IV. UNA PRESENTACION SENCILLA PARA ESTUDIANTES DE INGENIERIA

Analizando el desarrollo histórico de las funciones logarítmica y exponencial, así como su importancia actual para interpretar y resolver numerosos problemas en las distintas ramas de la ingeniería, se quiere ahora presentar estas funciones en forma tal que se compaginen tanto el aspecto histórico como las aplicaciones modernas y que a la vez sea una presentación sencilla.

Para este fin, de cada una de las presentaciones anteriores, se tomarán aquellos rasgos que permitan esta presentación sencilla, dirigida al estudiante de ingeniería.

A. El invento de los Logaritmos.

Los logaritmos fueron inventados por Napier, un noble escocés, quien publicó sus tablas en 1614. Otro matemático, Bürgi, desarrolló los logaritmos en forma independiente y casi simultánea.

El propósito de las tablas de logaritmos fue reducir operaciones "difíciles", como multiplicaciones, a otras más fáciles, como sumas.

Antes de que se inventaran los logaritmos, se usaban las funciones trigonométricas con este fin. La clave del método son las identidades:

$$\text{Cos } (\alpha + \beta) = \text{Cos}\alpha \ \text{Cos}\beta - \text{Sen}\alpha \ \text{Sen}\beta$$

$$\text{Cos } (\alpha - \beta) = \text{Cos}\alpha \ \text{Cos}\beta + \text{Sen}\alpha \ \text{Sen}\beta$$

de las que se deriva:

$$2 \text{ Cos } \alpha \ \text{Cos}\beta = \text{Cos } (\alpha + \beta) + \text{Cos } (\alpha - \beta)$$

Si se quiere, mediante esta identidad, multiplicar dos números a y b, se procede así:

Supongamos primero que $0 < a < 1$

$0 < b < 1$

Se halla en las tablas números α y β tales que $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$.

Se calcula $\alpha + \beta$ y $\alpha - \beta$

Se busca en las tablas valores de $\cos (\alpha + \beta)$ y $\cos (\alpha - \beta)$ y se promedian. Este es el producto deseado:

$$ab = \cos\alpha \cos\beta$$

Las tablas logarítmicas permiten realizar no sólo multiplicaciones sino también divisiones. Durante más de tres siglos todos los cálculos complicados se realizaban con logaritmos. Casi no existió un descubrimiento científico o avence tecnológico que no usara este invento en forma directa o indirecta.

Recientemente, el uso de computadoras modernas ha hecho que las tablas logarítmicas resulten obsoletas.

Sin embargo, la obra de Napier sigue teniendo vigencia, por las importantes funciones que introdujo, la logarítmica y la exponencial, funciones que sirven para interpretar y resolver numerosos problemas en las más diversas ramas de la ciencia.

B. Construcción de la función.

Se quiere asignar a cada número x, otro número, su logaritmo, en tal forma que si se quiere multiplicar dos números, esta operación sea correspondiente a sumar sus logaritmos. Como se va a trabajar con sumas, tomemos valores positivos para x.

Sea $L(x)$ el logaritmo de x. Se pide que la función $x \longrightarrow L(x)$ verifique $L(x\,y) = L(x) + L(y)$ (1)

Aplicando esta función a $x = y = 1$ resulta

$$L(1.1) = L(1) = 2\,L(1)$$

lo cual sólo se realiza si $L(1) = 0$.

Aún cuando no sabemos si esta función existe, supongamos que sí y que además es derivable, o sea, $L'(x)$ existe. Por definición:

$$L'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{L(x(1+\frac{h}{x})) - L(x)}{h} \qquad x > 0$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{L(x) + L(1+\frac{h}{x}) - L(x)}{h} \qquad \text{por } (1)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{L(1+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \frac{L(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{L(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \quad \text{ya que } \frac{1}{x} \text{ es fijo}$$

Si suponemos que la derivada existe entonces el límite anterior también existe, denotemos por c este límite, o sea

$$\lim_{k \to 0} \frac{L(1+k)}{k} = c \quad \text{en donde } k = \frac{h}{x}$$

Y por tanto:

$$L'(x) = \frac{c}{x}$$

Se tiene entonces que si existe una función derivable, $x \longrightarrow L(x)$ que satisfaga la ecuación (1), su derivada será $\frac{c}{x}$. Lo anterior se cumple para cualquier valor de c. Si una función L(x) cumple la ecuación (1) entonces la ecuación $\mathcal{L}(x) = k(L(x))$ también la satisface ya que $\mathcal{L}(x\,y) = k\,L(x\,y) = k(L(x) + L(y)) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y)$. Si $L'(x) = \frac{c}{x}$ entonces $\mathcal{L}'(x) = \frac{kc}{x}$.

La elección más sencilla y natural de c es 1. Por lo tanto la función $x \longrightarrow L(x)$ con $L(1) = 0$ y $L'(x) = \frac{1}{x}$ se llama "logaritmo natural". Esta función se abrevia por ln en los libros de ingeniería y por log en los de matemática o científicos. Se utilizará la primera notación.

Aun cuando el trabajo de Napier es anterior al desarrollo del cálculo diferencial, da la impresión de que él realizó un trabajo similar al anteriormente expuesto, aunque con diferente terminología. Reconoció que la propiedad (1) de la función implicaba que la tasa de variación de $\ln(x)$ es proporcional a $\frac{1}{x}$ y eligió el factor de proporcionalidad 1. Sus tablas de 1614 son tablas de logaritmos naturales.

C. Definición formal de la función logaritmo natural.

Se puede ahora definir la función logaritmo natural de una manera más adecuada para su manejo dentro del marco de desarrollo actual de las matemáticas y de la importancia intrínseca que ha alcanzado la función como tal y no ya como herramienta para el cálculo de operaciones.

La función $x \longrightarrow \ln x$ es la función que satisface las condiciones $\ln(1) = 0$, $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$

El teorema fundamental del cálculo garantiza la existencia y unicidad de dicha función y se tiene la fórmula explícita:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \text{para} \quad x > 0$$

El gráfico de $y = \frac{1}{x}$ para $x > 0$ se muestra en la figura (1). El logaritmo natural de un número mayor que cero es el área debajo de esa curva, tal como se indica en dicha figura. El gráfico de ln x se ilustra en la figura (2).

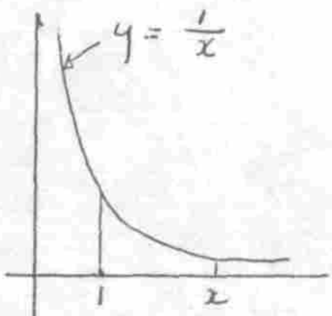

Fig. (1)

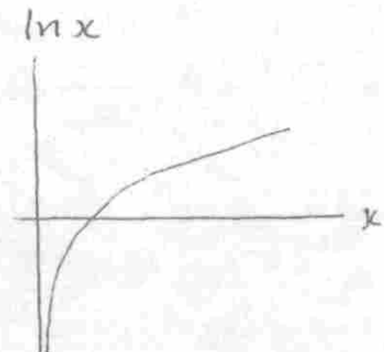

Fig. (2)

Se debe verificar ahora que la función logarítmica tiene la gráfica anterior y además que tiene la propiedad expresada en la ecuación (1), o sea que el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores.

<u>Teorema</u>: La función $\ln : R^+ \longrightarrow R$ es continua, creciente y cóncava hacia abajo. Satisface además la ecuación

$$\ln (x\,y) = \ln x + \ln y \qquad (1)$$

y tiene las propiedades adicionales :

a) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

b) $\ln x^r = r \ln x$ para todo racional r

c) $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

d) $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

dm:

La función ln x es continua para $x > 0$ porque tiene derivada, $\frac{1}{x}$; creciente porque esa derivada es positiva y cóncava hacia abajo porque la segunda derivada, $-\frac{1}{x^2}$ es negativa.

Para demostrar que cumple la ecuación (1) se hará uso de dos razonamientos, para resaltar respectivamente dos hechos importantes de la función, cuales son, su derivada es $\frac{1}{x}$ y su definción formal se hace con base en un integral.

Razonamiento I : Para y fijo sea $f(x) = \ln(x\,y) - \ln x - \ln y$, se debe verificar que $f(x) \equiv 0$.

i) $f(1) = \ln y - \ln 1 - \ln y = -\ln 1 = 0.$

bastará verificar que f(x) es constante, o sea $f'(x) \equiv 0$.

ii) Como y es constante, se tiene

$$f'(x) = \frac{d\,(\ln(x\,y)}{d(x\,y)} \cdot \frac{d\,(x\,y)}{dx} - \frac{d\,(\ln x)}{dx} - \frac{d\,(\ln y)}{dx}$$

$$= \frac{1}{xy}y - \frac{1}{x} - 0 = 0$$

como se esperaba.

Razonamiento II :

$$\ln(x\,y) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{x} \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}$$

En la segunda integral de la derecha se sustituye $t = x\,s$ y por tanto $dt = x\,ds$; $s = 1$ para $t = x$, $s = y$ para $t = xy$, y se obtiene:

$$\int_1^{x} \frac{dt}{t} + \int_1^{y} x\,\frac{ds}{xs} = \int_1^{x} \frac{dt}{t} + \int_1^{y} \frac{ds}{s} = \ln x + \ln y$$

como se esperaba.

Demostremos la propiedad a) del teorema:

para $y = \frac{1}{x}$ se tiene:

$\ln(x \cdot \frac{1}{x}) = \ln 1 = 0 = \ln x + \ln\frac{1}{x}$ y por tanto $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

pero $\ln\frac{x}{y} = \ln(x \cdot \frac{1}{y}) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y$

Para obtener b) basta recordar que si n es entero positivo

$$\ln x^n = \ln \overbrace{(x.x\ldots x)}^{n\text{ veces}} = \overbrace{\ln x + \ln x + \ldots + \ln x}^{n\text{ veces}} = n \ln x$$

Esto vale para $n = 0$ ya que $x^0 = 1$ y $\ln(1) = 0$.

Si n es entero negativo será $n = -m$ con m natural y

$$\ln x^n = \ln x^{-m} = \ln \frac{1}{x^m} = -\ln x^m = -m \ln x$$
$$= n \ln x$$

o sea que la propiedad b) se cumple para todos los enteros.

Veamos ahora que se cumple para los racionales:

Como $x = (\sqrt[n]{x})^n$, n entero positivo

$$\ln x = \ln (\sqrt[n]{x})^n = n \ln \sqrt[n]{x}$$

o sea $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$

Y en general para p natural y q entero se tiene :

$$\ln x^{q/p} = \ln (x^{1/p})^q = q \ln x^{1/p} = q \ln \sqrt[p]{x}$$
$$= q \left(\frac{1}{p} \ln x \right) = \frac{q}{p} \ln x$$

Para demostrar c) o sea $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, veamos que debido a que lnx es una función estrictamente creciente y $\ln(1) = 0$, se tiene que $\ln x > 0$ sii $x > 1$. En particular $\ln 2 > 0$ y para $x > 2^n$ se tiene

$$\ln x > \ln (2^n) = n \ln 2$$

$$\lim_{n \to \infty} \ln x \geq \lim_{n \to \infty} n \ln 2 = +\infty$$

y para verificar d), o sea $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, observemos que

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x} \quad \text{pero} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{luego} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\lim_{x \to 0^+} \ln \frac{1}{x} = -\infty$$

D. <u>El número e.</u>

De acuerdo con el teorema anterior, la función $\ln x$ es continua y toma valores arbitrariamente grandes negativos y positivos conforme x varía desde valores muy cercanos a cero positivos hasta valores positivos arbitrariamente grandes. Es decir, el rango de $\ln x$ es $(-\infty, +\infty)$. Luego, por el teorema del valor intermedio, se garantiza que para todo $a \in R$ existe un número positivo x tal que $\ln x = a$ y ese x es el único debido a que $\ln x$ es estrictamente creciente. En particular existe un número e tal que

$$\ln(e) = 1$$

Se ha establecido que e es irracional y que su valor aproximado es

$$e = 2{,}718\ldots$$

E. <u>Logaritmos en diferentes bases.</u>

Se vió que conocida una función que satisfaga la ecuación

$$f(x\,y) = f(x) + f(y)$$

cualquier otra función g, $g = k f$, k constante, también la satisface. Con base en esta propiedad se pueden definir logaritmos en base a, $a > 0$ y $a \neq 1$:

Si x es un número positivo, $\log_a x$ se lee logaritmo en base a de x y es el número

$$\log_a (x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Con esta definición se tiene :

1) $\log_a 1 = 0$

2) $\log_a (a) = \frac{\ln (a)}{\ln (a)} = 1$

3) $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$

4) $\log_a (x y) = \log_a x + \log_a y$

5) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

6) $\log_a x^r = r \log_a x$ para r racional.

7) Para cada número real u, existe un único número positivo x tal que $\log_a x = u$.

Como $\ln e = 1$, se tiene $\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

por lo que e se llama base de logaritmos naturales.

F. La función exponencial.

La relación $a^r = r \ln a$ se demostró para r racional. Es también válida para r irracional? Se cumple para expresiones como $2^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ln 2$? Para que la pregunta tenga sentido definamos lo que significa a^r, r real.

Definición: Para todo $a > 0$ y para todo $x \in R$ el símbolo a^x indica el único número cuyo logaritmo natural es $x \ln a$. Por lo tanto

$$\ln a^x = x \ln a \quad \text{para todo } x \in R \qquad (a)$$

Ya vimos que esto concuerda con a^r, si r es racional.

La definición es correcta porque ese número existe por el teorema del valor intermedio.

Para $a = e$ la relación es :

$$\ln e^x = x \quad \text{porque } \ln e = 1 \qquad (b)$$

Sea u un número positivo. Sabemos que existe un $x \in R$ tal que $x = \ln u$. Aplicando (b) se tiene:

$$x = \ln u = \ln e^{\ln u}$$

Como dos números diferentes no pueden tener el mismo logaritmo, porque $\ln x$ es creciente, se tiene :

$$u = e^{\ln u} \qquad (c)$$

También se tiene por (a) que :

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Además $\log_a (a^x) = x$ (d) porque

$$\log_a (a^x) = \frac{\ln a^x}{\ln a} = \frac{x \ln a}{\ln a} = x$$

Y también

$$a^{\log_a u} = u \qquad \text{(e)} \qquad \text{porque}$$

ambos tienen igual logaritmo en base a, ya que

$$\log_a (a^{\log_a u}) = \log_a u, \log_a (a) = \log_a u$$

porque $\log_a (a) = 1$.

Como resumen de (b), (c) y (e) se tiene el siguiente resultado:

Para $a > 0$, $a \neq 1$, a fijo, las funciones

$$\log_a (u) : R^+ \longrightarrow R$$
$$u \longrightarrow \log_a u$$

$$a^x : R \longrightarrow R^+$$
$$x \longrightarrow a^x$$

son inversas la una de la otra.

En particular lo son las funciones:

$$\ln(u) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longrightarrow \ln u$$

$$e^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longrightarrow e^x$$

O sea que se retoma aquí la definición de bachillerato de que el logaritmo de un número en base a, es la potencia a la que se debe elevar a para obtener ese número.

G. Leyes de exponentes.

Son fáciles de comprobar, demostrando que su logaritmo es el mismo. Estas son:

1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

2) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3) $(a^x)^y = a^{xy}$

4) $(ab)^x = a^x b^x$

Veamos la demostración de 1) como ejemplo:

$$\ln(a^{x+y}) = (x+y)\ln a = x \ln a + x \ln y = \ln a^x + \ln a^y$$

H. <u>La derivada de las funciones exponenciales</u>.

Veamos que $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ y que

para $a > 0$, $\frac{d}{dx} a^x = (\ln a)\, a^x$

Usando el teorema de derivación de funciones inversas:

$$e^x = u \iff x = \ln u$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}} = \frac{1}{\frac{d(\ln u)}{du}} = \frac{1}{\frac{1}{u}} = u = e^x$$

Usando ahora la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d\, e^{x \ln a}}{dx} = \frac{d\,(e^{x \ln a})}{d(x \ln a)} \cdot \frac{d(x \ln a)}{dx}$$

$$= e^{x \ln a} \cdot (\ln a) = (\ln a)\, a^x$$

como se enunció.