EL BUEN PLANTEAMIENTO DE LA ECUACION NO LINEAL DE SCHRÖDINGER-HELMHOLTZ

NESTOR ORLANDO FORERO DIAZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.

2011

EL BUEN PLANTEAMIENTO DE LA ECUACION NO LINEAL DE SCHRÖDINGER-HELMHOLTZ

NESTOR ORLANDO FORERO DIAZ

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magister en ciencias matematicas

DIRIGIDO POR:
FELIX HUMBERTO SORIANO MENDEZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2011

Resumen:
En este trabajo se demuestra el buen planteamiento de la ecuación no lineal de Schrödinger-Helmholtz

$$iv_t + \Delta v + \lambda u \left|v\right|^{\sigma-1} v = 0$$

$$u - \alpha^2 \Delta u = \left|v\right|^{\sigma+1}$$

$$v(0) = v_0$$

en los espacios H^1 y L^2 usando técnicas introducidas por Kato en [7].

Palabras clave:
Ecuación no lineal de Schrödinger-Helmholtz, planteamiento local, planteamiento global

Abstract:
In this work we show the local and global well posedness of the nonlinear Schrödinger-Helmholtz equation

$$iv_t + \Delta v + \lambda u \left|v\right|^{\sigma-1} v = 0$$

$$u - \alpha^2 \Delta u = \left|v\right|^{\sigma+1}$$

$$v(0) = v_0$$

in the spaces H^1 and L^2 using techniques introduce by Kato in [7].

Key words:
Non linear Schrödinger-Helmholtz equation, local well posedeness, global well posedeness.

Índice general

Introduccion

La ecuacion no lineal Schrödinger (NLS)

$$\begin{aligned} &iv_t + \Delta v + |v|^{2\sigma} v = 0 \\ &v(0) = v_0 \end{aligned} \tag{1}$$

donde v es una función que toma valores complejos, aparece de manera natural en diferentes contextos de la física para describir la propagación de ondas en medios no lineales. El caso particular, cuando $\sigma = 1$, es conocida como la ecuación cúbica de Schrödinger, y describe la propagación de haces de rayos laser en medios ópticos no lineales donde el índice de refracción es proporcional a la intensidad de la onda. También surge en el estudio de la dinámica de biomoléculas, en la física de semiconductores, condensación de Bose-Einstein, ondas de agua en superficies libres de un flujo ideal y en el estudio de ondas en plasma, entre otros.

De particular interés es el estudio de la integrabilidad de la ecuación (1). En el caso de dimensión 1, cuando $\sigma = 1$, es bien sabido que ésta es integrable y tiene soluciones tipo solitones, es decir, soluciones que se comportan como particulas "clásicas" cuando estas colisionan. La situación en dimensión 2 es significativamente diferente. En este caso no es integrable y no se le conocen soluciones exactas. Sin embargo, se ha demostrado que tiene soluciones de la forma $R(r)e^{it}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y R es tal que $R'(0) = 0$ y se apróxima a cero para r suficientemente grande. Estos tipo de soluciones son conocidos como guías de onda o solitones de Townes. Lo interesante, en este caso, es que la potencia del haz, que en esencia es la norma en L^2, nos indica cuando las soluciones de (1) estallan (o dejan de existir o en inglés presentan *blow up*) en tiempo finito. Se sabe que cuando $\|v_0\|_{L^2} > \|R\|_{L^2}$ las soluciones explotan y cuando $\|v_0\|_{L^2} < \|R\|_{L^2}$ se presenta una difracción de la onda que la solución representa.

En física se ha considerado cambiar el potencial $|v|^{2\sigma}$ por otros potenciales. Un caso particular, es tomar el potencial auto garvitacional que es reempalzar en (1) $|v|^{2\sigma}$ por una función si ψ tal que $-\alpha^2\Delta\psi = |v|^2$. Inspirado en ésto y en modelos de turbulencia, Titti y otros en [4], han reemplazado $|v|^{2\sigma}$ en (1) por una función u tal que $u - \alpha^2\Delta u = |v|^{\sigma+1}$, lo cual da lugar al problema

$$\begin{gathered} iv_t + \Delta v + \lambda u\,|v|^{\sigma-1}\,v = 0 \\ u - \alpha^2\Delta u = |v|^{\sigma+1} \\ v(0) = v_0 \end{gathered} \tag{2}$$

donde $\alpha > 0$, $\sigma > 1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

En este trabajo examinamos el buen planteamiento tanto local como global en H^1 y L^2 del problema (2). Aunque el buen planteamiento en H^1 es considerado en [4], aquí obtenemos que el buen planteamiento global para el problema (2) se tiene para cualquier $\sigma < \dfrac{4}{n-2}$.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo presentamos los resultados básicos que se usarán en le resto del trabajo. En los capítulos 2 y 3 examinamos el buen plantemiento local de (2) en L^2 y H^1. En el último capítulo examinamos el buen plantemiento global.

Capítulo 1

Preliminares

Definición 1.0.1. *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$; se define*
$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ medible y } \int_\Omega |u|^p < \infty\right\}$ *y se nota*

$$\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

si $1 \leq p \leq \infty$ se designa p' el exponente conjugado de p con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Teorema 1.0.2. *(Desigualdad de Hölder). Sean $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $v \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$. entonces $uv \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |uv| \leq \|u\|_p \|v\|_{p'} \tag{1.1}$$

Teorema 1.0.3. *(Desigualdad de Young). Sean $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $v \in L^r(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq r \leq \dfrac{p}{p-1}$. Entonces $u * v \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} = 1 + \dfrac{1}{q}$, y*

$$\|u * v\|_q \leq \|u\|_p \|v\|_r \, .$$

Definición 1.0.4. *Sea $0 < \alpha < n$. El potencial de Riesz I_α es definido por*

$$I_\alpha = c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, dy, \tag{1.2}$$

para cada f localmente integrable, donde $c_\alpha = \pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2)/\Gamma(n/2 - \alpha/2)$.

Teorema 1.0.5 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Sean* $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \infty$ *y* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$.

1. *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *entonces la integral* (1.2) *es absolutamente convergente para casi todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

2. *Si* $p > 1$,
$$\|I_\alpha(f)\|_q \leq c_{p,\alpha,n}\|f\|_p.$$

Recordemos que el operador $(1-\alpha^2\Delta)^{-1}$ está definido en $\mathcal{S}'$ de la siguiente manera
$$(1-\alpha^2\Delta)^{-1}f = \left(\frac{\widehat{f}}{1+\alpha^2|\xi|^2}\right)^{\vee},$$
para cada distribución temperada f. Veamos propiedades de este operador que usaremos más adelante en este trabajo.

Teorema 1.0.6. *Para* $1 \leq p \leq \infty$, $(1-\alpha^2\Delta)^{-1}$ *es un operador lineal continuo de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *en* $L^q(\mathbb{R}^n)$, *para* q *tal que*
$$\left.\begin{array}{ll} p \leq q \leq \infty & si\ p > \dfrac{n}{2}, \\ p \leq q < \infty, & si\ p = \dfrac{n}{2}\ \ y\ n \geq 2, \\ p \leq q \leq \dfrac{np}{n-2p}, & si\ 1 < p < \dfrac{n}{2}\ \ y\ n > 2,\ \ o \\ 1 \leq q < \dfrac{n}{n-2}, & si\ p = 1\ \ y\ n > 2. \end{array}\right\}$$

Demostración. De las propiedades básicas de la transformada de Fourier tenemos que
$$(1-\alpha^2\Delta)^{-1}f = \left(\frac{1}{1+\alpha^2|\xi|^2}\right)^{\vee} * f.$$
Veamos que $\left(\frac{1}{1+\alpha^2|\xi|^2}\right)^{\vee} \in L^r(\mathbb{R}^n)$, para
$$\begin{cases} 1 \leq r \leq \infty & \text{si } n = 1, \\ 1 \leq r < \infty & \text{si } n = 2, \\ 1 \leq r < \frac{n}{n-2} & \text{si } n > 2. \end{cases} \tag{1.3}$$

En efecto, el siguiente procedimiento informal nos sugiere la transformada de Fourier inversa de $\frac{1}{1+\alpha^2|\xi|^2}$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+\alpha^2\left|\xi\right|^2}\right)^{\vee}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\left(\int_0^\infty e^{-t\left(1+\alpha^2|\xi|^2\right)}dt\right)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}e^{-t\left(1+\alpha^2|\xi|^2\right)}d\xi dt = \\ &= \left(\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\right)^n\int_0^\infty e^{-t-\frac{|x|^2}{4\alpha^2 t}}\ \frac{dt}{t^{\frac{n}{2}}}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Esta función es claramente integrable y, haciendo uso del teorema de Fubini, se concluye que su transformada de Fourier es $\frac{1}{1+\alpha^2|\xi|^2}$. Sea

$$g(x) = \left(\frac{1}{1+\alpha^2\left|\xi\right|^2}\right)^{\vee}(x) = \left(\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\right)^n\int_0^\infty e^{-t-\frac{|x|^2}{4\alpha^2 t}}\ \frac{dt}{t^{\frac{n}{2}}}.$$

Si $n=1$, de la fórmula de Bochner, se tiene que $g(x) = \dfrac{1}{2\alpha}e^{-\frac{|x|}{2\alpha}}$. Para $n \geq 2$, g es decreciente en $|x|$ y, del teorema de convergencia dominada, $g \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Examinemos que pasa con g cuando $|x| \to 0$. Si $n = 2$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\right)^2\int_0^\infty e^{-t-\frac{|x|^2}{4\alpha^2 t}}\frac{dt}{t} \\ &= \left(\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\right)^2\left[\int_1^\infty e^{-\frac{1}{t}-\frac{|x|^2}{4\alpha^2}t}\frac{dt}{t} + \int_1^\infty e^{-t-\frac{|x|^2}{4\alpha^2 t}}\frac{dt}{t}\right] \\ &= \left(\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\right)^2\left[\int_1^\infty\left(e^{-\frac{1}{t}}-1\right)e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha^2}t}\frac{dt}{t} + \int_{\frac{|x|^2}{4\alpha^2}}^1\frac{e^{-t}-1}{t}dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_1^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt - 2\log\left(\frac{|x|}{2\alpha}\right) + \int_1^\infty e^{-t-\frac{|x|^2}{4\alpha^2 t}}\frac{dt}{t}\right].\end{aligned}$$

Si $n > 2$,

$$g(x) = \left(\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\right)^n\left[\left(\frac{|x|}{2\alpha}\right)^{2-n}\int_0^{\frac{4\alpha^2}{|x|^2}} e^{-\frac{t|x|^2}{4\alpha^2}-\frac{1}{t}}\frac{dt}{t^{\frac{n}{2}}} + \int_1^\infty e^{-t-\frac{|x|^2}{4\alpha^2 t}}\frac{dt}{t^{\frac{n}{2}}}\right]. \tag{1.5}$$

Esto demuestra que $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, para r como en (1.3). De ésto y la desigualdad de Young se sigue la afirmación del teorema, excepto los casos en que

$n > 2$, $1 < p < \frac{n}{2}$ y $q = \frac{np}{n-2p}$. Estos se siguen de la ecuación (1.5) y del teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev. □

Proposición 1.0.7. *Sea $0 < \sigma \leq 1$. Entonces, para todo $u \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\left||u|^{\sigma-k}u^k - |v|^{\sigma-k}v^k\right| \leq C_\sigma |u-v|^\sigma, \tag{1.6}$$

donde C_σ es un número positivo que depende solo de σ.

Demostración. Si alguno de los dos u o v es 0, la afirmación es evidente. Así que, supongamos que u y v son ambos diferentes de 0. Sean α y β tales que

$$u = |u|e^{i\alpha} \quad \text{y} \quad v = |v|e^{i\beta}.$$

Es fácil ver que (1.6) se puede escribir de la siguiente forma

$$|t^\sigma - e^{i\gamma}| \leq C_\sigma |t - e^{i\gamma}|^\sigma, \tag{1.7}$$

donde $t = \frac{|u|}{|v|}$ y $\gamma = k(\beta - \alpha)$. Así las cosas, demostraremos que esta desigualdad es válida para todo $t > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. Es muy fácil probar que si (1.7) es válida para t y todo $\gamma \in \mathbb{R}$, es válida para $\frac{1}{t}$ y toda $\gamma \in \mathbb{R}$. Luego es suficiente probar (1.7) para $0 < t \leq 1$ y todo $\gamma \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\cos(\gamma) \leq \frac{1}{2}$. Entonces,

$$|t^\sigma - \cos(\gamma)| \leq 2 \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}|\operatorname{sen}(\gamma)|.$$

De donde se sigue que

$$|t^\sigma - e^{i\gamma}| \leq 3|t - e^{i\gamma}|^\sigma,$$

si $\cos(\gamma) \leq \frac{1}{2}$. Supongamos ahora que $\cos(\gamma) \geq t^\sigma$. En este caso tenemos que

$$\cos(\gamma) - t^\sigma \leq \cos(\gamma) - t \leq (\cos(\gamma) - t)^\sigma.$$

Por lo tanto,

$$|t^\sigma - e^{i\gamma}| \leq 2^{\frac{1-\sigma}{2}}|t - e^{i\gamma}|^\sigma,$$

si $\cos(\gamma) \geq t^\sigma$. Finalmente, examinemos lo que pasa cuando $\frac{1}{2} \leq \cos(\gamma) \leq t^\sigma$. En este caso tenemos que

$$t^{-\sigma} - \cos(\gamma) \leq t^{-1} - \cos(\gamma) \leq 2^{\frac{1}{\sigma}-1}(t^{-1} - \cos(\gamma))^\sigma.$$

Luego,

$$|t^{-\sigma} - e^{-i\gamma}| \leq 2^{\frac{1}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}} |t^{-1} - e^{-i\gamma}|^{\sigma},$$

o equivalentemente,

$$|t^{\sigma} - e^{i\gamma}| \leq 2^{\frac{1}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}} |t - e^{i\gamma}|^{\sigma},$$

si $\dfrac{1}{2} \leq \cos(\gamma) \leq t^{\sigma}$.

□

Proposición 1.0.8. *Sea $\sigma \geq 1$. Para todo u y $v \in \mathbb{C}$, se tiene que*

$$\left| |u|^{\sigma-1}u - |v|^{\sigma-1}v \right| \leq \sigma \left(|u|^{\sigma-1} + |v|^{\sigma-1} \right) |u - v|. \tag{1.8}$$

Demostración. Se sigue inmediatamente de la desigualdad del valor medio para funciones diferenciables. □

En la discusión que haremos ahora, daremos las nociones básicas de espacios de Sobolev que usaremos en el marco de este trabajo. Recordemos que un multi-índice β es un elemento de $\mathbb{N}^n$. El orden de un multi-índice β es $|\beta| = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j$. En la literatura matemática se suele usar las siguientes notaciones:

$$\partial^{\beta} = \partial_{x_1}^{\beta_1} \partial_{x_2}^{\beta_2} ... \partial_{x_n}^{\beta_n} \text{ y } x^{\beta} = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} ... x_n^{\beta_n},$$

para cualquier multi-índice β. Para cualquier abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si f y g son funciones localmente en integrables Ω y β es un multi-índice, decimos que g es *la derivada parcial β-ésima* de f en Ω, en el sentido débil, si para toda φ función $C_0^{\infty}(\Omega)$ (función infinitamente diferenciable con soporte compacto en Ω),

$$\int_{\Omega} f \partial^{\beta} \varphi \, dx = \int_{\Omega} g \varphi \, dx.$$

Definición 1.0.9. *Para $m \in \mathbb{N}$ y $p \geq 1$, con $W^{m,p}(\Omega)$ notamos el espacio de Sobolev de todas las funciones en $L^p(\Omega)$, que tienen derivadas β-ésimas en $L^p(\Omega)$, para toda β tal que $|\beta| \leq m$, y dotado con la norma $\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\beta| \leq m} \|\partial^{\beta} f\|_{L^p(\Omega)}$.*

En el contexto de los espacios de Sobolev tenemos los siguientes resultados importantes.

Teorema 1.0.10 (Lema de Sobolev). *Sean un entero $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Tenemos,*

1. *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$.
2. *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para* $q \in [p, \infty)$.
3. *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

con todas las inclusiones continuas. Además, si $m - \dfrac{n}{p} > 0$ *y no es entero, y tomando* θ *la parte decimal de este número, tenemos que*

$$\|\partial^\beta u\|_\infty \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

y

$$|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}|x-y|^\theta,$$

para c.t. x *e* $y \in \Omega$ *y todo* β *mult-índice tal que* $|\beta| \leq m - \dfrac{n}{p} - \theta$.

Teorema 1.0.11 (Rellich-Kondrachov). *Si* Ω *es acotado de clase* C^1*, la inclusión* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *es compacta en los siguientes casos*

1. *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$, *para* $q \in [p, p^*)$ *donde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,
2. *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$, *para* $q \in [p, \infty)$,
3. *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$, $q = \infty$.

En el contexto de la transformada de Fourier se hace una generalización de los espacios de Sobolev en todo $\mathbb{R}^n$ cuando $p = 2$. En ese sentido se introduce el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, que es precisamente el conjunto de todas las funciones $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $x^\nu \partial^\beta \varphi$ es acotada en $\mathbb{R}^n$, para todos multi-índices ν, β, el cual es un espacio vectorial topológico de Frechet al dotarlo con las seminormas $\|\varphi\|_{\nu,\beta} = \|x^\nu \partial^\beta \varphi\|_\infty$. El dual topológico de $S(\mathbb{R}^n)$, $S'(\mathbb{R}^n)$, es conocido como el *espacio de las distribuciones temperadas.*

Es bien sabido que si f es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ tal que $\dfrac{f}{1+|x|^{2N}}$ es esencialmente acotada, para algún N entero positivo, entonces f es una distribución temperada. En este caso estamos identificando f con la distribución temperada definida por $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\, dx$. Estas funciones son conocidas como funciones de crecimiento lento.

No es difícil observar que tanto la transformada de Fourier como las derivadas parciales y la multiplicación por funciones C^∞ de crecimiento lento son transformaciones lineales continuas en $S(\mathbb{R}^n)$. Esto y sus propiedades nos permiten definir las siguiente extensiones a las distribuciones temperadas. La transformada de Fourier $\hat{T}$, de la distribución temperada T, es definida por

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}),$$

para cada $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. De la misma manera, si f es una función C^∞ de crecimiento lento y β es un multi-índice, para cada distribución temperada T, fT y $\partial^\beta T$ vienen dadas por

$$fT(\varphi) = T(f\varphi),$$

y

$$\partial^\beta T(\varphi) = (-1)^{|\beta|} T(\partial^\beta \varphi),$$

para cada $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, respectivamente. Así, tenemos la siguiente importante propiedad

$$\widehat{\partial^\beta T} = (-i)^{|\beta|} \xi^\beta \hat{T}.$$

Definición 1.0.12. *Para $s \in \mathbb{R}$, notaremos por $H^s(\mathbb{R}^n)$ al espacio vectorial*

$$\left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \Lambda^s f(\xi) = \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

dotado con la norma dada por

$$\|f\|_{s,2} = \|\Lambda^s f\|_2 \,,$$

para cada $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, donde $(\Lambda^s f)^\wedge = (1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}$

De la anterior discusión no es difícil verificar que si s es un entero no negativo

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n).$$

El siguiente teorema es un compendio de propiedades importantes de estos espacios.

Teorema 1.0.13. *1. Si $s \leq s'$, entonces $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$, con inclusión continua.*

2. *$H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert. En efecto, este es claramente completo y su norma proviene del producto interno definido por $\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s f \overline{\Lambda^s g}\, dx$.*

3. *Para cualquier $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$*

4. *Si $s_1 \leq s_2$ y $s = \theta s_1 + (1-\theta) s_2$, para $0 \leq \theta \leq 1$, entonces*

$$\|f\|_{s,2} \leq \|f\|_{s_1,2}^{\theta} \|f\|_{s_2,2}^{(1-\theta)},$$

para cada $f \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$.

5. *$(H^s(\mathbb{R}^n))'$, el espacio dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$, es isométricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, para todo $s \in \mathbb{R}$*

6. *Se tiene el* Lema de Sobolev*. Esto es, $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, donde s y p satisfacen las siguientes propiedades*

   a) *si $0 < s < \dfrac{n}{2}$, $2 \leq p \leq \dfrac{2n}{n-2s}$,*

   b) *si $s = \dfrac{n}{2}$, $2 \leq p < \infty$ y*

   c) *si $s > \dfrac{n}{2}$, $2 \leq p \leq \infty$.*

   Si $s > \frac{n}{2}$, $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (la colección de todas las funciones continuas que tienden a cero en el infinito).

A continuación, examinemos brevemente el comportamiento de las soluciones del problema lineal asociado al ecuación (2). Este es el problema asociado a la ecuación Schrödinger lineal de una partícula libre

$$\begin{aligned} \partial_t u &= i\Delta u, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Haciendo uso de la transformada de Fourier llegamos a que la solución es

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 = (e^{-it|\xi|^2} \widehat{u}_0)^{\vee},$$

para cada u_0 distribución temperada. La notación en la forma exponencial es bastante natural gracias al siguiente teorema.

Proposición 1.0.14. *La familia de operadores* $\left\{e^{it\Delta}\right\}_{t=-\infty}^{\infty}$ *es un grupo fuertemente continuo en* $H^s(\mathbb{R}^n)$*, para todo* $s \in \mathbb{R}$*. Esto es,*

1. *para todo* $t \in \mathbb{R}$, $e^{it\Delta} : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ *es una isometría.*
2. *Para todos* t *y* $t' \in \mathbb{R}$, $e^{it\Delta}e^{it'\Delta} = e^{i(t+t')\Delta}$.
3. $e^{i0\Delta} = I$.
4. *Para* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$*, fijo, la función* $t \mapsto e^{it\Delta}u_0$ *es continua de* $\mathbb{R}$ *en* $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Más aún, para $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$*, fijo, la función* $t \mapsto e^{it\Delta}u_0$ *es continuamente diferenciable de* $\mathbb{R}$ *en* $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ *y, como es natural, satisface la ecuación* (1.9).

Al ser $\left\{e^{it\Delta}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ un grupo no puede garantizarse regularización en el contexto de los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, tenemos la siguiente propiedad regularizante, muy útil en el estudio del buen planteamiento del problema (2).

Teorema 1.0.15. *La familia de operadores* $\left\{e^{it\Delta}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ *satisface las siguientes desigualdades*

$$\left(\int_{-T}^{T} \left\|e^{it\Delta}f\right\|_{p_0}^{q_0} dt\right)^{\frac{1}{q_0}} \leq c\left\|f\right\|_2 \tag{1.10}$$

y

$$\left(\int_{-T}^{T} \left\|\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}g\left(.,\tau\right)d\tau\right\|_{p_0}^{q_0} dt\right)^{\frac{1}{q_0}} \leq c\left(\int_{-T}^{T} \left\|g\left(.,t\right)\right\|_{p_1'}^{q_1'} dt\right)^{\frac{1}{q_1'}}, \tag{1.11}$$

para todos p_i *y* q_i, $i = 0, 1$, *tales que*

$$\left.\begin{array}{ll} 2 \leq p_i < \frac{2n}{n-2} & si \;\; n \geq 3 \\ 2 \leq p_i < \infty & si \;\; n = 2 \\ 2 \leq p_i \leq \infty & si \;\; n = 1 \end{array}\right\} \tag{1.12}$$

y $\frac{2}{q_i} = \frac{n}{2} - \frac{n}{p_i}$. *Aquí,* $c = c(n, p_0, p_1)$ *es una constante que depende únicamente de* n, p_0 *y* p_1.

Para la demostración de este teorema vea [8]

Para finalizar este capítulo discutiremos algunas propiedades de la integral de Bochner que usaremos en este trabajo. Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, donde μ es contablemente aditiva y no negativa, y X es un espacio de Banach. Recordemos que una función $f : \Omega \to X$ es llamada *simple* si existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$, tales que $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$. Una función $f : \Omega \to X$ es llamada *μ–medible* si existe una sucesión de funciones simples (f_n) tales que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ μ–casi siempre. Una función $f : \Omega \to X$ es llamada *μ–débil medible* si para cada $x^* \in X^*$ la función numérica $x^* f$ es μ–medible. Más generalmente, si $\Gamma \subseteq X^*$ y $x^* f$ es μ–medible para cada $x^* \in \Gamma$, entonces f es llamada *Γ–medible*. Si $f : \Omega \to X^*$ es X–medible (cuando X es identificado con la inmersión natural de X en X^{**}), entonces f es llamada *débil***–medible*. En este contexto tenemos el siguiente muy útil teorema.

Teorema 1.0.16 (Pettis)**.** *Una función $f : \Omega \to X$ es μ–medible si y sólo si*

1. *f es de rango μ–esencialmente separable, esto es existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es un subconjunto separable de X en norma.*

2. *f es débil μ–medible.*

Una función simple $f : \Omega \to X$ se dice *μ–integrable* si el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ es de μ–medida finita. En este caso definimos $\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i \cap E)$. Una función μ–medible $f : \Omega \to X$ es llamada *Bochner integrable*, si existe una sucesión de funciones simples μ–integrables (f_n) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

En este caso, $\int_E f d\mu$ es definida para cada $E \in \Sigma$ por

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu. \tag{1.13}$$

El límite en (1.13) es garantizado por

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f_n \, d\mu - \int_E f_m \, d\mu \right\| &\leq \int_E \|f_n - f_m\| \, d\mu \\ &\leq \int_E \|f_n - f\| \, d\mu + \int_E \|f - f_m\| \, d\mu. \end{aligned}$$

Teorema 1.0.17. *Una función μ–medible $f : \Omega \to X$ es Bochner integrable si y sólo si $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$.*

Teorema 1.0.18. *Supongamos que f es una función μ–Bochner integrable. Entonces*

1. $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f\, d\mu = 0$
2. $\left\|\int_E f\ d\mu\right\| \leq \int_E \|f\|\ d\mu$, *para todo* $E \in \Sigma$
3. *Si* (E_n) *es una sucesión de elementos disyuntos de* Σ *y* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, *entonces*
$$\int_E f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\ d\mu,$$
donde la suma de la derecha es absolutamente convergente.

También tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.0.19 (Teorema de Convergencia Dominada)**.** *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones definidas sobre* Ω *Bochner integrables con valores en* X*. Si* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *puntualmente en norma y existe una función de valor real Lebesgue integrable* g *sobre* Ω *tal que* $\|f_n\| \leq g$ μ*–casi siempre, entonces* f *es Bochner integrable y* $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ *para cada* $E \in \Sigma$*. En efecto también* $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0$

El siguiente teorema es obvio cuando T es continuo.

Teorema 1.0.20 (Hille)**.** *Sea* $T : D(T) \subseteq X \to Y$ *un operador lineal cerrado, donde* Y *es un espacio de Banach. Si* f *y* Tf *son Bochner integrables con respecto a* μ*, entonces*

$$T\left(\int_E f\ d\mu\right) = \int_E Tf\ d\mu,$$

para todo $E \in \Sigma$

También usaremos el siguiente teorema, que generaliza el teorema fundamental del cálculo en los números reales.

Teorema 1.0.21. *Sea f una función Bochner integrable sobre $[0,1]$ con respecto a la medida de Lebesgue. Entonces para casi todo $s \in [0,1]$,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{s}^{s+h} \|f(t) - f(s)\| \; dt = 0$$

En particular, para casi todo $s \in [0,1]$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{s}^{s+h} f(t) \; dt = f(s).$$

Capítulo 2

Problema de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^n)$

En este capítulo examinaremos el buen plantemiento del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &iv_t + \Delta v + \lambda u \left|v\right|^{\sigma-1} v = 0 \\ &u - \alpha^2 \Delta u = \left|v\right|^{\sigma+1} \\ &v\left(0\right) = v_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

para $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, para $n = 1$, 2 y 3. De manera informal, haciendo uso de la transformada de Fourier y variación de parámetros, a partir del problema de Cauchy 2.1, llegamos a la siguiente ecuación integral

$$v = e^{i\Delta t} v_0 + i\lambda \int_0^t e^{i\Delta(t-\tau)} \left(\left(1 - \alpha^2 \Delta\right)^{-1} \left(\left|v\right|^{\sigma+1}\right) \left|v\right|^{\sigma-1} v \right) d\tau. \tag{2.2}$$

Veamos primero que esta ecuación tiene solución para cualquier $v_0 \in L^2$.

Teorema 2.0.22. *Sean $n = 1,\ 2,\ 3$, $1 \leq \sigma < \text{mín}(3, 4/n)$, $p = \sigma + 1$ y $q = \frac{4(\sigma+1)}{n(\sigma-1)}$. Entonces, para todo $u_0 \in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, existe $T = T(\|u_0\|, \sigma, \lambda) > 0$ y una única $u \in C\left(\left[-T, T\right], L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap L^q\left(\left[-T, T\right], L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ solución de la ecuación integral (2.2) en el intervalo $[-T, T]$.*

Más aun, para todo $T' < T$ existe una vecindad V de v_0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{v}_0 \mapsto \tilde{v}(t)$, $\tilde{v}$ la solución de la ecuación integral (2.2) con valor inicial $\tilde{v}_0$, es Lipschitz de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $C\left(\left[-T', T'\right], L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap L^q\left(\left[-T', T'\right], L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$.

Demostración. Sea

$$E\left(T, a\right) = \{v \in C\left(\left[-T, T\right], L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap L^q\left(\left[-T, T\right], L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\right) : \\ \sup_{t\in[-T,T]} \left\|v\left(t\right)\right\|_2 + \left[\int_{-T}^{T} \left\|v\left(t\right)\right\|_p^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \leq a\}.$$

donde a y T son números reales positivos que fijaremos más adelante. Este conjunto dotado con la métrica

$$d(v,w) = \sup_{t\in[-T,T]} \|v(t)-w(t)\|_2 + \left[\int_{-T}^{T} \|v(t)-w(t)\|_p^q \, dt\right]^{\frac{1}{q}},$$

para v y $w \in E(T,a)$, es un espacio métrico completo, ya que $C([-T,T], L^2(\mathbb{R}^n))$ y $L^q([-T,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ son espacios de Banach. Para $v \in E(T,a)$, definimos $\Phi(v)$ por

$$\Phi(v) = e^{i\Delta t}v_0 + i\lambda \int_0^t e^{i\Delta(t-\tau)} \left(\left(1-\alpha^2\Delta\right)^{-1} \left(|v|^{\sigma+1}\right)|v|^{\sigma-1} v\right) d\tau. \tag{2.3}$$

Veamos que, para T suficientemente pequeño, Φ es una aplicación de $E(T,a)$ con valores en $E(T,a)$, que además es contractiva. En efecto, de los Teoremas 1.0.15, 1.0.6 y la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}\left[\int_{-T}^{T} \|\Phi(v)\|_p^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq & c\|v_0\|_2 + \\ & + c|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \left\|\left(1-\alpha^2\Delta\right)^{-1}\left(|v|^{\sigma+1}\right)|v|^{\sigma-1} v\right\|_{p_1{}'}^{q_1{}'} d\tau\right]^{\frac{1}{q'}} \\ \leq & c\|v_0\|_2 + c|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \|v\|_{\sigma+1}^{(2\sigma+1)q_1'} d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}},\end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p_1'} = \frac{1}{s} + \frac{\sigma}{p}$ y $\frac{2}{q_1} = \frac{n}{2} - \frac{n}{p_1}$. Si $n=1$, tomamos $s=\infty$, y si $n=2$ o 3 podemos tomar $1 \leq s < \frac{n}{n-2}$ tal que para σ como en la hipótesis del teorema, $(2\sigma+1)q_1' < q$. Luego,

$$\left[\int_{-T}^{T} \|\Phi(v)\|_p^q \, d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \leq c\|v_0\|_2 + c|\lambda| T^{1-\delta} a^{2\sigma+1}, \tag{2.4}$$

donde $\delta = \frac{(2\sigma+1)q_1'}{q} < 1$. Repitiendo el procedimiento anterior, se sigue asimismo que

$$\sup_{[-T,T]} \|\Phi(v)\|_2 \leq c\|v_0\|_2 + c|\lambda| T^{1-\delta} a^{2\sigma+1}. \tag{2.5}$$

Por lo tanto,

$$\sup_{[-T,T]} \|\Phi(v)\|_2 + \left[\int_{-T}^{T} \|\Phi(v)\|_p^q \, d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \leq c\|v_0\|_2 + c|\lambda| T^{1-\delta} a^{2\sigma+1}. \tag{2.6}$$

Fijamos el valor de a, haciendo $a = 2c\|v_0\|_2$. Así que, si tomamos T de tal forma que

$$|\lambda|\, T^{1-\delta} a^{2\sigma+1} \leq \|v_0\|_2\,, \tag{2.7}$$

de (2.6),

$$\sup_{[0,T]} \|\Phi\,(v)\|_2 + \left[\int_{-T}^{T} \|\Phi\,(v)\|_p^q \, d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \leq a.$$

Veamos la continuidad de $\Phi\,(v)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Es claro que

$$\begin{aligned} \Phi\,(v)\,(t+h) - \Phi\,(v)\,(t) &= (e^{i\Delta h} - I)(\Phi\,(v)\,(t)) + \\ &+ i\lambda \int_0^h e^{i\Delta(h-\tau)} \left(\left(1-\alpha^2\Delta\right)^{-1} \left(|v|^{\sigma+1}\right) |v|^{\sigma-1}\, v\right)(t+\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Siguiendo los mismos argumentos usados anteriormente, tenemos que

$$\left\|\int_0^h e^{i\Delta(h-\tau)} \left(\left(1-\alpha^2\Delta\right)^{-1} \left(|v|^{\sigma+1}\right) |v|^{\sigma-1}\, v\right)(t+\tau)d\tau\right\|_2 \leq c\eta^{1-\delta}a^{2\sigma+1},$$

si $|h| < \eta$. Ya que $e^{i\Delta t}$ es un grupo fuertemente continuo en $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(v)$ es continua en $L^2(\mathbb{R}^n)$, para toda $v \in E(a,t)$. Por lo tanto, Φ es una aplicación de $E(a,t)$ en si mismo.

Ahora veamos que Φ es una contracción. En efecto,

$$\begin{aligned} &\left[\int_{-T}^{T} \|\Phi\,(v) - \Phi\,(w)\,\|_p^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\qquad \leq |\lambda|\, c \left[\int_{-T}^{T} \left\|(1-\alpha^2\Delta)^{-1}\left(|v|^{\sigma+1} - |w|^{\sigma+1}\right)|v|^{\sigma-1}\, v\right\|_{p_1'}^{q_1'} dt\right]^{\frac{1}{q_1'}} + \\ &\qquad\quad + c|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \left\|(1-\alpha^2\Delta)^{-1}\left(|w|^{\sigma+1}\right)(|w|^{\sigma-1}\, w - |v|^{\sigma-1}\, v)d\tau\right\|_{p_1'}^{q_1'} dt\right]^{\frac{1}{q_1'}} \\ &\qquad \leq c\,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \left\||v|^{\sigma+1} - |w|^{\sigma+1}\right\|_1^{q_1'} \|v\|_{\sigma+1}^{\sigma q_1'}\, d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}} + \\ &\qquad\quad + c\,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \|w\|_{\sigma+1}^{(\sigma+1)q_1'} \left\||v|^{\sigma-1}\, v - |w|^{\sigma-1}\, w\right\|_{p_1'}^{q_1'} d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq & c\,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \|(|v|^{\sigma}+|w|^{\sigma})|v-w|\|_{1}^{q_1'}\,\|v\|_{\sigma+1}^{\sigma q_1'}\,d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}} + \\
& + c\,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \|w\|_{\sigma+1}^{(\sigma+1)q_1'}\,\left\|(|v|^{\sigma-1}+|w|^{\sigma-1})|v-w|\right\|_{p_1'}^{q_1'}\,d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}} \\
\leq & c\,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \|(|v|^{\sigma}+|w|^{\sigma})|v-w|\|_{1}^{q_1'}\,\|v\|_{\sigma+1}^{\sigma q_1'}\,d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}} + \\
& + c\,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \|w\|_{\sigma+1}^{(\sigma+1)q_1'}\,\left\|(|v|^{\sigma-1}+|w|^{\sigma-1})|v-w|\right\|_{p_1'}^{q_1'}\,d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}} \\
\leq & c\,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} (\|v\|_{\sigma+1}^{2\sigma}+\|w\|_{\sigma+1}^{2\sigma})^{q_1'}\|v-w\|_{\sigma+1}^{q_1'} d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}} \\
\leq & c\,|\lambda|\,T^{1-\delta} \left[\int_{-T}^{T} (\|v\|_{\sigma+1}^{2\sigma}+\|w\|_{\sigma+1}^{2\sigma})^{\frac{q}{2\sigma+1}}\|v-w\|_{\sigma+1}^{\frac{q}{2\sigma+1}} d\tau\right]^{\frac{2\sigma+1}{q}} \\
\leq & c\,|\lambda|\,T^{1-\delta} \left(\left[\int_{-T}^{T} \|v\|_{\sigma+1}^{q} d\tau\right]^{\frac{2\sigma}{q}} + \left[\int_{-T}^{T} \|w\|_{\sigma+1}^{q} d\tau\right]^{\frac{2\sigma}{q}}\right) \times \\
& \times \left[\int_{-T}^{T} \|v-w\|_{\sigma+1}^{q} d\tau\right]^{q} \\
\leq & c\,|\lambda|\,T^{1-\delta} a^{2\sigma} \left[\int_{-T}^{T} \|v-w\|_{\sigma+1}^{q} d\tau\right]^{q}.
\end{aligned}
$$

Prácticamente el mismo procedimiento anterior nos lleva a la siguiente desigualdad

$$
\sup_{[0,T]} \|\Phi(v)-\Phi(w)\|_2 \leq c\,|\lambda|\,T^{1-\delta} a^{2\sigma} \left(\int_{-T}^{T} \|v-w\|_{p}^{q}\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}.
$$

Fijemos T de tal manera que

$$
2c\,|\lambda|\,T^{1-\delta} a^{2\sigma} \leq \frac{1}{2}. \tag{2.9}
$$

Este T también satisface (2.7). Esto muestra que Φ es una contracción en $E(a,T)$. Por el teorema del punto fijo de Banach, tenemos que Φ tiene un único punto fijo $v \in E(a,T)$. En otras palabras, existe $v \in E(a,T) \subseteq C([-T,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ que es solución de la ecuación integral (2.2).

Veamos la unicidad de la solución de la ecuación integral. Supongamos que $\tilde{v} \in C([-T,T],\ L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ es otra solución de la ecuación integral (2.2). Entonces, para $0 < T' \leq T$ suficientemente pequeño, $\tilde{v} \in E(a,T')$. De la unicidad del punto fijo, $v = \tilde{v}$ en el intervalo $[-T',T']$. Sea $\tilde{T} = \sup\{T' | \tilde{v} \in E(a,T')\}$, y sea

$$\tilde{a}(T') = \sup_{[-T',T']} \|v_0\|_2 + \left[\int_{-T'}^{T'} \|\tilde{v}\|_p^q \, d\tau\right]^{\frac{1}{q}}.$$

$\tilde{a}$ es una función continua y creciente en $[0,T]$, y $\tilde{a}(T') \leq a$, para todo $T' \in [0,\tilde{T}]$. Supongamos que $\tilde{T} < T$. Entonces, empleando el mismo procedimiento que se hizo para obtener (2.6), se sigue que

$$\tilde{a}(\tilde{T}+\eta) \leq c\,\|v_0\|_2 + c\,|\lambda|\,(\tilde{T}+\eta)^{1-\delta}\tilde{a}(\tilde{T}+\eta)^{2\sigma+1}, \tag{2.10}$$

para $0 \leq \eta \leq T - \tilde{T}$. De la continuidad de $\tilde{a}$ y la forma en que se fijaron a y T, el lado derecho de la última desigualdad es menor que a, para $\eta > 0$ suficientemente pequeño. Pero esto contradice la elección de $\tilde{T}$. Por lo tanto, $\tilde{T} = T$, $\tilde{v} \in E(a,T)$ y $\tilde{v} = v$ en el intervalo $[-T,T]$.

Finalmente, supongamos que $T' < T$. Sea

$$V = \left\{\tilde{v}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid 2c|\lambda|{T'}^{1-\delta}(2c\|\tilde{v}_0\|)^{2\sigma} < \frac{1}{2}\right\}.$$

Claramente, V es abierto en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y, por (2.9), $v_0 \in V$. Haciendo uso del mismo procedimiento que empleamos para obtener la desigualdad (2.6), obtenemos

$$\sup_{[-T',T']} \|\tilde{v}(t)\|_2 + \left[\int_{-T'}^{T'} \|\tilde{v}\|_p^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \leq c\|\tilde{v}_0\|_2 + c|\lambda|{T'}^{1-\delta}(2c\|\tilde{v}_0\|_2)^{2\sigma+1} \leq 2c\|\tilde{v}_0\|_2,$$

para todo $\tilde{v}_0 \in V$. Usando los mismos argumentos que empleamos para ver que Φ es contracción, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sup_{[-T',T']} \|\tilde{v}(t) - \tilde{w}(t)\|_2 + \left[\int_{-T'}^{T'} \|\tilde{v}-\tilde{w}\|_p^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \leq \\ \leq c\|\tilde{v}_0 - \tilde{w}_0\|_2 + c|\lambda|{T'}^{1-\delta}\left((2c\|\tilde{v}_0\|_2)^{2\sigma} + (2c\|\tilde{w}_0\|_2)^{2\sigma}\right) \times \\ \times \left(\sup_{[-T',T']} \|\tilde{v}(t) - \tilde{w}(t)\|_2 + \left[\int_{-T'}^{T'} \|\tilde{v}-\tilde{w}\|_p^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}\right).\end{aligned}$$

Luego,

$$\sup_{[-T',T']} \|\tilde{v}(t) - \tilde{w}(t)\|_2 + \left[\int_{-T'}^{T'} \|\tilde{v} - \tilde{w}\|_p^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \leq 2c\|\tilde{v}_0 - \tilde{w}_0\|_2,$$

para todos $\tilde{v}_0$ y $\tilde{w}_0 \in V$. Esto termina la demostración del teorema. □

Observación 1. El anterior procedimiento no permite mejorar el resultado. En efecto, podríamos suponer que $p = r(\sigma + 1)$, en cuyo caso, del Teorema 1.11, $\frac{2}{q} = \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$. Para demostrar que Φ, definida en (2.3), es una contracción, al proceder como en el teorema anterior, escogemos p_1 tal que $\frac{1}{p_1'} = \frac{1}{s} + \frac{\sigma}{p}$ y $\frac{2}{q_1} = \frac{n}{2} - \frac{n}{p_1}$ de tal manera que $(2\sigma + 1)q_1' < q$. Luego,

$$\sigma < \frac{2}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s}.$$

Ahora bien, del Teorema 1.0.6, si $r \leq \frac{n}{2}$, $r \leq s \leq \frac{nr}{n-2r}$, y si $r > \frac{n}{2}$, $r \leq s \leq \infty$. En cualquier caso, $\sigma < \frac{4}{n}$.

En este momento podemos establecer una relación entre la ecuación integral (2.2) en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y la ecuación diferencial (2.1).

Teorema 2.0.23. *Sea* $v \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], L^p(\mathbb{R}^n))$. v *es solución de la ecuación integral* (2.2) *si y sólo si* v *es satisface* (2.1) *para casi todo* $t \in [-T,T]$.

Demostración. Si $v \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], L^p(\mathbb{R}^n))$,

$$(1 - \alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v \in L^1([-T,T], L^{p_1'}).$$

Como $L^{p_1'} \subseteq H^{-1}$,

$$(1 - \alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v \in L^1([-T,T], H^{-1}).$$

De las propiedades del grupo $e^{it\Delta}$ se sigue que $e^{-it\Delta}(1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v \in L^1([-T,T], H^{-1})$. Si v es solución de la ecuación integral (2.2),

$$\begin{aligned}\frac{v(t+h) - v(t)}{h} =& \frac{e^{ih\Delta} - I}{h} v(t) + \\ &+ i\lambda e^{ih\Delta}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{i(t-\tau)\Delta}(1 - \alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v\, d\tau\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $v \in AC([-T,T], H^{-2})$ y

$$\partial_t v = i\Delta v + i\lambda\left((1-\alpha^2\Delta)(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v\right),$$

para casi todo $t \in [-T,T]$. Si v es solución de la ecuación (2.1) entonces $v \in AC([-T,T], H^{-2})$, ya que $(1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v \in L^1([-T,T], L^{p'})$. De aquí, es inmediato ver que satisface la ecuación integral (2.2) $\square$

Capítulo 3

Problema de Cauchy en $H^1(\mathbb{R}^n)$

Ahora examinemos el buen planteamiento del problema de Cauchy (2.1) en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Para eso seguiremos las ideas de Kato en [7] (vea también Cazenave [2]). Para ésto estudiemos primero la ecuación integral (2.2).

Teorema 3.0.24. *Sean $n \leq 5$ y*

$$\begin{cases} 1 \leq \sigma \leq \infty & si\ n = 1,\ o \\ 1 \leq \sigma < \infty & si\ n = 2,\ o \\ 1 \leq \sigma < \frac{4}{n-2} & si\ n > 2. \end{cases}$$

Entonces, para todo $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, existen $T = T(\|v_0\|, \sigma, \lambda) > 0$, $r \geq 1$ y una única $v \in C\big([-T,T],\ H^1(\mathbb{R}^n)\big)$ solución de la ecuación integral (2.2) en el intervalo $[-T,T]$. Además, $v \in L^q([-T,T], W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$, donde $p = r(\sigma+1)$ y q es tal que p y q que satisfacen las condiciones dadas en el Teorema 1.0.15.

Más aun, la transformación $\tilde{v}_0 \mapsto \tilde{v}(t)$, $\tilde{v}$ la solución de la ecuación integral (2.2) con valor inicial $\tilde{v}_0$, es continua de $H^1(\mathbb{R}^n)$ en $C([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n))$ $\cap L^q([-T,T], W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$.

Demostración. Sea

$$E(T,a) = \{u \in L^\infty\left([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n)\right) \cap L^q\left([-T,T], W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\right) : \\ \operatorname*{ess\,sup}_{[-T,T]} \|u(t)\|_{H^1} + \left[\int_{-T}^{T} \|u(t)\|_{W^{1,p}}^q \, d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \leq a\}.$$

donde p y q son como en el enunciado del teorema. Mostremos que este conjunto dotado con la métrica

$$d(u,v) = \operatorname*{ess\,sup}_{[-T,T]} \|u(t) - v(t)\|_2 + \left[\int_{-T}^{T} \|u(t) - v(t)\|_p^q \, d\tau\right]$$

es un espacio métrico completo. Efectivamente, si (u_k) es una sucesión de Cauchy en $E(T,a)$, entonces existe $u \in L^\infty([-T,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ tal que $d(u_k,u) \to 0$. Luego, existe una subsucesión (u_k), que notaremos de la misma manera, que converge a u en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y es uniformemente acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$ fuera de un conjunto de medida 0 en $[-T,T]$. Esto demuestra que $u \in L^\infty([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n))$, ya que H^1 es reflexivo y es contenido continuamente en L^2. Ahora, de manera análoga, existe una subsucesión de (u_k), que denotamos de la misma manera, y un subconjunto de medida nula N en $[-T,T]$ tal que $u_k(t) \to u(t)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $u_k(t)$ es acotada en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, para todo $t \notin N$. Luego,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \phi u(t)\, dx\right| = \left|\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \phi u_k(t)\, dx\right| \leq \liminf_{k\to\infty} \|\partial_i u_k(t)\|_p \|\phi\|_{p'},$$

para toda ϕ infinitamente diferenciable y de soporte compacto y toda $t \notin N$. Como $p > 1$, $u(t) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|u(t)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k(t)\|_{W^{1,p}}(\mathbb{R}^n),$$

para todo $t \notin N$. Del lema de Fatou, es inmediato que $u \in E(T,a)$.

Para $v \in E(T,a)$ definimos

$$\Phi(v) = e^{i\Delta t} v_0 + i\lambda \int_0^t e^{i\Delta(t-\tau)} \left(\left(1+\alpha^2\Delta\right)^{-1} \left(|v|^{\sigma+1}\right) |v|^{\sigma-1} v\right) d\tau.$$

Veamos que Φ es una contracción en $E(T,a)$. Veamos primero que, para a y T convenientemente elegidos, si $v \in E(T,a)$, $\Phi(v) \in E(T,a)$. Para $\sigma \geq 1$, las funciones $u \mapsto |u|^{\sigma-1}u$ y $u \mapsto |u|^{\sigma+1}$ son diferenciables y sus derivadas son

$$h \mapsto \begin{cases} (\sigma-1)|u|^{\sigma-3}u\mathrm{Re}(\bar{u}h) + |u|^{\sigma-1}h & \text{si } u \neq 0, \\ 0 & \text{si } u = 0, \end{cases}$$

y

$$h \mapsto \begin{cases} (\sigma+1)|u|^{\sigma-1}\mathrm{Re}(\bar{u}h) & \text{si } u \neq 0, \\ 0 & \text{si } u = 0, \end{cases}$$

respectivamente. Luego, si $v \in E(T,a)$, $|v|^{\sigma-1}v \in W^{1,\frac{p}{\sigma}}$, $|v|^{\sigma+1} \in W^{1,r}$,

$$\|\nabla(|v|^{\sigma-1}v)\|_{\frac{p}{\sigma}} \leq \|v\|_p^{\sigma-1}\|\nabla v\|_p$$

y

$$\|\nabla(|v|^{\sigma+1})\|_r \leq \|v\|_p^{\sigma}\|\nabla v\|_p$$

Por lo tanto, del Teorema 1.0.6 y la desigualdad de Hölder, para $p_1 \geq 2$ tal que $\dfrac{1}{p_1'} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{\sigma}{p}$ (r y s satisfacen las condiciones en el Teorema 1.0.6),

$$(1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v \in W^{1,p_1'}(\mathbb{R}^n),$$

y

$$\|\nabla((1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v)\|_{p_1'} \leq \|v\|_p^{2\sigma}\|\nabla v\|_p.$$

Así, del Teorema 1.0.15 y el lema de Sobolev, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ess\,sup}_{[-T,T]}\|v\|_{H^1} + \left[\int_{-T}^{T} \|\Phi(v)\|_{W^{1,p}}^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \\
&\qquad \leq c\,\|v_0\|_2 + c\,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \left\|\left(1-\alpha^2\Delta\right)^{-1}\left(|v|^{\sigma+1}\right)|v|^{\sigma-1}\,v\right\|_{W^{1,p_1'}}^{q_1'} d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}} \\
&\qquad \leq c\,\|v_0\|_2 + c\,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \|v\|_p^{(2\sigma)q_1'}\,\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^{q_1'} d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}} \\
&\qquad \leq c\,\|v_0\|_2 + c\,|\lambda|\,a^{2\sigma}T^{1-\frac{q_1'}{q}} \left[\int_{-T}^{T} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad \leq c\,\|v_0\|_2 + c\,|\lambda|\,a^{2\sigma+1}T^{1-\frac{q_1'}{q}},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde p_1 y q_1 satisfacen las condiciones dadas en el Teorema 1.0.15. De hecho, como p, q y p_1, q_1 deben satisfacer las condiciones exigidas en el Teorema 1.0.15, $1 - \frac{q_1'}{q} > 0$. Más aún, debemos garantizar la existencia de un $r \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{r(\sigma+1)} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{s} + \frac{\sigma}{r(\sigma+1)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{n},$$

y ésto se logra si y sólo si $\sigma < \frac{4}{n-2}$. Si elegimos $a = 2c\|v_0\|$ y T tal que

$$c\,|\lambda|\,a^{2\sigma}T^{1-\frac{q_1'}{q}} \leq \frac{1}{2},$$

entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{[-T,T]} \|\Phi(v)\|_{H^1} + \left[\int_{-T}^{T} \|\Phi(v)\|_{W^{1,p}}^q \, d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \leq a.$$

Para ver que Φ es contracción procedemos de la misma manera que en el Teorema 2.0.22. Sin llenar todos los detalles allí expuestos y haciendo uso del lema de Sobolev, tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{[-T,T]}\|v-w\|_2 + \left[\int_{-T}^{T}\|\Phi(v)-\Phi(w)\|_p^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq & \\
&\leq c\,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} (\|v\|_p^{2\sigma} + \|w\|_p^{2\sigma})^{q_1'} \|v-w\|_p^{q_1'} d\tau\right]^{\frac{1}{q_1'}} \\
&\leq c a^{2\sigma} T^{1-\frac{q_1'}{q}} \,|\lambda| \left[\int_{-T}^{T} \|v-w\|_p^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\int_{-T}^{T}\|v-w\|_p^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Luego, existe una $v \in L^\infty([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ solución de la ecuación integral (2.2). Veamos que v es continua de $[-T,T]$ en H^1. Como

$$\begin{aligned}
v(t+h)-v(t) = {}& (e^{i\Delta h} - I)(v(t)) + \\
&+ i\lambda \int_0^h e^{i\Delta(h-\tau)} \left(\left(1-\alpha^2\Delta\right)^{-1}\left(|v|^{\sigma+1}\right)|v|^{\sigma-1} v\right)(t+\tau)d\tau,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$e^{i\Delta t}$ es un grupo continuo y, al proceder como antes,

$$\left\| \int_0^h e^{i\Delta(h-\tau)} \left(\left(1-\alpha^2\Delta\right)^{-1}\left(|v|^{\sigma+1}\right)|v|^{\sigma-1} v\right)(t+\tau)d\tau \right\|_{H^1} \leq c\eta^{1-\frac{q_1'}{q}} a^{2\sigma+1},$$

si $|h| < \eta$, se sigue que v es continua.

Ahora veamos la unicidad de la solución. Supongamos $\tilde{v}$ es otra solución en $[-T,T]$ de la ecuación integral (2.2) y sean $\tilde{a} = \max\{\sup_{[-T,T]} \tilde{v}(t), a\}$ y sea $\tilde{T}$ tal que

$$c\,|\lambda|\,\tilde{a}^{2\sigma}\tilde{T}^{1-\frac{{q_1}'}{q}} \leq \frac{1}{2}.$$

Luego, del mismo argumento que usamos para probar al desigualdad (3.2), tenemos que

$$\sup_{[-\tilde{T},\tilde{T}]} \|v-\tilde{v}\|_2 + \left[\int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} \|v-\tilde{v}\|_p^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{2}\left[\int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} \|v-\tilde{v}\|_p^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Así pues, $v=\tilde{v}$ en $[-\tilde{T},\tilde{T}]$. Sea

$$T_0 = \sup\{T' \mid v=\tilde{v} \text{ en } [-T',T']\}.$$

De la continuidad de v y $\tilde{v}$ tenemos que $v(\pm T_0)=\tilde{v}(\pm T_0)$. Supongamos que $T_0 < T$ y sea $\tau = \text{mín}\{\tilde{T}, T-T_0\}$. Como $v(\cdot \pm T_0)$ y $\tilde{v}(\cdot \pm T_0)$ satisfacen las ecuaciones

$$w(t) = e^{it\Delta}v(\pm T_0) + i\lambda \int_0^t e^{i(t-\vartheta)\Delta}\left((1-\alpha^2)(|w|^{\sigma+1})|w|^{\sigma-1}w\right)\, d\vartheta,$$

al proceder como en la anterior desigualdad, tenemos que

$$\sup_{[\pm T_0-\tau,\pm T_0+\tau]} \|v-\tilde{v}\|_2 + \left[\int_{\pm T_0-\tau}^{\pm T_0+\tau} \|v-\tilde{v}\|_p^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{2}\left[\int_{\pm T_0-\tau}^{\pm T_0+\tau} \|v-\tilde{v}\|_p^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Luego, $v=\tilde{v}$ en el intervalo $[-\tau-T_0, \tau+T_0]$, lo que va en contradicción con la definición de T_0. Así pues $v=\tilde{v}$ en $[-T,T]$.

Finalmente veamos continuidad con respecto al dato inicial. Procediendo como en el Teorema 2.0.22 tenemos la siguiente propiedad de Lipschitz: para $\tilde{v}$ y $\tilde{w}$ soluciones de la ecuación integral (2.2), con condiciones iniciales $\tilde{v}_0$ y $\tilde{w}_0$ repectivamente, y tales que $\|\tilde{v}_0\|_{H^1} \leq 2\|v_0\|_{H^1}$ y $\|\tilde{w}_0\|_{H^1} \leq 2\|v_0\|_{H^1}$, tenemos que

$$\sup_{[-T,T]} \|\tilde{v}(t)-\tilde{w}(t)\|_2 + \left[\int_{-T}^{T} \|\tilde{v}-\tilde{w}\|_p^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \leq 2c\|\tilde{v}_0-\tilde{w}_0\|_2,$$

para T suficientemente pequeño. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\nabla(\tilde{v}-\tilde{w}) =& e^{it\Delta}(\nabla(\tilde{v}_0-\tilde{w}_0))+\\
&+\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}\left((1-\alpha^2\Delta)^{-1}(f_1'(\tilde{v})\nabla(\tilde{v}-\tilde{w}))|\tilde{v}|^{\sigma-1}\tilde{v}\right)+\\
&+\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}\left((1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|\tilde{v}|^{\sigma+1})f_2'(\tilde{v})\nabla(\tilde{v}-\tilde{w})\right)+\\
&+\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}\left((1-\alpha^2\Delta)^{-1}((f_1'(\tilde{v})-f_1'(\tilde{w}))\nabla\tilde{w})|\tilde{v}|^{\sigma-1}\tilde{v}\right)+\\
&+\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}\left((1-\alpha^2\Delta)^{-1}(f_1'(\tilde{w})\nabla\tilde{w})(|\tilde{v}|^{\sigma-1}\tilde{v}-|\tilde{w}|^{\sigma-1}\tilde{w})\right)+\\
&+\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}\left((1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|\tilde{v}|^{\sigma+1})(f_2'(\tilde{v})-f_2'(\tilde{w}))\nabla\tilde{w}\right)+\\
&+\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}\left((1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|\tilde{v}|^{\sigma+1}-|\tilde{w}|^{\sigma+1})f_2'(\tilde{w})\nabla\tilde{w}\right),
\end{aligned}$$

donde f_1' y f_2' son las derivadas de $u\mapsto|u|^{\sigma+1}$ y $u\mapsto|u|^{\sigma-1}u$ respectivamente. Teniendo en cuenta que

$$|f_1'(u)|\le|u|^\sigma,\ |f_1'(u)-f_1'(v)|\le(|u|^{\sigma-1}+|v|^{\sigma-1})|u-v|,\ |f_2'(u)|\le|u|^{\sigma-1}\text{ y}$$

$$|f_2'(u)-f_2'(v)|\le\begin{cases}(|u|^{\sigma-2}+|v|^{\sigma-2})|u-v|, & \text{si } \sigma\ge 2\\ |u-v|^{\sigma-1}, & \text{si } 1<\sigma<2 \text{ y}\\ 0, & \text{si } \sigma=1,\end{cases}$$

de los Teoremas 1.0.15, 1.0.6 y la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{[-T,T]}\|\nabla(\tilde{v}-\tilde{w})\|_{L^2}+\left[\int_{-T}^T\|\nabla(\tilde{v}-\tilde{w})\|_{L^p}^q\right]^{\frac{1}{q}} \le& c\|\tilde{v}_0-\tilde{w}_0\|_{H^1}+\\
&+cT^{1-\frac{q_1}{q}}\left[\int_{-T}^T\|\nabla(\tilde{v}-\tilde{w})\|_{L^p}^q\right]^{\frac{1}{q}}+\\
&+c\left[\int_{-T}^T\|\tilde{v}-\tilde{w}\|_{L^p}^q\right]^{\frac{1}{q}}+c\left[\int_{-T}^T\|\tilde{v}-\tilde{w}\|_{L^p}^q\right]^{\frac{\theta}{q}},
\end{aligned}$$

donde $\theta = \text{mín}\{1, \sigma - 1\}$ si sigma $\sigma > 1$, y $\theta = 1$ si $\sigma = 1$. Luego,

$$\sup_{[-T,T]} \|\nabla(\tilde{v} - \tilde{w})\|_{L^2} + \left[\int_{-T}^{T} \|\nabla(\tilde{v} - \tilde{w})\|_{L^p}^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq$$
$$\leq c\left(\|\tilde{v}_0 - \tilde{w}_0\|_{H^1} + \|\tilde{v}_0 - \tilde{w}_0\|_{H^1}^{\theta}\right) \quad (3.4)$$

Esto termina la demostración. □

Corolario 3.0.25. *Si $\tilde{v} \in L^\infty([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n))$ es solución de la ecuación integral* (2.2)*, entonces $\tilde{v} = v$, donde v es la solución garantizada por el teorema anterior.*

Demostración. Argumentando como en la prueba del teorema anterior podemos ver primero que $\tilde{v} \in C([-T,T], L^2)$. El corolario sigue de la misma forma como se demostró la unicidad en el anterior teorema. □

Veamos que, para dato inicial en H^1, el problema de Cauchy (2.1) es equivalente a la ecuación integral (2.2).

Teorema 3.0.26. *Sea $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que σ satisface las condiciones del teorema anterior. $v \in C([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n))$ es solución del problema de Cauchy* (2.1) *con dato inicial v_0 si y sólo si v solución de la ecuación integral* (2.2)*.*

Demostración. Si v es solución de la ecuación integral (2.2), entonces $(1 - \alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v \in C([-T,T], L^{p_1'})$. Como $L^{p_1'} \subseteq H^{-1}$,

$$(1 - \alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v \in C([-T,T], H^{-1}).$$

De las propiedades del grupo $e^{it\Delta}$ se sigue que $e^{-it\Delta}(1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v \in C([-T,T], H^{-1})$. Como

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{e^{ih\Delta} - I}{h}v(t) +$$
$$+ i\lambda e^{ih\Delta}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{i(t-\tau)\Delta}(1 - \alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v\, d\tau\right),$$

tenemos que $v \in C^1([-T,T], H^{-1})$ y

$$\partial_t v = i\Delta v + i\lambda(1 - \alpha^2\Delta)(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v.$$

Si v es solución de la ecuación (2.1) entonces $v \in C^1([-T,T], H^{-1})$, ya que $(1 - \alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v \in C([-T,T], L^{p_1'})$. De aquí, es inmediato ver que satisface la ecuación integral (2.2). □

Capítulo 4

Buen planteamiento global

Ahora examinemos el buen planteamiento global tanto en $L^2(\mathbb{R}^n)$ como en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Para ello probaremos primero que cualquier solución en $H^1(\mathbb{R}^n)$ del problema de Cauchy asociado a la ecuación (2.1) satisface las siguiente leyes de conservación

$$\begin{gathered}\|v(t)\|_2^2 = \|v(0)\|_2^2,\\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(t)|^2 + G(v(t))\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(0)|^2 + G(v(0))\,dx,\end{gathered} \tag{4.1}$$

donde $G(v) = \frac{\lambda}{\sigma+1}(1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma+1}$. Informalmente, suponiendo que $\Delta v + \lambda(1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v \in L^2$, al multiplicar la ecuación (2.1) por $\bar{v}$, integrar y tomar la parte real obtenemos la primera ley. La segunda ley es obtenida al conjugar en ambos lados de la ecuación, multiplicar por $(1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v$, integrar y tomar la parte real.

En vista de la discusión inmediatamente anterior, para la prueba de las leyes de conservación, vamos a considerar los siguientes problemas regularizados

$$\begin{cases}\partial_t v = i\Delta v + i\lambda J_m g(J_m v),\\ v(0) = v_0\end{cases} \tag{4.2}$$

donde $J_m = (1-m\Delta)^{-1}$ y $g(v) = (1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1})|v|^{\sigma-1}v$. Veamos el siguiente teorema.

Teorema 4.0.27. *Sean $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y σ como en el enunciado del Teorema 3.0.24. Entonces, para cada m existen $T = T(\|v_0\|, \sigma, \lambda) > 0$, $r \geq 1$ y una única $u \in C\big([-T,T]\,,\, H^1(\mathbb{R}^n)\big) \cap L^q([-T,T]\,, W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ solución (4.2) en* *el intervalo $[-T,T]$, donde $p = r(\sigma+1)$ y junto a q satisfacen las condiciones dadas en el Teorema 1.0.15.*

Más aún, la transformación $\tilde{v}_0 \mapsto \tilde{v}(t)$, $\tilde{v}$ la solución de la ecuación en (4.2) con valor inicial $\tilde{v}_0$, es continua de $H^1(\mathbb{R}^n)$ en $C([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$.

Su demostración es idéntica a la del Teorema 3.0.24, pero cabe destacar que dentro del transcurso de la prueba observamos que, para todo $m > 0$, si v_m es solución de la ecuación (4.2):

1. v_m satisface la ecuación
$$v = e^{it\Delta}v_0 + i\lambda \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} J_m g(J_m v)\, d\tau. \tag{4.3}$$
2. $v_m \in E(a,T)$, donde a, T y $E(a,T)$ es como en la demostración del Teorema 3.0.24.
3. Para $|h| \leq \eta$,
$$\|v_m(t+h) - v_m(t)\|_{H^1} \leq ca^{2\sigma+1}\eta^{1-\frac{q_1'}{q}}.$$
4. Finalmente observemos que, para $s \leq 3$, si $v_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $v_m \in C([-T,T], H^s(\mathbb{R}^n))$.

Lema 4.0.28. *Sean $r \geq 1$ tales que r y r' satsifacen las condiciones del Teorema 1.0.6 (con $p = r$ y $q = r'$). El funcional de $L^{r(\sigma+1)}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tal que $v \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} G(v)\, dx$, es continuo. En particular, si σ satisface la hipótesis del Teorema 3.0.24, este funcional es continuo en $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. El teorema sigue inmediatamente de la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} G(v)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} G(w)\, dx\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^n} (1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|v|^{\sigma+1} - |w|^{\sigma+1})|v|^{\sigma+1}\, dx\right| + \\ + \left|\int_{\mathbb{R}^n} (1-\alpha^2\Delta)^{-1}(|w|^{\sigma+1})(|v|^{\sigma+1} - |w|^{\sigma+1})\, dx\right| \leq \\ \leq c\|(|v|^\sigma + |w|^\sigma)|v-w|\|_r \|v\|_p + c\|w\|_p \|(|v|^\sigma + |w|^\sigma)|v-w|\|_r \\ \leq c(\|v\|_p^{\sigma+1} + \|w\|_p^{\sigma+1})\|v-w\|_p.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.0.29. *Para σ satisfaciendo la hipótesis del Teorema 3.0.24, si $v_m \in C([-T,T],\ H^1(\mathbb{R}^n))$ es solución del problema* (4.2)*, entonces*

$$\|v_m(t)\|_{L^2}^2 = \|v_0\|_{L^2}^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_m(t)|^2 + G(J_m v_m(t))\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 + G(J_m v_0)\, dx.$$

Demostración. Supongamos primero que $v_0 \in H^2$. De las observaciones anteriores tenemos que $\Delta v_m + \lambda J_m g J_m v_m \in C([-T,T], L^2)$. Luego, al multiplicar en ambos lados de la ecuación (4.2) por $\bar{v}_m$, integrar y tomar la parte real tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|^2 &= 2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} v_{mt}\bar{v}_m\, dx = 2\mathrm{Re}\left(i\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_m|^2 + \lambda g(J_m v_m)\overline{J_m v_m}\, dx\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

ya que $g(J_m v_m)\overline{J_m v_m} = (1-\alpha\Delta)^{-1}(|J_m v_m|^{\sigma+1})|J_m v_m|^{\sigma+1}$ es un real positivo. Por otro lado,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_m(t)|^2 + G(J_m v_m(t))\, dx = 2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} v_{mt}\overline{\Delta v_m + \lambda J_m g J_m v_m}\, dx = 0,$$

lo que demuestra el teorema en el caso en que $v_0 \in H^2$. Del lema anterior y el buen planteamiento del problema (4.2), se sigue el teorema para cualquier $v_0 \in H^1$. □

Teorema 4.0.30. *Supongamos que σ satisface las hipótesis del Teorema 3.0.24. Sean $v_m \in C([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n))$ soluciones del problema de Cauchy* (4.2)*, para cada $m > 0$, y sea $v \in C([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n))$ solución del problema de Cauchy* (2.1)*. Entonces, v satisface las leyes de conservación* (4.1) *y v_m converge uniformemente en $H^1(\mathbb{R}^n)$ a v en el intervalo $[-T,T]$.*

Demostración. Obsérvese primero que, del buen planteamiento de los problemas de Cauchy, basta demostrar el teorema para T suficientemente pequeño. Supongamos que a y T son como en el Teorema 3.0.24. Luego de las observaciones que siguen al Teorema 4.0.27 se sigue que $\{v_m | m > 0\}$ forma una familia de funciones equicontinua y uniformemente acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, como $H^1(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert, para toda sucesión en esta familia, existe una subsucesión uniformemente convergente en la topología débil allí. Supongamos que v_m no converge uniformente en L^2 a v. Eso quiere decir que existe una sucesión m_k y $\epsilon > 0$ tal que $\lim_{k\to\infty} m_k = 0$ y $\sup_{[-T,T]} \|v_{m_k} - v\|_2 \geq \epsilon$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que v_{m_k} es uniformemente convergente en la topología débil de H^1. Sea $\tilde{v}$ dicho límite. Teniendo en cuenta que, gracias a la desigualdad de Holder, al Teorema 1.0.6 y ya que $\sigma < \dfrac{4}{n-2}$,

$$\|g(u) - g(v)\|_{p_1'} \leq 2a^{2\sigma}\|u - v\|_p,$$

donde p y p_1 son como en la demostración del Teorema 3.0.24, entonces $J_{m_k} g(J_{m_k} v_{m_k})$ también es equicontinua y uniformemente acotada en $L^{p_1'}$. Así que, podemos suponer que $J_{m_k} g(J_{m_k} v_{m_k})$ converge débil, y uniformemente en $[-T, T]$, a alguna f en $L^{p_1'}$ débilmente continua. Luego, $\tilde{v}$ es débilmente derivable en H^{-1} y su derivada es $i\Delta\tilde{v} + i\lambda f$. Más aún, como $i\Delta\tilde{v} + i\lambda f$ es uniformemente acotada y débilmente continua, es fuertemente integrable y $\tilde{v}$ es absolutamente continua con derivada en casi toda parte igual a $i\Delta\tilde{v} + i\lambda f$.

Veamos ahora que, para todo t, $f(t)\overline{\tilde{v}(t)}$ es real en casi toda parte. Para cualquier conjunto acotado B tenemos que

$$\begin{aligned}\int_B f(t)\overline{\tilde{v}(t)}\,dx = &\int_B (f(t) - J_{m_k} g J_{m_k} v_{m_k})\overline{\tilde{v}(t)}\,dx + \\ &+ \int_B J_{m_k} g J_{m_k} v_{m_k} \overline{(\tilde{v}(t) - v_{m_k}(t))}\,dx + \\ &+ \int_B J_{m_k} g J_{m_k} v_{m_k} \overline{v_{m_k}(t)}\,dx.\end{aligned}$$

Claramente el primer término es una sucesión convergente a 0. Del teorema de Rellich Kondrachov, tenemos que $\tilde{v}(t) - v_{m_k}(t) \to 0$ en $L^p(B)$, por lo que el segundo término converge a 0. Luego, el tercer término, que es real para todo k, converge a un número real. Así pues, $\int_B f(t)\overline{\tilde{v}(t)}\,dx$ es real, para todo B acotado.

Como

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{v}(t)\|^2 = 2\mathrm{Re}\,\tilde{v}_t(\overline{\tilde{v}}) = 2\mathrm{Re}(i\Delta\tilde{v}(\tilde{v}) + i\lambda \int_{\mathbb{R}^n} f\overline{\tilde{v}}\,dx) = 2\mathrm{Re}\, i \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\tilde{v}|^2 = 0.$$

$\|\tilde{v}(t)\|_2 = \|v_0\|_2$, para todo t. Ya que $\|v_m(t)\|_2 = \|v_0\|_2$, para todo m y todo t, esta sucesión resulta uniformemente convergente en la norma de L^2 a $\tilde{v}$

y, en general, en todo L^p que satisface las condiciones del Lema de Sobolev. Del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y ya que v_{m_k} satisface (4.3), para cada k, se sigue que $\tilde{v}$ satisface la ecuación integral. Luego $\tilde{v} = v$. Esto es una contradicción. Luego, v_m converge uniformemente a v en L^2 (y en L^p tales que H^1 contenido continuamente en estos espacios) cuando $m \to 0$. Del Lema 4.0.28, el teorema anterior y la semicontinuidad inferior de la norma en la topología débil se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(t)|^2 + G(v(t))\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 + G(v_0)\, dx.$$

Sea $w(t) = v(\tau + t)$. w es solución de la ecuación en (2.1) con condición inicial $v(\tau)$. Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w(t)|^2 + G(w(t))\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(\tau)|^2 + G(v(\tau))\, dx.$$

Para τ suficientemente pequeño,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(\tau)|^2 + G(v(\tau))\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 + G(v_0)\, dx,$$

en otras palabras

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(t)|^2 + G(v(t))\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 + G(v_0)\, dx,$$

para t suficientemente pequeño. Un argumento simple de continuidad se sigue que esta ley se cumple para todo t.

En particular, tenemos que

$$\lim_{m \to 0} \|v_m(t)\|_{H^1} = \|v(t)\|_{H^1},$$

con límite uniforme. De aquí se sigue el teorema. $\square$

Ahora es muy fácil ver el buen planteamiento global.

Teorema 4.0.31. 1. *Para $n \leq 3$ y $\sigma \leq \min\{3, \frac{4}{n}\}$, el problema de Cauchy* (2.1) *es globalmente bien planteado en $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

2. *Para $n \leq 6$ y σ como en el teorema 3.0.24, el problema de Cauchy* (2.1) *es globalmente bien planteado en $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Como, para $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\|v(t)\|_2 = \|v_0\|_2,$$

donde v es solución de (2.1), y éste es localmente bien planteado en L^2, entonces para cualquier $v_0 \in L^2$,

$$\|v(t)\|_2 = \|v_0\|_2,$$

para v la única solución de (2.1). Por lo tanto, este es globalmente bien planteado en L^2.

Si $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y v es solución de (2.1) en H^1,

$$\|v(t)\|_2 = \|v_0\|_2$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(t)|^2 + G(v(t))\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 + G(v_0)\, dx,$$

para todo t en el intervalo de existencia de v. Si $\lambda \geq 0$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(t)|^2\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 + G(v_0)\, dx,$$

si $\lambda < 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(t)|^2\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 + G(v_0) + G(v)\, dx \leq C + C_1\|v\|_p^2,$$

donde $p = r(\sigma + 1)$. De la desigualdad de Gagliardo-Niremberg,

$$\|\nabla v\|_2^2 \leq C + C_1\|v_0\|^{2\theta}\|\nabla v\|^{2(1-\theta)},$$

para $0 < \theta \leq 1$. Luego, $\|v\|_{H^1}$ permanece acotada en cualquier intervalo donde esta exista. Así que el problema (2.1) es globalmente bien planteado en H^1. $\square$

Bibliografía

[1] Haïm Brezis, *Analisis funcional, teoria y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1984.

[2] Thierry Cazenave , *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. 323 pp.

[3] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector measures*. Math. Surveys, no. 15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977, xiii + 322 pp

[4] Yanping Cao, Ziad H Musslimani and Edriss S Titi *Nonlinear Schrödinger-Helmholtz equation as numerical regularizarion of the nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinearity Analysis, 2008

[5] Gerald B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*,Princeton University Press, 1995.

[6] Rafael Iorio, Valeria Magalhães *Fourier Analysis and partial diferential equations*, Cambrigge University Press, 2001

[7] Tosio Kato *On nonlinear Schrödinger equations.* Annales de l'institut Henri Poincaré (A) Physique théorique, 46 no. 1 (1987), p. 113-129

[8] Linares and Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Spriger Verlag, 2009