulos ΔZAH y ΔZBK son tales que

$ZA = ZB, ZH = ZK$, $AH \; = \; BK$

Por lo tanto son congruentes. Una de las consecuencias es que $\sphericalangle AZH = \sphericalangle BZK$.

Los triángulo ΔAZB y ΔHZK son isósceles.

Además $\sphericalangle HZK = \sphericalangle KZB + \sphericalangle BZH = \sphericalangle BZH + HZA = \sphericalangle BZA$.

Por lo tanto los triángulos ΔAZB y ΔHZK son semejantes.

Por consiguiente vale la proporcionalidad entre sus lados, así $\frac{m}{n} = \frac{s}{x}$.

Esta relación muestra que x es segmento cuarto proporcional a los segmentos dados m, n y s.

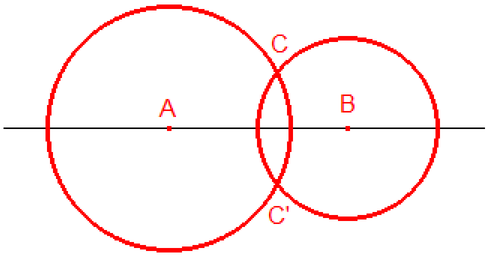
2.5 Problema. En una recta que pasa por los puntos dados A y B, construir uno o varios puntos.

Dado: Recta que pasa por A y B

Construir: Uno o varios puntos sobre la recta AB

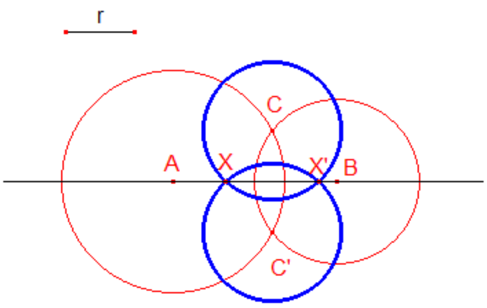
Paso 1. Tomar el punto C exterior a la recta AB y construir su simétrico $\mathrm{C'}$. (Figura 2-14)

Figura 2-14



Paso 2. Tomando un radio arbitrario r y trazando las circunferencias $\mathrm{circ(C, r)}$ y $\mathrm{circ(C', r)}$ se obtienen los puntos X y $\mathrm{X'}$ sobre la recta. (Figura 2-15)

Figura 2-15



Argumentación:

$\mathrm{C'}$ es la imagen especular de C, ver preliminar 1.1.1

los puntos X y $\mathrm{X'}$ están sobre la recta AB, por ser r el mismo para dos circunferencias, cuyos centros son imágenes especulares respecto de la recta que pasa por A y por B. Asignando valores diferentes a r se pueden encontrar cualquier punto sobre la recta.

2.6 Problema. Describir la circunferencia que tiene por centro el punto dado O y como radio el segmento dado AB.

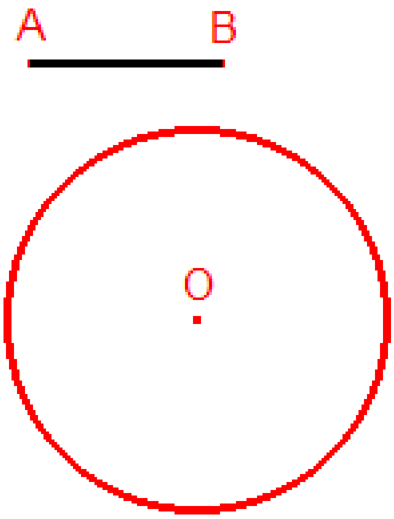
Dados: Punto O

Segmento AB

Construir: La circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{O}, \mathrm{AB})$

Basta definir el punto O como centro y abrir el compás una distancia igual a AB y describir la circunferencia $\mathrm{circ}(\mathrm{O}, \mathrm{AB})$. (Figura 2-16)

Figura 2-16



Argumentación:

Podemos trazar una circunferencia si conocemos su centro y su radio. (postulado tercero en Elementos)

2.7 Problema. Determinar los puntos de intersección de las circunferencias dadas $\mathbf{circ(O, AB)}$ y $\mathbf{circ(O', CD)}$

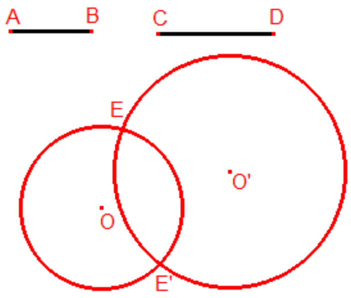
Dados: La circunferencia $\mathrm{circ(O, AB)}$,

La circunferencia $\mathrm{circ(O', CD)}$

Construir: Los puntos de intersección E y E’ de las circunferencias dadas.

Se trazan las circunferencias $\mathrm{circ(O, AB)}$ y $\mathrm{circ(O', CD)}$ e inmediatamente se tienen los puntos de intersección E y E’. Siempre y cuando OO’ sea menor o igual que $\mathrm{AB + CD}$. (Figura 2-17)

Figura 2-17



Argumentación:

Dado que un punto está bien definido si es la intersección de dos circunferencias.

2.8 Problema. Determinar los puntos de intersección de la circunferencia dada $\mathbf{circ(O, CD)}$ y la recta determinada por los puntos dados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Dados: la circunferencia $\mathrm{circ(O, CD)}$

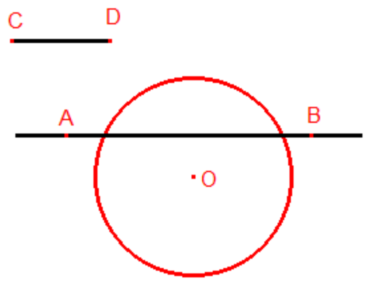
Recta determinada por los puntos dados A y B.

Construir: Los puntos de intersección X y Y de la circunferencia dadas con la recta determinada por los puntos dados A y B.

Caso 1: La recta no pasa por el centro de la circunferencia

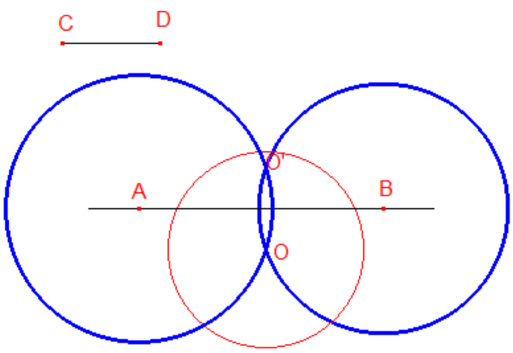
Paso 1. Trazar el circulo $\mathrm{circ(O, CD)}$, trazar la recta AB que intercepte a la circunferencia pero que no pase por O. (Figura 2-18)

Figura 2-18



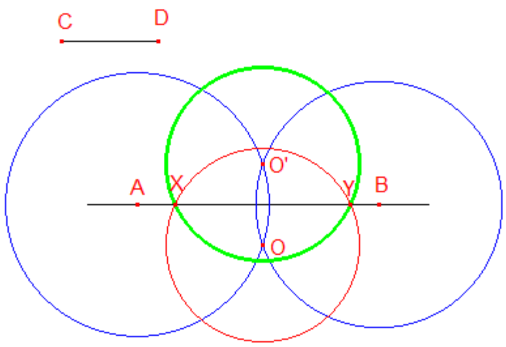
Paso 2. Construir el ponto $\mathrm{O'}$ simétrico al centro O respecta a la recta dada AB. (Figura 2-19)

Figura 2-19



Paso 3. Construir las circunferencias $\mathrm{circ}(\mathrm{O}, \mathrm{CD})$ y $\mathrm{circ}(\mathrm{O'}, \mathrm{CD})$ cuyos puntos de intersección X y Y son los puntos buscados. (Figura 2-20)

Figura 2-20



Argumentación:

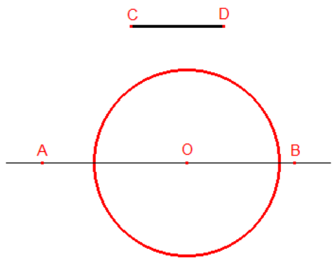
$\mathrm{O'}$ es la imagen especular de O respecta a la recta dada AB, ver preliminar 1.1.1

Por ser CD el mismo radio para las dos circunferencias $\mathrm{circ}(\mathrm{O}, \mathrm{CD})$ y $\mathrm{circ}(\mathrm{O'}, \mathrm{CD})$ y estar O y $\mathrm{O'}$ a la misma distancia de AB se tiene que X y Y son los puntos de intersección de la circunferencia dada $\mathrm{circ}(\mathrm{O}, \mathrm{CD})$ y la recta determinada por los puntos dados A y B.

Caso 2: La recta pasa por el centro de la circunferencia

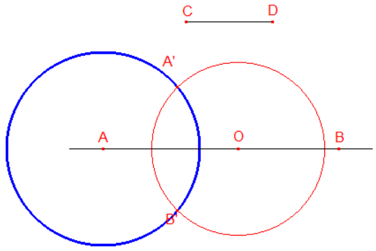
Paso 1. Trazar $\mathrm{circ}(\mathrm{O}, \mathrm{CD})$ y la recta AB que pase por O. (Figura 2-21)

Figura 2-21



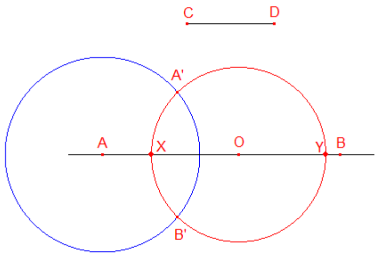
Paso 2. Trazar la circunferencia $\mathrm{circ}(A, r)$ con r tal que $\mathrm{circ}(A, r)$ y $\mathrm{circ}(O, CD)$ se intersequen en los puntos A' y B'. (Figura 2-22)

Figura 2-22



Paso 3. Determinar los puntos medios x y y del arco $A'B'$ sobre la circunferencia $\mathrm{circ}(O, CD)$. Los puntos X y Y son los que intersequen la circunferencia $\mathrm{circ}(O, CD)$ con la recta AB. (Figura 2-23)

Figura 2-23



Argumentación:

A' es la imagen especular de B' con respecta a AB, ver preliminar 1.1.1

A' y B' se encuentran a igual distancia de AB, por lo tanto los puntos medios X y Y del arco $\widehat{A'B'}$ están sobre AB.

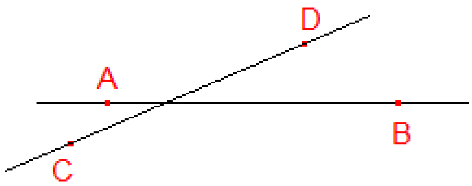
2.9 Problema. Determinar el punto de intersección de las rectas AB y CD, determinadas por los puntos dados.

Dados: Los puntos A, B, C, D quedan determinadas, entre las posibles la recta AB, la recta CD.

Construir: El punto X de intersección de las rectas dadas.

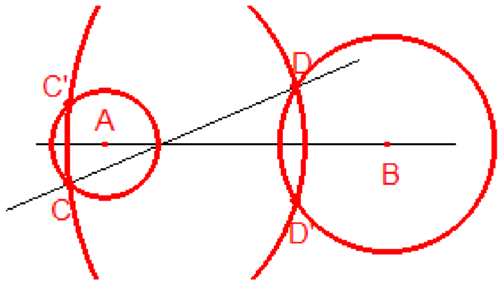
Paso 1. Trazar las rectas AB y CD, de modo que se intersequen. (Figura 2-24)

Figura 2-24



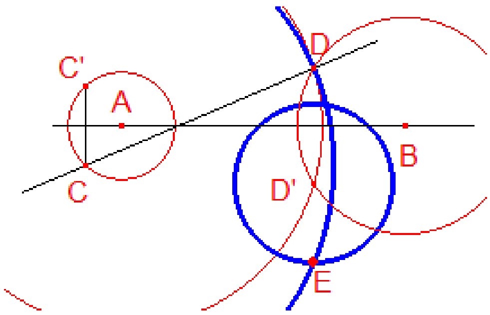
Paso 2. Construir los puntos C' y D' imágenes especulares de los puntos C y D respectivamente con respecto a AB. (Figura 2-25)

Figura 2-25



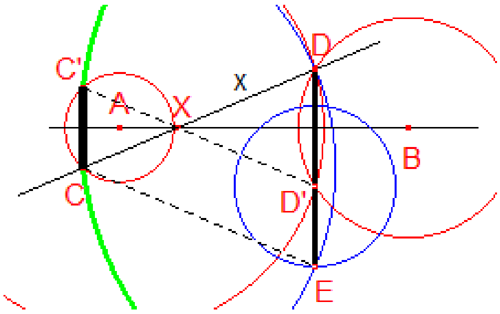
Paso 3. Trazar las circunferencias $\text{circ}(D', CC')$ y $\text{circ}(C, CD)$ y nombrar E su punto de intersección. (Figura 2-26)

Figura 2-26



Paso 4. Construir el segmento x sobre CD cuarto proporcional para los segmentos DE, DD' y CD. El punto X es la intercepción de AB con CD (Figura 2-27)

Figura 2-27



Argumentación:

C' es la imagen especular de C respecta a AB y D' es la imagen especular de D respecta a AB, ver preliminar 1.1.

Por lo anterior el punto de intersección de AB con CD es el mismo punto de intersección de AB con $C'D'$.

$CC'D'E$ es un paralelogramo , dado que CC' es paralela a $D'E$, además $CC' = D'E$.

$C'X = CX$, $D'X = DX$; $\sphericalangle C'XC = \sphericalangle D'XD$ por lo tanto los triángulos $\Delta D'XD$ y ΔECD son semejantes.

De donde $\frac{DE}{DD'} = \frac{DC}{DX}$, es decir que DX es cuarto y proporcional a los segmentos DE, DD' y DC, por lo tanto X es el punto de intersección entre AB y CD.

3. Talleres de construcciones con solo regla, algoritmo de Poncelet-Steiner.

Una línea recta con tres puntos dados es una recta de la cual se conocen dos puntos y su punto medio.

3.1 Problema. Trazar por un punto una paralela a una recta dada.

Steiner distingue dos casos.

Trazar por un punto dado la paralela a una recta que tiene tres puntos dados.

Trazar por un punto dado la paralela a una recta cualquiera.

Dados: Una recta con tres puntos dados A, B y su punto medio M.

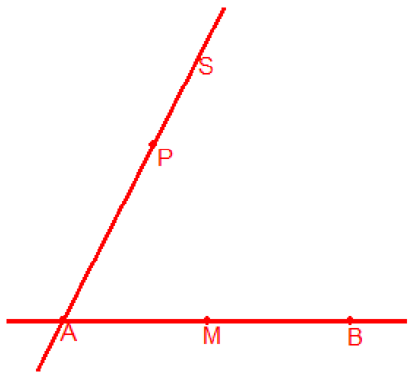
Un punto P exterior a la recta dada

Construir: La paralela a AB que pase por P

Caso 1: construcción de la paralela a una línea recta dirigida

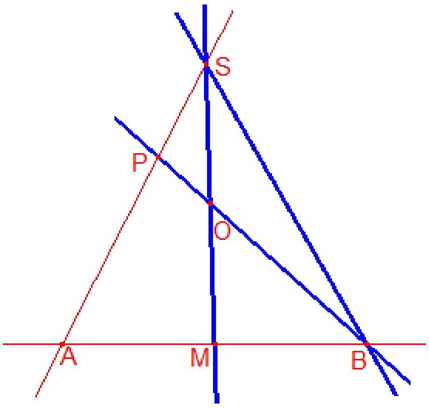
Paso 1. Trazamos AP, elegir un punto S sobre la extensión de la AP. (Figura 3-1)

Figura 3-1



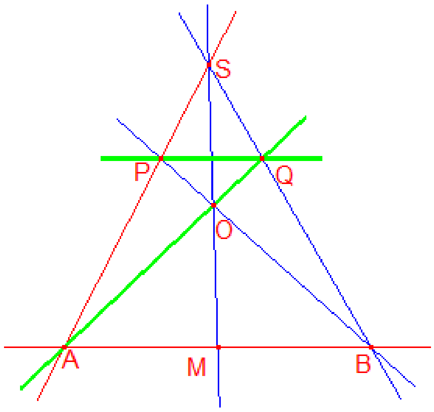
Paso 2. Unir S con los puntos B y M, a continuación trazar BP, nombrar con O al punto de intersección de PB con MS. (Figura 3-2)

Figura 3-2



Paso 3. Trazar la recta determinada por los puntos A y O, la cual corta a BS en un punto Q. La recta PQ es la paralela a AB que se deseaba hallar. (Figura 3-3)

Figura 3-3



Argumentación:

Haciendo alusión al quinto postulado de Euclides, ver preliminar 1.1.7, por el punto P, exterior a la recta AB, pasa una única paralela PQ.

Por lo tanto las rectas AQ, BP, MS concurren en O.

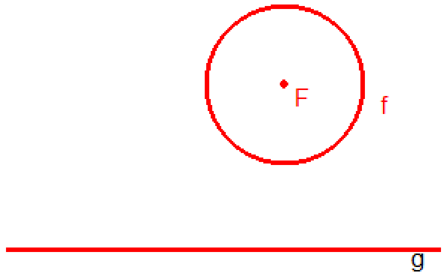
Se tiene que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QS}} = \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{PB}} = 1$, ver preliminar 1.3

Como se tiene que $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$,entonces $\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QS}} = \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{PB}}$.

Caso 2: construcción de la paralela a una línea recta arbitraria.

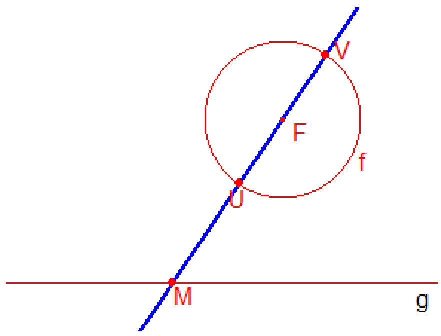
Paso1. Trazar la circunferencia f (con centro y radio fijados como lo propone Steiner) y la recta g. (Figura 3-4)

Figura 3-4



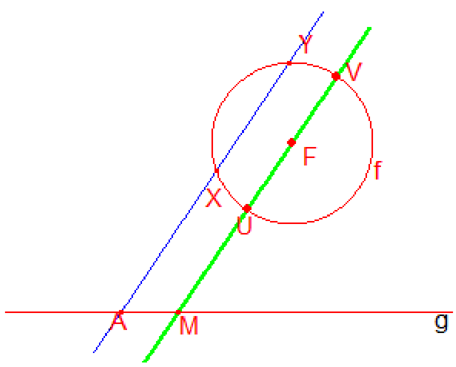
Paso 1. Unir un punto dado de la recta g con el centro F de la circunferencia dada f y nombrar los puntos de intersección de la recta trazada con la circunferencia dada U y V. (Figura 3-5)

Figura 3-5



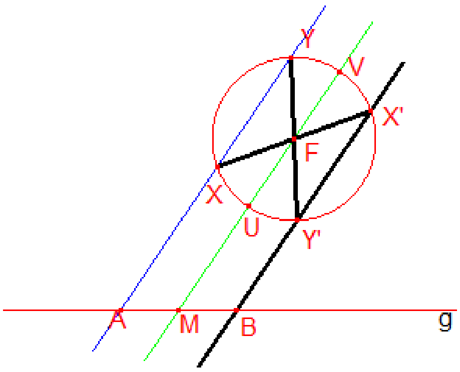
Paso 2. trazar una paralela a MF que corte a f en los puntos X, Y y a la recta g en A. (Figura 3-6)

Figura 3-6



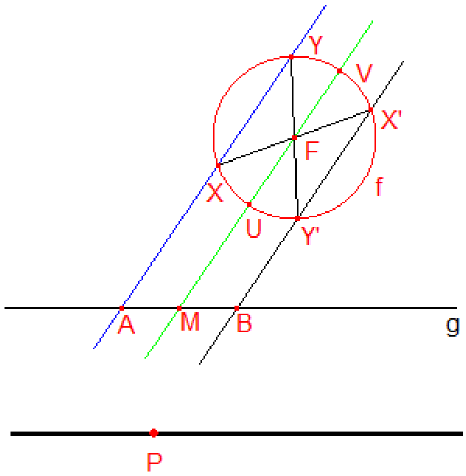
Paso 3. Trazamos los diámetros XX' y YY', a continuación trazamos X'Y' de tal forma que corte a g en B. (Figura 3-7)

Figura 3-7



Paso 4. Trazar la paralela a g que pase por un punto cualquiera P. (Figura 3-8)

Figura 3-8



Argumentación:

Se tiene que $UF = FV$, por ser radios de f. La recta MF es una recta con tres puntos construidos, por lo tanto podemos trazar la paralela a ella que corte a f en X. AX es paralela a MF, de igual manera se tiene que BY' es paralela a MF.

Como $YF = XY$ y $Y'F = XY'$ y $\sphericalangle XFY = \sphericalangle X'FY'$ (opuestos por el vértice) se tiene que $\Delta XFY = \Delta X'FY'$

$AM = MB$, ver preliminar 1.1.4

Por caso 1 podemos trazar la paralela a g que pasa por P.

3.2 Problema. Por un punto dado trazar la perpendicular a una recta dada.

Dados: La recta g

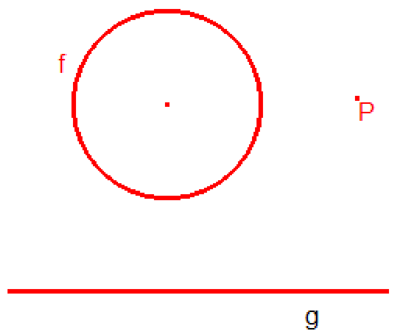
El punto P exterior a g

Circunferencia f

Construir: La perpendicular a g que pase por P

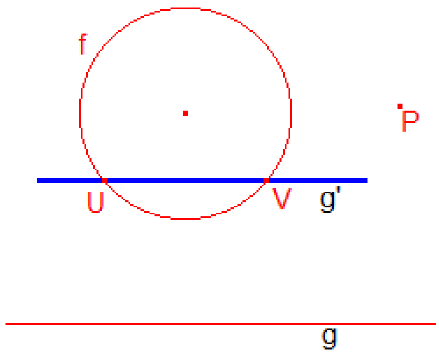
Paso1. Trazar la circunferencia f, la recta g y tomar un punto P en el mismo plano. (Figura 3-9)

Figura 3-9



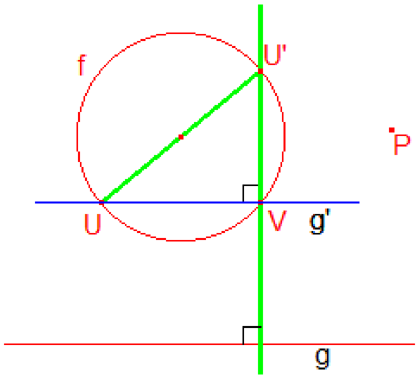
Paso 1. Trazar la recta g′ paralelo a g de tal manera que corte a f en los puntos U y V. (Figura 3-10)

Figura 3-10



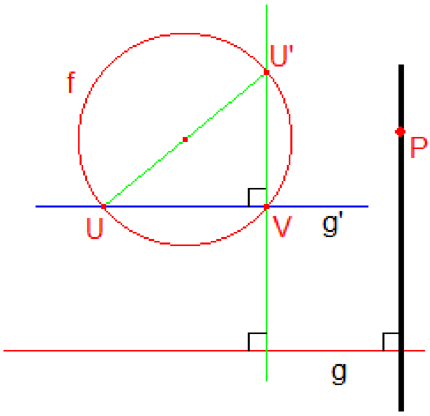
Paso 2. Trazar el diámetro UU' y la cuerda VU. (Figura 3-11)

Figura 3-11



Paso 3. Ahora podemos trazar la recta paralela a $U'V$ que pase por P. (Figura 3-12)

Figura 3-12



Argumentación:

g' es paralela a g, ver construcción 3.1.

Se tiene que $\Delta UU'V$ que es rectángulo por estar inscrito en una semicircunferencia y uno de sus lados es igual al diámetro de la misma. Es decir que VU' es perpendicular a UV y como UV es paralela a g entonces $U'V$ también es perpendicular a g.

la recta paralela a $U'V$ que pase por P también será perpendicular a g. de esta manera logramos trazar la recta perpendicular a g que pasa por un punto exterior a ella P.

3.3 Problema. Trazar una distancia dada PQ desde un punto dado O en una dirección dada.

Dados: Distancia PQ

Circunferencia

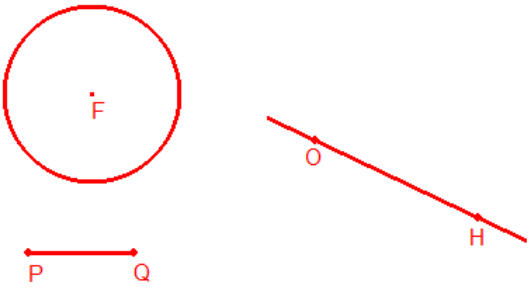
Punto O

Recta que pasa por OH

Construir: Una distancia PQ desde el punto dado O en la dirección OH

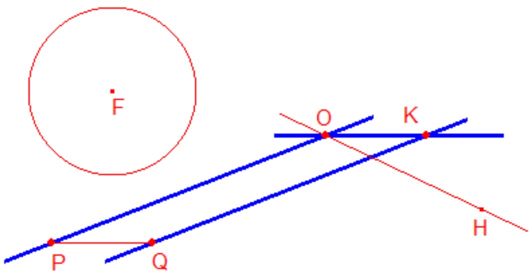
Paso 1. Considerar la dirección dada por el segmento OH desde O. (Figura 3-13)

Figura 3-13



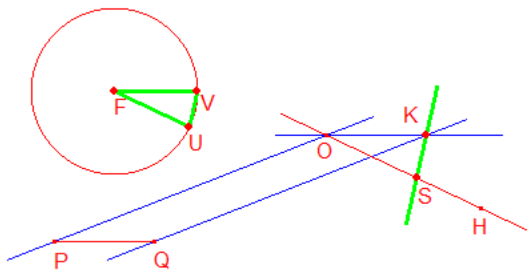
Paso 2. Trazar la paralela a PQ que pase por O, luego trazar la recta PO y a continuación trazar la recta paralela a PO que pasa por Q y corta a la paralela de PQ en un punto K. (Figura 3-14)

Figura 3-14



Paso 3. Trazar los radios FV y FU paralelos a OK y OH respectivamente. Unir U con V y Trazar la paralela a UV que pasa por K y que corte a OH en S. (Figura 3-15)

Figura 3-15



Este procedimiento nos permite construir la suma y la resta de dos segmentos dados.

Argumentación:

Se tiene que PO es paralela a QK, PQ es paralela a OK, es decir que PQKO es un paralelogramo, por lo tanto $\mathrm{PQ} = \mathrm{OK}$,

Como FV es paralela a OK, FU es paralela a OS, VU es paralela a KS se tiene que $\sphericalangle \mathrm{VFU} = \sphericalangle \mathrm{KOS}$, $\sphericalangle \mathrm{FUV} = \sphericalangle \mathrm{OSk}$, $\sphericalangle \mathrm{UVF} = \sphericalangle \mathrm{SKO}$.

De donde $\frac{\mathrm{FV}}{\mathrm{OK}} = \frac{\mathrm{VU}}{\mathrm{KS}} = \frac{\mathrm{UF}}{\mathrm{SO}}$, ver preliminar 1.2.3

Dado que los triángulos $\Delta\mathrm{FVU}$ y $\Delta\mathrm{OKS}$ son semejantes se tiene que $\mathrm{OK} = \mathrm{OS}$ y como $\mathrm{PQ} = \mathrm{OK}$ se tiene que $\mathrm{OS} = \mathrm{PQ}$

3.4 Problema. Dadas tres distancias OS, OM, ON trazar la cuarta proporcional.

Dados: Segmento OS

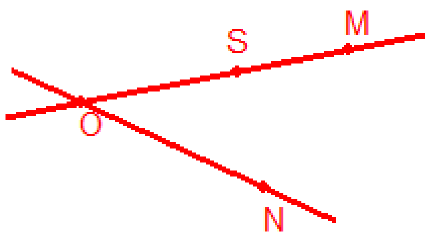
Segmento OM

Segmento ON

Construir: OX que es cuarta y proporcional a los tres segmentos dados.

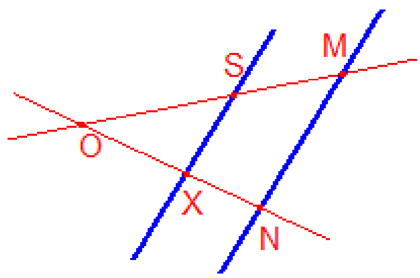
Paso 1. Desde un punto cualquiera O trazar las rectas OM y ON sobre una de ellas (en este caso OM) ubicamos a S. (Figura 3-16)

Figura 3-16



Paso 2. Trazar la recta MN y la paralela a MN que pasa por S y corta a OM en X. (Figura 3-17)

Figura 3-17



Argumentación:

Como XS es paralela a NM se tiene que los triángulos ΔOSX y ΔOMN son semejantes, de donde $\frac{OS}{OM} = \frac{OX}{ON}$ es decir que $OX = \frac{ON}{OM} OS$.

3.5 Problema. Dados los segmentos AB y BC, determinar la media proporcional.

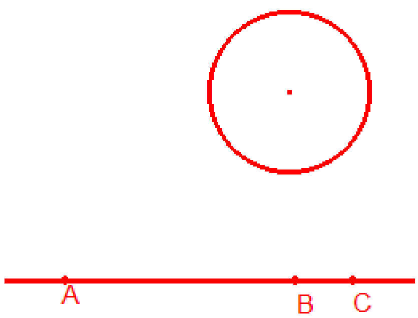
Dados: Segmento AB

Segmento BC

Construir: El segmento que es media proporcional de los segmentos AB y BC

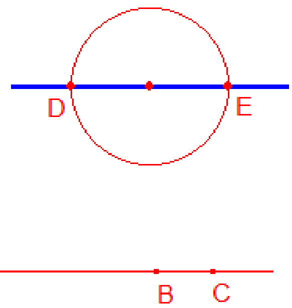
Paso 1. Ubicar sobre una misma recta el segmento AC igual a la suma de $\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$. (Figura 3-18)

Figura 3-18



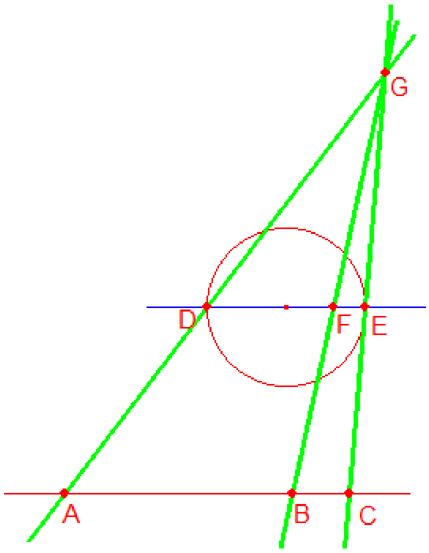
Paso 2. Construir la recta paralela a este que contenga al diámetro DE del circulo fijo. (Figura 3-19)

Figura 3-19



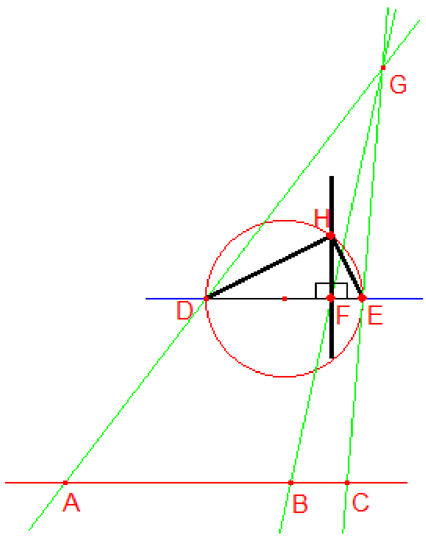
Paso 3. Trazar las rectas AD y CE y nombrar con G su punto de corte. Trazar la recta BG y nombrar con F el punto de corte de está con el diámetro DE. (Figura 3-20)

Figura 3-20



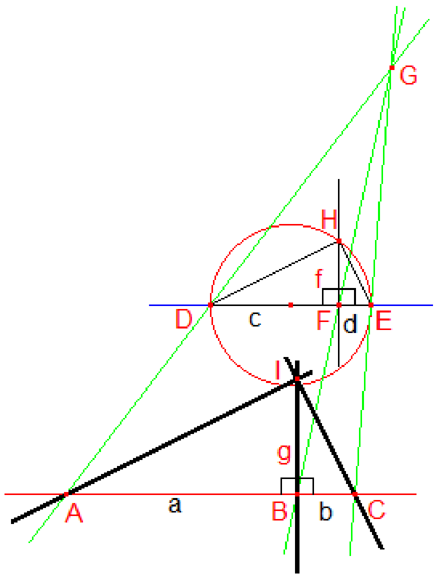
Paso 4. Trazar la perpendicular al diámetro que pasa por F y nombrar con H el punto superior de la intersección de ella con el circulo fijo. (Figura 3-21)

Figura 3-21



Paso 5. Trazar la paralela a DH que pasa por A, la paralela a EH que pasa por C y la paralela a HF que pasa por B; nombrar con I su punto de intersección. (Figura 3-22)

Figura 3-22



Ahora que hemos resuelto estos cinco problemas preliminares, la solución de los dos problemas básicos II y III es muy sencilla.

Argumentación:

Como $\sphericalangle \mathrm{DFH} = \sphericalangle \mathrm{HFE} = \frac{\pi}{2}$ se tiene que $\sphericalangle \mathrm{FHD} = \sphericalangle \mathrm{FEH}$, $\sphericalangle \mathrm{HDF} = \sphericalangle \mathrm{EHF}$.

Por lo tanto los triángulos ΔDFH y ΔHFE son semejantes, de donde $\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FH}} = \frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{FE}}$ es decir que $\mathrm{FH}^2 = \mathrm{DF} \cdot \mathrm{FE}$ por tanto $\mathrm{FH} = \sqrt{\mathrm{DF} \cdot \mathrm{FE}}$.

Como HD es paralela a IA, DE es paralela a AC, EH es paralela a CI se tiene que $\sphericalangle \mathrm{HDE} = \sphericalangle \mathrm{IAC}$, $\sphericalangle \mathrm{DEH} = \sphericalangle \mathrm{ACI}$, $\sphericalangle \mathrm{EHD} = \sphericalangle \mathrm{CIA}$.

De donde $\frac{\mathrm{HD}}{\mathrm{IA}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{CI}}$, ver preliminar 1.2.3

Se tiene que los triángulos $\Delta\mathrm{ABI}$ y $\Delta\mathrm{IBC}$ son semejantes, de donde $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BI}} = \frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{BC}}$ es decir que $\mathrm{BI}^2 = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC}$ por tanto $BI = \sqrt{AB \cdot BC}$

3.6 Problema. Determinar los puntos de intersección de una recta dada y un círculo dado.

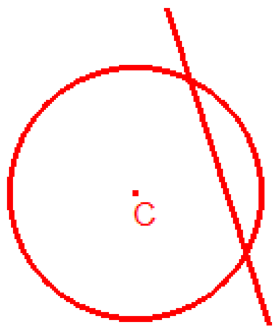
Dados: Círculo con centro C

Una recta que corta al círculo dado.

Construir: Construir losa puntos E y F que intersecan la recta dada y el circulo dado.

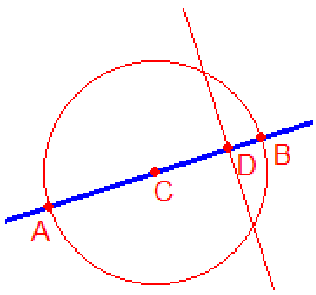
Paso 1. Como el circulo es dado, entonces conocemos su centro C y su radio, por lo tanto su diámetro también es conocido, ver figura 3-23.

Figura 3-23



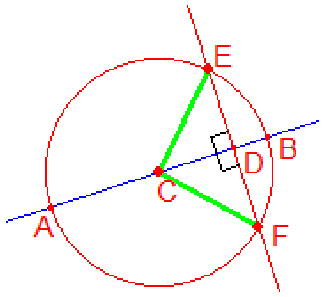
Paso 2. Trazamos la perpendicular a la recta dada que pase por C y nombramos con D el punto de intersección de las dos rectas. Como conocemos el radio ubicamos los puntos A y B a ambos lados de C sobre la perpendicular. (Figura 3-24)

Figura 3-24



Paso 3. Trazar el segmento que es media proporcional a los segmentos AD y DB, y ubicarlo a ambos lados de D sobre la recta dada, de esta manera sus otros extremos E y F son los puntos de intersección entre la recta dada y el círculo dado. (Figura 3-25)

Figura 3-25



Argumentación:

Se tiene que $\mathrm{CE} = \mathrm{CF}$, $\mathrm{CD} = \mathrm{CD}$, $\sphericalangle\mathrm{CDE} = \sphericalangle\mathrm{CDF} = \frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto los triángulos $\Delta\mathrm{CDE}$, $\Delta\mathrm{CDF}$ son congruentes, por consiguiente $\mathrm{DE} = \mathrm{DF}$ y están sobre la misma recta.

Como $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DB}}$ y $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DB}}$

$\mathrm{DE}^2 = \mathrm{AD} \cdot \mathrm{DB}$ y $\mathrm{DF}^2 = \mathrm{AD} \cdot \mathrm{DB}$

$\mathrm{DE} = \sqrt{\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DB}}$ y $\mathrm{DF} = \sqrt{\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DB}}$

Como AB es el diámetro de la circunferencia dada los puntos E y F están sobre dicha circunferencia.

De lo anterior E y F son los puntos de intersección de la recta dada y el círculo dado.

3.7 Problema. Determinar los puntos de intersección de dos círculos dados.

Dados: Circunferencias u y v

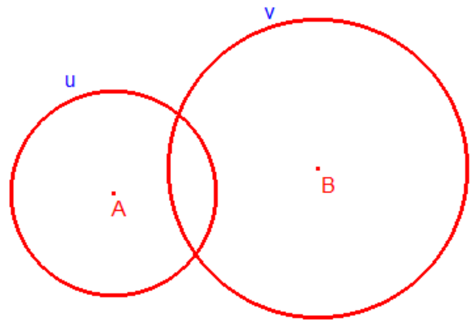
A y B centros de u y v respectivamente

Construir: Los puntos X y Y que interceptan las circunferencias dadas u y v

Construcción:

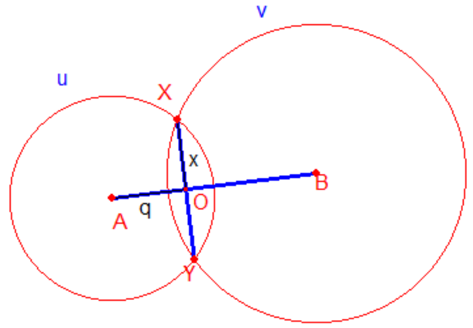
Paso 1. Trazar las circunferencias u y v, Nombrar sus centros A y B respectivamente. (Figura 3-26)

Figura 3-26



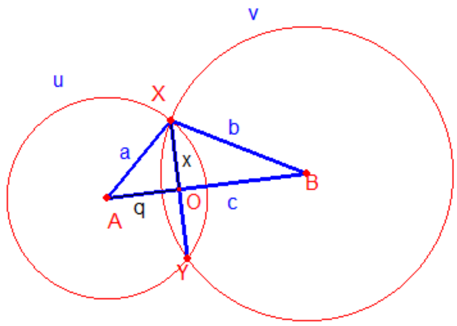
Paso 2. Se desea construir las intersecciones de este par de círculos, sean ellas X y Y, Trazar una perpendicular por X sobre el segmento AB. Llamar O el punto de intersección, q el segmento AO y x el segmento XO. (Figura 3-27)

Figura 3-27



Paso 3. Trazar el triángulo ΔAXB, donde X es el punto que se quería encontrar, de igual manera se puede encontrar Y.

Figura 3-27



Argumentación:

Aplicando el teorema del coseno sobre el triángulo ΔABX se tiene que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\sphericalangle ABX$, como $\cos\sphericalangle ABX = \frac{q}{a}$ se tiene que $b^2 = a^2 + c^2 - 2cq$, es decir que $2cq = a^2 + c^2 - b^2$, si llamamos $d^2 = a^2 + c^2$, podemos escribir $2cq = d^2 - b^2$, despejando a q tenemos que $q = \frac{d^2 - b^2}{2c} = \frac{(d-b)(d+b)}{2c}$, Es decir que q es el cuarto segmento que es proporcional a $(d - b),(d + b)$, $2c$.

Ahora del triángulo rectángulo ΔAOX se tiene que $a^2 = x^2 + q^2$, despejando x se obtiene que $x = \sqrt{(a - q)(a + q)}$.

4. Conclusiones y recomendaciones

4.1 Conclusiones

Se han recorrido las construcciones básicas con solo compás establecidas por Mascheroni, 1797.[1]

Pueden resumisse así.

Resolver dos problemas previos a saber:

Trazar con solo compás la suma y la diferencia de dos segmentos de recta dados.

Trazar el cuarto segmento proporcional a tres segmentos dados.

Entonces los problemas básicos, con solo compás, son los tres siguientes.

Encontrar el punto de intersección de dos rectas dadas.

Encontrar el punto de intersección de una recta y un círculo dados.

Encontrar el punto de intersección de dos círculos dados.

Para Mascheroni, una línea recta se supone determinada cuando son conocidos dos de sus puntos.

Se han conocido igualmente las construcciones con solo regla establecidas por Steiner, 1833. [2]

Las operaciones con solo regla requieren resolver cinco problemas preliminares.

Trazar por un punto la paralela a una recta dada.

Trazar la perpendicular por un punto dado a una recta dada.

Trazar a partir de un punto dado un segmento dado en una dirección dada.

---

[1] La elección de los problemas básicos es la que figura en Dörrie. [3] de la p. 160 - 164
[2] Igualmente la elección de los problemas básicos es la que figura en Dörrie. [3] de la p. 165 - 170

Trazar el cuarto proporcional a tres segmentos dados.

Trazar la media proporcional de dos segmentos de recta dados.

Entonces quedan por resolver con solo regla tres problemas básicos.

Trazar los puntos de intersección de una recta dada, sobre el círculo fijo que se supone siempre dado en las construcciones de Steiner.

Por otra parte, Trazar los puntos de intersección de dos círculos dados.

En la geometría de la recta, la intersección de dos rectas es conocida directamente.

Se dice construcciones con solo regla; en realidad, interviene casi siempre un círculo que se supone dado. Interviene igualmente, una recta dada por dos puntos y su punto medio.

4.2 Recomendaciones

Un conocimiento más completo ha de buscarse en los respectivos tratades de Mascheroni o de Steiner.

Mascheroni resuelve algo así como un centenar de problemas que argumenta de acuerdo con *Elementos* de Euclides.

Similarmente Steiner, luego de un estudio técnico que se extiende por más de la mitad del fascículo de 88 páginas, resuelve 8 problemas de fondo y luego, enuncia, resuelve y comenta 22 problemas adicionales.

Si la curiosidad intelectual o las necesidades técnicas requieren más conocimientos acerca de las construcciones de Mascheroni o de Steiner, se sabe donde están estudiados a cabalidad.

Por otra parte, a Dieudonné, en uno de sus ataques a la enseñanza demasiado tradicional de la geometría , enumeró, entre lo que debería de evitarse, lo relativo a construcciones con regla y compás.

La presente exposición se hace por necesidades de profesores de un instituto técnico.

A pesar de elegir operaciones básicas utilizables en la gran variedad de problemas que surgen, hay que reconocer que no resultan tan manejables, era la pretensión como las cuatro operaciones. Hay que argumentar los trazados una vez realizados y a veces la argumentación no es inmediata.

Se podría pensar que las actividades de las construcciones con regla y compás ayudarían a la comprensión más rápida en la enseñanza de la geometría; sin embargo, la observación en cuanto a la dificultad de elegir la construcción conveniente a un problema especifico y de acertar la argumentación que ha de acompañarla, no hacen aconsejable tal procedimiento, si no se lo ambienta mucho más.

Bibliografía

[1] COURANT, Richard. Herbert, Robbins *¿Qué es la matemática?.* México. Aguilar. Quinta edición1967.

[2] DESCARTES, René. *Discurso del método, Dioptrica, Meteoros y Geometría*. Madrid. Ediciones Alfaguara. Segunda edición. 1987.490p.

[3] DÖRRIE Heinnich. Steiner's Straight- Edge Problem p.165 - 170 in *"100 Great Problems Of Elementally mathematics: Their history and solution*" 1965. New York. Dover. 393 p.

[4] DÖRRIE Heinnich. 33. Mascheroni's Compass Problem. pp. 160- 164 in *"100 Great Problems Of Elementally mathematics: Their history and solution*" 1965. New York. Dover 165 – 170.

[5] EUCLID, The thirteen books of *The Elements*, translated from text of Heiberg, with introduction and commentary by Thomas HEATH. Second edition Unabridged. Reprint 1956. Dover new York.

[6] HARTSHORNE, Robin. *Geometry: Euclid and Beyond*. México. Springer. XI +526 p.

[7] MASCHERONI, Lorenzo. *La geometría del compasso* (1797). 1901 Palermo. Era Nova. 152 p.

[8] SERRANO, Victor. Martínez, Gladis *La proporción y el teorema de Pitágoras en la Gèomètrie de René Descartes*, Monografía Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá 1999.

[9] STEINER, Jacob. *Geometriclal Constructions with a Ruler*. (1833). 1950. Scripta Mathematica. Yeshiva University. New York. 88 p.

[10] KOSTOVSKI, A.N. *Lecciones populares de matemáticas. Construcciones Geométricas mediante un compás.* Segunda edición 1984. Moscu. MIR. 79 p.