

Aproximación del operador Laplace-Beltrami por mallas y nubes de puntos.

David Lambraño Jaramillo

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Director de Tesis

Edgar Arturo Ramos Navarrete

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

20 de octubre de 2012

Índice general

1. Conceptos preliminares.	5
1.1. Superficies Poliédricas y suaves	5
1.2. Espacios L^p en superficies	9
1.3. Diferenciación en M	10
1.3.1. Gradiente	11
1.3.2. Derivada covariante	11
1.3.3. Divergencia, Laplaciano y Hessiano	14
1.4. Espacios de Sobolev	14
1.5. Funciones Lineales por tramos	15
1.6. Geodésicas y la función exponencial	16
1.7. Operador Laplace-Beltrami	17
2. Tensor de Distorsión Métrica	19
2.1. Operador de forma	19
2.2. Diferencial de la función proyección	20
2.3. Representación matricial	22
2.4. Convergencia de Normal y distancia	25
2.5. Convergencia del tensor de distorsión	27
2.6. Cambio de variable	29
2.7. Estimativos de error entre u y \hat{u}_h	31
3. Aproximación del operador Laplace-Beltrami	33
3.1. Funciones r -locales	33
3.2. Estimativo de error entre Δ y $\hat{\Delta}_h$	35
3.3. Aproximación del operador Laplace-Beltrami	36
3.4. Operadores Laplace-Beltrami discretos	40
3.5. Representación matricial	41

A. Resultados auxiliares	45
A.1. Norma de operadores	45
A.2. Cálculos auxiliares	48

Introducción

En áreas aplicadas es común aproximar superficies suaves por superficies *poliédricas* o *mallas* las cuales se forman pegando polígonos planos (*elementos*) por sus aristas. El caso particular de mallas triangulares es particularmente importante. En esas aplicaciones es importante estimar propiedades diferenciales de la superficie aproximada a partir de la superficie poliédrica y entonces es deseable tener garantías de convergencia a medida que la densidad de los puntos en la superficie poliédrica aumenta de tal manera que el tamaño de los elementos de la malla tiende a 0.

Un ejemplo básico que ilustra las dificultades en obtener convergencia cuando el tamaño de la malla tiende a cero es el caso de estimar el vector normal y el área. La *lámpara* de Schwartz (ver figura) es un ejemplo de una superficie poliédrica cuyos vértices están sobre una superficie suave cilíndrica con altura y circunferencia unidad, para la cual tanto el vector normal como el área estimados no convergen a los valores correspondientes en la superficie suave. Cada uno de los $2n^4$ triángulos isósceles resultantes tiene base de longitud $\approx \frac{1}{n}$ y altura de longitud $\approx \frac{\pi}{4n^2}$, lo que resulta en un área total $\approx \frac{\pi n}{4}$ que tiende a infinito cuando n tiende a infinito. También se observa que el vector normal a estos triángulos isósceles forma un ángulo con el vector normal a la superficie cilíndrica que tiende a $\pi/2$ a medida que n tiende a infinito. Esta dificultad se corrige requiriendo que los triángulos de la malla tengan una razón de aspecto acotada.

En esta tesis estamos interesados en la estimación del operador Laplace-Beltrami. Este operador es la extensión natural del operador de Laplace de un espacio Euclídeo al caso de una superficie suave M [11, 17]. Se define como la divergencia del gradiente,

$$\Delta_M f = \operatorname{div}_M(\nabla_M f)$$

donde los operadores div_M y ∇_M son el operador divergencia y gradiente sobre M .

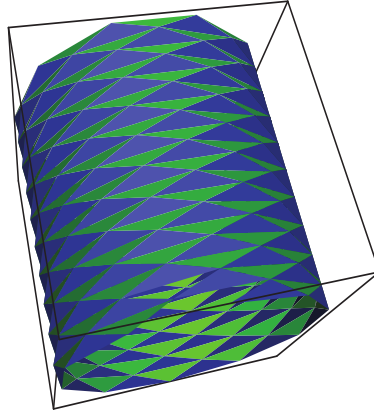


Figura 1: La linterna de Schwartz se construye sobre un cilindro de altura y circunferencia unidad. Se disponen $n^4 + n = n(n^3 + 1)$ puntos en $n^3 + 1$ circunferencias con distancia $1/n$ entre ellas a lo largo del cilindro, y de tal manera que en cada circunferencia se tienen n puntos uniformemente espaciados como se ilustra en la figura. Sobre estos puntos se construye una triangulación, la cual consta de $2n^4$ triángulos isósceles.

En \mathbb{R}^k , este operador es igual a

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Una versión discreta de este operador para superficies en \mathbb{R}^3 es un elemento importante en varias aplicaciones de procesamiento geométrico [8], donde la variedad sólo se conoce de forma aproximada como una malla que aproxima la superficie, y también en el caso en que sólo se tiene un subconjunto finito S de *muestras* tomadas de M , lo que suele llamarse una *nube de puntos*. En ambos casos, la función f sobre la que se quiere estimar el operador sólo se conoce a través del conjunto finito de valores $f(p)$, $p \in S$.

El interés en una versión discreta del operador Laplace-Beltrami aparece también en el área de *geometría diferencial discreta* [5], en la cual se busca definir diferentes cantidades geométricas como curvatura, originalmente definidas sobre superficies suaves, en superficies poliédricas. En ambos casos, se espera que existan resultados de convergencia al caso suave a medida que la nube de puntos o malla es más densa en M . Esto se puede medir con un parámetro h que mide las distancias entre las muestras o el tamaño de los elementos de la malla.

En el plano, para una malla regular de cuadrados de lado h , se obtiene una definición

natural por medio de las segundas diferencias finitas a lo largo de los ejes coordenados; para un vértice x , el operador discreto L_h evaluado para la función f es

$$L_h f(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{p \in N(x)} (f(p) - f(x))$$

donde $N(x)$ es el conjunto de 4 vecinos de x en la malla. La extensión a una nube de puntos o a una malla que aproximan una superficie M en \mathbb{R}^3 no es única y especialmente se encuentra dificultad con sus propiedades de convergencia. Si K es una malla para M , generalizando L_h arriba se obtiene, para un vértice x , la aproximación:

$$L_{K,h} f(x) = \sum_{p \in N_K(x)} w_{p,x} \cdot (f(p) - f(x)) \quad (1)$$

donde $N_K(x)$ es el conjunto de vecinos de x en K , y $w_{p,x}$ es un peso para la arista px . Una expresión más general podría incluir en la suma términos correspondientes a las caras de dos dimensiones incidentes a x . Hasta hace poco, aunque se habían propuesto varias discretizaciones del operador Laplace-Beltrami, para ninguna de ellas se había obtenido una garantía de convergencia puntual. En particular, en el método de la *cotangente* [6] los coeficientes $w_{p,x}$ dados por

$$w_{p,x} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cot \alpha_{p,x} + \cot \alpha_{x,p}) & \text{si } px \text{ es una arista interior} \\ \cot \alpha_{p,x} & \text{si } px \text{ es una arista de borde} \end{cases} \quad (2)$$

donde $\alpha_{p,x}$ y $\alpha_{x,p}$ son los ángulos opuestos a una arista px interna, o uno solo de ellos en caso de ser una arista px de borde.

Recientemente, Belkin y Niyogi [3] describieron un método para el caso de nubes de puntos para el cual obtienen convergencia puntual y, basados en éste, posteriormente Belkin, Sun y Wang [4] propusieron un esquema de aproximación que converge puntualmente para una malla arbitraria que aproxima la superficie suave M en distancia Hausdorff y normal. El operador que proponen se calcula, para un punto x en la malla, con la fórmula

$$L_{K,h} f(x) = \frac{1}{4\pi h^2} \sum_{\tau \in T(K)} \frac{\text{Area}(\tau)}{|V(\tau)|} \sum_{p \in V(\tau)} \exp\left(-\frac{\|p-x\|^2}{4h}\right) \cdot (f(p) - f(x)) \quad (3)$$

donde $T(K)$ es el conjunto de 2-caras (polígonos) en K , y $V(\tau)$ es el conjunto de vértices de τ . Es importante que mientras en métodos anteriores, $L_{K,h} f(x)$ depende

sólo de los valores de $f(x)$ en los vértices vecinos, en estos nuevos métodos depende de otros vértices más lejanos con pesos decrecientes con la función $\exp(-\|p-x\|^2/4h)$, lo que es esencialmente una convolución con un *kernel* Gaussiano.

La idea de convolución con un kernel fue retomada en un trabajo de Hildebrandt y Polthier [14] quienes, continuando su investigación dentro del marco de la geometría diferencial discreta, extienden el método de la cotangente para obtener un método con convergencia puntual.

Sean M una superficie suave y M_h una superficie poliédrica que aproxima M . Además, sea u una función $C^2(M)$ y Δu su operador Laplace-Beltrami en M . Por una generalización de integración por partes se tiene que (si el soporte de φ está contenido en el interior de M)

$$\int_M \Delta u \varphi \, dvol = - \int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g \, dvol. \quad (4)$$

Esta identidad se usa para definir un operador Laplace-Beltrami débil restringiendo el espacio de funciones de *prueba* φ . Sea u_h la interpolación lineal de u en M_h determinada por los valores de u en los vértices, y ∇ y ∇_h los gradientes respectivos en M y M_h . Siguiendo la idea de [4], el método de [14] consiste en aproximar $\Delta u(x)$ en un vértice x de M_h por

$$\Delta u(x) \approx \langle \Delta_h u_h | \varphi_x \rangle = - \int_{M_h} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h \varphi_x \rangle_{M_h} \, dvol_h, \quad (5)$$

donde φ_x es un kernel con soporte concentrado alrededor de x .

En esta tesis estudiamos los detalles del método de Hildebrandt y Polthier, incluyendo las herramientas necesarias para probar la convergencia del método.

Contenido. El desarrollo de esta tesis está distribuido de la siguiente manera. En el capítulo 1 se presentan conceptos preliminares, en el capítulo 2 se define el tensor de distorsión métrica y algunas propiedades que juegan un papel importante en el análisis del método de aproximación, y en el capítulo 3 se describe el método de aproximación y su análisis. En el apéndice se presentan algunos resultados auxiliares.

Capítulo 1

Conceptos preliminares.

El objetivo de este capítulo es introducir los conceptos y resultados de diversas temáticas que se necesitarán para la comprensión de los resultados de aproximación del operador Laplace-Beltrami.

1.1. Superficies Poliédricas y suaves

Definición 1.1. Una superficie poliédrica o superficie cónica Euclídea M_h es el espacio métrico obtenido al unir triángulos planos, denotados T_h , isométricamente a lo largo de sus aristas. Aquí, sólo consideraremos *triangulaciones finitas*, las cuales son homeomorfas a una 2-variedad¹ compacta, conexa y orientable.

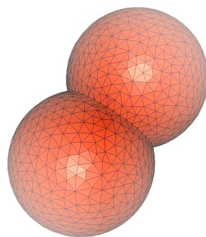


Figura 1.1: Bolas trianguladas

¹Usamos la palabra *variedad* en lugar de *manifold* por el contexto.

Definición 1.2. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow M_h$ es una curva continua, entonces la *longitud* de γ es el supremo sobre todas las particiones *admisibles*, $Z = \{a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b\}$, de $[a, b]$:

$$l(\gamma) = \sup_Z \sum_{i=1}^n d_{\mathcal{E}^2}(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)).$$

Donde una partición es *admisible* si $\gamma(t_i)$ y $\gamma(t_{i+1})$ están en el mismo triángulo T_h (posiblemente en ∂T_h). Aquí, $d_{\mathcal{E}^2}$ denota la distancia Euclídea dentro de cada triángulo. La curva es llamada *rectificable* si $l(\gamma) < \infty$.

Definición 1.3. El conjunto $C_\theta := \{(r, \varphi) | 0 \leq r; \varphi \in \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}\} / \sim$, junto con la métrica (infinitesimal)

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} \quad (1.1)$$

es llamada una *métrica cónica* con ángulo cónico θ . Aquí, $(0, \varphi_1) \sim (0, \varphi_2)$ para cualquier par (φ_1, φ_2) . Un *punto cónico* es la clase de equivalencia que consta de todos los puntos $(0, \varphi) \in C_\theta$. Un punto cónico es llamado *singular* si el ángulo cónico es diferente de 2π .

Denotaremos una superficie cónica dotada de su métrica cónica Euclídea por

$$(M_h, g_{M_h}).$$

Definición 1.4. Definimos la distancia entre dos puntos x, y en M_h como

$$d_{M_h}(x, y) := \inf_{\gamma} l(\gamma),$$

donde $l(\gamma)$ denota la longitud de la curva γ y el ínfimo es tomado sobre todas las curvas rectificables en \mathbb{R}^3 que unen x con y y cuya gráfica está contenida en M_h .

Con esta métrica y dado que M_h es compacto, una versión del Teorema de Hopf-Rinow (ver [13]) para superficies poliédricas garantiza que para cualquier par de puntos en M_h existe una geodésica minimizante que los une (Ver definición 1.27). Denotaremos por *dvol* a la forma de volumen de la superficie cónica Euclídea (M_h, g_{M_h}) . Esta forma de volumen está definida (y es suave) por fuera de las singularidades cónicas e induce una medida regular de Borel sobre M_h . Denotaremos por $\mathcal{X}(M_h)$ al espacio de campos vectoriales *dvol*-medibles definidos en M_h .

Notación 1.5. Para un triángulo T_h de una superficie poliédrica M_h , sea $r_{circ}(T_h)$ el circunradio de T_h y sea $r_{in}(T_h)$ el radio interno de T_h . Definimos el *tamaño de malla* h y la *regularidad de forma* ρ para M_h como

$$h = \max_{T_h \in M_h} r_{circ}(T_h) \quad y \quad \rho = \max_{T_h \in M_h} \frac{r_{circ}(T_h)}{r_{in}(T_h)}.$$



Observación 1.6. Supondremos que tanto la superficie poliédrica M_h como la superficie suave M son compactas, conexas y orientadas. Además, supondremos que tanto M como M_h son superficies **sin frontera**.

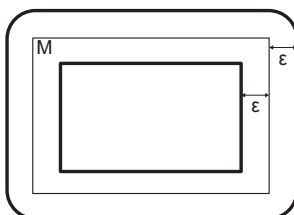


Figura 1.2: El ϵ -tubo de M es el conjunto de todos los puntos que están entre las dos líneas resaltadas.

Definición 1.7. La función distancia $\delta_M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ está definida por

$$\delta_M(y) = \inf_{x \in M} \|x - y\|_{\mathbb{R}^3}.$$

Observación 1.8. Para $y \in \mathbb{R}^3$ fijo, existe al menos un punto $x \in M$ tal que $\delta_M(y) = \|x - y\|_{\mathbb{R}^3}$, pues M es compacto. Definamos

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) := \|x - y\|^2.$$

Así ²,

$$df = 2 \langle x - y, \cdot \rangle.$$

Por tanto, si $x \in M$ es uno de tales puntos que realiza el ínfimo se tiene que

$$df(X) = 2 \langle x - y, X \rangle = 0,$$

para todo $X \in T_x M$; de donde se concluye que $x - y$ está en la recta normal a M en x .

Definición 1.9. (Función proyección) Como M es compacto, para cada $y \in \mathbb{R}^3$ existe al menos un punto $x \in M$ tal que $\delta_M(y) = \|x - y\|_{\mathbb{R}^3}$. Este x es llamado una *proyección ortogonal* de y sobre M . A pesar de que dicho x no necesariamente es único, existe una vecindad U_M de M en \mathbb{R}^3 tal que todo punto de U_M tiene una única proyección ortogonal sobre M . La función inducida $\Pi : U_M \rightarrow M$ es suave. Una prueba de este hecho aparece en [12]. A la función $\Pi : U_M \rightarrow M$ la llamaremos la *función proyección en M* .

Definición 1.10. El *alcance* de una superficie suave M es el supremo de todos los números positivos ϵ tales que la proyección ortogonal sobre M es única en el ϵ -tubo abierto alrededor de M , donde un ϵ -tubo abierto alrededor de M es el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^3$ que cumplen $\delta_M(x) < \epsilon$.

Observación 1.11. Localmente, el *alcance* de M está acotado de la siguiente manera³

$$\text{alcance}(M) \leq \inf_{x \in M} \frac{1}{\kappa_{\max}(x)}, \quad (1.2)$$

donde $\kappa_{\max}(x)$ denota la curvatura máxima de M en x .

Definición 1.12. Una superficie poliédrica M_h es un *grafo normal* sobre una superficie suave M si M_h es un subconjunto del *alcance*(M)-tubo abierto alrededor de M y la restricción de la función proyección a M_h , $\Pi|_{M_h}$, es una biyección. Decimos que una superficie poliédrica M_h está *inscrita* a una superficie suave M si todos los vértices de M_h están en M . Decimos que una superficie poliédrica M_h está *cercanamente inscrita* a una superficie suave M si está *inscrita* a M y es un *grafo normal* a M .

Definición 1.13. De ahora en adelante supondremos que M_h está *cercanamente inscrita* a M y, por simplicidad, denotaremos $\Pi|_{M_h}$ por Ψ . Explícitamente,

$$\begin{aligned} \Psi : M_h &\rightarrow M \\ y &\mapsto \Psi(y) = \operatorname{argmin} \|x - y\|_{\mathbb{R}^3}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

²Ver sección 1.3.1 para la definición de la diferencial de una función.

³Ver [16] para una discusión al respecto.

esto es, $\delta_M(\Psi(y)) = \inf_{x \in M} \|y - x\|_{\mathbb{R}^3}$. Denotaremos por Φ a Ψ^{-1} :

$$\Psi^{-1} = \Phi : M \rightarrow M_h.$$

A la función Φ se le denomina *la función distancia más corta*.

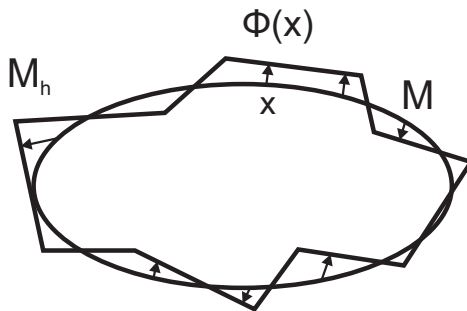


Figura 1.3: M_h es un grafo normal a M . En cada punto $x \in M$, Φ asigna a x el punto de intersección entre la recta normal a M que pasa por x y M_h .

Definición 1.14. (Función distancia con signo) Sea N el campo normal a la superficie suave M . Definimos la función distancia con signo ϕ por

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \phi(x) := \langle N(x), \Phi(x) - x \rangle_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Así, $\phi(x)$ es positiva cuando $\Phi(x) - x$ tiene igual dirección que $N(x)$.

1.2. Espacios L^p en superficies

Usaremos la notación \mathcal{M} para referirnos bien sea a la superficie poliédrica M_h o a la superficie suave M .

Definición 1.15. Para $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathcal{M})$ es el espacio de todas las funciones medibles u que satisfacen

$$\int_{\mathcal{M}} |u|^p dvol < \infty.$$

Observación 1.16. $L^2(\mathcal{M})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathcal{M})} := \int_{\mathcal{M}} uv \, dvol$$

y norma

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{M})} := \langle u, u \rangle_{L^2(\mathcal{M})}^{1/2}.$$

Definición 1.17. El espacio $L^\infty(\mathcal{M})$ es el espacio de todas las funciones u que satisfacen

$$\operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathcal{M}} |u(y)| < \infty.$$

Y definimos

$$\|u\|_{L^\infty(\mathcal{M})} := \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathcal{M}} |u(y)| < \infty.$$

Definición 1.18. Sea $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ el espacio de campos vectoriales dvol -medibles en \mathcal{M} . $L^p_{\mathcal{X}}(\mathcal{M})$ es el espacio de todos los campos $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ tales que

$$\|X\|_p = \left(\int_{\mathcal{M}} \langle X, X \rangle_{\mathcal{M}}^{p/2} \operatorname{dvol} \right)^{1/p} < \infty.$$

Definición 1.19. Si X es un campo vectorial en \mathcal{M} , definimos

$$\|X\|_{L^1(\mathcal{M})} := \int_{\mathcal{M}} \|X\|_{\mathcal{M}} \operatorname{dvol} = \int_{\mathcal{M}} \langle X, X \rangle_{\mathcal{M}}^{1/2} \operatorname{dvol}.$$

Definición 1.20. $L^\infty_{\mathcal{X}}(\mathcal{M})$ es el espacio de todos los campos vectoriales X que satisfacen

$$\operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathcal{M}} \|X(y)\| < \infty.$$

Y definimos

$$\|X\|_{L^\infty(\mathcal{M})} := \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathcal{M}} \|X(y)\| < \infty.$$

1.3. Diferenciación en M

Definimos el gradiente de una función en M y la derivada covariante para campos tangentes a M . Esta última parte es algo técnica y se hace para dar sentido a conceptos definidos posteriormente. Para un tratamiento más detallado ver [7].

1.3.1. Gradiente

Sea $p \in M$. Al conjunto de todos los vectores tangentes a M en p lo denotaremos por T_pM y lo llamaremos **el espacio tangente** a M en p . Supongamos que T_pM tiene una base ortonormal formada por ∂_1, ∂_2 . Entonces, si $X \in T_pM$ se puede expresar en la forma $X = a_1\partial_1 + a_2\partial_2$. Por tanto, si $u \in C^1(M)$ entonces se tiene que

$$du(X) = (a_1\partial_1 + a_2\partial_2)u,$$

de donde concluimos que $du(X) = X(u)$, para todo $X \in T_pM$. En consecuencia, definimos **el gradiente** en M , denotado ∇ , como el único campo vectorial tangente a M que satisface

$$\langle \nabla u, X \rangle_g = du(X), \quad \forall X \in T_pM.$$

1.3.2. Derivada covariante

Comenzamos considerando una curva en \mathbb{R}^3 . Sea C una curva dada por $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, para $a < t < b$. Supongamos que $Z(t) = Z_{x(t)}$ es un campo vectorial de clase C^1 a lo largo de C . Así, para cada $t \in (a, b)$ se tiene

$$Z(t) = \sum a_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x(t)} \in T_{x(t)}(\mathbb{R}^3).$$

Deseamos definir una derivada de $Z(t)$ con respecto a t , que denotaremos por dZ/dt , y que será un campo vectorial a lo largo de C . Como $T_p(\mathbb{R}^3)$ y $T_q(\mathbb{R}^3)$ son isomorfos para $p, q \in \mathbb{R}^3$, tiene sentido la expresión $Z(t_0 + \Delta t) - Z(t_0)$, que es la diferencia de un vector en $T_{x(t_0 + \Delta t)}(\mathbb{R}^3)$ y un vector $T_{x(t_0)}(\mathbb{R}^3)$ (suponemos $Z(t_0 + \Delta t)$ desplazado o identificado con el correspondiente vector en $T_{x(t_0)}(\mathbb{R}^3)$ y que la resta se hace allí). Así, podemos definir el cociente

$$\frac{1}{\Delta t} [Z(t_0 + \Delta t) - Z(t_0)] = \sum_{i=1}^3 \frac{a_i(t_0 + \Delta t) - a_i(t_0)}{\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x(t_0)}.$$

Pasando al límite, $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos la siguiente definición

$$\left(\frac{dZ}{dt} \right)_{t_0} = \sum \frac{da_i}{dt}(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x(t_0)} \in T_{x(t_0)}(\mathbb{R}^3).$$

Notemos que de esta definición se concluye que dZ/dt satisface las propiedades usuales de linealidad y la regla de Leibniz.

Ahora, consideremos un campo vectorial Z definido en M , no necesariamente tangencial. Por tanto, para cada $p \in M$, $Z_p := Z(p) \in T_p(\mathbb{R}^3)$. La diferencialibilidad de Z se puede definir en términos de sus componentes relativas a la base canónica de \mathbb{R}^3 en puntos de M , pues estas son funciones de M . Luego, si $Z_p = \sum_{i=1}^3 a_i(\partial/\partial x_i)_p$, por definición diremos que Z es de clase C^r si a_i , para $i = 1, 2, 3$, es de clase C^r en M . Para cada $p \in M$, $T_p(\mathbb{R}^3)$ y T_pM tienen el producto interno estándar de \mathbb{R}^3 y así M

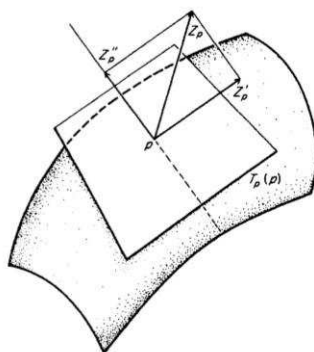


Figura 1.4: La descomposición del campo vectorial Z_p en Z'_p y Z''_p .

tiene la métrica Riemanniana inducida. Esto nos permite descomponer cualquier vector Z_p , $p \in M$, en una única forma $Z_p = Z'_p + Z''_p$ con $Z'_p \in T_pM$ y $Z''_p \in T_p^\perp M$, el complemento ortogonal de T_pM . Por tanto, el espacio $T_p(\mathbb{R}^3)$ tiene una descomposición en subespacios mutuamente ortogonales: $T_p(\mathbb{R}^3) = T_pM \oplus T_p^\perp M$. Sean π' , π'' las respectivas proyecciones: $\pi'(Z_p) = Z'_p$ y $\pi''(Z_p) = Z''_p$, las cuales son funciones lineales de $T_p(\mathbb{R}^3)$ en **los subespacios tangente y normal** a M en p , T_pM y $T_p^\perp M$. En particular, si Y es un campo vectorial tangente a M , esto es, para cada $p \in M$,

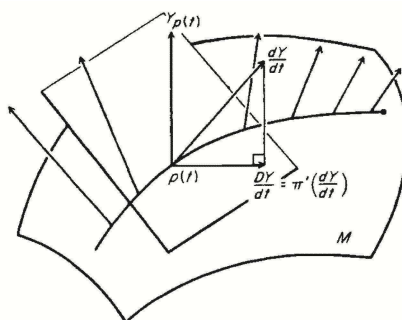


Figura 1.5: La proyección del campo vectorial $\frac{dY}{dt}$ en T_pM .

$Y_p \in T_pM$, se tiene $\pi'(Y) \equiv Y$. Entonces, si $p(t)$, para t en algún intervalo, es una curva de clase C^1 en M , $Y(t) = Y_{p(t)}$ es un campo vectorial a lo largo de la curva. Al ignorar a M , diferenciamos a $Y(t)$ como un campo vectorial a lo largo de una curva en \mathbb{R}^3 y obtenemos dY/dt , el cual es otro campo vectorial a lo largo de la curva. Así, en cada punto $p(t)$ podemos proyectar dY/dt a un vector tangente $\pi'(dY/dt)$, el cual será denotado DY/dt y se llamará la **derivada covariante** del campo vectorial Y en M a lo largo de la curva $p(t)$. Notemos que la derivada covariante satisface las propiedades de linealidad y la regla de Leibniz.

Ahora, sean Y un campo vectorial en \mathbb{R}^3 , $p \in M$, $X_p \in T_pM$ y $\gamma(t)$ una curva diferenciable tal que $\gamma(t_0) = p$ y $(d\gamma/dt)_{t_0} = X_p$. Además, supongamos que tenemos una base para T_pM . Entonces, como $(DY/dt)_{t_0} \in T_pM$, al calcular $(DY/dt)_{t_0}$ se obtiene una expresión que *no depende de $\gamma(t)$* y que sólo depende del vector tangente X_p en p . En consecuencia, se obtiene una función

$$\begin{aligned} T_pM &\rightarrow T_pM \\ X_p &\mapsto (DY/dt)_{t_0}. \end{aligned}$$

Definimos

$$\nabla_{X_p}Y := (DY/dt)_{t_0},$$

a lo largo de *cualquier* curva $\gamma(t)$ con $\gamma(t_0) = p$ y $(d\gamma/dt)_{t_0} = X_p$. Así, como lo hace la derivada direccional $X_p f$ de una función f con respecto a un vector X_p , la derivada covariante $\nabla_{X_p}Y$ mide el cambio del campo vectorial Y en p en la dirección X_p . También, notemos que a lo largo de $\gamma(t)$ se cumple que $\nabla_{d\gamma/dt}Y = DY/dt$.

Con el fin de tener en forma resumida las principales propiedades de la derivada covariante escribimos la siguiente proposición (correspondiente a un caso particular del Teorema 2.11 [7, p. 306]). Sea $\mathcal{X}(M)$ el espacio de campos vectoriales en M .

Proposición 1.21. Sea M una superficie suave en \mathbb{R}^3 . Para cualquier campo vectorial tangente Y en M de clase C^r , $r > 1$, tenemos, en cada punto $p \in M$, una función lineal $X_p \mapsto \nabla_{X_p}Y$ de $T_pM \rightarrow T_pM$. Además, $\nabla_{X_p}Y$ tiene las siguientes propiedades:

- (a) Si X, Y son campos vectoriales en M de clase C^r (o C^∞), entonces $\nabla_X Y$ definido por $(\nabla_X Y)_p := \nabla_{X_p}Y$, es un campo vectorial en M de clase C^{r-1} (respectivamente C^∞).
- (b) La función $T_pM \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por $(X_p, Y) \mapsto \nabla_{X_p}Y$ es \mathbb{R} -lineal en X_p y Y . Para una función f , diferenciable en una vecindad de p ,

$$\nabla_{X_p}(fY) = (X_p f)Y_p + f(p)\nabla_{X_p}Y.$$

1.3.3. Divergencia, Laplaciano y Hessiano

Sea X un campo vectorial en M . Definimos **la divergencia** de X , $\operatorname{div}X$, como

$$\operatorname{div}X := \operatorname{tr}(\nabla X).$$

Si ∂_1, ∂_2 es una base ortonormal en T_pM tenemos la siguiente expresión

$$\operatorname{tr}(\nabla X) = \langle \nabla_{\partial_1} X, \partial_1 \rangle_g + \langle \nabla_{\partial_2} X, \partial_2 \rangle_g.$$

Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es suave, definimos **el Laplaciano** de f , denotado por Δf , como

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Definimos **el Hessiano** de f por

$$\operatorname{Hess}_g f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle_g$$

donde X, Y son campos vectoriales tangentes a M . Luego,

$$\operatorname{Hess}_g f = \nabla(\nabla f) = \nabla^2 f.$$

Así, se cumple que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{tr}(\nabla(\nabla f)) = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess}_g f).$$

Definición 1.22. Para funciones en $C^2(\mathcal{M})$ definimos las siguientes seminormas

$$\begin{aligned} |u|_{C^2(\mathcal{M})} &:= \max_{p \in \mathcal{M}} \|\nabla^2 u\| = \max_{p \in \mathcal{M}} (\langle \nabla^2 u, \nabla^2 u \rangle)^{1/2} \\ |u|_{C^1(\mathcal{M})} &:= \max_{p \in \mathcal{M}} \|\nabla u\| = \max_{p \in \mathcal{M}} (\langle \nabla u, \nabla u \rangle)^{1/2}, \end{aligned}$$

1.4. Espacios de Sobolev

Definición 1.23. Para $1 \leq p < \infty$ el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\mathcal{M})$ consta de todas las funciones $u \in L^p(\mathcal{M})$ para las cuales existe un *gradiente débil*, denotado $\nabla u \in L^p_{\mathcal{X}}(\mathcal{M})$, tal que

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, X \rangle_{\mathcal{M}} \, d\operatorname{vol} = - \int_{\mathcal{M}} u \operatorname{div}X \, d\operatorname{vol} \quad \forall X \in \mathcal{X}^\infty(\mathcal{M}). \quad (1.5)$$

En $W^{1,p}(\mathcal{M})$ definimos la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathcal{M})} = \|u\|_{L^p(\mathcal{M})} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathcal{M})}.$$

Es común denotar por $H^1(\mathcal{M})$ al espacio $W^{1,2}(\mathcal{M})$. Es un hecho conocido que el subespacio $C^\infty(\mathcal{M})$ es denso en $W^{1,p}(\mathcal{M})$, para $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $H_0^1(\mathcal{M})$ a la clausura de $C^\infty(\mathcal{M})$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\mathcal{M})}$. En $H_0^1(\mathcal{M})$ definimos el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\mathcal{M})} := \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathcal{M}} \, dvol,$$

el cual induce una estructura de espacio de Hilbert a $H_0^1(\mathcal{M})$. En $W^{1,1}(\mathcal{M})$ definimos la seminorma

$$|\varphi|_{W^{1,1}(\mathcal{M})} := \int_{\mathcal{M}} \|\nabla \varphi\|_{\mathcal{M}} \, dvol.$$

1.5. Funciones Lineales por tramos

Definición 1.24. Sea S_h el subespacio de dimensión finita de $H^1(M_h)$ que consta de todas las funciones continuas en M_h que son lineales en cada triángulo de M_h , y sea \hat{S}_h el espacio que contiene toda función $\hat{v} = v \circ \Phi \in H^1(M)$, para alguna $v \in S_h$. Así, para cualquier función continua u en M , existen funciones únicas $u_h \in S_h$ y $\hat{u}_h \in \hat{S}_h$ que interpolan a u en los vértices de M_h .

Supongamos que v_1, \dots, v_n son los vértices de M_h . Entonces, el subespacio $S_h(M_h)$ tiene una base formada por las funciones σ_j , las cuales están definidas de la siguiente manera

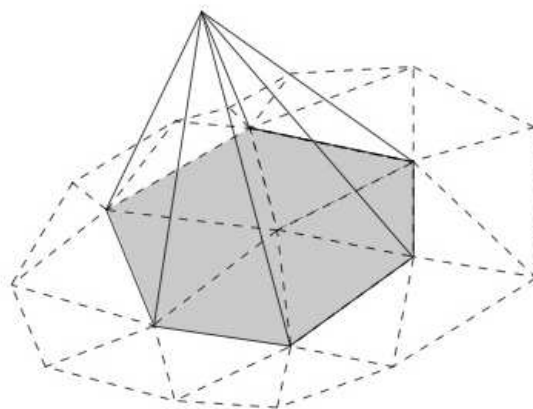
$$\sigma_j(v_k) := \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases} \quad (1.6)$$

El siguiente lema acota el error del gradiente entre el interpolante lineal de una función en M y su *pullback* a M_h .

Lema 1.25. Sean M una superficie suave, M_h una superficie poliédrica cercanamente inscrita a M y $u \in C^2(M)$. Entonces,

$$\|\nabla_h(u \circ \Psi - u_h)\|_{L^\infty(T_h)} \leq Ch|u \circ \Psi|_{C^2(T_h)}. \quad (1.7)$$

Este es un caso particular del Teorema 4.4.4. en [9].

Figura 1.6: Gráfica de las funciones base σ_j .

1.6. Geodésicas y la función exponencial

Los conceptos y resultados de esta sección se usarán únicamente para justificar algunos cálculos del Capítulo 3; por tanto, se puede aplazar su lectura hasta encontrar dichos cálculos.

Definición 1.26. Una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica en el punto $t_0 \in I$, si $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ en t_0 ; si γ es una geodésica en t , para todo $t \in I$, diremos que γ es una geodésica. Si $[a, b] \subset I$ y $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica, la restricción de γ a $[a, b]$ es llamada un segmento geodésico que une $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$. A veces, por abuso de notación, nos referimos a la imagen $\gamma(I)$ de una geodésica γ como una geodésica. Si $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica, entonces

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

es decir, la longitud del vector tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ es constante.

Definición 1.27. Un segmento de la geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es llamado minimizante si $l(\gamma) \leq l(c)$, donde $l(\cdot)$ denota la longitud de una curva y c es una curva diferenciable a tramos que une $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$ (arbitraria). Equivalentemente, si (V, d) es un Espacio Métrico, se dice que una geodésica minimizante es una curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ tal que $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$ para todo $t, t' \in [a, b]$.

Definamos

$$TM := \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}.$$

Proposición 1.28. Sea M una superficie suave. Dado $p \in M$, existen una vecindad V de p en M , un número $\epsilon > 0$ y una función de clase C^∞ $\gamma : (-2, 2) \times U \rightarrow M$, con $U = \{(q, w) \in TM \mid q \in V, w \in T_qM, \|w\| < \epsilon\}$, tal que $t \mapsto \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, es la única geodésica de M que, en el instante $t = 0$, pasa por q con velocidad w , para todo $q \in V$ y para todo $w \in T_qM$ con $\|w\| < \epsilon$. Una prueba de esto aparece en [11].

Definición 1.29. (La función exponencial.) Sea M una superficie suave. Sean $p \in M$ y $U \subset TM$ un conjunto abierto dado por la Proposición 1.28. Entonces, la función $exp : U \rightarrow M$ dada por $exp(q, v) := \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{\|v\|})$, con $(q, v) \in U$, es llamada la función exponencial en U .

Podemos usar la restricción de exp a un subconjunto abierto del espacio tangente T_qM , es decir, definimos $exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$ por $exp_q(v) := exp(q, v)$. Geométricamente, $exp_q(v)$ es un punto de M obtenido al recorrer una distancia igual a $|v|$, comenzando en q , a lo largo de una geodésica que pasa por q con velocidad $v/\|v\|$.

Proposición 1.30. Sea M una superficie suave. Dado $q \in M$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$ es un difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ en un subconjunto abierto de M . Una prueba de esto aparece en [11].

Definición 1.31. Si exp_p es un difeomorfismo de una vecindad V del origen en T_pM , entonces $exp_pV = U$ es llamada una *vecindad normal* de p . Si $B_\epsilon(0)$ es tal que $B_\epsilon(0) \subset V$, llamamos $exp_pB_\epsilon(0) = B_\epsilon(p)$ la *bola normal* (o *bola geodésica*) con centro en p y radio ϵ .

1.7. Operador Laplace-Beltrami

Tratamos dicho operador tanto en superficies poliédricas M_h , como en superficies suaves M .

Definición 1.32. El Operador Laplace-Beltrami fuerte (o clásico) sobre una superficie suave M es el operador lineal y continuo que asigna a una función $u \in C^\infty(M)$ el campo escalar $\Delta u := \text{div}(\nabla u)$.

Proposición 1.33. Sea M una superficie suave, compacta, orientada y sin frontera. Entonces, si $u \in C^\infty(M)$ y X es un campo vectorial suave definido en M se cumple que

$$\int_M \langle \nabla u, X \rangle_g \, dvol = - \int_M u \text{div} X \, dvol \quad (1.8)$$

Este es un caso particular del problema 14-7 en [15].

A partir de la anterior definición y usando el resultado previo, vemos que el operador

Laplace-Beltrami fuerte (o clásico) para una función $u \in C^\infty(M)$ es la única función continua Δu que satisface

$$\int_M \Delta u \varphi \, dvol = - \int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g \, dvol, \quad (1.9)$$

para todo $\varphi \in C^\infty(M)$. Extendemos la definición del operador Laplace-Beltrami al espacio $H_0^1(\mathcal{M})$. Sea $H^{-1}(\mathcal{M})$ el espacio dual de $H_0^1(\mathcal{M})$. El operador Laplace-Beltrami débil es el operador lineal y continuo que asigna a una función $u \in H_0^1(\mathcal{M})$ el operador $\Delta u \in H^{-1}(\mathcal{M})$ definido por

$$\langle \Delta u | \varphi \rangle = - \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{\mathcal{M}} \, dvol, \quad (1.10)$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\mathcal{M})$; donde $\langle \cdot | \cdot \rangle$ denota el par correspondiente en los espacios $H^{-1}(\mathcal{M})$ y $H_0^1(\mathcal{M})$.

Nota 1.34. Observamos que el Operador Laplace-Beltrami débil es una generalización del Operador Laplace-Beltrami fuerte, pues $\overline{C^\infty(M)} = H_0^1(M)$.

Capítulo 2

Tensor de Distorsión Métrica

En este capítulo definimos el tensor de distorsión métrica, el cual tiene un papel importante en el análisis de convergencia. A continuación, obtenemos una representación para este tensor en términos del operador de forma, las curvaturas principales de M y los normales a M y a M_h y que dependerá de la diferencial de la función proyección. A partir de esta representación presentamos resultados de acotamiento de la norma de este tensor en función del tamaño de malla h . Finalizamos el capítulo mostrando cómo se relacionan los elementos de volumen de las superficies M y M_h a través de dicho tensor y también cómo sirve para acotar el error entre una función y su interpolante lineal.

2.1. Operador de forma

Dada una superficie suave M , sabemos que el campo normal N a la superficie tiene longitud constante y apunta en dirección normal; por tanto, para cualquier $X \in \mathcal{X}^T(M)$, el espacio de los campos tangentes a M , la derivada $D_X N$ es también un campo vectorial tangente. Lo anterior sugiere la siguiente definición.

Definición 2.1. Sea M una superficie suave. El operador de forma \mathbf{S} , también conocido como el operador de Weingarten, es el campo tensorial que para cualquier $x \in M$ está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x) : T_x M &\rightarrow T_x M \\ v &\mapsto -D_v N. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se sabe que los valores propios y las direcciones propias de $\mathbf{S}(x)$ son las curvaturas principales $\kappa_1(x)$ y $\kappa_2(x)$ y las direcciones de curvatura principales de M en x . Por tanto, la representación matricial de \mathbf{S} en la base formada por las direcciones principales es

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Además, definimos $\kappa_{max}(x) := \max\{|\kappa_1(x)|, |\kappa_2(x)|\}$ la curvatura máxima en x . Para una descripción más detallada del operador de forma ver [18].

2.2. Diferencial de la función proyección

Calcularemos dicho diferencial con el objetivo de, posteriormente, definir el tensor de distorsión métrica.

Considere una vecindad abierta U_M de M que es un subconjunto del *alcance*(M)-tubo alrededor de M . En primera instancia, notemos que la función distancia con signo $\phi_h : U_M \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\phi_h(y) = \langle y - \Pi(y), N(\Pi(y)) \rangle_{\mathbb{R}^3}. \quad (2.2)$$

Al diferenciar esta ecuación en un punto y en una dirección $v \in \mathbb{R}^3$ se obtiene

$$d_y \phi_h(v) = \langle N(\Pi(y)), v \rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad (2.3)$$

pues las imágenes de DN y de $d\Pi$ son ortogonales a N y $y - \Pi(y)$ es paralelo a N . Usando la ecuación (2.2) obtenemos la siguiente expresión para Π

$$\begin{aligned} \langle \Pi(y), N(\Pi(y)) \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \langle y, N(\Pi(y)) \rangle_{\mathbb{R}^3} - \phi_h(y) \\ &= \langle y, N(\Pi(y)) \rangle_{\mathbb{R}^3} - \phi_h(y) \langle N(\Pi(y)), N(\Pi(y)) \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \langle y - \phi_h(y)N(\Pi(y)), N(\Pi(y)) \rangle_{\mathbb{R}^3}, \end{aligned}$$

de donde concluimos

$$\Pi(y) = y - \phi_h(y)N(\Pi(y)). \quad (2.4)$$

Si diferenciamos esta ecuación tenemos

$$d\Pi = Id - d\phi_h N \circ \Pi - \phi_h DN \circ d\Pi.$$

Ahora, usando la definición del operador de forma y la ecuación (2.3), obtenemos la siguiente igualdad

$$(Id - \phi_h \mathbf{S})d\Pi = Id - \langle N \circ \Pi, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} N \circ \Pi.$$

Notemos que el lado derecho de esta última ecuación describe la proyección ortogonal en \mathbb{R}^3 sobre el plano tangente de M . Denotemos ésta función por \hat{Q} . Por otro lado, a partir de la ecuación (1.2) se concluye que la función $Id - \phi_h(y)\mathbf{S} \circ \Pi(y)$ es biyectiva sobre $T_{\Pi(y)}M$, y ésto para todo $y \in U_M$. Así, la función $(Id - \phi_h(y)\mathbf{S} \circ \Pi(y))^{-1}$ existe y tenemos que

$$d\Pi = (Id - \phi_h \mathbf{S})^{-1} \hat{Q}, \quad (2.5)$$

donde hemos denotado $\mathbf{S} \circ \Pi$ por \mathbf{S} .

Observación 2.2. Notemos que, si $x \in M$, entonces, $x = \Psi(y)$ para un único $y \in M_h$. Por tanto, se cumplen las siguientes igualdades

$$\phi_h = \phi \circ \Psi \quad \text{y} \quad \phi_h \circ \Phi = \phi;$$

donde hemos denotado $\phi_h|_{M_h}$ por ϕ_h . Así, escribiremos $Id - \phi \cdot \mathbf{S}$ en lugar de $Id - \phi_h \cdot \mathbf{S}$; esto porque el operador de forma \mathbf{S} está definido en M .

Lema 2.3. La función Ψ es un homeomorfismo de M_h a M y, para cada triángulo T_h de M_h , la restricción de Ψ al interior de T_h es un difeomorfismo sobre su imagen.

Demostración. Comencemos probando que Ψ es un homeomorfismo. Ψ es continua por ser la restricción a M_h de la función suave Π y Ψ es biyectiva por hipótesis (M_h está cercanamente inscrita a M). Probemos ahora que Ψ es una función cerrada. Sea B un subconjunto cerrado de M_h . Entonces, como M_h es compacto, se tiene que B también lo es. Ahora bien, como Ψ es continua, $\Psi(B)$ es compacto en M y, por tanto, cerrado. Ahora, consideremos un triángulo T_h de M_h y un punto y en el interior de T_h . Notemos que la diferencial de Ψ en y es la restricción de $d_y \Psi$ al plano tangente de T_h ; luego, de la ecuación (2.5) y la observación 2.2 se tiene que

$$d_y \Psi = (Id - \phi(x)\mathbf{S}(x))^{-1} \hat{Q}_y, \quad (2.6)$$

donde \hat{Q}_y es la restricción de \hat{Q} al plano tangente de T_h y $x = \Psi(y)$. \hat{Q}_y tiene rango completo porque, por construcción, los planos tangentes de T_h en y y de M en $\Psi(y)$ no se cortan ortogonalmente. Por otro lado, $Id - \phi \mathbf{S}$ tiene rango completo por la ecuación (1.2) y teniendo en cuenta la representación matricial de \mathbf{S} . Así, $d_y \Psi$ tiene rango completo y, por tanto, la restricción de Ψ al interior de T_h es un difeomorfismo sobre su imagen. \square

Definición 2.4. Podemos usar Φ para llevar la métrica cónica de M_h a M . Específicamente, definimos una métrica g_h en la preimagen del interior de la unión de los triángulos de M_h , y por lo tanto a.e. en M , por

$$\langle X, Y \rangle_{g_h} := \langle d\Phi(X), d\Phi(Y) \rangle_{\mathbb{R}^3} \quad a.e., \quad (2.7)$$

donde X, Y son campos vectoriales tangentes a M .

Definición 2.5. Denotemos por A a la composición $d\Phi^* \circ d\Phi$. Así, A satisface

$$\langle X, Y \rangle_{g_h} = \langle A(X), Y \rangle_g \quad a.e., \quad (2.8)$$

la cual se obtiene de la ecuación (2.7). Llamaremos a A el *Tensor de distorsión Métrica*. Notemos que A es auto-adjunto.

2.3. Representación matricial

Obtendremos una representación matricial para el tensor de distorsión métrica, con respecto a las curvaturas principales de M , con el fin de acotar en forma simple su distorsión generada, es decir, cuánto difiere este tensor del tensor Identidad.

Teorema 2.6. Sea M_h una superficie poliédrica que es un grafo normal sobre una superficie suave y embebida M . Denotemos por N al campo normal a M , por N_h al *pullback* bajo Φ del campo normal de M_h a M (el cual es constante a tramos), esto es, $N_h := N_{M_h} \circ \Phi$. Entonces, el tensor de distorsión métrica A satisface

$$A = P \circ Q^{-1} \circ P \quad a.e., \quad (2.9)$$

una descomposición en matrices simétricas y definidas positivas P y Q , las cuales pueden ser diagonalizadas, en bases diferentes, en la forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \phi \cdot \kappa_1 & 0 \\ 0 & 1 - \phi \cdot \kappa_2 \end{pmatrix} \quad y \quad Q = \begin{pmatrix} \langle N, N_h \rangle^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde κ_1 y κ_2 denotan las curvaturas principales de la superficie suave M y ϕ la distancia escalar con signo.

Demostración. Basta considerar un triángulo T_h de M_h . Definamos $\phi_{T_h} = \phi \circ \Psi|_{T_h} : T_h \rightarrow \mathbb{R}$ y $N_{T_h} = N \circ \Psi|_{T_h} : T_h \rightarrow \mathbb{R}$; es decir, N_{T_h} denota el *pullback* del normal N

de M al triángulo T_h , en lugar del normal de T_h . Ahora, Ψ restringida a T_h puede ser escrita, según la ecuación (2.4), como

$$\Psi = Id - \phi_{T_h} \cdot N_{T_h}. \quad (2.10)$$

Al diferenciar Ψ se obtiene

$$d\Psi = Id - N_{T_h} \cdot d\phi_{T_h} - \phi_{T_h} \cdot dN_{T_h}. \quad (2.11)$$

Y como $dN_{T_h} = dN \circ d\Psi = -\mathbf{S} \circ d\Psi$, donde $\mathbf{S} = -dN$ es el operador de forma en M , se tiene

$$d\Psi = Id + \phi \cdot \mathbf{S} \circ d\Psi - N_{T_h} \cdot d\phi_{T_h},$$

de donde obtenemos,

$$(Id - \phi \cdot \mathbf{S})d\Psi = Id - N_{T_h} \cdot d\phi_{T_h}.$$

Además, por la justificación de la ecuación (2.5) se sabe que $Id - \phi \cdot \mathbf{S}$ es invertible. En consecuencia, podemos escribir $d\Psi$ de la siguiente manera

$$d\Psi = (Id - \phi \cdot \mathbf{S})^{-1} \circ (Id - N_{T_h} \cdot d\phi_{T_h}) : \quad TT_h \rightarrow TM.$$

Así pues, si definimos

$$P := (Id - \phi \cdot \mathbf{S}) : \quad TM \rightarrow TM, \quad (2.12)$$

$$\hat{Q} := (Id - N_{T_h} \cdot d\phi_{T_h}) : \quad TT_h \rightarrow TM, \quad (2.13)$$

obtenemos que $d\Psi = P^{-1} \circ \hat{Q}$ y como $\Psi|_{T_h}$ es difeomorfismo sabemos que \hat{Q} es invertible y, por tanto, $d\Psi = \hat{Q}^{-1} \circ P$. Ahora, para cada $x \in M$ definimos un operador simétrico y definido positivo Q sobre $T_x M$ por

$$\langle Q^{-1}(X), Y \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \hat{Q}^{-1}(X), \hat{Q}^{-1}(Y) \rangle_{\mathbb{R}^3},$$

de donde se concluye que

$$Q^{-1} = (\hat{Q}^{-1})^*(\hat{Q}^{-1}) : \quad TM \rightarrow TM. \quad (2.14)$$

De la ecuación (2.12) se deduce que los valores propios de P son los afirmados, pues la representación matricial de \mathbf{S} tiene como valores propios las curvaturas principales en cuestión. Así, la base considerada en cada $T_x M$ es la formada por los vectores

proprios asociados a las curvaturas principales, es decir, la formada por las direcciones principales. Denotemos ésta base por β_P .

Para Q , sea Y un campo vectorial sobre el triángulo T_h . Recordemos que, en \mathbb{R}^3 , se tiene que $N_{T_h} \perp \text{im}(d\Psi)$ y $N_{T_h} \perp \text{im}(dN_{T_h})$; así, de (2.11) obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle d\Psi(Y), N_{T_h} \rangle &= \langle Y - N_{T_h} d\phi_{T_h}(Y) - \phi_{T_h} \cdot dN_{T_h}(Y), N_{T_h} \rangle \\ &= \langle Y, N_{T_h} \rangle - \langle N_{T_h} d\phi_{T_h}(Y), N_{T_h} \rangle - \langle \phi_{T_h} \cdot dN_{T_h}(Y), N_{T_h} \rangle \\ &= \langle Y, N_{T_h} \rangle - d\phi_{T_h}(Y) \langle N_{T_h}, N_{T_h} \rangle \\ &= \langle Y, N_{T_h} \rangle - d\phi_{T_h}(Y). \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene

$$0 = \langle d\Psi(Y), N_{T_h} \rangle = \langle Y, N_{T_h} \rangle - d\phi_{T_h}(Y), \quad (2.15)$$

con lo cual podemos reescribir \hat{Q} como

$$\hat{Q} = Id - N_{T_h} \cdot N_{T_h} : \quad TT_h \rightarrow TM, \quad (2.16)$$

Notemos que este operador es simétrico, es decir, $\langle \hat{Q}(Y), X \rangle = \langle Y, \hat{Q}(X) \rangle$, y definido positivo. Ahora, si $x \in M$ y $\Phi(x) = y$, como los espacios tangentes $T_x M$ y $T_y M_h$, identificados con subespacios de \mathbb{R}^3 , tienen una dirección en común, digamos Y , se cumple $\hat{Q}(Y) = Y$ y así un valor propio es 1. Para hallar el otro valor propio, consideremos dos líneas rectas que se cortan en el origen generando un ángulo α . Un vector de longitud l en la primera recta es proyectado ortogonalmente sobre la otra recta en un vector de longitud $l \cos \alpha$; así, el otro valor propio de \hat{Q} es $\cos \angle(T_y M_h, T_x M) = \langle N, N_h \rangle$. Consideremos dos vectores propios asociados con norma unitaria y denotemos la matriz formada por éstos vectores propios por $\beta_{\hat{Q}}$. Ahora, de 2.14 se obtiene que $Q = \hat{Q} \hat{Q}^* : TM \rightarrow TM$. Es claro que los valores propios asociados a la base $\beta_{\hat{Q}}$ son 1 y $\langle N, N_h \rangle^2$; lo cual completa la prueba. \square

Notemos que si T es la matriz de cambio de base de β_P a $\beta_{\hat{Q}}$ entonces T es una matriz de rotación; por tanto, existe un ángulo $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, el tensor de distorsión métrica A tiene la siguiente representación matricial en la base de las direcciones de curvatura principales β_P :

$$A = P \circ T^{-1} \circ Q^{-1} \circ T \circ P.$$

Colorario 2.7. Bajo las hipótesis del Teorema 2.6, los elementos de volumen de M y M_h satisfacen

$$dvol_{M_h} = \sqrt{\det A} dvol_M,$$

con

$$\sqrt{\det A} = \frac{1 + \phi^2 \cdot \kappa - \phi \cdot H}{\langle N, N_h \rangle} \quad a.e., \quad (2.17)$$

donde κ es la *curvatura Gaussiana* y H denota la *curvatura media* de M .

Demostración. La primera igualdad se justifica en el Teorema 2.13. Para la segunda igualdad, recordemos que $\kappa = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ y que $H = \kappa_1 + \kappa_2$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sqrt{\det A} &= \sqrt{\det P} \sqrt{\det T^{-1}} \sqrt{\det Q^{-1}} \sqrt{\det T} \sqrt{\det P} \\ &= \sqrt{\det Q^{-1} \det P} \\ &= \frac{(1 - \phi \cdot \kappa_1)(1 - \phi \cdot \kappa_2)}{\langle N, N_h \rangle} \\ &= \frac{1 - \phi \cdot \kappa_1 - \phi \cdot \kappa_2 + \phi^2 \cdot \kappa_1 \cdot \kappa_2}{\langle N, N_h \rangle} \\ &= \frac{1 + \phi^2 \cdot \kappa - \phi \cdot H}{\langle N, N_h \rangle}. \end{aligned}$$

□

2.4. Convergencia de Normal y distancia

Establecemos cotas de error entre los normales de M y de M_h con el fin de acotar la norma del supremo de la función distancia ϕ ; cota que será necesaria para establecer las cotas de error del tensor de distorsión métrica.

Lema 2.8. Sea M_h una superficie poliédrica inscrita en la superficie suave M y tal que M_h está dentro del alcance de M . Entonces, los ángulos entre los normales N_h (de M_h) y N (de M), comparados bajo la función de distancia más corta, satisfacen

$$\angle(N, N_h) \leq C \cdot h,$$

donde h denota el tamaño de la malla de M_h y C sólo depende de la curvatura de M y de los radios de los triángulos de M_h .

Demostración. Ver [10]. □

Lema 2.9. Sea M_h una superficie poliédrica cercanamente inscrita en la superficie suave M . Entonces,

$$\|\phi \circ \Psi\|_{L^\infty(M_h)} \leq C \cdot h^2, \quad (2.18)$$

donde h denota el tamaño de la malla de M_h y C sólo depende de la curvatura de M y de los radios de los triángulos de M_h .

Demostración. Denotemos por N_h al normal de M_h y por N al normal de M . Basta considerar un triángulo T_h de M_h . Usaremos la misma notación del Teorema 2.6. Sean p un vértice de T_h y y en el interior de T_h . Consideremos el segmento de recta que une a p con y parametrizado de la forma

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow T_h \\ t &\mapsto f(t) := (1 - t)p + ty. \end{aligned}$$

Así, dado $t \in [0, 1]$ se tiene

$$\phi(\Psi((1 - t)p + ty)) = \phi_{T_h}((1 - t)p + ty) = \phi_{T_h}(f(t)).$$

Definamos $\theta := \angle(y - p, N_{T_h}(t))$. Al usar la ecuación (2.15) obtenemos

$$\begin{aligned} |d\phi_{T_h} \cdot f'(t)| &= |d\phi_{T_h}(y - p)| \\ &= |\langle y - p, N_{T_h}(t) \rangle| \\ &\leq \|y - p\| |\cos \theta| \\ &\leq h \cdot |\cos \theta|. \end{aligned}$$

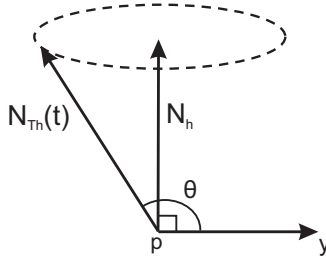


Figura 2.1: Ángulo entre $y - p$ y $N_{T_h}(t)$.

Ahora, notemos que $|\theta - \frac{\pi}{2}| \leq \angle(N, N_{T_h}(t))$; de donde concluimos que

$$\left| \operatorname{sen} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right| = |\cos \theta| \leq |\operatorname{sen}(\angle(N, N_{T_h}(t)))|,$$

y como M_h está cercanamente inscrita a M ,

$$\operatorname{sen}(\angle(N, N_{T_h}(t))) \approx \angle(N, N_{T_h}(t)) \leq C \cdot h,$$

por el lema 2.8. Por tanto, tenemos que

$$|d\phi_{T_h} \cdot f'(t)| = |d\phi_{T_h}(y - p)| \leq C \cdot h^2,$$

para todo $y \in T_h$; de donde se concluye que

$$\|d\phi_{T_h}\|_{L^\infty(T_h)} \leq C \cdot h^2.$$

Ahora bien, notemos que

$$\phi_{T_h}(f(t)) = \int_0^t d\phi_{T_h} \cdot f'(t) dt \leq |d\phi_{T_h}(y - p)| \cdot t \leq \|d\phi_{T_h}\|_{L^\infty(f([0,1]))} \leq \|d\phi_{T_h}\|_{L^\infty(T_h)},$$

con lo cual

$$\|\phi_{T_h}\|_{L^\infty(f([0,1]))} \leq C \cdot h^2,$$

y esto para todo $y \in T_h$. Así, se concluye

$$\|\phi_{T_h}\|_{L^\infty(T_h)} \leq C \cdot h^2.$$

□

Del lema anterior se concluye que $\|\phi\|_{L^\infty(M)} \leq C \cdot h^2$.

Definición 2.10. Para cualquier campo tensorial g -simétrico A definido en M , denotamos por $\|A\|_\infty$ al supremo esencial, para $p \in M$, de la función formada por el máximo de los valores absolutos de los valores propios de $A(p)$.

2.5. Convergencia del tensor de distorsión

Establecemos las cotas de error del tensor de distorsión métrica respecto al tensor Identidad. Estas cotas serán esenciales con el fin de establecer el teorema de aproximación del operador Laplace-Beltrami.

Lema 2.11. Sea M una superficie suave en \mathbb{R}^3 . Entonces, existe $h_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada superficie poliédrica M_h que esté cercanamente inscrita a M y que tenga un tamaño de malla $h < h_0$ se satisface lo siguiente

$$\|A - Id\|_\infty \leq C \cdot h^2, \quad (2.19)$$

$$\|\sqrt{\det A} - 1\|_{L^\infty(M)} \leq C \cdot h^2, \quad y \quad (2.20)$$

$$\|\sqrt{\det AA^{-1}} - Id\|_\infty \leq C \cdot h^2, \quad (2.21)$$

donde las constantes C sólo dependen de M, h_0 y la regularidad de forma ρ de M_h .

Demostración. Sea N el campo normal a M y sea $N_h := N_{M_h} \circ \Phi$, el *pullback* bajo Φ del campo normal de M_h a M (el cual es constante a tramos). Entonces, por Teorema 2.6, $A = P \circ T^{-1} \circ Q^{-1} \circ T \circ P$ a.e. Explícitamente,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{(1-\phi\kappa_1)^2}{\langle N, N_h \rangle^2} (\cos^2 \theta + \langle N, N_h \rangle^2 \sin^2 \theta) & \frac{\sin \theta \cos \theta (1-\phi\kappa_1)(1-\phi\kappa_2)}{\langle N, N_h \rangle^2} (\langle N, N_h \rangle^2 - 1) \\ \frac{\sin \theta \cos \theta (1-\phi\kappa_1)(1-\phi\kappa_2)}{\langle N, N_h \rangle^2} (\langle N, N_h \rangle^2 - 1) & \frac{(1-\phi\kappa_2)^2}{\langle N, N_h \rangle^2} (\langle N, N_h \rangle^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{pmatrix}.$$

Notemos que A es simétrica, con lo cual $A - Id$ también lo es; por tanto, sus valores propios son no negativos y así cada uno está acotado por $\text{tr}(A - Id)$. En consecuencia, tenemos que

$$\|A - Id\|_\infty \leq \frac{(1-\phi\kappa_1)^2}{\langle N, N_h \rangle^2} (\cos^2 \theta + \langle N, N_h \rangle^2 \sin^2 \theta) + \frac{(1-\phi\kappa_2)^2}{\langle N, N_h \rangle^2} (\langle N, N_h \rangle^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2.$$

Ahora, como $\langle N, N_h \rangle^2 = \cos^2(\angle(N, N_h)) \leq 1$ concluimos que $(\cos^2 \theta + \langle N, N_h \rangle^2 \sin^2 \theta) \leq 1$ y $(\langle N, N_h \rangle^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \leq 1$, con lo cual

$$\begin{aligned} \|A - Id\|_\infty &\leq \frac{(1-\phi\kappa_1)^2 + (1-\phi\kappa_2)^2 - 2\langle N, N_h \rangle^2}{\langle N, N_h \rangle^2} \\ &= \frac{((1-\phi\kappa_1)^2 - 1) + ((1-\phi\kappa_2)^2 - 1) - 2(\langle N, N_h \rangle^2 - 1)}{\langle N, N_h \rangle^2}. \end{aligned}$$

Notemos que, por el lema 2.8, se concluye que $\langle N, N_h \rangle^2 - 1$ es $\mathcal{O}(h^2)$, por tanto $\frac{1}{\langle N, N_h \rangle^2}$ es $1 + \mathcal{O}(h^2)$. También, por el lema 2.9 sabemos $\|\phi\|_{L^\infty(M)}$ es $\mathcal{O}(h^2)$. Además, como M es suave y compacta las curvaturas principales son funciones continuas y así podemos definir

$$\tilde{\kappa}_1 := \max_M |\kappa_1|, \quad \tilde{\kappa}_2 := \max_M |\kappa_2|, \quad \tilde{\kappa} := \max_M |\kappa|, \quad \tilde{H} := \max_M |H|,$$

con lo cual $(1 - \phi\kappa_1)^2 - 1$ y $(1 - \phi\kappa_2)^2 - 1$ son $\mathcal{O}(h^2)$ y se concluye (2.19).

Por otro lado, de la ecuación (2.17) se obtiene que

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\det A} - 1 \right| &= \left| \frac{1 + \phi^2 \cdot \kappa - \phi \cdot H - \langle N, N_h \rangle^2}{\langle N, N_h \rangle^2} \right| \\ &\leq \frac{\|\phi\|_{L^\infty(M)}^2 \tilde{\kappa} + \|\phi\|_{L^\infty(M)} \tilde{H} + |\langle N, N_h \rangle^2 - 1|}{\langle N, N_h \rangle^2} \\ &\leq Ch^2, \end{aligned}$$

de donde se concluye (2.20).

Para la tercera cota, primero notemos que de (2.20) se concluye que $\frac{1}{\sqrt{\det A}}$ es $1 + \mathcal{O}(h^2)$. Ahora, como A es simétrica, entonces $\sqrt{\det A} A^{-1} - Id$ también lo es; además,

$$\operatorname{tr}(\sqrt{\det A} A^{-1} - Id) = \frac{\operatorname{tr}(A - Id) + 2(1 - \sqrt{\det A})}{\sqrt{\det A}},$$

con lo cual se concluye (2.21). \square

Observación 2.12. Si A es el tensor de distorsión métrica y $\bar{A} := \sqrt{\det A} A^{-1}$ entonces,

$$\|\bar{A} - Id\|_\infty = \|\bar{A}\|_\infty - 1. \quad (2.22)$$

Basta verificar dicha igualdad puntualmente.

2.6. Cambio de variable

En esta sección mostramos cómo el tensor de distorsión métrica aparece cuando se hace el *pullback* de una función definida en M_h .

Teorema 2.13. Sean M una superficie suave en \mathbb{R}^3 , M_h una superficie poliédrica cercanamente inscrita a M , $\varphi \in H_0^1(M_h)$ y $\hat{\varphi} := \varphi \circ \Phi$. Entonces se satisface la siguiente igualdad

$$\|\nabla_h \varphi\|_{L^1(M_h)} = \int_M \sqrt{\langle A^{-1} \nabla \hat{\varphi}, \nabla \hat{\varphi} \rangle_g} \sqrt{\det A} \, d\operatorname{vol}. \quad (2.23)$$

Demostración. Al usar el Teorema de cambio de variable se obtiene

$$\begin{aligned} \|\nabla_h \varphi\|_{L^1(M_h)} &= \int_{M_h} \langle \nabla_h \varphi, \nabla_h \varphi \rangle^{1/2} \, dvol \\ &= \int_M \left(\langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle^{1/2} \circ \Phi \right) |\det d\Phi| \, dvol \end{aligned}$$

Ahora, si $x \in M$ y $y = \Phi(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \left(\langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle^{1/2} \circ \Phi \right) (x) &= \langle \nabla \varphi(\Phi(x)), \nabla \varphi(\Phi(x)) \rangle^{1/2} \\ &= \langle \nabla \varphi(y), \nabla \varphi(y) \rangle^{1/2} \\ &= \langle d\Psi^*(\nabla \hat{\varphi}(x)), d\Psi^*(\nabla \hat{\varphi}(x)) \rangle_g^{1/2} \\ &= \langle (d\Psi \circ d\Psi^*)(\nabla \hat{\varphi}(x)), \nabla \hat{\varphi}(x) \rangle_g^{1/2} \\ &= \langle A^{-1}(\nabla \hat{\varphi}(x)), \nabla \hat{\varphi}(x) \rangle_g^{1/2}; \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle^{1/2} \circ \Phi = \langle A^{-1}(\nabla \hat{\varphi}), \nabla \hat{\varphi} \rangle_g^{1/2}. \quad (2.24)$$

Además,

$$\begin{aligned} |\det(d\Phi)| &= \sqrt{(\det(d\Phi))^2} \\ &= \sqrt{\det(d\Phi)\det(d\Phi)} \\ &= \sqrt{\det(d\Phi^*)\det(d\Phi)} \\ &= \sqrt{\det(d\Phi^*d\Phi)} \\ &= \sqrt{\det A}. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.14. Sean $u \in C^2(M)$ y $\hat{u}_h \in \hat{S}_h$ el interpolante de u . Entonces

$$\|\nabla_h(u \circ \Psi - u_h)\|_{L^\infty(T_h)} = \left\| \sqrt{\langle A^{-1}\nabla(u - \hat{u}_h), \nabla(u - \hat{u}_h) \rangle_g} \right\|_{L^\infty(T)} \quad (2.25)$$

Demostración. Primero recordemos que $\hat{u}_h \circ \Psi = u_h$. Así,

$$\|\nabla_h(u \circ \Psi - u_h)\|_{L^\infty(T_h)} = \|\nabla_h(u \circ \Psi - (\hat{u}_h \circ \Psi))\|_{L^\infty(T_h)} = \|\nabla_h((u - \hat{u}_h) \circ \Psi)\|_{L^\infty(T_h)}.$$

Luego, usando la igualdad 2.24 obtenemos lo siguiente (tomando $y = \Phi(x)$)

$$\begin{aligned} \|\nabla_h(u \circ \Psi - u_h)\|_{L^\infty(T_h)} &= \sup_{y \in T_h} \|\nabla_h(u \circ \Psi - u_h)(y)\| \\ &= \sup_{y \in T_h} \|\nabla_h((u - \hat{u}_h) \circ \Psi)(y)\| \\ &= \sup_{x \in T} \|\nabla_h((u - \hat{u}_h) \circ \Psi)(\Phi(x))\| \\ &= \sup_{x \in T} \langle \nabla_h((u - \hat{u}_h) \circ \Psi), \nabla_h((u - \hat{u}_h) \circ \Psi) \rangle^{1/2} \circ \Phi(x) \\ &= \sup_{x \in T} \langle A^{-1} \nabla((u - \hat{u}_h)(x)), \nabla((u - \hat{u}_h)(x)) \rangle_g^{1/2} \\ &= \left\| \langle A^{-1} \nabla((u - \hat{u}_h), \nabla((u - \hat{u}_h)) \rangle_g^{1/2} \right\|_{L^\infty(T)} \end{aligned}$$

□

2.7. Estimativos de error entre u y \hat{u}_h

Establecemos cotas de error entre una función definida en M y su interpolante lineal en M . También establecemos una cota entre los gradientes de estas dos funciones. Dichas cotas son importantes con el fin de establecer los teoremas de aproximación del operador Laplace-Beltrami en el caso diferenciable y en el caso discreto (respectivamente).

Lema 2.15. Sean M una superficie suave, M_h una superficie poliédrica cercanamente inscrita a M y $u \in C^2(M)$. Entonces,

$$|u \circ \Psi|_{C^2(T_h)} \leq C(|u|_{C^2(T)} + h|u|_{C^1(T)}). \quad (2.26)$$

La prueba de este lema es análoga a la del lema 3.3.1 en [19].

Lema 2.16. Sea $u \in C^2(M)$ y sea $\hat{u}_h \in \hat{S}_h$ el interpolante de u . Entonces

$$\|\nabla(u - \hat{u}_h)\|_{L^\infty(M)} \leq Ch(|u|_{C^2(M)} + h|u|_{C^1(M)}), \quad (2.27)$$

$$\|u - \hat{u}_h\|_{L^\infty(M)} \leq Ch^2(|u|_{C^2(M)} + h|u|_{C^1(M)}), \quad (2.28)$$

donde las constantes C sólo dependen de M y de la regularidad de forma ρ de M_h .

Demostración. Consideremos un triángulo T_h de M_h y denotemos por T a $\Psi(T_h)$. Notemos que $u_h|_{T_h}$ es la función lineal que interpola a u en los vértices de T_h . Además, es claro que $u \circ \Psi|_{T_h} \in C^2(T_h)$. Veamos que

$$\|\nabla(u - \hat{u}_h)\|_{L^\infty(T)} \leq \|A\|_\infty^{1/2} \left\| \sqrt{\langle A^{-1} \nabla(u - \hat{u}_h), \nabla(u - \hat{u}_h) \rangle_g} \right\|_{L^\infty(T)}. \quad (2.29)$$

Definamos $f := u - \hat{u}_h$. Entonces, por la observación A.8 (ver Apéndice), obtenemos

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_g &= \langle \nabla f, \nabla f \rangle_g^{1/2} \\ &\leq \|A\|_\infty^{1/2} \langle A^{-1} \nabla f, \nabla f \rangle_g^{1/2} \\ &\leq \|A\|_\infty^{1/2} \left\| \langle A^{-1} \nabla f, \nabla f \rangle_g^{1/2} \right\|_{L^\infty(T)}; \end{aligned}$$

de donde se concluye lo afirmado. Además, por la ecuación (2.25), se tiene que

$$\|\nabla(u - \hat{u}_h)\|_{L^\infty(T)} \leq \|A\|_\infty^{1/2} \|\nabla_h(u \circ \Psi - u_h)\|_{L^\infty(T_h)}.$$

Por tanto, como ésta cota se satisface para cada triángulo de M_h se concluye (2.27).

En cuanto a la segunda desigualdad, primero observemos que $\|u - \hat{u}_h\|_{L^\infty(T)} = \|u \circ \Psi - u_h\|_{L^\infty(T_h)}$. Ahora, sean x en el interior de T_h , v un vértice de T_h , $L(v, x)$ el segmento de recta que une a v con x y $w := \frac{x-v}{\|x-v\|}$, un vector unitario en la dirección de $L(v, x)$; entonces, por el Teorema del Valor Medio (ver [1]) existe un $z \in L(v, x)$ tal que $|w \cdot ((u \circ \Psi - u_h)(v)) - (u \circ \Psi - u_h)(x)| = |w \cdot (\nabla_h(u \circ \Psi - u_h)(z))(x - v)|$; de donde se concluye que

$$\begin{aligned} |(u \circ \Psi - u_h)(x)| &= |(\nabla_h(u \circ \Psi - u_h)(z))(x - v)| \\ &\leq \|(\nabla_h(u \circ \Psi - u_h)(z))\| \|x - v\| \\ &\leq \|(\nabla_h(u \circ \Psi - u_h)(z))\| h \\ &\leq \|(\nabla_h(u \circ \Psi - u_h))\|_{L^\infty(T_h)} h. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\|u \circ \Psi - u_h\|_{L^\infty(T_h)} \leq \|(\nabla_h(u \circ \Psi - u_h))\|_{L^\infty(T_h)} h.$$

Ahora, por la desigualdad (1.7) se tiene que

$$\|u \circ \Psi - u_h\|_{L^\infty(T_h)} \leq Ch^2 |u \circ \Psi|_{C^2(T_h)}.$$

Finalmente, por la desigualdad (2.26), se concluye (2.28). \square

Capítulo 3

Aproximación del operador Laplace-Beltrami

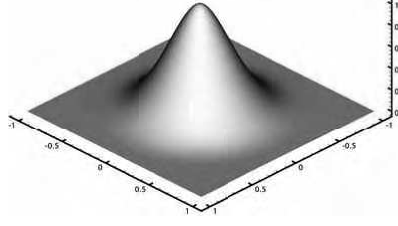
El objetivo en este capítulo es aproximar puntualmente el operador Laplace-Beltrami Δu a través del interpolante lineal de u , u_h . Para tal fin, definimos las funciones r -locales y comparamos Δu con $\Delta_h u \circ \Psi$, donde Δ_h es el operador Laplace-Beltrami en M_h .

3.1. Funciones r -locales

Definición 3.1. Sea \mathcal{M} una superficie suave o poliédrica en \mathbb{R}^3 , y sea C_D una constante positiva. Para cualquier $x \in \mathcal{M}$ y para todo $r \in \mathbb{R}^+$, decimos que una función $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es r -local en x (con respecto a C_D) si satisface las siguientes cinco condiciones

- (D1) $\varphi \in H_0^1(\mathcal{M})$
- (D2) $\varphi(y) \geq 0$ para todo $y \in \mathcal{M}$,
- (D3) $\varphi(y) = 0$ para todo $y \in \mathcal{M}$ con $d_{\mathcal{M}}(x, y) \geq r$,
- (D4) $\|\varphi\|_{L^1} = 1$,
- (D5) $|\varphi|_{W^{1,1}} \leq \frac{C_D}{r}$.

Observación 3.2. Las funciones que satisfacen (D2), (D3) y (D4) se pueden usar para aproximar el valor $f(x)$ de cualquier función continua f a través de la integral



$\int_M f \varphi \, dvol$. Por otra parte, notemos que (D3) implica que el soporte de φ está contenido en $B_r(x)$.

Lema 3.3. Sea $\varphi \in L^1(M)$ tal que satisface las condiciones (D2), (D3) y (D4) de la definición anterior para algún $x \in M$ y cierto $r \in \mathbb{R}^+$, y sea $f \in C^1(M)$. Entonces, se cumple el siguiente acotamiento

$$\left| f(x) - \int_M f \varphi \, dvol \right| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty(M)} r. \quad (3.1)$$

Demostración. Por (D4) y (D3) tenemos que

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \int_M f \varphi \, dvol \right| &= \left| \int_M (f(x) - f) \varphi \, dvol \right| \\ &= \left| \int_{B_r(x)} (f(x) - f) \varphi \, dvol \right| \\ &\leq \sup_{y \in B_r(x)} |f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Ahora, para cualquier y en la bola geodésica $B_r(x)$ alrededor de x , sea γ una geodésica minimizante (con velocidad unitaria) que conecta a x con y ; entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \int_\gamma \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle_g \, dt \right| \\ &\leq \int_\gamma |(\nabla f(\gamma(t)))| |\dot{\gamma}(t)| \, dt \\ &\leq \|\nabla f\|_{L^\infty(M)} \int_\gamma |\dot{\gamma}(t)| \, dt \\ &= \|\nabla f\|_{L^\infty(M)} l(\gamma) \\ &\leq \|\nabla f\|_{L^\infty(M)} r, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se cumple porque ∇f es continua en M y M es compacto. Así, se concluye que $\sup_{y \in B_r(x)} |f(x) - f(y)| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty(M)} r$. \square

Observación 3.4. Algunas funciones r -locales tienen un orden de aproximación mayor. Existen funciones r -locales φ que satisfacen

$$\left| f(x) - \int_M f \varphi \, dvol \right| \leq C \|f\|_{C^2(M)} r^2 \quad (3.2)$$

3.2. Estimativo de error entre Δ y $\hat{\Delta}_h$

Como el objetivo es aproximar el operador Laplace-Beltrami (definido en M) de una función definida en M a través del operador Laplace-Beltrami (definido en M_h) aplicado al *pullback* de su interpolante lineal, definimos un operador auxiliar en M , denotado $\hat{\Delta}_h$, para comparar los dos operadores bajo la norma de los operadores lineales continuos.

Definición 3.5. Definimos

$$\langle \hat{\Delta}_h u | \varphi \rangle := \langle \Delta_h u \circ \Psi | \varphi \circ \Psi \rangle$$

para cualquier $u, \varphi \in H_0^1(M)$. Explícitamente, el operador $\hat{\Delta}_h$ está dado por

$$\langle \hat{\Delta}_h u | \varphi \rangle = - \int_M \langle A^{-1} \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g \sqrt{\det A} \, dvol,$$

Proposición 3.6. La distancia de Δ y $\hat{\Delta}_h$, en la norma del espacio de operadores lineales continuos de $H_0^1(M)$ a $H^{-1}(M)$, está acotado superiormente por

$$\|\Delta - \hat{\Delta}_h\|_{Op} = \sup_{u, \varphi} |\langle (\Delta - \hat{\Delta}_h) u | \varphi \rangle| \leq \|\sqrt{\det A} A^{-1} - Id\|_\infty;$$

donde el supremo es tomado sobre todo $u, \varphi \in H_0^1(M)$ con $\|u\|_{H^1} = 1$ y $\|\varphi\|_{H^1} = 1$.

Demostración. Sean u, φ como antes. Primero notemos que

$$\|u\|_{H^1(M)} = \int_M \|\nabla u\|_g \, dvol = \|\nabla u\|_{L^1(M)} \quad y \quad \|\varphi\|_{H^1(M)} = \int_M \|\nabla \varphi\|_g \, dvol = \|\nabla \varphi\|_{L^1(M)}.$$

Ahora, usando la desigualdad de Hölder y recordando la igualdad 1.10 obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| \langle \Delta - \hat{\Delta}_h u | \varphi \rangle \right| &= \left| \langle \Delta u | \varphi \rangle - \langle \hat{\Delta}_h u | \varphi \rangle \right| \\
&= \left| \int_M (\langle A^{-1} \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g \sqrt{\det A} - \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g) \, dvol \right| \\
&= \left| \int_M (\langle \sqrt{\det A} A^{-1} \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g - \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g) \, dvol \right| \\
&= \left| \int_M \langle (\sqrt{\det A} A^{-1} - Id) \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g \, dvol \right| \\
&\leq \int_M \left| \langle (\sqrt{\det A} A^{-1} - Id) \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g \right| \, dvol \\
&\leq \left\| (\sqrt{\det A} A^{-1} - Id) \nabla u \right\|_{L^1(M)} \|\nabla \varphi\|_{L^1(M)} \\
&\leq \left\| \sqrt{\det A} A^{-1} - Id \right\|_{\infty} \|\nabla u\|_{L^1(M)} \|\nabla \varphi\|_{L^1(M)} \\
&= \left\| \sqrt{\det A} A^{-1} - Id \right\|_{\infty};
\end{aligned}$$

de donde se concluye lo afirmado. \square

Nota 3.7. Observe que, por el Lema 1, se concluye que $\|\Delta - \hat{\Delta}_h\|_{Op}$ es $\mathcal{O}(h^2)$.

3.3. Aproximación del operador Laplace-Beltrami

Teorema 3.8. Sea M una superficie suave en \mathbb{R}^3 y sea u una función suave en M . Entonces, existe un $h_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que para cualquier par (M_h, h) , donde M_h es una superficie poliédrica cercanamente inscrita a M y $h < h_0$, y cualquier función φ que sea r -local en un punto $y \in M_h$, se satisface el siguiente acotamiento

$$|\Delta u(x) - \langle \Delta_h u_h | \varphi \rangle| \leq C \left(r + \frac{h}{r} \right), \quad (3.3)$$

donde $u_h \in S_h(M_h)$ es el interpolante de u y $x = \Psi(y)$. Si $\hat{\varphi}$ satisface (3.2), entonces se cumple

$$|\Delta u(x) - \langle \Delta_h u_h | \varphi \rangle| \leq C \left(r^2 + \frac{h}{r} \right). \quad (3.4)$$

Las constantes C sólo dependen de M, u, h_0 , la regularidad de forma ρ de M_h y la constante C_D de φ .

Demostración. Como el operador Δ_h y las funciones u_h y φ están definidas en M_h lo primero que haremos es llevarlas a M y, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\begin{aligned}
|\Delta u(x) - \langle \Delta_h u_h | \varphi \rangle| &= \left| \Delta u(x) - \langle \hat{\Delta}_h \hat{u}_h | \hat{\varphi} \rangle \right| = \\
&\left| \Delta u(x) - \langle \Delta u | \hat{\varphi} \rangle + \langle \Delta u | \hat{\varphi} \rangle - \langle \Delta \hat{u}_h | \hat{\varphi} \rangle + \langle \Delta \hat{u}_h | \hat{\varphi} \rangle - \langle \hat{\Delta}_h \hat{u}_h | \hat{\varphi} \rangle \right| \\
&\leq |\Delta u(x) - \langle \Delta u | \hat{\varphi} \rangle| + |\langle \Delta(u - \hat{u}_h) | \hat{\varphi} \rangle| + \left| \langle (\Delta - \hat{\Delta}_h) \hat{u}_h | \hat{\varphi} \rangle \right|. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Ahora, encontremos cotas para los últimos tres términos de la ecuación (3.5). Para el primer sumando, como el soporte de φ está contenido en la bola geodésica $B_r(y)$ (propiedades (D2) y (D3) de la definición 3.1) entonces, por el Lema A.10, el soporte de $\hat{\varphi}$ está contenido en $B_{\|A^{-1}\|_\infty^{1/2} r}(x)$. Ahora, de la ecuación (2.22) se concluye que $\|A^{-1}\|_\infty^{1/2} \leq C$; por tanto, existe una constante C , que sólo depende de M y h_0 , tal que $\hat{\varphi}$ satisface la propiedad (D3) de la definición 3.1 para x y el radio Cr . Así, $\hat{\varphi}/\|\hat{\varphi}\|_{L^1}$ satisface las hipótesis del lema 3.3 y, usando el operador fuerte de Laplace-Beltrami, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| \Delta u(x) - \frac{1}{\|\hat{\varphi}\|_{L^1}} \langle \Delta u | \hat{\varphi} \rangle \right| &= \left| \Delta u(x) - \frac{1}{\|\hat{\varphi}\|_{L^1}} \int_M \Delta u \hat{\varphi} \, dvol \right| \\
&= \left| \Delta u(x) - \int_M \Delta u \left(\frac{\hat{\varphi}}{\|\hat{\varphi}\|_{L^1}} \right) \, dvol \right| \\
&\leq Cr
\end{aligned}$$

donde la constante $C = \|\nabla(\Delta u)\|_{L^\infty}$ (por el Lema 3.3).

Por otro lado, aplicando el Teorema de Cambio de variable y el hecho de que

$\|\varphi\|_{L^1(M_h)} = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left| \|\hat{\varphi}\|_{L^1(M)} - 1 \right| &= \left| \int_M \langle \hat{\varphi}, \hat{\varphi} \rangle_g^{1/2} \, dvol - 1 \right| \\
&= \left| \int_{M_h} \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2} \sqrt{\det A} \, dvol - 1 \right| \\
&= \left| \int_{M_h} \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2} \sqrt{\det A} \, dvol - \int_{M_h} \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2} \, dvol \right| \\
&= \left| \int_{M_h} \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2} (\sqrt{\det A} - 1) \, dvol \right| \\
&\leq \|\sqrt{\det A} - 1\|_{L^\infty(M)} \left| \int_{M_h} \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2} \, dvol \right| \\
&= \|\sqrt{\det A} - 1\|_{L^\infty(M)} \\
&\leq Ch^2,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene por el Lema 2.11. Además, se cumple que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\|\hat{\varphi}\|_{L^1(M)}} \langle \Delta u | \hat{\varphi} \rangle \right| &= \left| \frac{1}{\|\hat{\varphi}\|_{L^1(M)}} \int_M \Delta u \hat{\varphi} \, dvol \right| \\
&\leq \frac{1}{\|\hat{\varphi}\|_{L^1(M)}} \int_M |\Delta u| |\hat{\varphi}| \, dvol \\
&= \frac{1}{\|\hat{\varphi}\|_{L^1(M)}} \int_M |\Delta u| \hat{\varphi} \, dvol \\
&\leq \max_{enM} |\Delta u| \frac{1}{\|\hat{\varphi}\|_{L^1(M)}} \int_M \hat{\varphi} \, dvol \\
&= C,
\end{aligned}$$

donde C es una constante. Por tanto, se concluye que:

$$\begin{aligned}
|\Delta u(x) - \langle \Delta u | \hat{\varphi} \rangle| &\leq \left| \Delta u(x) - \frac{1}{\|\hat{\varphi}\|_{L^1}} \langle \Delta u | \hat{\varphi} \rangle \right| + \left| (1 - \|\hat{\varphi}\|_{L^1}) \frac{1}{\|\hat{\varphi}\|_{L^1}} \langle \Delta u | \hat{\varphi} \rangle \right| \\
&\leq C(r + h^2).
\end{aligned}$$

Si $\hat{\varphi}$ satisface (3.2), entonces usamos éste acotamiento en lugar del lema 3.3 y obtenemos

$$|\Delta u(x) - \langle \Delta u | \hat{\varphi} \rangle| \leq C(r^2 + h^2).$$

Para establecer una cota para el segundo sumando primero recordemos que, como φ es r -local, entonces, por (D5), se tiene que $|\varphi|_{W^{1,1}(M_h)} \leq C\frac{1}{r}$, pero

$$|\varphi|_{W^{1,1}(M_h)} = \int_{M_h} \|\nabla_h \varphi\|_{\mathbb{R}^3} \, dvol = \int_{M_h} \langle \nabla_h \varphi, \nabla_h \varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \, dvol = \|\nabla_h \varphi\|_{L^1(M_h)}.$$

Así pues, mostremos que la cota $\|\nabla_h \varphi\|_{L^1(M_h)} \leq C\frac{1}{r}$ se satisface para $\|\nabla \hat{\varphi}\|_{L^1(M)}$. En efecto, por la observación A.9 en el Apéndice y el Teorema 2.13,

$$\begin{aligned} \|\nabla \hat{\varphi}\|_{L^1(M)} &= \int_M \|\nabla \hat{\varphi}\|_g \, dvol \\ &\leq \|(\det A)^{-1} A\|_{\infty}^{1/2} \int_M \sqrt{\langle A^{-1} \nabla \hat{\varphi}, \nabla \hat{\varphi} \rangle} \sqrt{\det A} \, dvol \quad (3.6) \\ &= \|(\det A)^{-1} A\|_{\infty}^{1/2} \|\nabla_h \varphi\|_{L^1(M_h)} \\ &\leq C\frac{1}{r}, \end{aligned}$$

En consecuencia, aplicando la desigualdad de Hölder y el lema 2.16, obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle \Delta(u - \hat{u}_h) | \hat{\varphi} \rangle| &= \left| \int_M \langle \nabla(u - \hat{u}_h), \nabla \hat{\varphi} \rangle_g \, dvol \right| \\ &\leq \|\nabla(u - \hat{u}_h)\|_{L^\infty(M)} \|\nabla \hat{\varphi}\|_{L^1(M)} \\ &\leq C\frac{h}{r}. \end{aligned}$$

Una cota para el tercer sumando se sigue de los lemas 2.11 y 2.16,

$$\begin{aligned} \left| \langle (\Delta - \hat{\Delta}_h) \hat{u}_h | \hat{\varphi} \rangle \right| &= \left| \int_M \langle (Id - \sqrt{\det AA^{-1}}) \nabla \hat{u}_h, \nabla \hat{\varphi} \rangle_g \, dvol \right| \\ &\leq \|Id - \sqrt{\det AA^{-1}}\|_{\infty} \|\nabla \hat{u}_h\|_{L^\infty(M)} \|\nabla \hat{\varphi}\|_{L^1(M)} \\ &\leq C\frac{h^2}{r}. \end{aligned}$$

□

Colorario 3.9. Bajo las hipótesis del Teorema 3.8, si $r = \sqrt{h}$, entonces

$$|\Delta u(x) - \langle \Delta_h u_h | \varphi \rangle| \leq C\sqrt{h}.$$

Si $\hat{\varphi}$ satisface (3.2) y $r = h^{\frac{1}{3}}$, entonces

$$|\Delta u(x) - \langle \Delta_h u_h | \varphi \rangle| \leq Ch^{\frac{2}{3}}.$$

3.4. Operadores Laplace-Beltrami discretos

Definición 3.10. Sea n el número de vértices de M_h y denotemos por $\{v_1, \dots, v_n\}$ al conjunto de vértices. Sabemos que cualquier función $u_h \in M_h$ está determinada en forma única por sus valores en los vértices. Al vector $(u_h(v_1), \dots, u_h(v_n))$ lo llamaremos *el vector nodal* y nos permite describir los operadores Laplace-Beltrami discretos al especificar sus acciones sobre éstos.

Sea $\{\varphi_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ un conjunto de funciones tales que cada φ_i es r -local en el vértice $v_i \in M_h$. Entonces, definimos el operador Laplace-Beltrami discreto $\Delta_h^{\{\varphi_i\}} : S_h \rightarrow S_h$, asociado a $\{\varphi_i\}$, por

$$\begin{pmatrix} u_h(v_1) \\ u_h(v_2) \\ \dots \\ u_h(v_n) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \langle \Delta_h u_h | \varphi_1 \rangle \\ \langle \Delta_h u_h | \varphi_2 \rangle \\ \dots \\ \langle \Delta_h u_h | \varphi_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Definición 3.11. Para cada φ_i existe una constante $C_{D,i}$ tal que (D5) de la definición 3.1 se satisface. En adelante, nos referiremos al máximo de las $C_{D,i}$ como la constante C_D de $\{\varphi_i\}$.

Teorema 3.12. Sean M una superficie suave en \mathbb{R}^3 y u una función suave definida en M . Entonces, existe un $h_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que para cualquier par M_h , con M_h cercanamente inscrita a M y con $h < h_0$, y un conjunto de funciones $\{\varphi_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ tal que cada φ_i es r -local en el vértice $v_i \in M_h$ con $r = \sqrt{h}$, se satisface que

$$\sup_{y \in M_h} \left\| \Delta u(\Psi(y)) - \Delta_h^{\{\varphi_i\}} u_h(y) \right\| \leq C\sqrt{h}, \quad (3.7)$$

donde $u_h \in S_h(M_h)$ es el interpolante de u . Si cada $\hat{\varphi}_i$ satisface (3.2) y $r = h^{1/3}$, se tiene que

$$\sup_{y \in M_h} \left\| \Delta u(\Psi(y)) - \Delta_h^{\{\hat{\varphi}_i\}} u_h(y) \right\| \leq Ch^{2/3}. \quad (3.8)$$

Las constantes C sólo dependen de M, u, h_0 , la regularidad de forma ρ de M_h y la constante C_D de $\{\varphi_i\}$.

Demostración. Sean $v \in S_h$ y $\hat{v} \in \hat{S}_h$ los interpolantes de la función Δu en M_h y M , respectivamente. Entonces, por (2.28), el error de aproximación satisface

$$\|\Delta u - \hat{v}\|_{L^\infty(M)} \leq Ch^2(|\Delta u|_{C^2(M)} + h|\Delta u|_{C^1(M)}). \quad (3.9)$$

Por otro lado, el Teorema 3.8 implica que

$$|\Delta u(\Psi(v_i)) - \langle \Delta_h u_h | \varphi_i \rangle| \leq C\sqrt{h} \quad (3.10)$$

para todo i . Ahora bien, como $v(v_i) = \hat{v}(v_i) = \Delta u(\Psi(v_i))$, tenemos que

$$\|v - \Delta_h^{\{\varphi_i\}} u_h\|_{L^\infty(M_h)} \leq C\sqrt{h}; \quad (3.11)$$

ésto por la definición de S_h y \hat{S}_h .

Así, si $y \in M_h$ y $x = \Phi(y)$

$$\begin{aligned} \left| \Delta u(\Psi(y)) - \Delta_h^{\{\varphi_i\}} u_h(y) \right| &\leq |\Delta u(\Psi(y)) - \hat{v}(x)| + |\hat{v}(x) - v(y)| + \left| v(y) - \Delta_h^{\{\varphi_i\}} u_h(y) \right| \\ &\leq \|\Delta u - \hat{v}\|_{L^\infty(M)} + \left\| v - \Delta_h^{\{\varphi_i\}} u_h \right\|_{L^\infty(M_h)} \\ &\leq Ch^2(|\Delta u|_{C^2(M)} + h|\Delta u|_{C^1(M)}) + C\sqrt{h} \\ &\leq C\sqrt{h}. \end{aligned}$$

Note que la última desigualdad se cumple al ser h suficientemente pequeño. \square

3.5. Representación matricial

El objetivo de esta sección es mostrar cómo la matriz cotangente, denotada por S , puede usarse para obtener la matriz de representación de $\Delta_h^{\{\varphi_i\}}$, denotada por L , con respecto a la base nodal. Sean M_h una malla y v_1, \dots, v_n sus vértices. Por simplicidad supondremos que las funciones $\varphi_i \in S_h(M_h)$. Luego, dada una función $u_h \in S_h(M_h)$ podemos escribirla, por la ecuación (1.6), en la forma

$$u_h = \sum_{j=1}^n u_h(v_j) \sigma_j.$$

Similarmente, φ_i tiene la forma

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n \varphi_i(v_k) \sigma_k.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_h u_h | \varphi_i \rangle &= \left\langle \Delta_h \sum_{j=1}^n u_h(v_j) \sigma_j \middle| \sum_{k=1}^n \varphi_i(v_k) \sigma_k \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{j,k=1}^n \Delta_h u_h(v_j) \sigma_j \middle| \varphi_i(v_k) \sigma_k \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^n u_h(v_j) \varphi_i(v_k) \langle \Delta_h \sigma_j | \sigma_k \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \varphi_i(v_k) \langle \Delta_h \sigma_j | \sigma_k \rangle \right) u_h(v_j). \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Recordando que S es la matriz de entradas $S_{jk} := \frac{1}{2}(\cot \alpha_{jk} + \cot \beta_{jk})$, veamos que

$$-S_{kj} = \langle \Delta_h \sigma_j | \sigma_k \rangle.$$

En efecto,

$$\langle \Delta_h \sigma_j | \sigma_k \rangle = - \int_{M_h} \langle \nabla \sigma_j, \nabla \sigma_k \rangle \, dvol.$$

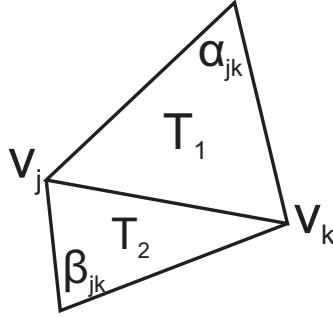


Figura 3.1: v_j, v_k son vértices adyacentes cuya arista pertenece a los triángulos T_1 y T_2 .

Para $j \neq k$, si los vértices v_j y v_k no son adyacentes, entonces la intersección de los soportes de σ_j y σ_k es vacía y en este caso se tiene que $\langle \Delta_h \sigma_j | \sigma_k \rangle = 0$. Así, supongamos que v_j y v_k son adyacentes y sean T_1 y T_2 los dos triángulos que tienen

a la arista $v_j v_k$ como uno de sus lados y sean α_{jk}, β_{jk} los ángulos internos de estos que son opuestos a dicha arista.

Notemos que $\|\nabla\sigma_j\| = \frac{1}{h_2}$ y $\|\nabla\sigma_k\| = \frac{1}{h_1}$ en T_1 ; luego

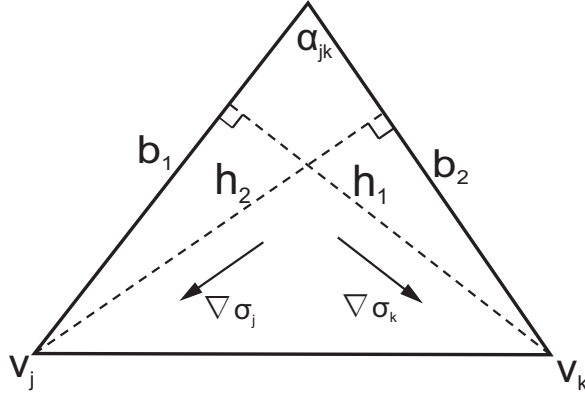


Figura 3.2: Gradientes de σ_j y σ_k

$$\int_{T_1} \langle \nabla\sigma_j, \nabla\sigma_k \rangle \, dvol = \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_1} \cos \alpha_{jk} \text{Area}(T_1) = \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_1} \cos \alpha_{jk} \frac{1}{2} b_1 b_2 \sin \alpha_{jk} = \frac{1}{2} \cot \alpha_{jk}.$$

Similarmente,

$$\int_{T_2} \langle \nabla\sigma_j, \nabla\sigma_k \rangle \, dvol = \frac{1}{2} \cot \beta_{jk}.$$

Por tanto, se tiene que

$$\langle \Delta_h \sigma_j | \sigma_k \rangle = -\frac{1}{2} (\cot \alpha_{jk} + \cot \beta_{jk}) = -S_{jk} = -S_{kj} = \langle \Delta_h \sigma_k | \sigma_j \rangle.$$

Para $j = k$, sea $\Delta = \{j \mid v_j \text{ y } v_k \text{ son adyacentes}\}$, entonces

$$\langle \Delta_h \sigma_k | \sigma_k \rangle = - \int_{M_h} \langle \nabla\sigma_k, \nabla\sigma_k \rangle \, dvol = - \sum_{j \in \Delta} \int_{T_j} \langle \nabla\sigma_j, \nabla\sigma_k \rangle \, dvol.$$

Así, queda mostrado que

$$-S_{kj} = \langle \Delta_h \sigma_j | \sigma_k \rangle.$$

Ahora, sea R la matriz con entradas $R_{ij} = \varphi_i(v_j)$. Entonces, de la ecuación (3.12) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta_h u_h | \varphi_i \rangle &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n -R_{ik} S_{kj} \right) u_h(v_j) \\
 &= \sum_{j=1}^n (-R_i S^j) u_h(v_j) \\
 &= -R_i S \begin{pmatrix} u_h(v_1) \\ u_h(v_2) \\ \dots \\ u_h(v_n) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por tanto, por la definición de $\Delta_h^{\{\varphi_i\}}$, se concluye que

$$L = -RS.$$

Apéndice A

Resultados auxiliares

Aquí mostraremos hechos relevantes que se usan en algunos resultados de los Capítulos.

A.1. Norma de operadores

Denotaremos un operador entre espacios vectoriales y su representación matricial de igual forma.

Definición A.1. Sean P y Q espacios vectoriales de dimensiones n y m con productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ y $T : P \rightarrow Q$ un operador. Definimos la *norma de operador* de T por

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Q}{\|x\|_P}.$$

Proposición A.2. Sea $T : P \rightarrow Q$ un operador entre espacios vectoriales de dimensión finita con productos interiores $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$, respectivamente. Entonces se tiene que

$$\langle x, x \rangle_P^{1/2} \leq \|T^{-1}\| \langle T^*Tx, x \rangle_P^{1/2},$$

donde T^* denota el operador adjunto de T .

Demostración. Sabemos que la norma de T es

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Q}{\|x\|_P} = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle Tx, Tx \rangle_Q^{1/2}}{\langle x, x \rangle_P^{1/2}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle T^*Tx, x \rangle_P^{1/2}}{\langle x, x \rangle_P^{1/2}},$$

entonces, para cualquier $x \in P$, $x \neq 0$, se tiene que

$$\langle Tx, Tx \rangle_Q^{1/2} \leq \|T\| \cdot \langle x, x \rangle_P^{1/2}. \quad (\text{A.1})$$

Similarmente,

$$\|T^{-1}\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|T^{-1}y\|_P}{\|y\|_Q} = \sup_{y \neq 0} \frac{\langle T^{-1}y, T^{-1}y \rangle_P^{1/2}}{\langle y, y \rangle_Q^{1/2}} = \sup_{y \neq 0} \frac{\langle (T^{-1})^* T^{-1}y, y \rangle_Q^{1/2}}{\langle y, y \rangle_Q^{1/2}},$$

así, para cualquier $y \in Q$, $y \neq 0$, se tiene que

$$\langle T^{-1}y, T^{-1}y \rangle_P^{1/2} \leq \|T^{-1}\| \cdot \langle y, y \rangle_Q^{1/2}.$$

Por tanto, para $x \in P$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle_P^{1/2} &= \langle T^{-1}(Tx), T^{-1}(Tx) \rangle_P^{1/2} \\ &\leq \|T^{-1}\| \cdot \langle Tx, Tx \rangle_Q^{1/2} \\ &= \|T^{-1}\| \cdot \langle T^*Tx, x \rangle_P^{1/2}. \end{aligned}$$

□

Ahora, estableceremos una relación entre la norma de operador $\|\cdot\|_{Op}$ y la norma tensorial $\|\cdot\|_\infty$.

Definición A.3. (Espectro de una matriz.)

Sea B una matriz arbitraria. El espectro de B es el conjunto de todos sus valores propios y se denota por $\sigma(B)$.

Definición A.4. (Radio espectral de una matriz.)

Sea B una matriz arbitraria. El radio espectral de B es el máximo de los valores absolutos de sus valores propios y se denota por $r_\sigma(B) := \max_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|$.

Definición A.5. (Matriz Hermitiana.)

Decimos que una matriz arbitraria B es Hermitiana si $B^* = B$, donde B^* denota la matriz *adjunta*.

Proposición A.6. Sean P y Q espacios vectoriales de dimensión n con productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ y $T : P \rightarrow Q$ un operador. Entonces,

$$\|T\| = \sqrt{r_\sigma(T^*T)}. \quad (\text{A.2})$$

Demostración. Como la matriz T^*T es Hermitiana, sabemos que todos sus valores propios son no negativos (ver [2, Teorema 7.5, p 478-479.]). Sean éstos

$$0 \leq \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$$

contados según su multiplicidad; y sean $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ los correspondientes vectores propios, los cuales tomamos tales que $\|v^{(j)}\|_P = 1$, para $j = 1, \dots, n$. Así, dado $v \in P$ sabemos que

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v^{(j)}.$$

Por lo tanto se cumple que

$$T^*Tv = \sum_{j=1}^n \alpha_j T^*Tv^{(j)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j v^{(j)}.$$

En consecuencia tenemos que

$$\begin{aligned} \|Tv\|_Q^2 &= \langle Tv, Tv \rangle_Q \\ &= \langle v, T^*Tv \rangle_P \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j v^{(j)}, \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j v^{(j)} \right\rangle_P \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_j \alpha_i \alpha_j \langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle_P \\ &\leq \lambda_1 \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle_P \\ &= \lambda_1 \langle v, v \rangle_P \\ &= \lambda_1 \|v\|_P^2, \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\|T\|^2 \leq \lambda_1.$$

Para obtener la igualdad, basta tomar $v = v^{(1)}$; pues en éste caso se tiene que

$$\|Tv\|_Q^2 = \langle v, T^*Tv \rangle_P = \langle v^{(1)}, \lambda_1 v^{(1)} \rangle_P = \lambda_1.$$

Con lo cual se prueba lo afirmado. \square

Observación A.7. Dada una matriz B , como B^*B es una matriz Hermitiana se tiene que B^*B y BB^* tienen los mismos valores propios no nulos (ver [2, Problema 19, p. 500]) y, por lo tanto, $r_\sigma(B^*B) = r_\sigma(BB^*)$.

A.2. Cálculos auxiliares

Observación A.8. Para utilizar la Proposición A.2 en la prueba del Lema 2.16 (de la desigualdad (2.29)) tomamos $T := d\Psi^*$ y $f \in C^2(M)$. Así, $T^* = d\Psi$ y $T^*T = A^{-1}$. Por otro lado, $T^{-1} = (d\Psi^*)^{-1} = (d\Psi^{-1})^* = d\Phi^*$ y $(T^{-1})^* = d\Phi$. Por lo tanto, $(T^{-1})^*(T^{-1}) = d\Phi \circ d\Phi^*$. En consecuencia, por la observación A.7 y la igualdad (A.2), se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, \nabla f \rangle_g^{1/2} &\leq \|T^{-1}\| \langle T^*T \nabla f, \nabla f \rangle_g^{1/2} \\
&= \|d\Phi^*\| \langle T^*T \nabla f, \nabla f \rangle_g^{1/2} \\
&= \sqrt{r_\sigma(d\Phi \circ d\Phi^*)} \langle T^*T \nabla f, \nabla f \rangle_g^{1/2} \\
&= \sqrt{r_\sigma(d\Phi^* \circ d\Phi)} \langle T^*T \nabla f, \nabla f \rangle_g^{1/2} \\
&= \|A\|_\infty^{1/2} \langle T^*T \nabla f, \nabla f \rangle_g^{1/2} \\
&= \|A\|_\infty^{1/2} \langle A^{-1} \nabla f, \nabla f \rangle_g^{1/2}
\end{aligned}$$

Observación A.9. Para usar la proposición A.2 en el Teorema 3.8 (de la desigualdad (3.6)) tomamos $T := \sqrt{\det Ad\Psi^*}$ y $F := \nabla \hat{\varphi}$, un campo vectorial tangencial suave en M . Así, $T^* = \sqrt{\det Ad\Psi}$ y $T^*T = (\det A)A^{-1}$. De donde, $T^{-1} = ((\det A)^{1/2}d\Psi^*)^{-1} = (\det A)^{-1/2}(d\Psi^{-1})^* = (\det A)^{-1/2}d\Phi^*$ y $(T^{-1})^* = (\det A)^{-1/2}d\Phi$. Con lo cual, $(T^{-1})^*(T^{-1}) = (\det A)^{-1}d\Phi \circ d\Phi^*$. Por lo tanto, recordando la observación A.7 y usando la igualdad (A.2), se tiene

$$\begin{aligned}
\langle F, F \rangle_g^{1/2} &\leq \|T^{-1}\| \langle T^*TF, F \rangle_g^{1/2} \\
&= \|(\det A)^{-1/2}d\Phi^*\| \langle T^*TF, F \rangle_g^{1/2} \\
&= \sqrt{r_\sigma((\det A)^{-1}(d\Phi \circ d\Phi^*))} \langle T^*TF, F \rangle_g^{1/2} \\
&= \sqrt{r_\sigma((\det A)^{-1}(d\Phi^* \circ d\Phi))} \langle T^*TF, F \rangle_g^{1/2} \\
&= \sqrt{r_\sigma((\det A)^{-1}A)} \langle T^*TF, F \rangle_g^{1/2} \\
&= \|(\det A)^{-1}A\|_\infty^{1/2} \langle T^*TF, F \rangle_g^{1/2} \\
&= \|(\det A)^{-1}A\|_\infty^{1/2} \langle (\det A)A^{-1}F, F \rangle_g^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ahora, al integrar sobre M se tiene

$$\begin{aligned}
\int_M \langle F, F \rangle_g^{1/2} \, d\text{vol} &\leq \int_M \|(\det A)^{-1} A\|_\infty^{1/2} \langle (\det A) A^{-1} F, F \rangle_g^{1/2} \, d\text{vol} \\
&= \|(\det A)^{-1} A\|_\infty^{1/2} \int_M \langle (\det A) A^{-1} F, F \rangle_g^{1/2} \, d\text{vol} \\
&= \|(\det A)^{-1} A\|_\infty^{1/2} \int_M \langle A^{-1} F, F \rangle_g^{1/2} \sqrt{\det A} \, d\text{vol}
\end{aligned}$$

Lema A.10. Sean M una superficie suave en \mathbb{R}^3 , M_h es una superficie poliédrica cercanamente inscrita a M , φ una función r -local en un punto $y \in M_h$ y $\hat{\varphi} := \varphi \circ \Phi$. Supongamos que el soporte de φ está contenido en $B_r(y)$. Entonces, el soporte de $\hat{\varphi}$ está contenido en $B_{\|A^{-1}\|_\infty^{1/2} r}(x)$, donde $y = \Phi(x)$.

Demostración. Sean $z \in B_r(y)$ arbitrario y $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una geodésica minimizante que une a y con z . Sea $\hat{\gamma} := \Psi(\gamma)$. Entonces, como Ψ es un difeomorfismo se tiene, usando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
l(\hat{\gamma}) &= \int_{\hat{\gamma}} \left\langle \frac{d}{dt}(\hat{\gamma}(t)), \frac{d}{dt}(\hat{\gamma}(t)) \right\rangle_g^{1/2} dt = \int_\gamma \left\langle \frac{d}{dt}(\Psi \circ \gamma)(t), \frac{d}{dt}(\Psi \circ \gamma)(t) \right\rangle_g^{1/2} dt \\
&= \int_\gamma \left\langle d\Psi\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right), d\Psi\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right) \right\rangle_g^{1/2} dt \leq \|d\Psi\| \int_\gamma \left\langle \frac{d}{dt}\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t) \right\rangle_g^{1/2} dt \\
&= \|d\Psi\| \int_\gamma \left\| \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right) \right\| dt = \|A^{-1}\|_\infty^{1/2} l(\gamma) \leq \|A^{-1}\|_\infty^{1/2} r,
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se cumple por (A.1). □

Bibliografía

- [1] Apostol Tom M. *Mathematical Analysis, second edition*, Addison-Wesley, (1974), p. 355.
- [2] Atkinson Kendall E. *An introduction to Numerical Analysis, second edition*, John Wiley and sons, (1989).
- [3] Belkin M., Niyogi P. *Towards a Theoretical Foundation for Laplacian-Based Manifold Methods* *Journal of Computer and System Sciences* **74** (2008) 1289–1308.
- [4] Belkin M., Sun J. y Wang Y. *Discrete Laplace operators on meshed surfaces* En *Proceedings of the twenty-fourth annual symposium on Computational Geometry*, editado por M. Teillaud, ACM, 2008, pp. 278-287.
- [5] Bobenko A. I., Schröder P., Sullivan J. M., Ziegler G. M.(Eds). *Discrete Differential Geometry*, Birkhäuser, 2008.
- [6] Bobenko A. y Springborn B. *A discrete Laplace-Beltrami operator for simplicial surfaces*, *Discrete Comput Geom.* **38** (2007) 740-756.
- [7] Boothby William M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Revised Second Edition*, Academic Press, (2003), p. 288-307.
- [8] Botsch M., Kobbelt L., Pauly M., Alliez P. y Levy B. *Polygon Mesh Processing* AK Peters, 2010.
- [9] Brenner Susanne C. y Scott Ridgway L. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Third Edition*, Springer, (2000), p. 105-106.
- [10] Dey Tamal K. *Curve and Surface Reconstruction, Algorithms with Mathematical Analysis*, Cambridge University Press, (2006), p. 45-49.
- [11] Do Carmo M.P. *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, (1992), p. 51-52.

- [12] Foote R. L. *Regularity of the distance function. Proceedings of the American Mathematical Society*, (1984), p. 153-155.
- [13] Gromov M. *Metric Structures for Riemannian and non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, (2006), p. 9.
- [14] Hildebrandt K. y Polthier K. *On approximation of the Laplace-Beltrami operator and the Willmore energy of surfaces* En *Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry Processing*, editado por M. Botsch y S. Schaefer, 2011.
- [15] Lee John M. *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, (2000), p. 399.
- [16] Morvan Jean-Marie. *Generalized curvatures*, Springer, (2008), p. 53.
- [17] Rosenberg S. *The Laplacian on a Riemannian Manifold*, Cambridge University Press, 1997.
- [18] Shifrin Theodore. *Differential Geometry: A first course in Curves and Surfaces*, (2007), p. 44-46.
- [19] Wardetzky M. *Discrete Differential Operators on polyhedral surfaces-Convergence and approximation. Ph.D. Dissertation*, Universidad libre de Berlín, (2006), p. 69-71.