LA PROPIEDAD DEL NÚCLEO ENDOMORFO PARA ÁLGEBRAS DE STONE FINITAS

YHON JAIRO CORTÉS FUENTES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2009.

LA PROPIEDAD DEL NÚCLEO ENDOMORFO PARA ÁLGEBRAS DE STONE FINITAS

YHON JAIRO CORTÉS FUENTES

Trabajo final presentado, como requisito parcial para optar al título de
MAGISTER SCIENTIAE - MATEMÁTICAS

Director: HERNANDO GAITÁN ORJUELA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2009.

Título: La propiedad del núcleo endomorfo para álgebras de Stone finitas.

Title: The endomorphism kernel property in finite Stone algebras.

Resumen:
En este trababajo se estudian las álgebras de Stone finitas que tienen la propiedad del núcleo endomorfo, se dan condiciones suficientes en un álgebra de Stone finita para que tenga la propiedad del núcleo endomorfo. También se muestran algunos casos generales en los cuales un álgebra de Stone finita no tiene la propiedad .

Abstract: In this report, it be study the finite Stone algebras having the endomorphism kernel property, we give sufficient conditions in finite Stone algebras to they have the endomorphism kernel property. Also show some general cases in which a finite Stone algebras does not have the property.

Palabras Claves: Núcleo endomorfo, álgebras de Stone, álgebras de Okham, espacios de Ockham.

Keywords: Endomorphism kernel, Stone algebras, Ockham algebras, Ockham space.

Firma del director:

Hernando Gaitán.

Autor: Yhon Jairo Cortés fuentes.

A mi familia.

Quiero expresar mis agradecimientos a todas aquellas personas que de una u otra manera, contribuyeron a la realización de este sueño.

Contenido

Introducción

Dada un álgebra $\mathbf{A}$, el conjunto de sus endomorfismos forma un monoide bajo la composición ordinaria de funciones. Este monoide proporciona mucha información sobre el álgebra. Por ejemplo, las álgebras Booleanas se encuentran caracterizadas por sus respectivos monoides de endomorfismos, esto es: dos álgebras Booleanas son isomorfas si y solo si sus monoides de endomorfismos son isomorfos. Este resultado es presentado independientemente en [3], [7] y [12]. Por otro lado existen ciertas estructuras, las álgebras de Kleene, de las cuales hay un número infinito no isomorfas que comparten el mismo monoide de endomorfismos. Igual cosa ocurre con las álgebras de Morgan, estas álgebras son generalizaciones naturales de las álgebras de Boole. Otras de las generalizaciones de las álgebras de Boole son las álgebras de Stone y las álgebras de Ockham, (ver definiciones en la sección 1.1) las cuales serán estudiadas en el presente trabajo.

Una congruencia θ sobre $\mathbf{A}$, es una relación de equivalencia sobre $\mathbf{A}$ que satisface la siguiente propiedad de sustitución: para cada operación fundamental f de rango n si

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n) \in \theta \quad \text{entonces} \quad (f(a_1, a_2, \ldots, a_n), f(b_1, b_2, \ldots, b_n)) \in \theta.$$

Un par de congruencias que hacen parte de cualquier álgebra $\mathbf{A}$ son: la congruencia universal $A \times A$ y la congruencia nula $\{(x, x) \mid x \in \theta\}$.

Una congruencia θ sobre un álgebra $\mathbf{A}$, es llamada un núcleo endomorfo si existe un endomorfismo α de $\mathbf{A}$ tal que $\theta = \ker(\alpha)$. Un álgebra $\mathbf{A}$, se dice que tiene la propiedad del núcleo endomorfo si cada congruencia en $\mathbf{A}$ diferente de la congruencia universal es el núcleo de un endomorfismo en $\mathbf{A}$. Esta propiedad es presentada por T.S Blyth, J. Fang y H. J Silva en [1]. En este artículo los autores estudian esta propiedad en la clase de las álgebras de Ockham y caracterizan las álgebras de Morgan finitas que no son Booleanas (álgebras de Kleene) que tienen la propiedad del núcleo endomorfo. Para tal caracterización, los autores hacen uso de la dualidad de Priestley especializada en las álgebras de Ockham, considerando en primer lugar las álgebras de Morgan como álgebras de Ockham, muestran los espacios de Morgan como espacios de Ockham, y por último describen la estructura de las álgebras de Morgan finitas con la propiedad del núcleo endomorfo.

En el presente trabajo se estudiarán las álgebras de Stone finita con la propiedad del núcleo endomorfo. Las álgebras de Stone han sido estudiadas extensamente en gran parte de la literatura como retículos distributivos pseudocomplementados. Vistas en este contexto, las álgebras de Stone son retículos distributivos con pseudocomplemento que satisfacen la identidad de Stone, (ver definición en la sección 1.1.) Para este trabajo, la estrategia a seguir será considerar las álgebras de Stone como álgebras de Ockham, luego identificar los espacios de Ockham cuyas álgebras duales son álgebra de Stone y así, hacer un seguimiento a lo expuesto en [1], este trabajo será presentado en el capítulo 1. Luego, en el capítulo 2 se presentarán algunos resultados generales sobre la propiedad del núcleo endomorfo para álgebras de Morgan finitas. En el capítulo 3 se darán condiciones necesarias en las álgebras de Stone finitas para que tengan la propiedad del núcleo endomorfo. En el proyecto original se pretendía dar condiciones necesarias y suficientes sobre las álgebras de Stone finita con la propiedad del núcleo endomorfo, desafortunadamente, aunque las álgebras de Morgan y las álgebras de Stone son muy similares, en el caso de las álgebras de Stone cuyo espacio dual tiene dos elementos maximales el caso es intratable, lo que no sucede con las álgebras de Morgan finitas.

Los conceptos y resultados sobre retículos distributivos y Algebra universal utilizados en este trabajo son tomados de [2] y [6]. Además se asume que el lector esta familiarizado con la dualidad de Priestley para retículos distributivos (ver [8], [9] y [10]).

Capítulo 1

Álgebra universal

En este capítulo preliminar se presentarán algunos aspectos de la teoría básica del álgebra universal, los cuales serán de gran utilidad para el desarrollo de los capítulos posteriores. En gran parte se adopta la notación de [6].

Sea A un conjunto no vacio y n un entero no negativo. Una operación n-aria sobre A es una función f de A^n en A; el entero n es llamado la aridad (o rango) de f. Note que si $n = 0$ entonces $A^n = \{\emptyset\}$, así, una operación 0-aria, (o sin argumentos) se reduce a la selección de un elemento de A.

Sea F un conjunto de símbolos (llamados símbolos para operaciones) y sea τ una función de F en el conjunto de los enteros no negativos. Un álgebra $\mathbf{A}$ de tipo τ es un par $\langle A, F^{\mathbf{A}} \rangle$, donde A es un conjunto no vacio y $F^{\mathbf{A}} = \{f^{\mathbf{A}} : f \in F\}$, donde cada $f^{\mathbf{A}}$ es una operación sobre A. Los miembros de $F^{\mathbf{A}}$ son llamados *operaciones fundamentales* de $\mathbf{A}$ y el conjunto A es llamado el *universo* ó *conjunto base* de $\mathbf{A}$. El tipo es comunmente notado como τ y es la $\circ(\tau)$-upla constituida por las aridades de los elementos de F. Un álgebra $\mathbf{A}$ se dice *trivial* si tiene un solo elemento.
Podemos ver pues un álgebra como un conjunto no vacio, dotado de un número finito de operaciones. El tipo del álgebra nos dice cuantas operaciones tendremos y las aridades de cada una de ellas.

Algunos ejemplos de álgebras son:

- **Los grupos**. Un grupo $\mathbf{G}$, se pueden ver como un álgebra $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ de tipo $(2, 1, 0)$, pues cuenta con una operación binaria $(\cdot)$, una operación unaria $(^{-1})$ y una operacion nula 1.

- **Los anillos**. Un anillo $\mathbf{A}$, es un álgebra de tipo $(2, 2, 1, 0)$ con las operaciones $(+, \cdot, -.0)$ en donde $(+)$, $(\cdot)$ son ambas operaciones binarias, $(-)$ es una operación unaria y denota la existencia de inverso para la suma y 0 es una operación nula y denota el elemento identidad para la suma.

- **Los retículos**. Un conjunto no vacio $\mathbf{L}$ acompañado de dos operaciones binarias $\wedge, \vee$ es llamado retículo, si para cada x, y, z en $\mathbf{L}$ se satisfacen las siguientes identidades:

(a) $x \vee y = y \vee x$

(b) $x \wedge y = y \wedge x$

(c) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(d) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(e) $x \vee x = x$

(f) $x \wedge x = x$

(g) $x = x \wedge (x \vee y)$

(h) $x = x \vee (x \wedge y)$.

El retículo $\mathbf{L}$, es pues un álgebra $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ de tipo $(2, 2)$ pues cuenta con dos operaciones binarias.
Si el retículo satisface:

(1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Diremos que $\mathbf{L}$ es un *retículo distributivo*. Además si para cada $S \subseteq \mathbf{L}$ existe $\bigvee S = \mathrm{Sup} S$ y $\bigwedge S = \mathrm{Inf} S$, diremos que $\mathbf{L}$ es un *retículo completo*.

- **Retículos acotados**. Un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ con dos operaciones binarias y dos operaciones nulas es un retículos acotado si satisface:

  (a) $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ es un retículo,

  (b) $x \wedge 0 = 0$; $x \vee 1 = 1$, para cada $x \in L$.

- **Álgebras Booleanas**. Un álgebra Booleana es un álgebra $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ de tipo (2,2,1,0,0), pues cuenta con dos operaciones binarias, una unaria y dos operaciones nulas las cuales satisfacen:

  (a) $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ es un retículo distributivo acotado,

  (b) $x \wedge x' = 0$; $x \vee x' = 1$, para cada $x \in L$.

Dos álgebras se dicen *similares* si son del mismo tipo.

1.1 Subálgebras

Definición 1.1. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos álgebras similares, se dice que* $\mathbf{B}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{A}$ *si* $B \subseteq A$ *y cada operación fundamental de* $\mathbf{B}$*, es la restricción de la correspondiente operación de* $\mathbf{A}$*. Es decir, para cada operación* $f \in F$, $f^{\mathbf{B}}$ *es* $f^{\mathbf{A}}$ *restringida a* B.

Si $\mathbf{B}$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$ escribiremos $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$. Un *subuniverso* de $\mathbf{A}$ es un subconjunto B de A el cual es cerrado bajo todas las operaciones fundamentales de $\mathbf{A}$. Es decir, si f es una operación fundamental de $\mathbf{A}$ de rango n y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B$ entonces $f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$. Es claro pues que un subconjunto no vacio B de $\mathbf{A}$ es el universo de una subálgebra si y solo si es cerrado bajo todas las operaciones fundamentales. Así, si $\mathbf{B}$ es una subálgebra de $\mathbf{A}$ entonces B es un subuniverso de $\mathbf{A}$.

1.2 Imágenes Homomorfas

Definición 1.2. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos álgebras similares. Una función*

$$\alpha : A \longrightarrow B$$

es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ *si para cada operación fundamental* $f \in F$ *de rango* n*, y para* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$*, se tiene*

$$\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \alpha(a_2), \ldots, \alpha(a_n)).$$

Homomorfismos inyectivos son llamados *monomorfismos.* Homomorfismos sobreyectivos son llamados *epimorfismos* . En el caso que α sea uno a uno y sobre diremos que α es un *isomorfismos* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Además si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ el homomorfismo es llamado *endomorfismo* y el isomorfismo *automorfismo.*

Dado un monomorfismo $\alpha : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, se puede verificar sin dificultad que $\alpha(\mathbf{A})$ es un subuniverso de $\mathbf{B}$.

Definición 1.3. *Si* $\alpha : A \longrightarrow B$ *es un monomorfismo,* $\alpha(\mathbf{A})$ *denota la subálgebra de* $\mathbf{B}$ *con universo* $\alpha(\mathbf{A})$.

Es fácil verificar que si $\alpha : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $\beta : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ son homomorfismos, entonces, la *composición* $\beta \circ \alpha$ es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$.

Definición 1.4. *Sea* $\alpha : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo, entonces el núcleo de* α*, denotado* $\ker(\alpha)$*, es definido por:*

$$\ker(\alpha) = \{(a, b) \in A^2 \mid \alpha(a) = \alpha(b)\}.$$

Una *congruencia* sobre un álgebra $\mathbf{A}$, es una relación de equivalencia θ sobre A, tal que para cada operación fundamental $f^{\mathbf{A}}$ de rango n, y elementos $a_i, b_i \in A$, con $1 \leq i \leq n$, se satisface la siguiente *propiedad de sustitución* :

$$\text{Si } (a_i, b_i) \in \theta \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ entonces } (f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)) \in \theta.$$

El conjunto de todas las congruencias en un álgebra $\mathbf{A}$ es denotado por Con$\mathbf{A}$. La congruencia más pequeña $\Delta_{\mathbf{A}}$ y la más grande $\nabla_{\mathbf{A}}$ son definidas:

$$\Delta_{\mathbf{A}} = \{(x, x) \in A^2 \mid x \in A\}$$

$$\nabla_{\mathbf{A}} = A \times A.$$

Es claro que para cada $\theta \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$, $\Delta_{\mathbf{A}} \subseteq \theta \subseteq \nabla_{\mathbf{A}}$. La relación $\Delta_{\mathbf{A}}$ es conocida como la congruencia *nula* en $\mathbf{A}$, Y la relación $\nabla_{\mathbf{A}}$ es llamada congruencia *universal*.
Se puede verificar facilmenete que si $\{\theta_i : i \in I\} \subseteq \mathrm{Con}\mathbf{A}$ entonces $\bigcap_{i\in I} \theta_i \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$, pero en general $\theta_1 \cup \theta_2$ no siempre es una congruencia sobre $\mathbf{A}$. El conjunto $\mathrm{Con}\mathbf{A}$ es un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión. Este orden resulta ser reticular; es decir, $\langle \mathrm{Con}\mathbf{A}, \wedge, \vee \rangle$ es un retículo, donde

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$$

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \cap\{\theta \in \mathrm{Con}\mathbf{A} : \theta_1 \cup \theta_2 \subseteq \theta\}.$$

Un álgebra $\mathbf{A}$ cuyo retículo de congruencias consta únicamente de la congruencia nula y de la congruencia universal se llama un *álgebra simple*.

Teorema 1.5. *Sea* $\alpha : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfismo. Entonces* $\ker(\alpha)$ *es una congruencia en* $\mathbf{A}$.

Prueba: Claramente $\ker(\alpha)$ es una relación de equivalencia. Sea $f^{\mathbf{A}}$ una operación fundamental de rango n, si $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \ker(\alpha)$ entonces $\alpha(a_i) = \alpha(b_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$ luego

$$\begin{aligned} \alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= f^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \alpha(a_2), \ldots, \alpha(a_n)) \\ &= f^{\mathbf{B}}(\alpha(b_1), \alpha(b_2), \ldots, \alpha(b_n)) \\ &= \alpha f^{\mathbf{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)) \in \ker(\alpha)$. □

El *cociente* $\mathbf{A}/\theta$ de un álgebra $\mathbf{A}$, por una congruencia θ sobre ella, es el álgebra con universo A/θ, y en la cual para cada operacion fundamental de rango n se define la operación $f^{\mathbf{A}/\theta}$ como sigue:

$$f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, a_2/\theta, \ldots, a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)/\theta.$$

Para $\mathbf{A}$, un álgebra de tipo τ y $\theta \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$ usaremos la siguiente notación. Dado $a \in A$,

$$a/\theta = \{b \in A : (a, b) \in \theta\}.$$

Luego

$$\mathbf{A}/\theta = \{a/\theta : a \in A\}.$$

$$a/\theta = b/\theta \Longleftrightarrow (a, b) \in \theta,$$

esta construcción nos proporciona inmediatamente el homomorfismo natural entre un álgebra $\mathbf{A}$ y su respectiva álgebra cociente $\mathbf{A}/\theta$, dado como sigue:

$$\mu_\theta : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\theta$$

$$\mu_\theta(a) = a/\theta.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \ker(\mu_\theta) &\Longleftrightarrow \mu_\theta(a) = \mu_\theta(b) \\
&\Longleftrightarrow a/\theta = b/\theta \\
&\Longleftrightarrow (a,b) \in \theta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos $\ker(\mu_\theta) = \theta$. Note que μ_θ es sobreyectiva, es decir, μ_θ es un epimorfismo.

Teorema 1.6. *Sea $h : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un epimorfismo, entonces existe un isomorfismo $\bar{h} : \mathbf{A}/\ker \mathbf{h} \longrightarrow \mathbf{B}$.*

Prueba: Definamos $\bar{h}$ por la fórmula

$$\bar{h}(a/\ker h) = h(a).$$

Veamos que $\bar{h}$ está bien definida: $a/\ker h = b/\ker h \Leftrightarrow (a,b) \in \ker h \Leftrightarrow h(a) = h(b)$. Ahora veamos que $\bar{h}$ es un homomorfismo: Sea f una operación fundamental digamos que de rango n. Entonces:

$$\begin{aligned}
\bar{h}(f^{\mathbf{A}/\ker \mathbf{h}}(a_1/\ker h, \ldots, a_n/\ker h)) &= \bar{h}(f^{\mathbf{A}}(a_1), \ldots, (a_n))/\ker h) \\
&= h(f^{\mathbf{A}}((a_1), \ldots, (a_n)) \\
&= f^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \\
&= f^{\mathbf{B}}(\bar{h}(a_1/\ker h), \ldots, \bar{h}(a_n/\ker h)).
\end{aligned}$$

Para ver que $\bar{h}$ es un isomorfismo debemos verificar:
1). $\bar{h}$ es uno a uno: $\bar{h}(a/\ker h) = \bar{h}(b/\ker h)$ entonces $h(a) = h(b)$ luego $(a,b) \in \ker h$ por lo tanto, $a/\ker h = b/\ker h$. 2). $\bar{h}$ es sobreyectiva: Debido a que h es sobreyectiva se tiene entonces que $\bar{h}$ es sobreyectiva, por lo tanto $\bar{h}$ así definida resulta ser un isomorfismo entre $\mathbf{A}/\ker \mathbf{h}$ y $\mathbf{B}$.

□

Si $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$, diremos que $(a,b) \in \theta_1 \circ \theta_2 \Leftrightarrow \exists\, c \in A$ tal que $(a,c) \in \theta_1$ y $(c,b) \in \theta_2$.

Definición 1.7. *Un álgebra $\mathbf{A}$ es de congruencias distributivas si Con$\mathbf{A}$ es un retículo distributivo. Además si $\theta_1, \theta_2 \in Con\mathbf{A}$ y*

$$\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$$

diremos que θ_1 y θ_2 permutan. $\mathbf{A}$ es de congruencias permutables si cada par de congruencias sobre $\mathbf{A}$ permutan.

Teorema 1.8. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra y sean* θ_1 *y* $\theta_2 \in Con\mathbf{A}$ *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$

(b) $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$

(c) $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$.

Prueba: Ver [6] pag 44.

□

1.3 Productos directos

Definición 1.9. *Sea* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *una familia de álgebras similares. El producto directo* $\mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$ *es el álgebra con universo* $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$*, tal que para cada* $f \in F$ *de fango* n *y* $(a_{1i})_{i\in I}, (a_{2i})_{i\in I}, \ldots, (a_{ni})_{i\in I} \in \prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$*,*

$$f^{\mathbf{A}}((a_{1i})_{i\in I}, (a_{2i})_{i\in I}, \ldots, (a_{ni})_{i\in I}) = f^{\mathbf{A}_i}(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})_{i\in I}.$$

En otras palabras,

$$f^{\mathbf{A}}((a_{1i})_{i\in I}, (a_{2i})_{i\in I}, \ldots, (a_{ni})_{i\in I})_j = f^{\mathbf{A}_j}(a_{1j}, \ldots, a_{nj}).$$

Si $I = \{1, 2\}$, $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ dos álgebras similares. El producto directo $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ es el álgebra cuyo universo es el conjunto $A_1 \times A_2$, y para f operación fundamental de rango n y para $a_i \in A_1,\ a'_i \in A_2$ con $1 \leq i \leq n$.

$$f^{\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2}((a_1, a'_1), \ldots, (a_n, a'_n)) = (f^{\mathbf{A}_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}_2}(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)).$$

Definición 1.10. *Un álgebra* $\mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$*, se dice que tiene congruencias factorizables si cada* $\theta \in Con\mathbf{A}$ *es de la forma* $\prod_{i=1}^{n} \theta_i$*, donde* $\theta_i \in Con\mathbf{A}_i$ *para cada* i*.*

Definición 1.11. *La función*

$$\pi_i : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i,\ i \in \{1, 2\}$$

definida por

$$\pi_i((a_1, a_2)) = a_i$$

es llamada la función proyección en la i-ésima coordenada.

Se puede probar sin dificultad que si $\mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$, entonces la función

$$\pi_j : \prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{A}_j$$

es un homomorfismo.

Definición 1.12. *Una congruencia θ en $\mathbf{A}$ es una congruencia factor si existe una congruencia θ^* en $\mathbf{A}$ tal que:*

$$\theta \cap \theta^* = \Delta_A,$$

$$\theta \vee \theta^* = \nabla_A,$$

y además θ conmuta con θ^*, es decir

$$\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta.$$

El par θ, θ^* es llamado par de congruencias factor en $\mathbf{A}$.

Definición 1.13. *Un álgebra $\mathbf{A}$, es directamente irreducible si $\mathbf{A}$ no es isomorfa a un producto directo de dos álgebras no triviales. Equivalentemente, $\mathbf{A}$ no tiene un par de congruencias factor aparte del par $\Delta_{\mathbf{A}}$ y $\nabla_{\mathbf{A}}$.*

Teorema 1.14. *Si θ, θ^* es un par de congruencias factor en $\mathbf{A}$, entonces*

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{A}/\theta \times \mathbf{A}/\theta^*$$

bajo el isomorfismo

$$\alpha(a) = (a/\theta,\ a/\theta^*).$$

Teorema 1.15. *$\mathbf{A}$ es directamente irreducible si y solo si el único par de congruencias factor en $\mathbf{A}$ es $\Delta_{\mathbf{A}}$ y $\nabla_{\mathbf{A}}$.*

Prueba: Ver [6] pagínas 57 y 58.

□

1.4 Variedades

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras similares denotaremos por:

- $H(\mathcal{K})$ = todas las álgebras que son isomorfas a imágenes homomórficas de miembros de $\mathcal{K}$.
- $S(\mathcal{K})$ = todas las álgebras que son isomorfas a subálgebras de miembros de $\mathcal{K}$.
- $I(\mathcal{K})$ = todas las álgebras que son isomorfas a miembros de $\mathcal{K}$.
- $P(\mathcal{K})$ = todas las álgebras isomorfas a productos directos de miembros de $\mathcal{K}$.

Definición 1.16. *Una clase no vacia $\mathcal{V}$ de álgebras similares es llamada variedad si es cerrada bajo la formación de imágenes homomórficas, subálgebras y productos directos. En otras palabras $\mathcal{V}$ es variedad si*

$$\mathcal{V} = H(\mathcal{V}) = S(\mathcal{V}) = P(\mathcal{V}).$$

Denotemos por $\mathrm{Alg}(\tau)$ todas las álgebras de tipo τ y además

$$\mathcal{L}_\tau = \{\mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es variedad, } \mathcal{V} \subseteq \mathrm{Alg}(\tau)\}.$$

Sea $\{\mathcal{V}_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}_\tau$ Se verifica fácilmente que $\bigcap \mathcal{V}_i \in \mathcal{L}_\tau$. Luego si $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathcal{L}_\tau$ entonces se define

$$\mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$$
$$\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2 = \bigcap\{\mathcal{K} \in \mathcal{L}_\tau : \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{K}\}.$$

Luego $\langle \mathcal{L}_\tau, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo. Como la intersección arbitraria de variedades es una variedad, se sigue del Teorema 4.2 capítulo I de [6] que Con$\mathbf{A}$ es un retículo completo. Una subvariedad es una subclase de una variedad, cerrada bajo las operaciones H, S y P, luego el conjunto de todas las subvariedades contenidas en una variedad dada $\mathcal{V}$ forman un retículo.

1.5 Álgebras de Ockham

Definición 1.17. *Un álgebra de Ockham* $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge, f, 0, 1\rangle$, *es un álgebra de tipo* $(2, 2, 1, 0, 0)$ *tal que* $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$, *es un retículo distributivo acotado en el cual para cada* x, y, *en* L *se satisfacen las siguientes leyes:*

i) $f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$.

ii) $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$.

iii) $f(0) = f(1); f(1) = f(0)$.

En lo que sigue denotaremos el álgebra de Ockham como $(\mathbf{L}, f)$.

Definición 1.18. *Un retículo pseudocomplementado es un álgebra* $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge, *, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 1, 0, 0)$ *tal que* $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo acotado y la operación unaria* $*$ *llamada pseudocomplemento satisface:*

$$x \wedge y = 0 \quad \textit{si y solo si} \quad y \leq x^*.$$

Un *álgebra de Stone* es un retículo distributivo pseudocomplementado en el cual se satisface la llamada identidad de Stone,

$$x^* \vee x^{**} = 1.$$

Las álgebras de Stone pueden ser vistas como álgebras de Ockham. Para esto basta verificar que las álgebras de Stone satisfacen las leyes i), ii) y iii). Consideremos primero el siguiente Lema.

Lema 1.19. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de Stone y sean* $a, b \in L$, *entonces:*

1) $a \wedge a^* = a^* \wedge a^{**} = 0$

2) $a \wedge b = 0 \Longleftrightarrow a^{**} \wedge b = 0$

3) $a \leq b \Longrightarrow b^* \leq a^*$

4) $a^{***} = a^*$

5) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$

6) $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$.

Prueba: 1) Se tiene gracias a la definición de a^*.

2) Si $a \wedge b = 0$, entonces $b \leq a^*$, luego $a^{**} \wedge b \leq a^{**} \wedge a^* = 0$ por lo tanto $a^{**} \wedge b = 0$. Reciprocamente si $a^{**} \wedge b = 0$ entonces $a \wedge b \leq a^{**} \wedge b = 0$ luego $a \wedge b = 0$.

3) $a \leq b$ implica $a \wedge b^* \leq b \wedge b^* = 0$. Por lo tanto $b^* \leq a^*$.

4) Como $a \wedge a^* = 0$ se tiene que $a \leq (a^*)^*$. Así $a^{***} \leq a^*$ por 3. Ahora como $a^* \wedge a^{**} = 0$ se deduce entonces que $a^* \leq a^{***}$.

5) Como $a \leq (a \vee b)$ y $b \leq (a \vee b)$, por 3) $(a \vee b)^* \leq a^*$ y $(a \vee b)^* \leq b^*$ luego $(a \vee b)^* \leq a^* \wedge b^*$. Por otro lado

$$\begin{aligned}(a^* \wedge b^*) \wedge (a \vee b) &= (a^* \wedge b^* \wedge a) \vee (a^* \wedge b^* \wedge b) \\ &= (0 \wedge b^*) \vee (0 \wedge a^*) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Entonces, $a^* \wedge b^* \leq (a \vee b)^*$. Por lo tanto $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$.

6) Dado que

$$\begin{aligned}(a^* \vee b^*) \wedge (a \wedge b) &= [(a^* \vee b^*) \wedge a] \wedge [(a^* \vee b^*) \wedge b] \\ &= [(a \wedge a^*) \vee (b^* \wedge a)] \wedge [(a^* \wedge b) \vee (b^* \wedge b)] \\ &= [0 \vee (b^* \wedge a)] \wedge [(a^* \wedge b) \vee 0] \\ &= b^* \wedge a \wedge a^* \wedge b \\ &= 0.\end{aligned}$$

Entonces, $a^* \vee b^* \leq (a \wedge b)^*$. Ahora supongamos $c \wedge a \wedge b = 0$ para $c \in \mathbf{L}$ entonces por 2) $c \wedge a^{**} \wedge b = 0$ luego $c \wedge a^{**} \leq b^*$, como $c = c \wedge 1 = c \wedge (a^* \vee a^{**}) = (c \wedge a^*) \vee (c \wedge a^{**}) \leq a^* \vee b^*$.
Por ser $c \wedge a \wedge b = 0$ para $c \in \mathbf{L}$, entonces $c \leq (a \wedge b)^*$ luego $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$.

$\square$

Lema 1.20. *Toda álgebra de Stone es un álgebra de Ockham*

Prueba: Por Lema 1.19 tenemos que las álgebras de Stone, satisfacen las leyes $i)$ y $ii)$ de las álgebras de Ockham. Además dado que $\mathbf{L}$ es acotado y que $0 \wedge d = 0$ para cada $d \in L$ entonces $d \leq 0^*$ de donde tenemos $0^* = 1$. Ahora para cada $a \in L$, tenemos $a^* \vee a^{**} = 1$ entonces $(a^* \vee a^{**})^* = 1^*$ esto es $a^{**} \wedge a^{***} = 1^*$ por Lema 1.19 parte 1) y 4) tenemos $a^{**} \wedge a^* = 0$ luego $1^* = 0$.

□

Lema 1.21. *Sea* $(\mathbf{L}, f)$ *un álgebra de Ockham, si para* $x, y \in \mathbf{L}$ *se cumple* $x \wedge f(x \wedge y) = x \wedge f(y)$*. Entonces* $(\mathbf{L}, f)$ *es pseudocomplementada.*

Prueba:

$$\begin{aligned} x \wedge y = 0 &\Longleftrightarrow x \wedge f(x \wedge y) = x \wedge 1 = x = x \wedge f(y) \\ &\Longleftrightarrow x \leq f(y). \end{aligned}$$

□

Nótese que si un álgebra de Ockham $(\mathbf{L}, f)$ satisface la identidad

$$a \wedge f(a) = 0 \tag{1.1}$$

entonces $f(a) \vee f(f(a)) = 1$, es decir, se satisface la identidad de Stone. Además

$$\begin{aligned} x \wedge f(x \wedge y) &= x \wedge (f(x) \vee f(y)) \\ &= ((x \wedge f(x)) \vee (x \wedge f(y)) \\ &= x \wedge f(y). \end{aligned}$$

Luego por Lema 1.21 $(\mathbf{L}, f)$ resulta ser pseudocomplementada. Por lo tanto $(\mathbf{L}, f)$ es un álgebra de Stone. Como consecuencia podemos ahora considerar el siguiente Lema.

Lema 1.22. *Sea* $(\mathbf{L}, f)$ *un álgebra de Ockham, tal que si para cada* $a \in \mathbf{L}$ *se tiene que* $a \wedge f(a) = 0$*, entonces* $(\mathbf{L}, f)$ *es un álgebra de Stone.*

Teniendo en cuenta lo anterior podemos considerar la siguiente contenencia entre clases o variedades de álgebras similares:

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{L},$$

donde $\mathcal{T}$ es la variedad trivial, sus elementos son álgebras triviales, $\mathcal{B}_0$, denotan las álgebras de Boole, $\mathcal{B}_1$ es la variedad de las álgebras de Stone y $\mathcal{L}$ denotan la variedad de las álgebras de Ockham. Por otro lado la clase de los retículos distributivos pseudocomplementados que se denota por $\mathcal{B}_w$ es una variedad donde el retículo de sus subvariedades esta dado por la cadena:

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset ... \subset \mathcal{B}_w.$$

Nótese que $\mathcal{B}_1$ pertenece al conjunto de subvariedades de $\mathcal{L}$ y de $\mathcal{B}_w$.

Otras de las subvariedades de las álgebras de Ockham se consideran a continuación

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{L},$$

donde $\mathcal{M}$, denota la varieadad de la álgebras de Morgan y son aquellas álgebras $\langle A; \wedge, \vee, f, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $\langle A; \wedge, \vee, 0, 1\rangle$, es un retículo distributivo acotado y en el cual se satisfacen las siguientes identidades

$$f(f(x)) = x; \quad f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y); \quad f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y).$$

$\mathcal{K}$ denota la variedad de las álgebras de Kleene, las cuales son las álgebras de Morgan que satisfacen la desigualdad

$$x \wedge f(x) \leq y \vee f(y).$$

1.5.1 Espacios de Ockham

En esta sección presentaremos brevemente la construcción del espacio topológico asociado a un retículo distributivo acotado L y reciprocamente el retículo distributivo acotado asociado a un espacio topológico. Esta relación entre espacios topológicos y retículos distributivos acotados recibe el nombre de dualidad de Priestley. Esta teoría tiene su inicio en la representación topológica para las álgebras Booleanas, desarrollada por Stone en 1936. Luego Priestley generaliza esta teoría para retículos distributivos acotados.

Definición 1.23. $\mathbf{X} = (X, \tau, \leq)$ *es un espacio topológico ordenado si* (X, τ) *es un espacio topológico, y la relación* $\leq$ *es un orden parcial sobre* X*.*

Un subconjunto Y de X se dice *decreciente* si $x \leq y$, $y \in Y$ implica $x \in Y$. Dualmente un subconjunto Y de X se dice *creciente* si $x \geq y$, $y \in Y$ implica $x \in Y$. Se llamará *clopen* a un subconjunto de $\mathbf{X}$ que es abierto y cerrado a la vez. Diremos además que $\mathbf{X}$ es un *espacio topológico ordenado totalmente desconectado* si dados $x, y \in X$, $y \nleq x$ entonces existe $\mathcal{U}$ clopen decreciente tal que $x \in \mathcal{U}$, y $y \notin \mathcal{U}$.
Un espacio topológico ordenado totalmente desconectado, el cual es compacto y posee una base de clopens se llama *espacio de Priestley.*
Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Priesley. Para $x, y \in \mathbf{X}$ diremos que x y y son *comparables* si $y \leq x$ o $x \leq y$. En símbolos $x \nparallel y$. Diremos además que x y y son *incomparables* si $y \nleq x$ y $x \nleq y$. En símbolos $x \| y$. Si todo par de elementos en $\mathbf{X}$ son comparables diremos que $\mathbf{X}$ es una *cadena*, y si todo par de elementos en $\mathbf{X}$ son incomparables, $\mathbf{X}$ es una *anticadena.*

Si $\mathbf{X}$ es un espacio de Priesley diremos que x es *cubierto* por y (o y cubre a x) si $x \leq y$ y $\{z \mid x < z < y\} = \emptyset$. En símbolos $x \prec y$.
Para cada $x \in \mathbf{X}$ definimos

$$x^{\downarrow} = \{y \in \mathbf{X} \mid y \leq x\}.$$

Dualmente

$$x^{\uparrow} = \{y \in \mathbf{X} \mid y \geq x\}.$$

Definición 1.24. *Una función* $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *se dice monótona, si* $x_1 \leq x_2$ *implica* $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$*, y antitone = (función que invierte el orden) si* $x_1 \leq x_2$ *implica* $\varphi(x_2) \leq \varphi(x_1)$*.*

Dado un retículo distributivo acotado $\mathbf{L}$, recordemos que un subconjunto I de $\mathbf{L}$ es un *ideal primo* de $\mathbf{L}$ si:
i) Para $a, b \in I$ entonces, $a \vee b \in I$, esto es I es cerrado para Sups.
ii) Si $a \in L$ y $b \in I$ entonces, $a \wedge b \in I$, esto es I es absorbente para Infs.
iii) $I \neq L$ y $a \wedge b \in I$ implica que $a \in I$ o $b \in I$.
Podemos considerar el conjunto de todos los ideales primos de $\mathbf{L}$, denotados por $I_p(\mathbf{L})$ el cual es un conjunto ordenado por la inclusión. Para este conjunto se define: Dado $a \in \mathbf{L}$,

$$d(a) = \{P \in I_p(\mathbf{L}) \mid a \notin P\}.$$

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} d : \mathbf{L} &\longrightarrow I_p(\mathbf{L}) \\ a &\longmapsto d(a), \end{aligned}$$

d es un homomorfismo de retículos, esto es:

$d(a \wedge b) = d(a) \cap d(b)$,
$d(a \vee b) = d(a) \cup d(b)$.

Sea P un ideal primo,

$$\begin{aligned} P \in d(a \wedge b) &\iff a \wedge b \notin P \\ &\iff a \notin P \ y \ b \notin P \\ &\iff P \in d(a) \ y \ P \in d(b) \\ &\iff P \in d(a) \cap d(b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \in d(a \vee b) &\iff a \vee b \notin P \\ &\iff a \notin P \ ó \ b \notin P \\ &\iff P \in d(a) \ ó \ P \in d(b) \\ &\iff P \in d(a) \cup d(b). \end{aligned}$$

El espacio topológico $\mathbf{X_L} = (I_p(\mathbf{L}), \tau, \subseteq)$ donde τ es la topología sobre $I_p(\mathbf{L})$ la cual tiene como base $\{d(a) \cap (\mathbf{X_L} \smallsetminus d(c)) \mid a, c \in \mathbf{L}\}$ resulta ser un espacio de Priestley y se le llama *espacio dual* de $\mathbf{L}$.

Recíprocamente, sea $\mathbf{X}$ un espacio de Priestley. Denotemos por L_X el conjunto de clopens decrecientes entonces $\mathbf{L_X} = \langle L_X, \cup, \cap, \emptyset, X\rangle$ resulta ser un retículo distributivo acotado el cual recibe el nombre de *retículo dual* de $\mathbf{X}$. El Teorema de dualidad de Priestley (ver [9]) establece que:

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L_{X_L}}$$

es un isomorfismo de retículos bajo la aplicación:

$$a \to d(a).$$

Es decir, $\mathbf{L}$ es isomorfo al retículo de los clopens decrecientes de su espacio dual. Además si $\mathbf{X}$ es un espacio de Priestley se tiene que

$$\mathbf{X} \to \mathbf{X_{L_X}}$$

es simultaneamente un homeomorfismo y un isomorfismo de orden bajo la aplicación:

$$x \to \{a \in \mathbf{L_X} : x \notin a\}.$$

Es decir, los espacios topológicos $\mathbf{X}$ y $\mathbf{X_{L_X}}$ son iguales como conjuntos ordenados y como espacios topológicos.

A continuación veremos como se ubica la dualidad de Priestley dentro de las álgebras de Ockham. Este resultado es presentado por Urquhart en [16].

Definición 1.25. *Un espacio de Ockham* $(\mathbf{X}, g)$ *consiste de un espacio de Priestley* $\mathbf{X}$ *y una función* g *de* $\mathbf{X}$ *en* $\mathbf{X}$ *continua y antitone.*

El Teorema de la dualidad entre las álgebras de Ockham y los espacios de Ockham se da como sigue: Si $\mathbf{L} = (L, f)$ es un álgebra de Ockham entonces $(\mathbf{X_L}, g)$ con g definida como sigue

$$g(P) = \{x \in L \mid f(x) \notin P\}.$$

Es un espacio de Ockham. De hecho $\mathbf{X_L}$ es un espacio de Priestley, veamos que g así definida es continua y antitone. Sea A un abierto básico es decir, A es de la forma $d(a) \cap (\mathbf{X_L} \smallsetminus d(c))$ entonces:

$$\begin{aligned} g^{-1}(A) &= g^{-1}(d(a) \cap (\mathbf{X_L} \smallsetminus d(c))) \\ &= g^{-1}(d(a)) \cap g^{-1}(\mathbf{X_L} \smallsetminus d(c)) \\ &= g^{-1}(d(a)) \cap (\mathbf{X_L} \smallsetminus g^{-1}(d(c))). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} g^{-1}(d(a)) &= \{P \in X \mid g(P) \in d(a)\} \\ &= \{P \in X \mid a \notin g(P)\} \\ &= \{P \in X \mid f(a) \in P\} \\ &= \mathbf{X_L} \smallsetminus d(f(a)). \end{aligned}$$

Luego $\mathbf{X_L} \smallsetminus g^{-1}(d(c)) = d(f(c))$ por lo tanto $g^{-1}(A) = d(f(c)) \cap \mathbf{X_L} \smallsetminus d(f(a))$, es decir, $g^{-1}(A)$ es un abierto básico, por lo tanto g es continua. Para ver que g es antitone sea $A \subseteq B$ y supongamos que $g(B) \nsubseteq g(A)$ entonces existe $x \in g(B)$ tal que $x \notin g(A)$, luego $f(x) \notin B$ y $f(x) \in A$, una contradicción. Por lo tanto g es antitone.

Por otro lado si $(\mathbf{X}, g)$ es un espacio de Ockham entonces $(\mathbf{L_X}, f)$ con f dado por la fórmula:

$$f(a) = \mathbf{X} \smallsetminus g^{-1}(a)$$

es un álgebra de Ockham. Es decir, f así definida cumple las leyes de Ockham. De hecho

$$f(\emptyset) = \mathbf{X} \smallsetminus g^{-1}(\emptyset) = \mathbf{X} \smallsetminus \emptyset = \mathbf{X},$$

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \smallsetminus g^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \smallsetminus \mathbf{X} = \emptyset.$$

además $x \in f(a \cup b) \Leftrightarrow x \notin g^{-1}(a \cup b) \Leftrightarrow g(x) \notin a \cup b \Leftrightarrow g(x) \notin a$ y $g(x) \notin b \Leftrightarrow x \notin g^{-1}(a)$ y $x \notin g^{-1}(b) \Leftrightarrow x \in f(a) \cap f(b)$

De forma similar tenemos $f(a \cap b) = f(a) \cup f(b)$. Por lo tanto, f satisface las leyes de Ockham y $(\mathbf{L_X}, f)$ es un álgebra de Ockham.

Esta teoría establece en símbolos que

$$(L, f) \backsimeq (\mathbf{L_{X_L}}, f) \text{ y } (\mathbf{X}, g) \backsimeq (\mathbf{X_{L_X}}, g)$$

La identificación de las álgebras de la izquierda es la misma que la dada anteriormente para identificar los elementos de un retículo distributivo acotado $\mathbf{L}$ con los clopens decrecientes de su espacio dual es decir, $a \leftrightarrows d(a)$.

Las álgebras de Stone ya han sido presentadas como álgebras de Ockham por lo tanto, podemos ver el espacio dual de un álgebra de Stone como un espacio de Ockham.

El siguiente Teorema nos muestra como se distinguen los espacios de Ockham cuyas álgebras duales, son álgebras de Stone.

Teorema 1.26. *Sea $(\mathbf{X}, g)$ un espacio de Ockham. Entonces $\mathbf{X}$ es el espacio dual de un álgebra de Stone (es decir $\mathbf{L_X}$ es un álgebra de Stone) si y solo si se cumple las siguientes condiciones:*

(i) *para cada $x \in \mathbf{X}$, $g(x) \leq x$*

(ii) *$x \nparallel y$ implica $g(x) = g(y)$.*

Prueba: $\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbf{L_X}$ es un álgebra de Stone. Sean $x, y \in \mathbf{X}$ tal que $x \nparallel y$. Sin perdida de generalidad sea $x \leq y$. Como g es antitone $g(y) \leq g(x)$. Supongamos $g(x) \nleq g(y)$ y sea $a \in g(x)$ tal que $a \notin g(y)$. Se sigue entonces que $f(a) \notin x$ y $f(a) \in y$. Como $\mathbf{L_X}$ es un álgebra de Stone, $f(a) \wedge f(f(a)) = 0 \in x$, como x es un ideal primo y $f(a) \notin x$ entonces $f(f(a)) \in x$. Ya que $x \leq y$ tenemos $f(f(a)) \in y$. Como $f(a) \in y$ entonces $f(a) \vee f(f(a)) = 1 \in y$, una contradicción. Luego $g(x) = g(y)$. Probaremos ahora que para cada $x \in X$, $g(x) \leq x$. Si $a \in g(x)$

y $a \notin x$, como $a \wedge f(a) = 0 \in x$ entonces $f(a) \in x$ lo cual implica $a \notin g(x)$, una contradicción.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\mathbf{X}$ satisface **(i)** y **(ii)**. Por el Lema 1.22 basta probar que $f(a) \wedge a = 0$. Sea $a \in \mathbf{L}_\mathbf{X}$ y supongamos $f(a) \wedge a \neq 0$. Sea $x \in f(a) \wedge a$, luego $x \in a$ y $x \in f(a) = X \smallsetminus g^{-1}(a)$. Así $x \in a$ y $x \notin g^{-1}(a)$ entonces $g(x) \notin a$. Pero como $g(x) \leq x$ se sigue que $g(x) \in a$ (por ser a abierto cerrado decreciente), una contradicción.

$\square$

De esta manera, caracterizamos los espacios de Ockham cuyas álgebras duales son álgebras de Stone, como los espacios de Ockham que satisfacen las condiciones **(i)** y **(ii)**.
Teniendo en cuenta lo anterior, podemos demostrar muy fácilmente un resultado muy conocido de Priestley presentado en [10].

Corolario 1.27. *Sea* $\mathbf{X}$ *el espacio dual de un retículo distributivo seudocomplementado y sea* $Min\mathbf{X}$ *el conjunto de puntos minimales de* $\mathbf{X}$*. Entonces para cada* $x \in \mathbf{X}$ *existe un único* $y \in Min\mathbf{X}$ *tal que* $y \leq x$*.*

Prueba: Por lema de Zorn para cada $x \in \mathbf{X}$ existe un elemento
$x_1 \in \mathrm{Min}\mathbf{X}$ tal que $x_1 \leq x$. Supongamos que existe $x_2 \in \mathrm{Min}\mathbf{X}$ tal que $x_1 \neq x_2$ y $x_2 \leq x$. entonces $g(x) = g(x_1) \leq x_1$ y $x_1 \in \mathrm{Min}\mathbf{X}$, esto implica $g(x) = x_1$. Similarmente $g(x) = x_2$. Entonces $x_1 = x_2$, contradicción.

$\square$

Podemos concluir entonces, que g le asigna a cada elemento $x \in \mathbf{X}$ el único ideal primo minimal contenido en el.

Definición 1.28. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de Ockham con espacio dual* $\mathbf{X_L} = (\mathbf{X}, g)$ *un subconjunto* Q *de* $\mathbf{X}$ *es llamado* g*-subconjunto si* $g(Q) \subseteq Q$*.*

Lema 1.29. *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio de Ockham cuya álgebra dual es un álgebra de Stone. Entonces* Q *es* g*-subconjunto si y solo si*

$$Min\mathbf{X} \cap Q^{\downarrow} \subseteq Q.$$

Prueba: $\Rightarrow$) Supongamos Q g-subconjunto. Sea $x \in \mathrm{Min}\mathbf{X} \cap Q^{\downarrow}$ entonces x es minimal y $x \leq x'$ con $x' \in Q$. Por Teorema 1.26 $g(x) = g(x')$. Como Q es g-subconjunto entonces $g(x') \in Q$, luego $g(x) \in Q$. Por Teorema 1.26 parte **(i)** $g(x) \leq x$, pero como $x \in \mathrm{Min}\mathbf{X}$, $g(x) = x$ luego $x \in Q$.
$\Leftarrow$) Supongamos que Q no es un g-subconjunto es decir, existe $x \in g(Q)$ tal que $x \notin Q$, entonces $x \notin \mathrm{Min}\mathbf{X} \cap Q^{\downarrow}$ entonces para cada $y \in \mathrm{Min}\mathbf{X} \cap Q^{\downarrow}$ $y \leq x$. Por Teorema 1.26 $g(x) = g(y) \in g(Q)$ entonces $g(x) \in g(Q)$ luego $x \in Q$, una contradicción.

$\square$

Para cada g-subconjunto cerrado Q de $\mathbf{X}$ la relación θ_Q definida en $(\mathbf{L}_{\mathbf{X}_\mathbf{L}}, f) \backsimeq (\mathbf{L}, f)$. Por

$$(A, B) \in \theta_Q \Longleftrightarrow A \cap Q = B \cap Q,$$

es una congruencia de Ockham. De hecho, sea $(A, B) \in \theta_Q$, supongamos que $(f(A), f(B)) \notin \theta_Q$ es decir $f(A) \cap Q \neq f(B) \cap Q$. Sin perdida de generalidad supongamos $x \in f(A) \cap Q$ y $x \notin f(B) \cap Q$ entonces, $x \in f(A)$, $x \notin f(B)$ y $x \in Q$ como $x \in f(A)$ entonces $x \notin g^{-1}(A)$ y $x \in g^{-1}(B)$ luego $g(x) \notin A$ y $g(x) \in B$, además $g(x) \in g(Q) \subseteq Q$, esto contradice el hecho que $(A, B) \in \theta_Q$.
Si denotamos por $C_g(\mathbf{X})$ el conjunto de los g-subconjunto cerrados de $\mathbf{X}$, la función

$$\theta : C_g(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathrm{Con}\mathbf{L}_\mathbf{X}$$

dada por

$$\theta(Q) = \theta_Q$$

es una función inyectiva. En efecto si $\theta(Q) = \theta(P)$ entonces $\theta_Q = \theta_P$, luego para cada $(A, B) \in \theta_Q = \theta_P \Longleftrightarrow A \cap Q = B \cap Q = A \cap P = B \cap P$, por lo tanto $Q = P$ y θ es inyectiva. Además para cada $Q \in C_g(\mathbf{X})$ la congruencia θ_Q es llamada la *congruencia asociada* con Q.

Definición 1.30. *Sea* $(\mathbf{X}, g)$ *un espacio de Ockham un* g*-ciclo es un* g*-subconjunto de la forma* $Q = \{a, g(a), \ldots, g^{k-1}(a)\}$ *donde* $g^k(a) = a$ *y* $\sharp Q = k$.

Como por definición un g-ciclo Q es finito se sigue que Q es cerrado y (Q, g) es un espacio de Ockham en el cual la topología es discreta.

Sea $(\mathbf{X}, g)$ un espacio de Ockham. Un endomorfismo de $(\mathbf{X}, g)$ es una función $\alpha : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ continua, monótona que conmuta con g. Con la composición ordinaria de funciones, el conjunto de los endomorfismos de $(\mathbf{X}, g)$ tiene estructura de monoide. A dicho monoide lo denotaremos por $\mathrm{End}(\mathbf{X}, g)$, y por $\mathrm{End}(L, f)$ el monoide de endomorfismos de (L, f). Dado $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X}, g)$, defina $\widetilde{\alpha} : \mathbf{L}_\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{L}_\mathbf{X}$ por medio de la función $\widetilde{\alpha}(a) := \alpha^{-1}(a)$. $\widetilde{\alpha}$ está bien definida. En efecto

$$\widetilde{\alpha} = \alpha^{-1} : \mathbf{L}_\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{L}_\mathbf{X}.$$

$\widetilde{\alpha}$ así definida resulta ser un homomorfismo entre álgebras de Ockham; de hecho

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}(f(A)) &= \widetilde{\alpha}(X \setminus g^{-1}(A)) \\
&= \alpha^{-1}(X \setminus g^{-1}(A)) \\
&= X \setminus \alpha^{-1}(g^{-1}(A)) \\
&= X \setminus (g \circ \alpha)^{-1}(A) \\
&= X \setminus (\alpha \circ g)^{-1}(A) \\
&= X \setminus g^{-1}(\alpha^{-1}(A)) \\
&= f(\alpha^{-1}(A)) \\
&= f(\widetilde{\alpha}(A)).
\end{aligned}$$

Esto es, $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{End}(\mathbf{L}_{\mathbf{X}}, f)$. $\widetilde{\alpha}$ recibe el nombre de *aplicación dual* de α. La aplicación $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$ establece un anti-isomorfismo de monoides de $\mathrm{End}(\mathbf{X}_{\mathbf{L}}, g)$ en $\mathrm{End}(\mathbf{L}_{X_{\mathbf{L}}}, f) \backsimeq \mathrm{End}(\mathbf{L}, f)$.

Capítulo 2

La propiedad del núcleo endomorfo para álgrbras de Morgan finitas

En este capítulo presentaremos la caracterización de las álgebras de Morgan finitas con la propiedad del núcleo endomorfo.

Definición 2.1. *Se dice que un álgebra* $\mathbf{A}$, *tiene la propiedad del núcleo endomorfo si cada congruencia en* $\mathbf{A}$ *diferente de la congruencia universal es el núcleo de un endomorfismo en* $\mathbf{A}$.

Teorema 2.2. *(Teorema 1, [1]) Un álgebra* $\mathbf{A}$, *tiene la propiedad del núcleo endomorfo si y solo si cada imagen epimórfica no trivial de* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a una subálgebra de* $\mathbf{A}$

Prueba: $\Rightarrow$) Cada imagen epimórfica no trivial de $\mathbf{A}$ es de la forma $\mathbf{A}/\theta$ para $\theta \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$. Como $\mathbf{A}$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo entonces existe $f \in \mathrm{End}\mathbf{A}$ con $\theta \neq \nabla_{\mathbf{A}}$ tal que $\theta = \ker(f)$ tenemos entonces $\mathbf{A}/\theta = \mathbf{A}/\ker(\mathbf{f}) \simeq \mathrm{Im}f$, la cual es una subálgebra de $\mathbf{A}$.
$\Leftarrow$) Sea $\theta \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$ tal que $\theta \neq \nabla_{\mathbf{A}}$. Considerese el epimorfismo natural $\gamma : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\theta$. Por hipótesis existe un isomorfismo $\alpha : \mathbf{A}/\theta \longrightarrow B$ donde B es una subálgebra de $\mathbf{A}$. Considereremos la función composición

$$\eta := \mathbf{A} \xrightarrow{\gamma} \mathbf{A}/\theta \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B} \xrightarrow{\mathrm{Inc}} \mathbf{A}$$

donde Inc es la función inclusión. η así definida pertenece a $\mathrm{End}\mathbf{A}$, además

$$\begin{aligned}(a,b) \in \ker(\eta) &\Longleftrightarrow \eta(a) = \eta(b)\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Inc}(\alpha(\gamma(a))) = \mathrm{Inc}(\alpha(\gamma(b)))\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Inc}(\alpha(a/\theta)) = \mathrm{Inc}(\alpha(b/\theta))\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Inc}(a/\theta) = \mathrm{Inc}(b/\theta)\\ &\Longleftrightarrow a/\theta = b/\theta\\ &\Longleftrightarrow (a,b) \in \theta.\end{aligned}$$

Esto es $\ker(\eta) = \theta$ y $\mathbf{A}$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo.

□

Teorema 2.3. *(Teorema 3, [1]) Sea $\mathcal{V}$ una variedad con congruencias factorizables en la cual, cada subálgebra de un álgebra directamente irreducible es también directamenete irreducible. Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, son álgebras directamente irreducible no triviales en $\mathcal{V}$ entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo

(b) Cada $\mathbf{A}_i$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo y Mor$(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j) \neq \emptyset$ para $i \neq j$

Prueba: $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $\mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo. Como $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_{\sigma(i)}$ para cada permutación σ en $\{1, 2, ..., n\}$, luego es suficiente provar que $\mathbf{A}_1$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo. Para este propósito, sea $\theta \in \text{Con}\mathbf{A}_1$ con $\theta \neq \nabla_{\mathbf{A}_1}$. Consideremos la congruencia

$$\bar{\theta} = \theta \times \Delta_{\mathbf{A}_2} \times \Delta_{\mathbf{A}_3} \times \cdots \times \Delta_{\mathbf{A}_n}.$$

Como $\bar{\theta} \neq \nabla_{\mathbf{A}}$, existe por hipótesis $\varphi \in \text{End}\mathbf{A}$ tal que $\bar{\theta} = \ker\varphi$. Para $i = 1, 2..., n$ defina $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$, donde $\pi_i : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$, denota la i-ésima proyección. Entonces tenemos $\varphi_i(a) = (\varphi(a))_i$ podemos ver que

$$\bar{\theta} = \ker\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \ker\varphi_i \tag{2.1}$$

Ahora como $\mathcal{V}$ tiene congruencias factorizables tenemos entonces que para cada i,

$$\ker\varphi_i = \alpha_{i1} \times \alpha_{i2} \times \cdots \times \alpha_{in},$$

donde $\alpha_{ij} \in \text{Con}\mathbf{A}_j$. Se sigue de (3.1) que en la matriz $M = [\alpha_{ij}]_{n\times n}$ las columnas son tales que:

$$(j = 1, ..., n) \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1; \\ \Delta_{\mathbf{A}_j} & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Para $i = 1, ..., n$ consideremos ahora el conjunto

$$V_i = \{(i, j) \mid j \in \{1, ..., n\} \text{ y } \alpha_{ij} \neq \nabla_{\mathbf{A}_j}\}.$$

Podemos observar que $\sharp(V_i) \leq 1$. De hecho, si tenemos primero que $\ker\varphi_i = \nabla_{\mathbf{A}}$ entonces $\alpha_{ij} = \nabla_{\mathbf{A}_j}$ para cada j de donde $V_i = \emptyset$ y en este caso $\sharp(V_i) = 0$. Ahora si $\ker\varphi_i \neq \nabla_{\mathbf{A}}$ entonces $\mathbf{A}/\ker\varphi_{\mathbf{i}} \simeq \text{Im}\varphi_i$ la cual es por hipótesis direcramente irreducible. Pero $\mathbf{A}/\ker\varphi_{\mathbf{i}} \simeq \prod_{j=1}^{n} \mathbf{A_j}/\alpha_{\mathbf{ij}}$ y luego como cada factor es un álgebra no trivial directamenete irreducible, se sigue entonces que existe un único $t \in \{1, ..., n\}$ tal que $\alpha_{it} \neq \nabla_{\mathbf{A}_t}$, y en este caso $\sharp(V_i) = 1$.
Para $j = 1, ..., n$ consideremos el conjunto

$$W_j = \{(i, j) \mid i \in \{1, ..., n\} \text{ y } \alpha_{ij} \neq \nabla_{\mathbf{A}_j}\}.$$

Veamos que cada $W_j \neq \emptyset$. De hecho, si $j = 1$ entonces se sigue de (3.2) que existe $r \in \{1, ..., n\}$ tal que $\alpha_{r1} \neq \nabla_{\mathbf{A}_1}$. Ahora si $j \geq 2$ entonces tenemos por hipótesis

$\Delta_{\mathbf{A}_j} \neq \nabla_{\mathbf{A}_j}$ se sigue de (3.2) que existe $r \in \{1, ..., n\}$ tal que $\alpha_{rj} \neq \nabla_{\mathbf{A}_j}$. Ahora claramente tenemos $\bigcup_{i=1}^{n} V_i = \bigcup_{j=1}^{n} W_j = \mathbf{X}$. Luego

$$n = \sum_{j=1}^{n} 1 \leq \sum_{j=1}^{n} \sharp(W_j) = \sharp(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sharp(V_i) \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

podemos ver que $\sharp(\mathbf{X}) = n$, de donde $\sharp(V_i) = \sharp(W_j) = 1$ para todo i, j. Luego la matriz $M = [\alpha_{ij}]$ tiene, en cada fila y en cada columna precisamenete una entrada que no es la congruencia universal. Por lo anterior y (3.2), en esta etapa no hay perdida de generalidad en suponer que $\mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n$ son elegidos tales que M es de la forma

$$M = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{A}_1} & \Delta_{\mathbf{A}_2} & \nabla_{\mathbf{A}_3} & \cdots & \nabla_{\mathbf{A}_{n-1}} & \nabla_{\mathbf{A}_n} \\ \nabla_{\mathbf{A}_1} & \nabla_{\mathbf{A}_2} & \Delta_{\mathbf{A}_3} & \cdots & \nabla_{\mathbf{A}_{n-1}} & \nabla_{\mathbf{A}_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta & \nabla_{\mathbf{A}_2} & \nabla_{\mathbf{A}_3} & \cdots & \nabla_{\mathbf{A}_{n-1}} & \nabla_{\mathbf{A}_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \nabla_{\mathbf{A}_1} & \nabla_{\mathbf{A}_2} & \nabla_{\mathbf{A}_3} & \cdots & \Delta_{\mathbf{A}_{n-1}} & \nabla_{\mathbf{A}_n} \\ \nabla_{\mathbf{A}_1} & \nabla_{\mathbf{A}_2} & \nabla_{\mathbf{A}_3} & \cdots & \nabla_{\mathbf{A}_{n-1}} & \Delta_{\mathbf{A}_n} \end{bmatrix}$$

en la cual θ aparece en la $(k, 1)$-posición. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A_1}/\theta \simeq \mathbf{A}/\mathrm{ker}\varphi_{\mathbf{k}} \simeq \mathrm{Im}\varphi_k & \\ & \subseteq \mathbf{A}_k \simeq \mathbf{A}/\mathrm{ker}\varphi_{\mathbf{k-1}} \simeq \mathrm{Im}\varphi_{k-1} \\ & \subseteq \mathbf{A}_{k-1} \simeq \mathbf{A}/\mathrm{ker}\varphi_{\mathbf{k-2}} \simeq \mathrm{Im}\varphi_{k-2} \\ & \vdots \\ & \subseteq \mathbf{A}_2 \simeq \mathbf{A}/\mathrm{ker}\varphi_{\mathbf{1}} \simeq \mathrm{Im}\varphi_1. \end{aligned}$$

Luego, tenemos un monomorfismo $\alpha : \mathbf{A_1}/\theta \longrightarrow \mathrm{Im}\varphi_1$ y consecuentemente cada cociente de $\mathbf{A}_1$ es isomorfo a una subálgebra de $\mathbf{A}_1$. Se sigue ahora del Teorema 2.2 que $\mathbf{A}_1$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo.
Probaremos ahora que $\mathrm{Mor}(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j) \neq \emptyset$ con $i \neq j$. Para este propósito consideremos la congruencia ρ en $\mathbf{A}$ dada por:

$$\rho = \nabla_{\mathbf{A}_1} \times \cdots \times \nabla_{\mathbf{A}_{i-1}} \times \Delta_{\mathbf{A}_i} \times \nabla_{\mathbf{A}_{i+1}} \times \cdots \times \nabla_{\mathbf{A}_n}.$$

Como $\mathbf{A}$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo entonces, existe $\psi \in \mathrm{End}\mathbf{A}$ tal que $\psi = \mathrm{End}\psi$. Entonces $\mathbf{A}_i \simeq \mathbf{A}/\rho = \mathbf{A}/\mathrm{ker}\psi \simeq \mathrm{Im}\psi$ y como esto es un isomorfismo $\zeta : \mathbf{A}_i \to \mathrm{Im}\psi$. La función composición:

$$\mathbf{A}_i \xrightarrow{\zeta} \mathrm{Im}\psi \xrightarrow{\mathrm{Inc}} \mathbf{A} \xrightarrow{\pi_j} \mathbf{A}_j,$$

corresponde a $\mathrm{Mor}(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j)$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Por inducción sobre n. Si $n = 1$ no hay nada que probar. Supongamos entonces $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ donde $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ tienen la propiedad del núcleo endomorfo y sea $\theta \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$ tal que $\theta \neq \nabla_{\mathbf{A}}$. Por hipótesis $\theta = \theta_1 \times \theta_2$ donde $\theta_1 \in \mathbf{A}_1$ y $\theta_2 \in \mathbf{A}_2$. Consideremos los siguientes tres casos:

1) $\theta_1 \neq \nabla_{\mathbf{A}_1}$ y $\theta_2 \neq \nabla_{\mathbf{A}_2}$. Por la propiedad del núcleo endomorfo para $i = 1, 2$ existe $\varphi \in \mathrm{End}\mathbf{A}_i$ tal que $\theta_i = \ker\varphi_i$. Consideremos la función

$$\varphi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$$

dada por la prescripción

$$\varphi(x, y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y)).$$

Veamos que $\varphi \in \mathrm{End}\mathbf{A}$. Sea f operación fundamental de rango n y $a_i \in A_1,\ a'_i \in A_2$ con $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
\varphi f^{\mathbf{A}}((a_1, a'_1), \ldots, (a_n, a'_n)) &= \varphi(f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}_2}(a'_1, \ldots, a'_n)) \\
&= (\varphi_1 f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_n), \varphi_2 f^{\mathbf{A}_2}(a'_1, \ldots, a'_n)) \\
&= (f^{\mathbf{A}_1}(\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_n)), f^{\mathbf{A}_2}(\varphi_2(a'_1), \ldots, \varphi_2(a'_n))) \\
&= f^{\mathbf{A}}(\varphi(a_1, a'_1), \ldots, \varphi(a_n, a'_n)).
\end{aligned}$$

Luego $\varphi \in \mathrm{End}\mathbf{A}$ y $\theta = \ker\varphi$. Por lo tanto $\mathbf{A}$, tiene la propiedad del núcleo endomorfo.

2) $\theta_1 \neq \nabla_{\mathbf{A}_1}$ y $\theta_2 = \nabla_{\mathbf{A}_2}$. Por la propiedad del núcleo endomorfo existe $\varphi_1 \in \mathrm{End}\mathbf{A}_1$ tal que $\theta_1 = \ker\varphi_1$. Por hipótesis existe $\lambda \in \mathrm{Mor}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$. La función $\xi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ dada por la prescipción

$$\xi(x, y) = (\varphi_1(x), \lambda\varphi_1(x))$$

resulta ser un endomorfismo de $\mathbf{A}$. De hecho si f es una operación fundamental de rango n y $a_i \in A_1,\ a'_i \in A_2$ con $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
\xi f^{\mathbf{A}}((a_1, a'_1), \ldots, (a_n, a'_n)) &= \xi(f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}_2}(a'_1, \ldots, a'_n)) \\
&= (\varphi_1 f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_n), \lambda\varphi_1 f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_n)) \\
&= (f^{\mathbf{A}_1}(\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_n)), \lambda f^{\mathbf{A}_1}(\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_n))) \\
&= (f^{\mathbf{A}_1}(\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_n)), f^{\mathbf{A}_2}(\lambda\varphi_1(a'_1), \ldots, \lambda\varphi_1(a'_n))) \\
&= f^{\mathbf{A}}(\xi(a_1, a'_1), \ldots, \xi(a_n, a'_n)).
\end{aligned}$$

Es decir $\xi \in \mathrm{End}\mathbf{A}$ y $\theta = \ker\varphi$. Luego $\mathbf{A}$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo.

3) $\theta_1 = \nabla_{\mathbf{A}_1}$ y $\theta_2 \neq \nabla_{\mathbf{A}_2}$. Este caso es muy similar a 2).

Tenemos entonces el resultado para $n = 2$. Para el paso por inducción supongamos que $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, tienen la propiedad del núcleo endomorfo y sea $\mathbf{B} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{A}_i$. Por hipótesis de inducción $\mathbf{B}$, tiene la propiedad del núcleo endomorfo, además es claro por hipótesis que $\mathrm{Mor}(\mathbf{B}, \mathbf{A}_n) \neq \emptyset$ y $\mathrm{Mor}(\mathbf{A}_n, \mathbf{B}) \neq \emptyset$; se sigue entonces que $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \backsimeq \mathbf{B} \times \mathbf{A}_n$, tiene la propiedad del núcleo endomorfo.

$\square$

Teorema 2.4. *(Teorema 5, [1]) Si $(\mathbf{X}, g)$ es un espacio de Ockham y $\alpha \in End(\mathbf{X}, g)$ entonces, $\alpha(\mathbf{X})$ es un g-subconjunto cerrado de $\mathbf{X}$ y $\theta_{\alpha(\mathbf{X})} = Ker\widetilde{\alpha}$.*

Prueba: Como $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X}, g)$ se sigue que α conmuta con g, por lo tanto $g(\alpha(\mathbf{X})) = \alpha(g(\mathbf{X})) \subseteq \alpha(\mathbf{X})$. Luego $\alpha(\mathbf{X})$ es un g-subconjunto. Como $\mathbf{X}$ es Hausdorff se sigue de [8] Lema 7.A que $\alpha(\mathbf{X})$ es cerrado. Para $A, B \in \mathbf{L_X}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(A, B) \in \theta_{\alpha(\mathbf{X})} &\Leftrightarrow A \cap \alpha(\mathbf{X}) = B \cap \alpha(\mathbf{X}) \\
&\Leftrightarrow \alpha^{-1}(A) = \alpha^{-1}(B) \\
&\Leftrightarrow (A, B) \in \mathrm{Ker}\alpha^{-1} = \mathrm{Ker}\widetilde{\alpha}.
\end{aligned}$$

Luego $\mathrm{Ker}\widetilde{\alpha} = \theta_{\alpha(\mathbf{X})}$. $\square$

Teorema 2.5. *(Teorema 6, [1]) Sea $\mathbf{L}$ un álgebra de Ockham. Entonces $\mathbf{L}$, tiene la propiedad del núcleo endomorfo si y solo si para cada g-subconjunto cerrado Q de $\mathbf{X}$ existe $\alpha \in End(\mathbf{X_L}, g)$ tal que $\alpha(\mathbf{X}) = Q$.*

Prueba: Sea Q un g-subconjunto cerrado no vacio de $\mathbf{X}$. Si $\mathbf{L}$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo entonces $\theta_Q \neq \nabla_{\mathbf{L}}$ y es el núcleo de un endomorfismo. Por lo tanto existe $h \in \mathrm{End}(\mathbf{L}_{\mathbf{X_L}}, f) \backsimeq \mathrm{End}(\mathbf{L}, f)$ tal que $\theta_Q = \mathrm{Ker}h$. Sea $h = \widetilde{\alpha}$ para algún $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X_L}, g)$. Por Teorema 2.4 $\theta_Q = \mathrm{Ker}\widetilde{\alpha} = \theta_{\alpha(\mathbf{X})}$. Como θ es inyectiva se sigue entonces que $Q = \alpha(\mathbf{X})$.
En el otro sentido, si $\alpha(\mathbf{X}) = Q$ entonces por Teorema 2.4 se tiene $\theta_Q = \theta_{\alpha(\mathbf{X})} = \mathrm{Ker}\widetilde{\alpha}$. Luego θ_Q es el núcleo de un endomorfismo. $\square$

Teorema 2.6. *(Teorema 7, [1]) Sea $(\mathbf{X}, g)$ un espacio de Ockham y sea $\alpha \in End(\mathbf{X}, g)$. Si P y Q son g-ciclos en $(\mathbf{X}, g)$ entonces*

$$\alpha(\mathbf{X}) = Q \Rightarrow \alpha(P) = Q.$$

Prueba: Consideremos los g-ciclos

$$P = \{g^i(a) \mid 0 \leq i \leq k-1\}, \quad Q = \{g^i(b) \mid 0 \leq i \leq l-1\}.$$

Si $\alpha(X) = Q$ entonces existe $t \in \{0, \ldots, l-1\}$ tal que $\alpha(a) = g^t(b)$. Tenemos que $b = g^l(b) = g^{l-t}(g^t(b)) = g^{l-t}\alpha(a) = \alpha(g^{l-t}(a)) \in \alpha(P)$. Luego $Q \subseteq \alpha(P)$. Como $\alpha(P) \subseteq \alpha(X) = Q$. Entonces $\alpha(P) = Q$. $\square$

Teorema 2.7. *(Teorema 8, [1]) Sea $(\mathbf{L}, f)$ un álgebra de Ockham con la propiedad del núcleo endomorfo. Entonces en su espacio dual $(\mathbf{X_L}, g)$ todos los g-ciclos son equipotentes.*

Prueba: Sean P y Q g-ciclos en $(\mathbf{X}_L, g)$. Por hipótesis θ_Q es el núcleo de un endomorfismo y como por Teorema 2.5 existe $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X}_L, g)$ tal que $\alpha(X) = Q$ se sigue entonces del Teorema 2.6 que $\alpha(P) = Q$. Luego $\sharp(Q) \leq \sharp(P)$. Intercambiando los papeles de P y Q, se obtiene similarmente $\sharp(P) \leq \sharp(Q)$. Por lo tanto P y Q son equipotentes. $\square$

Teorema 2.8. *(Teorema 9, [1]) Sea* $(\mathbf{L}, f)$ *un álgebra de Ockham con la propiedad del núcleo endomorfo y sea* P *y* Q *g-ciclos en el espacio dual* $(\mathbf{X_L}, g)$ *de* $(\mathbf{L}, f)$. *Si* $a \in P$ *y* $b \in Q$ *entonces*

$$g^i(a) \leq g^j(a) \Rightarrow g^i(b) \nparallel g^j(b).$$

Prueba: Por Teorema 2.7 podemos tomar

$$P = \{g^i(a) \mid 0 \leq i \leq k-1\}, \quad Q = \{g^i(b) \mid 0 \leq i \leq k-1\}.$$

Por Teorema 2.5 existe $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X_L}, g)$ tal que $\alpha(\mathbf{X}) = Q$. Para algún $t \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ tenemos $\alpha(a) = g^t(b)$. Supongamos ahora que $g^i(a) \leq g^j(a)$. Aplicando α a esta desigualdad tenemos

$$g^{i+t}(b) = \alpha(g^i(a)) \leq \alpha(g^j(a)) = g^j(b).$$

Si $k-t$ es par entonces $x \leq y$ implica $g^{k-t}(x) = x \leq y = g^{k-t}(y)$; es decir, g^{k-t} es monotona. Entonces

$$g^i(b) = g^{k-t}g^{i+t}(b) \leq g^{k-t}g^{j+t}(b) = g^j(b).$$

Si $k-t$ es impar entonces $x \leq y$ implica $g^{k-t}(x) = g(x) \geq g(y) = g^{k-t}(y)$; es decir, g^{k-t} es antitone y por lo tanto $g^i(b) = g^{k-t}g^{i+t}(b) \geq g^{k-t}g^{j+t}(b) = g^j(b)$. Luego en cualquier caso $g^i(b) \nparallel g^j(b)$. $\square$

Teorema 2.9. *(Teorema 10, [1]) Sea* $(\mathbf{L}, f)$ *un álgebra de Ockham con la propiedad del núcleo endomorfo y sea* P *y* Q *g-ciclos en el espacio dual* $(\mathbf{X_L}, g)$ *de* $(\mathbf{L}, f)$. *Entonces los espacios de Ockham* (P, g) *y* (Q, g) *son isomorfos.*

Prueba: Por Teorema 2.7 podemos tomar

$$P = \{g^i(a) \mid 0 \leq i \leq k-1\}, \quad Q = \{g^i(b) \mid 0 \leq i \leq k-1\}.$$

Por los teoremas 2.5 y 2.6 existe $\alpha \in \mathrm{End}(X, g)$ tal que $\alpha(p) = Q$. Como $\sharp(P) = \sharp(Q) = k$, entonces α induce una biyección monótona $\beta : P \to Q$ dada por $\beta(z) = \alpha(z)$; además $\beta(a) = g^t(b)$ para algún $t \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Para ver que β es un isomorfismo de orden debemos ver que

$$\beta(g^i(a)) \leq \beta(g^j(a)) \Leftrightarrow g^i(a) \leq g^j(a).$$

La direccióin $\Leftarrow$) es trivial.

Veamos la dirección $\Rightarrow$). La primera desigualdad nos dice que $g^{i+t}(b) \leq g^{j+t}(b)$. Se sigue pues del Teorema 2.9 (al intercambiar los papeles de P y Q) que $g^{i+t}(a) \nparallel g^{j+t}(a)$ de donde podemos ver que $g^i(a) = g^{i+t+k-t}(a) \nparallel g^{j+t+k-t}(a) = g^j$. Ahora, como β es una biyección monótona entonces, $g^j(a) < g^i(a)$ implica $\beta(g^j(a)) < \beta(g^i(a))$ lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, $g^i(a) \leq g^j(a)$ y β es un isomorfismo de orden. Finalmente como P y Q son finitos, β es continua. $\square$

2.1 Álgebras de Morgan

Un álgebra de Morgan es un álgebra de Ockham $(\mathbf{L}, f)$ tal que $f^2 = id_{\mathbf{L}}$ y correspondientemente un espacio de Morgan es un espacio de Ockham $(\mathbf{X}, g)$ en el cual $g^2 = id_X$.
Sea $(\mathbf{L}, f)$ un álgebra de Morgan finita con espacio dual $(\mathbf{X_L}, g)$. Diremos que H es una *componente de orden* en $\mathbf{X_L}$ si para cada $x, y \in H$ existen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in H$ tales que $x \nparallel z_1, z_1 \nparallel z_2, z_2 \nparallel z_3, \ldots, z_{n-1} \nparallel z_n, z_n \nparallel y$. Como $g^2 = id_X$ se sigue que $g(H)$, es también una componente de orden.
Se sigue del Teorema 2.7 que si $(\mathbf{L}, f)$ es un álgebra de Morgan con la propiedad del núcleo endomorfo entonces en el espacio dual $(\mathbf{X_L}, g)$ cada g-ciclo es un conjunto con un solo elemento, o es de la forma $\{a, g(a)\}$ con $a \neq g(a)$. En el primer caso $g = id_X$ y $(\mathbf{L}, f)$ es un álgebra de Boole. Un g-ciclo es llamado *conectado* si $a \nparallel g(a)$, y *desconectado* si $a \parallel g(a)$. Note que si $(\mathbf{L}, f)$, es un álgebra de Morgan no Booleana con la propiedad del núcleo endomorfo entonces, por Teorema 2.9 en el correspondiente espacio de Morgan $(\mathbf{X}_L, g)$, cada g-ciclo es conectado o cada g-ciclo es desconectado. En el primer caso $(\mathbf{L}, f)$, es un álgebra de Kleene (Blyth y Varlet 1994). Diremos que $\mathbf{L}$ es de *orden conectado* si cada g-ciclo en $\mathbf{X_L}$ es conectado.

Teorema 2.10. *(Teorema 13, [1]) Sea $(\mathbf{L}, f)$ un álgebra de Morgan finita con espacio dual $(\mathbf{X}_L, g)$ y sea H una componente de orden de $\mathbf{X}_L$. Entonces, en cada una de las siguientes situaciones $(\mathbf{L}, f)$ no tiene la propiedad del núcleo endomorfo.*

(1) H no es una cadena y $H \parallel g(H)$.

(2) H contiene un g-ciclo desconectado.

(3) H contiene g-ciclos conectados P, Q Con $\sharp(P) = \sharp(Q)$ y $P \parallel Q$.

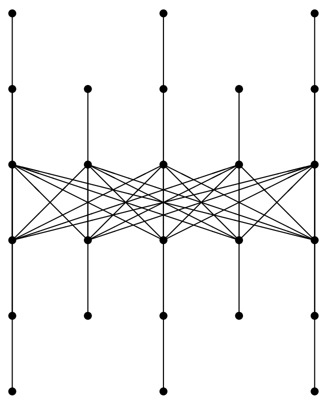
Prueba: Ver [1] Teorema 13. □

Sea L una cadena de n elementos, decimos que la *longitud* de L es $n-1$. Si L es un retículo su longitud es, por definición, la longitud de la cadena más larga contenida en L.

Un conjunto *bipartito completo* es un conjunto ordenado $K_{m,n}$ de longitud 1 el cual tiene m elementos maximales y n elementos minimales, y en la que cada elemento minimal es menor que cada elemento maximal. En el caso que $m = n$ se dice que tal conjunto es *regular*.

Definición 2.11. *En el conjunto bipartito completo regular $K_{n,n}$ sea $MaxK_{n,n} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ y $MinK_{n,n} = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, llamaremos reja al conjunto ordenado obtenido de la unión de $K_{n,n}$ y cadenas finitas $I_1, I_2, ..., I_n$ y $J_1, J_2, ..., J_n$ tal que $MinI_k = a_k$, $MaxJ_k = b_k$ para cada k, y $I_r \parallel I_s$, $J_r \parallel J_s$ para $r \neq s$.*

El siguiente ejemplo muestra la reja obtenida a partir de $K_{5,5}$:

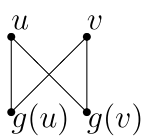


Teorema 2.12. *(Teorema 14, [1]) Sea $(\mathbf{L}, f)$ un álgebra de Morgan finita que no es Booleana. Supongamos que el espacio dual $(\mathbf{X_L}, g)$, es de orden conectado. Entonces $\mathbf{L}$, tiene la propiedad del núcleo endomorfo si y solo si $\mathbf{X_L}$ es una reja.*

Prueba: $\Rightarrow$) Supongamos que $(\mathbf{L}, f)$, tiene la propiedad del núcleo endomorfo. Como por hipótesis $\mathbf{X_L}$ es conectado se sigue del Teorema 2.10(2) que cada g-ciclo en $\mathbf{X_L}$ es conectado (luego $\mathbf{L}$ es un álgebra de Kleene); y por Teorema 2.10(3) no hay dos g-ciclos en $\mathbf{X_L}$ incomparables. Consideremos ahora el conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbf{X_L} \mid x \succ g(x)\}.$$

Claramente $\Omega \neq \{\emptyset\}$. De hecho, existe $y \in \mathbf{X_L}$ tal que $g(y) < y$ y si y no cubre a $g(y)$ entonces existe $z \in \mathbf{X_L}$ tal que $g(y) < g(z) < z < y$. Continuando este procedimiento y usando el hecho que $\mathbf{X_L}$ es finito, se obtiene entonces que existe $x \in \mathbf{X_L}$ tal que x cubre a $g(x)$. Consideremos ahora $K = \Omega \cup g(\Omega)$. Nótese que $g(K) = g(\Omega \cup g(\Omega)) = g(\Omega) \cup g^2(\Omega) = g(\Omega) \cup \Omega$; por lo tanto k resulta ser un g-subconjunto de $\mathbf{X_L}$. Veamos que K así definido en un conjunto bipartito completo. Note que si $u, v \in \Omega$ tal que $u \neq v$ entonces



De hecho, por Teorema 2.10(3) no hay dos g-ciclos en $\mathbf{X_L}$ incomparables. Por lo tanto, los g-ciclos $\{u, g(u)\}$ y $\{v, g(v)\}$ estan conectados. Supongamos ahora que existe $x \in \mathbf{X_L}$ tal que $g(u) < x < v$. Entonces $u > g(x) > g(v)$ de donde, si por un lado, $x < g(x)$ entonces tenemos que $g(u) < x < g(x) < u$ lo cual contradice el hecho que $u \in \Omega$ y si por el otro lado, $x > g(x)$ se tiene entonces $g(v) < g(x) < x < u$, una contradicción. Se tiene entonces, que K es un conjunto bipartito completo.

Como $(\mathbf{X_L}, f)$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo, por Teorema 2.5 existe $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X_L}, g)$ tal que $\alpha(\mathbf{X_L}) = K$. Note que si $x > g(x)$, entonces, $\alpha(x) \geq \alpha(g(x)) = g(\alpha(x))$ y como $\alpha(x) \in K$ necesariamente $\alpha(x) \in \mathrm{Max}K$; similarmente si $x < g(x)$. Entonces $\alpha(x) \in \mathrm{Min}K$.
Ahora para cada $y \notin K$ se tiene que $y > z$ para algún $z \in \mathrm{Max}K$, o $y < z$ para algún $z \in \mathrm{Min}K$. En el primer caso tenemos que $g(y) \leq g(z)$ por lo tanto, $y > g(y)$ y $\alpha(y) \in \mathrm{Max}K$ y como $\alpha(y) \geq \alpha(z) \in \mathrm{Max}K$, se sigue entonces que $\alpha(y) = \alpha(z)$. En el segundo caso se tiene $y < g(y)$ y $\alpha(y) \in \mathrm{Min}K$ y como $\alpha(y) \leq \alpha(z) \in \mathrm{Min}K$, entonces, $\alpha(y) = \alpha(z)$. Por lo tanto $\alpha(\mathbf{X_L}) = \alpha(K)$. Veamos ahora que dado $y \notin K$, si $y > g(y)$ existe un único $c \in \mathrm{Max}K$ tal que $y \geq c$. Supongamos que existen $c, d \in \mathrm{Max}K$ con $c \neq d$ tal que $y > c$ y $y > d$. Entonces, $\alpha(c) = \alpha(y) = \alpha(d)$, se tiene entonces la contradicción $\alpha(\mathbf{X_L}) = \alpha(K) \subset K$. Dualmente si $y < g(y)$, existe un único $p \in \mathrm{Min}K$ tal que $y \leq p$. Consecuentemente para $c, d \in \mathrm{Max}K$ con $c \neq d$ los conjuntos $c^{\uparrow}$ y $d^{\uparrow}$ son disyuntos y $c^{\uparrow} \parallel d^{\uparrow}$; dualmente para $p, q \in \mathrm{Min}K$ con $p \neq q$ los conjuntos $p^{\downarrow}$ y $q^{\downarrow}$ son tales que $p^{\downarrow} \parallel q^{\downarrow}$.
Veamos ahora que para cada $c \in \mathrm{Max}K = \Omega$, el conjunto $c^{\uparrow}$ es una cadena. Supongamos que $c^{\uparrow}$ no es una cadena. Existen entonces $x, y \in c^{\uparrow}$ tales que $x \parallel y$. Consideremos el conjunto

$$A = \{x, y\} \cup \{z \in \mathrm{Max}K \mid z \neq c\}.$$

Claramente A, es una anticadena. Consideremos el g-subconjunto $A \cup g(A)$. Por la propiedad del núcleo endomorfo existe $\beta \in \mathrm{End}(\mathbf{X_L}, g)$ tal que $\beta(\mathbf{X_L}) = A \cup g(A)$. Sea $S = \{x \in \mathbf{X_L} \mid g(x) < x\}$. Veamos que

$$\beta(S) = S \cap \beta(\mathbf{X_L}) = A.$$

Claramente si $x \in \beta(S)$ entonces, $x \in S \cap \beta(\mathbf{X_L})$. Sea $x \in S \cap \beta(\mathbf{X_L})$; entonces $x = \beta(z) \in S$ para algún $z \in \mathbf{X_L}$. Afirmamos que $z \in S$. ya que si $z \notin S$, $z \leq g(z)$ entonces, $\beta(z) \leq \beta(g(z)) = g(\beta(z))$ luego $\beta(z) \notin S$, una contradicción. Por lo tanto, $\beta(S) = S \cap \beta(\mathbf{X_L})$. Ahora dado $x \in S \cap \beta(\mathbf{X_L})$ se tiene entonces que $x \in S$ y $x \in (A \cup g(A))$, por lo tanto $x \in A$. Si $x \in A$ entonces $x \in A \cup g(A)$ y $x > g(x)$, tenemos $x \in S$ de donde se tiene $A = S \cap \beta(\mathbf{X_L}) = \beta(S)$. Consecuentemente, $S = \bigcup_{z \in \Omega} z^{\uparrow}$. Nótese que si $w \in z^{\uparrow}$ entonces $w \geq z$ luego $\beta(w) \geq \beta(z)$ pero como $\beta(w), \beta(z) \in A$ y A es una anticadena se sigue entonces que $\beta(w) = \beta(z)$. Luego

$$A = \beta(S) = \bigcup_{z \in \Omega} \beta(z^{\uparrow}) = \bigcup_{z \in \Omega} \{\beta(z)\} = \beta(\Omega),$$

de donde se tiene $\sharp(A) \leq \sharp(\Omega)$. Pero por definición de A tenemos $\sharp(A) = \sharp(\Omega) + 1$, una contradicción. Luego $c^{\uparrow}$ es una cadena. Por consiguiente $\mathbf{X_L}$ es una reja obtenida de K.
$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathbf{X_L}$ es una reja construida de $K_{n,n}$. Sea $\mathrm{Max}K = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\mathrm{Min}K = \{g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_n)\}$. Además para $k = 1, \ldots, n$ sea $a_k^{\uparrow} = I_k$ y $g(a_k)^{\downarrow} = J_k$. Sea Q un g-subconjunto de $\mathbf{X_L}$. Sea $z \in Q$ tal que $g(z) < z$ y defina $\alpha : \mathbf{X_L} \longrightarrow \mathbf{X_L}$ como sigue:

(1) $Q \cap I_k = \emptyset$. Para cada $x \in I_k$ sea $\alpha(x) = z$.

(2) $Q \cap I_k \neq \emptyset$. Si $x \in I_k$ y si existe $y \in Q \cap I_k$ con $y \leq x$ sea $\alpha(x) = \max\{y \in Q \cap I_k \mid y \leq x\}$; si $x \in I_k$ y si no existe $y \in Q \cap I_k$ con $y \leq x$ sea $\alpha(x) = \min\{y \in Q \cap I_k \mid x < y\}$.

(3) $Q \cap J_k = \emptyset$. Para cada $x \in J_k$ sea $\alpha(x) = g(z)$.

(4) $Q \cap J_k \neq \emptyset$. Si $x \in J_k$ y si existe $y \in Q \cap J_k$ con $y \leq x$ sea $\alpha(x) = \max\{y \in Q \cap J_k \mid y \leq x\}$; si $x \in J_k$ y si no existe $y \in Q \cap I_k$ con $y \leq x$ sea $\alpha(x) = \min\{y \in Q \cap J_k \mid x < y\}$.

Veamos que α así definida es monótona. Sea $x \leq y$ entonces se deben considerar varios casos: 1) Si $Q \cap I_k = \emptyset$, Para algún $k = 1, \ldots, n$. (a). Si $x, y \in I_k$ entonces, $\alpha(y) = \alpha(x)$ de donde $\alpha(x) \leq \alpha(y)$. (b). Si $y \in I_k$ y $x \in J_k$ entonces $\alpha(y) = z \geq g(z) = \alpha(x)$. (c). Si $y \in I_k$ y $x \in J_l$ con $Q \cap J_l \neq \emptyset$ entonces $\alpha(y) = z \geq g(a_l) \geq \max\{c \in Q \cap J_l \mid c \leq x\}$ pero también, $g(a_l) \geq \min\{c \in Q \cap J_l \mid x \leq c\}$. Por lo tanto, $\alpha(x) \leq \alpha(y)$. (d). Si $y \in I_l$ y $x \in I_k$ entonces $\alpha(x) = g(z) \leq \max\{c \in Q \cap I_l \mid c \leq y\}$, pero también $g(z) \leq \min\{c \in Q \cap I_l \mid y < c\}$, por lo tanto, $\alpha(x) \leq \alpha(y)$. Los casos restantes se verifican de manera similar. Veamos que α conmuta con g. Consideremos algunos casos. 1) Si $Q \cap I_k = \emptyset$ entonces si $x \in I_k$ $g(\alpha(x)) = g(z) = \alpha(g(x))$. 2) a) Si $Q \cap I_k \neq \emptyset$, si $x \in I_k$ y existe $y \in Q \cap I_k$ con $y \leq x$ entonces $g(\alpha(x)) = g(\max\{y \in Q \cap I_k \mid y \leq x\}) = \min\{g(y) \in Q \cap J_k \mid g(x) < g(y)\} = \alpha(g(x))$. b) Si $Q \cap I_k \neq \emptyset$ si $x \in I_k$ y no existe $y \in Q \cap I_k$ con $y \leq x$ entonces $g(\alpha(x)) = g(\min\{y \in Q \cap I_k \mid x < y\}) = \max\{g(y) \in Q \cap J_k \mid g(y) \leq g(x)\} = \alpha(g(x))$. Además $\alpha(\mathbf{X}_L) = Q$, los demás casos se verifican de forma similar. Luego por Teorema 2.5 $(\mathbf{L}, f)$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo. $\square$

Capítulo 3

La propiedad del núcleo endomorfo para álgebras de Stone finitas

Al querer dar seguimiento a lo expuesto en [1] para las álgebras de Stone finitas con esta propiedad, surge una primera pregunta y es si las álgebras de Stone tienen congruencias factorizables. Es un hecho que la variedad de las álgebras de Stone tiene congruencia distributivas; esto es, el retículo de congruencias de un álgebra de Stone es un retículo distributivo. Como una consecuencia, un producto finito de álgebras de Stone tiene congruencias factorizables. (Ver [13] ejercicio 10 página 166).

Álgebras de Stone directamente irreducibles

En esta sección se presentará una caracterización de las álgebras de Stone directamente irreducibles. Como es usual nosotros denotaremos el complemento de un elemento a de un álgebra de Stone por a' y denotaremos por a^* el pseudocomplemento de a. Nótese que si un elemento a es complementado en un álgebras de Stone $\mathbf{L}$ entonces, $a' = a^*$. De hecho, por ser a complementado tenemos $a \wedge a' = 0$ entonces $a' \leq a^*$ y $1 = a \vee a' \leq a \vee a^*$. Por lo tanto $a \vee a^* = 1$ y por el Lema 1.19 parte 1, $a \wedge a^* = 0$. Ya que el complemento en un retículo distributivo es único entonces $a' = a^*$. Nosotros denotaremos por $\theta(a,b)$ la congruencia más pequeña en $\mathbf{L}$ que identifica a a y a b, la cual esta dada por:

$$\theta(a,b) = \bigcap\{\theta \in Con\mathbf{L} \mid (a,b) \in \theta\}.$$

La congruencia principal de retículos generada por a, b es: $\theta_{Lat}(a,b)$, esta es la congruencia más pequeña la cual satisface la propiedad de sustitución para cada operación del retículo $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$. Nótese que

$$\theta_{Lat}(a,b) \leq \theta(a,b).$$

Además en un retículo distrivutivo L se tiene:

$$(x,y) \in \theta_{Lat}(a,b) \Longleftrightarrow x \wedge a = y \wedge a,\ x \vee b = y \vee b. \tag{3.1}$$

De hecho, sea ψ la relación definida en L por

$$(x,y) \in \psi \iff x \wedge a = y \wedge a \text{ y } x \vee b = y \vee b.$$

Observemos primero que ψ así definida es una congruencia. Claramente ψ es una relación de equivalencia, veamos que ψ satisface la propiedad de sustitución, sea $(x,y),(z,k) \in \psi$ entonces, $x \wedge a = y \wedge a$ y $x \vee b = y \vee b$ además $z \wedge a = k \wedge a$ y $z \vee b = k \vee b$, por lo tanto, $x \wedge z \wedge a = y \wedge k \wedge a$ y $(x \vee b) \wedge (z \vee b) = (y \vee b) \wedge (k \vee b)$, por distributividad tenemos $(x \wedge z) \vee b = (y \wedge k) \vee b$, de donde podemos concluir que $(x \wedge z, y \wedge k) \in \psi$. Tenemos además que $(x \wedge a) \vee (z \wedge a) = (y \wedge a) \vee (k \wedge a)$ entonces $(x \vee z) \wedge a = (y \vee k) \wedge a$ y $x \vee z \vee b = y \vee k \vee b$ por lo tanto $(x \vee z, y \vee k) \in \psi$ y ψ es una congruencia en L. Claramente $(a,b) \in \psi$ y así $\theta_{Lat}(a,b) \subseteq \psi$ Veamos que $\theta_{Lat}(a,b) = \psi$. Para este propósito, es suficiente probar que cada congruencia que identifica a a y a b contiene a ψ. Supongamos entonces que α es una congruencia que identifica a a y a b entonces, $(a,b) \in \alpha$. Si $(x,y) \in \psi$ entonces $x \wedge a = y \wedge a$ y $x \vee b = y \vee b$ se deduce que $(x \vee a, y \vee a) \in \alpha$ y $(x \wedge a, y \wedge a) \in \alpha$. En el álgebra cociente L/α esto implica que $x/\alpha \vee a/\alpha = y/\alpha \vee a/\alpha,\ x/\alpha \wedge a/\alpha = y/\alpha \wedge a/\alpha$ de donde, como L/α es distributiva, tenemos $x/\alpha = y/\alpha$ y así $(x,y) \in \alpha$. Luego α contiene a ψ y por lo tanto $\theta_{Lat}(a,b) = \psi$.

Teorema 3.1. *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra de Stone y* $a \leq b$ *entonces,*

$$\theta(a,b) = \theta_{Lat}(a \vee b^*, b \vee a^*).$$

Prueba: Ver [14] página 133. □

Definición 3.2. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{B}_1$ *se define*

$$R(\mathbf{A}) := \{a \in A \mid a = a^{**}\},$$

$$D(\mathbf{A}) := \{a \in A \mid a^* = 0\}.$$

El conjunto $R(\mathbf{A})$ es llamado el conjunto *regular* de $\mathbf{A}$, y $D(\mathbf{A})$ es llamado el conjunto de elementos *densos* de $\mathbf{A}$.

Lema 3.3. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de Stone tal que* $a^* \neq a'$ *para cada* $a \notin \{0,1\}$. *Entonces, todo elemento de* $\mathbf{L}$ *menos el* 0 *es denso, es decir* $D(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \setminus \{0\}$.

Prueba: Supongamos que existe $a \in \mathbf{A},\ a \neq 0$ tal que $a^* \neq 0$. Pongamos $b = a^*$. Claramente $b \notin \{0,1\}$ ya que si $b = 0$ entonces, $a^* = 0$, una contradicción. Si $b = 1$ entonces $a^* = 1$ luego $a = 0$, una contadicción. Nótese ahora que $b \wedge b^* = 0$ y por la identidad de Stone, $b \vee b^* = a^* \vee a^{**} = 1$. Entonces $b^* = b'$, una contradicción.

□

Teorema 3.4. *Para* $\mathbf{A} \in \mathcal{B}_1$ *las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) $\mathbf{A}$ *es directamente irreducible.*

ii) Los únicos elementos complementados en $\mathbf{A}$ *son 0 y 1.*

iii) $\mathbf{A}$ *tiene un único átomo.*

Prueba: i) $\Rightarrow$ *ii)*: Sea $a \notin \{0,1\}$ tal que a es complementado. Veamos que $\mathbf{A}$ no es directamente irreducible es decir existe una congruencia factor en $\mathbf{A}$ distinta de $\Delta_{\mathbf{A}}$ y $\nabla_{\mathbf{A}}$. Sean $\theta(0,a)$ y $\theta(0,a')$ congruencias en $\mathbf{A}$. Miremos primero que $\theta(0,a) \wedge \theta(0,a') = \Delta_{\mathbf{A}}$. Por Teorema 3.1 tenemos:

$$\theta(0,a) = \theta_{Lat}(a^*,1) = \theta_{Lat}(a',1),$$

$$\theta(0,a') = \theta_{Lat}(a'^*,1) = \theta_{Lat}(a^{**},1).$$

Pero $a' = a^*$ (por ser a complementado) implica $a \vee a^* = 1$ y $a \wedge a^* = 0$. Tenemos entonces que $(a^*)' = a$. Por otro lado, tenemos que $a^* \vee a^{**} = 1$ y obviamente $a^{**} \wedge a^* = 0$ de donde tenemos que $(a^*)' = a^{**}$. Entonces

$$a^{**} = a'^* = a'' = a.$$

Así

$$\theta(0,a') = \theta_{Lat}(a,1).$$

Sea $(x,y) \in \theta(0,a) \wedge \theta(0,a')$. Entonces, $(x,y) \in \theta_{Lat}(a',1) \wedge \theta_{Lat}(a,1)$. Por (3.1) $(x,y) \in \theta_{Lat}(c,d) \iff x \wedge c = y \wedge c$ y $x \vee d = y \vee d$, entonces $x \wedge a' = y \wedge a'$ y $x \wedge a = y \wedge a$ luego

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (a \vee a') \\ &= (x \wedge a) \vee (x \wedge a') \\ &= (y \wedge a) \vee (y \wedge a') \\ &= y \wedge (a \vee a') \\ &= y. \end{aligned}$$

Así, $\theta(0,a) \wedge \theta(0,a') = \Delta_{\mathbf{A}}$. Veamos ahora que $\theta(0,a) \circ \theta(0,a') = \nabla_{\mathbf{A}}$ es decir

$$\theta_{Lat}(a',1) \circ \theta_{Lat}(a,1) = \nabla_{\mathbf{A}}.$$

Claramente $\theta_{Lat}(a',1) \circ \theta_{Lat}(a,1) \subseteq \nabla_{\mathbf{A}}$. Sea $(x,y) \in \nabla_{\mathbf{A}}$, debemos ver que existe z tal que $(x,z) \in \theta_{Lat}(a',1)$ y $(z,y) \in \theta_{Lat}(a,1)$. Tomemos $z = (y \wedge a) \vee (x \wedge a')$ y probemos que $(x,z) \in \theta_{Lat}(a',1)$ y $(z,y) \in \theta_{Lat}(a,1)$.

$$\begin{aligned} (x,z) \in \theta_{Lat}(a',1) \iff x \wedge a' &= z \wedge a' \\ &= [(y \wedge a) \vee (x \wedge a')] \wedge a' \\ &= (y \wedge a \wedge a') \vee `x \wedge a' \wedge a') \\ &= (y \wedge 0) \vee (x \wedge a') \\ &= x \wedge a'. \end{aligned}$$

Por otro lado siempre tenemos

$$x \vee 1 = z \vee 1.$$

$$\begin{aligned}(z, y) \in \theta_{Lat}(a, 1) \Longleftrightarrow y \wedge a &= z \wedge a \\ &= [(y \wedge a) \vee (x \wedge a')] \wedge a \\ &= (y \wedge a \wedge a) \vee (x \wedge a' \wedge a) \\ &= (y \wedge a) \vee (z \wedge 0) \\ &= y \wedge a.\end{aligned}$$

Además

$$z \vee 1 = y \vee 1.$$

Por lo tanto $\theta_{Lat}(a', 1) \circ \theta_{Lat}(a, 1) \subseteq \nabla_{\mathbf{A}}$ y de esta forma

$$\theta(0, a) \circ \theta(0, a') = \nabla_{\mathbf{A}}.$$

Similarmente tomando $z = (y \wedge a') \vee (x \wedge a)$ se puede ver que

$$\theta(0, a') \circ \theta(0, a) = \nabla_{\mathbf{A}}.$$

De donde podemos concluir

$$\theta(0, a) \circ \theta(0, a') = \theta(0, a') \circ \theta(0, a)$$

y por Teorema 1.8

$$\theta(0, a) \vee \theta(0, a') = \nabla_{\mathbf{A}}.$$

Hemos probado pues, que $\theta(0, a), \theta(0, a')$ es un par de congruencias factor en $\mathbf{A}$, por lo tanto $\mathbf{A}$ no es directamente irreducible. Es decir, si $\mathbf{A} \in \mathcal{B}_1$ directamente irreducible entonces $\forall\ a \notin \{0, 1\},\ a^* \neq a'$, es decir, a no es complementado.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Por Lema 3.3 $D(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \setminus \{0\}$. Entonces $\mathbf{A}$ debe tener un único átomo ya que si a_1 y a_2 son átomos en $\mathbf{A}$ entonces $a_1, a_2 \notin \{0, 1\}$ y $a_1 \wedge a_2 = 0$ y por tanto $a_1^* \geq a_2 \neq 0$, una contradicción.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Supongamos que $\mathbf{A}$ tiene un único átomo c. Si $\mathbf{A}$ no fuera directamente irreducible, $\mathbf{A}$ tendría un par de congruencias $\theta_1, \theta_2 \notin \{\Delta_{\mathbf{A}} \nabla_{\mathbf{A}}\}$ tal que $\theta_1 \wedge \theta_2 = \Delta_{\mathbf{A}}$, $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_{\mathbf{A}}$ y $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. Por Teorema 1.8 $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_1 \vee \theta_2$. Entonces, $(0, c) \in \theta_1 \circ \theta_2$ luego existe z tal que $(0, z) \in \theta_1$ y $(z, c) \in \theta_2$. Si $z = 0$ se tiene que $(0, c) \in \theta_2$ entonces, $(0^*, c^*) = (1, 0) \in \theta_2$ por lo tanto, $\theta_2 = \nabla_{\mathbf{A}}$, una contradicción. Luego $z > 0$ y como c el único átomo, entonces $z \geq c$. Como $(0, z) \in \theta_1$ entonces $(0 \wedge c,\ z \wedge c) = (0, c) \in \theta_1$ luego $(1, 0) \in \theta_1$ por lo tanto $\theta_1 = \nabla_{\mathbf{A}}$, una contradicción. Se tiene entonces que $\mathbf{A}$ es directamente irreducible.

$\square$

Corolario 3.5. *Un álgebra de Stone es directamente irreducible si y solo si su espacio dual tiene un elemento mínimo.*

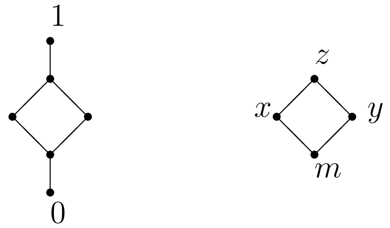
Prueba: $\Rightarrow$) Sea $\mathbf{X}$ el espacio dual de un álgebra de Stone $\mathbf{A}$, la cual es directamente irreducible, ya que $\mathbf{A}$ tiene un único átomo se sigue que $\mathbf{X}$ tiene un elemento mínimo. $\Leftarrow$) Si $\mathbf{X}$ es el espacio dual de un álgebra de Stone $\mathbf{A}$, el cual tiene un elemento mínimo, se sigue que $\mathbf{A}$ tiene un único átomo y por lo tanto $\mathbf{A}$, es directamente irreducible. $\square$

Corolario 3.6. *Una subalgebra de un álgebra de Stone directamente irreducible es también directamente irreducible.*

Prueba: Se tiene debido a que en cada subálgebra de un álgebra cuyos únicos elementos complementados son 0 y 1, sus únicos elementos complementados son también 0 y 1. $\square$

Habiendo caracterizado las álgebras de Stone directamente irreducibles, teniendo además el hecho que las álgebras de Stone son una subvariedad de las álgebras de Ockham y al considerar los espacios de Stone dentro de los espacios de Ockham, podemos entonces ubicarnos dentro de lo expuesto en [1] y tratar de dar condiciones necesarias sobre las álgebras de Stone finitas, que tienen la propiedad del núcleo endomorfo. Nótese que si $\mathbf{A}$ es un álgebra de Stone que tiene o no la propiedad del núcleo endomorfo, entonces todos los g-ciclos en su espacio dual tienen cardinalidad 1. Esto se tiene debido al teorema 2.7. Además todo g-ciclo esta contenido en $g(X)$ (ya que $a = g^k(a) = g(g^{k-1}(a)) = g(b)$; $b = g^{k-1}(a)$). Luego en un espacio de Stone los g-ciclos se reducen a conjuntos con un solo elemento y esto es debido a la forma en que fue definida g para las álgebras de Stone.
Además un g-subconjunto Q del espacio dual de un álgebra de Stone directamente irreducible tiene la forma $A \cup m$ donde A, es un subconjunto del espacio dual y el elemento m es el mínimo de el espacio de Stone.

En la siguiente sección se darán condiciones necesarias para las álgebras de Stone finitas con la propiedad del núcleo endomorfo. Para esto cabe notar que los teoremas presentados en el capítulo 3, son válidos para un álgebra de Stone finita, destacando entre ellos el Teorema 2.5 el cual nos permite ubicarnos en el espacio dual de un álgebra de Stone y mirar como debe ser la estructura de esta, para que tenga la propiedad del núcleo endomorfo.
El siguiente ejemplo muestra que no toda álgebra de Stone finita posee la propiedad del núcleo endomorfo. Considere el álgebra de Stone junto con su espacio dual presentados en la siguiente figura.



Note que todo elemento excepto el 0 tiene pseudocomplemento 0, y el pseudocomplemento de 0 es 1. Claramente no existe un endomorfismo en el espacio con imagen el g-subconjunto $\{m, x, y\}$ y consecuentemente el álgebra de Stone considerada no tiene la propiedad del núcleo endomorfo.

3.1 Árboles

Definición 3.7. *Un conjunto parcialmente ordenado es llamado árbol, si posee un elemento mímimo y para cada x en el poset, $x^{\downarrow}$ es una cadena.*

Llamaremos *bosque* a la unión disyunta de árboles.

Proposicion 1. *Si el espacio dual* $\mathbf{X}$ *de un álgebra de Stone finita* $\mathbf{L}$ *es un árbol, entonces* $\mathbf{L}$, *tienen la propiedad del núcleo endomorfo.*

Prueba: Como $\mathbf{X}$ es un árbol entonces $\mathbf{X}$, tiene mínimo m. Claramente $g(x) = m$ para todo $x \in \mathbf{X}$. Entonces un subconjunto que contenga a m es un g-subconjunto. Sea Q un g-subconjunto de $\mathbf{X}$, nótese que dado $x \in \mathbf{X}$, $\{z \in Q \ : \ z \leq x\}$ tiene máximo. Por lo tanto definamos $\alpha : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ como sigue:

$$\alpha(x) = \text{ Max}\{z \in Q \ : \ z \leq x\}.$$

Cabe notar que si $x \in Q$ tenemos entonces, $\alpha(x) = x$, y si $x \notin Q$, $\alpha(x) < x$.
Además el conjunto $\{z \in Q \ : \ z \leq x\} \neq \emptyset$ ya que $m \in \{z \in Q \ : \ z \leq x\}$.

Por ser $\mathbf{X}$ un árbol finito Max$\{z \in Q \ : \ z \leq x\}$ siempre existe y es único por lo tanto α está bien definida.

Para ver que $\alpha \in$ End$\mathbf{X}$ debemos verificar que si $x \leq y \implies \alpha(x) \leq \alpha(y)$.
Para esto consideremos los siguientes casos.
1). $x \in Q$; $y \in Q$. $\alpha(x) = x$, $\alpha(y) = y$, por lo tanto si $x \leq y$ luego $\alpha(x) \leq \alpha(y)$.

2). $y \in Q$; $x \notin Q$. $\alpha(x) < x \leq y = \alpha(y)$. Así si si $x \leq y \implies \alpha(x) \leq \alpha(y)$.

3). $y \notin Q$; $x \in Q$. Como $x \in Q$ tenemos que $x \in \{z \in Q \ : \ z \leq y\}$, por lo tanto $\alpha(x) = x \leq \{z \in Q \ : \ z \leq y\} = \alpha(y) < y$. Así si $x \leq y \implies \alpha(x) \leq \alpha(y)$.

4). $y \notin Q$; $x \notin Q$. Nótese que por la definición de α no se puede tener $\alpha(y) \leq \alpha(x)$. Si $\alpha(x) \nleq \alpha(y)$. Como $\alpha(y) < y$; $\alpha(x) < x \leq y$. Luego $y^{\downarrow}$ no es una cadena y esto contradice el hecho que $\mathbf{X}$ es un árbol. Se tiene entonces que si $x \leq y \implies \alpha(x) \leq \alpha(y)$.

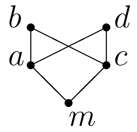
Por lo anterior α preserva el orden. Además, como $\mathbf{X}$ es discreto, α es continua. α conmuta con g ya que $\alpha(g(x)) = \alpha(m) = m = g(m) = g(\alpha(x))$ y $\alpha(\mathbf{X}) = Q$. Consecuentemente por Teorema 2.5, $\mathbf{L}$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo.

$\square$

Corolario 3.8. *Sea* **L** *un álgebra de Stone finita, tal que su espacio dual es un bosque. Entonces* **L**, *tiene la propiedad del núcleo endomorfo.*

Prueba: Se sigue de inmediatamente de la Proposición 1 y del hecho de que el espacio dual de un producto directo es la unión disyunta de los espacios duales de cada factor. $\square$

No toda álgebra de Stone con la propiedad del núcleo endomorfo es un Bosque. Considere por ejemplo el álgebra de Stone cuyo espacio dual X se presenta en la siguiente figura:



Esta álgebra de Stone, por Teorema 2.5 tiene la propiedad del núcleo endomorfo, de hecho para cada subconjunto A de X podemos definir α tal que $\alpha(X) = A \cup m$. Para esto debemos verificar varios casos: 1). Sea $A = \{a, b\}$, entonces $\alpha(d) = \alpha(b) = b$, $\alpha(c) = \alpha(a) = a$ y $\alpha(m) = m$, de esta menera $\alpha(X) = A \cup m$. 2). Si $A = \{b, c\}$ entonces, $\alpha(d) = \alpha(b) = b$, $\alpha(a) = \alpha(c) = c$, y $\alpha(m) = m$, luego $\alpha(X) = A \cup m$. 3). Si $A = \{a, b, c\}$ entonces, $\alpha(x) = x$ si $x \in A$ y $\alpha(x) = b$ si $x \notin A$ se sigue pues que $\alpha(X) = A \cup m$. Los casos restantes se verifican de forma similar.

Para una anticadena C de un conjunto parialmente ordenado X definimos el *cubrimiento* de C, en símbolos $\mathrm{Cub}(C)$, como la anticadena cuyos elementos cumplen la siguiente condición:

$$x \in \mathrm{Cub}(C) \text{ si y solo si } x \text{ cubre } y, \ \forall\, y \in C.$$

Proposicion 2. *Sea* **L** *un álgebra de Stone finita directamente irreducible, tal que en su espacio dual* **X** *se cumplen las siguiente dos propiedades:* (i) *si* C *es una anticadena en* **X** *y existe* $x \in \mathbf{X}$ *tal que* $y \leq x$ *para todo* $y \in C$ *entonces,* $Cub(C)$ *existe y es tal que* $\sharp C \leq \sharp Cub(C)$. (ii) x *cubre a* z *y a* w *y* y *cubren a* z *implica* y *cubre a* w. *Entonces* **L** *tiene la prpiedad del núcleo endomorfo.*

Prueba: Por la propiedad (i), **X** es una unión disyunta finita de una familia $\mathcal{F}_X = \{C_j : j \in J\}$ de anticadenas tal que estas son el cubrimiento de una anticadena con cardinalidad menor o igual. Por la propiedad (ii), para $j \in J$, C_j es una unión disyunta de una familia finita de anticadenas $\{C_{ji} : i \in J_j\}$ tal que $\mathrm{Cub}(C_{ji}) = C_k$, para algún $k \in J$ o $C_{ji} \subseteq \mathrm{Max}(\mathbf{X})$ definiremos un orden parcial en $\mathcal{F}_X$ como sigue

$$C_j \leq C_k \text{ si } \exists\ x \in C_j, \exists\ y \in C_k \text{ tal que } x \leq y.$$

Con el orden así definido, $\mathcal{F}_X$ es un árbol. Si nosotros denotamos el mínimo de $\mathbf{X}$ por m, $\{m\}$ es el mínimo de $\mathcal{F}_X$ el cual tiene un único cubrimiento $\mathrm{Cub}(\{m\})$, el conjunto de átomos de $\mathbf{X}$. Notese que si $x, y \in C_{ji}$ entonces, $(x^{\uparrow} \cup x^{\downarrow}) \smallsetminus \{x\} = (y^{\uparrow} \cup y^{\downarrow}) \smallsetminus \{y\}$ además si $x, y \in C_j$ entonces $x^{\downarrow} \smallsetminus \{x\} = y^{\downarrow} \smallsetminus \{y\}$ y si $x \in C_{ji}$ y $y \in C_{jl}$ con $i \neq l$ entonces $(x^{\uparrow} \cap y^{\uparrow}) = \emptyset$.

Sea $Q \subseteq X$ un g-subconjunto de $\mathbf{X}$, es decir Q contiene el mínimo de $\mathbf{X}$, debemos encontrar $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X})$ tal que $\alpha(\mathbf{X}) = Q$, para $x \in C_j$, definiremos $\alpha(x)$ recurrentemente desde el el tope del árbol $\mathcal{F}_X$ hacia abajo como sigue: (i) C_j es maximal y $C_j \cap Q \neq \emptyset$: En este caso, definimos $\alpha(x) = x$ si $x \in C_j \cap Q$ y si $x \in C_j$ y $x \notin C_j \cap Q$ entonces definiremos $\alpha(x)$ de tal modo que $\alpha(x) \in C_j \cap Q$. Luego $C_j \cap Q \subseteq \alpha(\mathbf{X})$.

(ii) C_j no es maximal y $Q \cap C_j = \emptyset$: En este caso, como $C_j^{\downarrow}$ es una cadena, podemos ir bajando en ella y para la primera C_k tal que $Q \cap C_k \neq \emptyset$ definimos $\alpha(x)$ en C_k.
(iii) C_j no es maximal: En este caso podemos asumir que $\alpha(y)$ ya ha sido definido para cada $y \in z^{\uparrow} \smallsetminus \{z\}$ donde $z \in C_j$; en otras palabras, α ya se ha definido para cada $C_k \in \mathcal{F}_X$ tal que $C_j < C_k$. Supongamos que $x \in C_{ji}$ y sea $C_t = \mathrm{Cub}(C_{ji})$. Si $\alpha(v) \in C_t$ para algún $v \in C_t$, (esto implica $C_t \cap Q \neq \emptyset$) y $C_j \cap Q \neq \emptyset$, pongamos $\alpha(x) \in C_j$. Pero si $C_j \cap Q = \emptyset$ entonces bajando en la cadena C_j para la primer C_k tal que $C_k \cap Q \neq \emptyset$ sea $\alpha(x) \in C_k$. Si $\forall v \in C_t$, $\alpha(v) \notin C_t$, sea C_l tal que $\alpha(v) \in C_l$. Entonces mirando hacia abajo la cadena $C_l^{\downarrow}$ para el primer C_s tal que $C_s \cap Q \neq \emptyset$ definimos $\alpha(x)$ en C_s.
Por construcción, α así definida preserva el orden en $\mathbf{X}$ y claramente, $\alpha(X) \subseteq Q$. Falta entonces probar que $Q \subseteq \alpha(X)$; en otras palabras, $Q \cap C_j \subseteq \alpha(X)$ para cada $C_j \in \mathcal{F}_X$ pero esto se tiene ya que por la propiedad (ii) tenemos:

$$\sharp\{z \in X : z \in C_k,\ \ C_k\ \ \mathrm{Cubre} C_j\} + \sharp(\mathrm{Max}(\mathbf{X}) \cap C_j) \geq \sharp(C_j) \geq \sharp(C_j \cap Q).$$

Se sigue del Teorema 2.5 que $\mathbf{L}$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo. □

Nosotros llamaremos a un poset finito *árbol denso* si tiene un elemento mínimo y tiene las propiedades dadas en la Proposición 2. Un poset finito es llamado *bosque denso* si es la unión disyunta de árboles densos. Se sigue entonces que un álgebra de Stone finita cuyo espacio dual es un bosque denso, tiene la propiedad del núcleo endomorfo.

Proposicion 3. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de Stone finita directamente irreducible con la propiedad del núcleo endomorfo. Supongamos que su espacio dual tiene exactamente* k *elementos maximales. Entonces no existe una anticadena en* $\mathbf{X}$ *con* $n > k$ *elementos.*

Prueba: Supongamos que existe una anticadena C en $\mathbf{X}$ tal que $\sharp(C) = n > k$ y sea m el elemento mímimo de $\mathbf{X}$. Consideremos el g-subconjunto $Q := C \cup \{m\}$. Como $\mathbf{L}$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo, por Teorema 2.5 existe $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X})$ tal que $\alpha(\mathbf{X}) = Q$. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ los elementos maximales de $\mathbf{X}$. Supongamos además

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in C$. Sea $\alpha(x_i) = a_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces debe existir $y \in \mathbf{X}$ tal que $\alpha(y) = a_n$. Se sigue que $y \leq x_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots, k$. por lo tanto $\alpha(y) = a_n \leq \alpha(x_i) = a_i$, una contradicción.

□

Corolario 3.9. *Un álgebra de Stone directamente irreducible cuyo espacio dual es acotado tiene la propiedad del núcleo endomorfo si y solo si es una cadena.*

Prueba: Se sigue inmediatamente de las proposiciones 1 y 3

□

Capítulo 4

Conclusiones

En contraste con el caso de las álgebras de Morgan finitas en las cuales su espacio dual es conectado, esto es las álgebras de Kleene que poseen la propiedad del núcleo endomorfo, las cuales están caracterizadas en [1]. Concluimos que no se puede llegar a una caracterización de las álgebras de Stone finitas con la propiedad del núcleo endomorfo, aunque ellas son también una subvariedad de las álgebras de Ockham generadas por el álgebra, cuyo retículo reducto es la cadena de tres elementos $\mathbf{3} = \{0, a, 1\}$ pero con diferente negación de Ockham y por lo tanto en su espacio dual la función g, es también diferente. No se pueden obtener resultados similares. En el simple caso en donde el espacio de Ockham cuya álgebra dual es un álgebra de Stone, tal que cuenta con exactamente dos elementos maximales el caso es intratable.

El mejor resultado que pudimos probar en este caso, está dado en la siguiente Proposición, la cual caracteriza el contorno del espacio de Ockham cuya álgebra dual es un álgebra de Stone, con exactamente dos maximales correspondiente al álgebra de Stone con la propiedad del núcleo endomorfo.

Proposicion 4. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de Stone finita, directamente irreducible con la propiedad del núcleo endomorfo tal que su espacio dual tiene exactamente dos maximales. Entonces no hay una anticadena en* $\mathbf{X}$ *con tres o más elementos y si* $t \in \mathbf{X}$ *es cubierto por exactamente dos elementos* t_1, t_2 *y* $\{t_1, t_2\}^{\downarrow} \smallsetminus \{t_1, t_2\} = t^{\downarrow}$*. Entonces* $t^{\downarrow}$ *es una cadena.*

Prueba: Por Proposición 3 no existe en $\mathbf{X}$ una anticadena con tres o más elementos. Sean m_1 y m_2 los elementos maximales de $\mathbf{X}$ y m_0 el mínimo. Procederemos por contradicción: supongamos que $t^{\downarrow}$ no es una cadena, entonces existe elementos x_1 y x_2, tales que $x_1 \parallel x_2$. Además supongamos x_1 y x_2 cubiertos por un elemento x tal que $x \leq t$. Considere el g-subconjunto

$$Q := (t^{\uparrow} \smallsetminus \{t\}) \cup (x^{\downarrow} \smallsetminus \{x\}) \cup \{m_0\}.$$

Por Teorema 2.5 existe un endomorfismo α de $\mathbf{X}$, tal que $\alpha(\mathbf{X}) = Q$. Note que $\alpha(\{m_1, m_2\}) = \{m_1, m_2\}$. De hecho si $\alpha(m_1) = y < m_1$ entonces $\alpha(m_1) \subseteq y^{\downarrow}$. Sea

$u \in \mathbf{X}$ tal que $\alpha(u) = m_1$, claramente $u \in m_2^{\downarrow}$. Entonces $\alpha(u) = m_1 \leq \alpha(m_2)$, de donde $\alpha(\mathbf{X}) \subseteq m_1^{\downarrow}$, una contradicción. Ahora si $\alpha(m_1) = y < m_2$ entonces, $\alpha(m_1) \subseteq y^{\downarrow}$, existe pues $u \in \mathbf{X}$ tal que $\alpha(u) = m_1$, claramente $u \in m_2^{\downarrow}$, entonces si $\alpha(u) = m_1$ se tiene $\alpha(m_2) = m_1$ por lo tanto, $\alpha(\mathbf{X}) \subseteq m_1^{\downarrow} \cup y^{\downarrow}$, esto es una contradicción. Además, $\alpha(t^{\uparrow} \setminus \{t\}) = t^{\uparrow} \setminus \{t\}$. Entonces necesariamente, $\alpha(t) \in x^{\downarrow} \setminus \{x\}$; en realidad, $\alpha(t) = x_1$ o $\alpha(t) = x_2$. Pero cada una de las dos posibilidades tenemos una contradicción; tomemos en primer lugar $\alpha(t) = x_1$ y sea u tal que $\alpha(u) = x_2$. Claramente, $u \notin [x, t]$. Además si $u \leq x_2$ entonces $\alpha(u) \leq \alpha(x_2) \leq \alpha(t) = x_1$ esto es $x_2 \leq x_1$, contradicción. Luego $u \nleq x_2$. De la misma forma se puede ver que $u \nleq x_1$. El caso $\alpha(t) = x_2$ se prueba de forma similar. Luego es imposible encontrar tal u, y $t^{\downarrow}$ es una cadena. $\square$

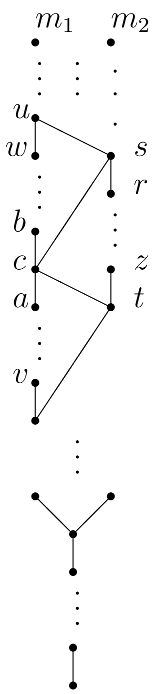
Se pueden mostrar ejemplos sencillos de espacios de Ockhma cuyas álgebras duales son álgebra de Stone, con exactamente dos elementos maximales cuyas álgebras duales tienen la propiedad del núcleo endomorfo y ejemplos de espacios de Ockhma cuyas álgebras duales son álgebra de Stone, con exactamente dos elementos maximales cuyas álgebras duales no tienen la propiedad del núcleo endomorfo: el álgebra de Stone, con espacio dual descrito al lado izquierdo posee la propiedad del núcleo endomorfo, mientras que el álgebra de Stone cuyo espacio dual se presenta al lado derecho, no tiene la propiedad del núcleo endomorfo.

De la misma forma se pueden mostrar cadenas incomparables de cualquier longitud, con dos elementos maximales cuyas correspondientes álgebras de Stone tienen la propiedad del núcleo endomorfo y otras que no tengan la propiedad. Nosotros terminamos este trabajo presentando un resultado general en las álgebras de Stone.

Proposicion 5. *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de Stone cuyo espacio de Stone* $\mathbf{X}$ *tiene exactamente dos elementos maximales* m_1 *y* m_2 *y existen cadenas* $[v, a], [b, w]$ *y* $[z, r]$ *en* $\mathbf{X}$ *tal como se muestran en la figura tal que*

$$\sharp([v, a]) + \sharp([b, w]) > \sharp(z, r).$$

Entonces $\mathbf{L}$, *no tiene la propiedad del núcleo endomorfo.*



Prueba: Por contradicción. Supongamos que $\mathbf{L}$ tiene la propiedad del núcleo endomorfo, sea $Q := \mathbf{X} \smallsetminus \{c\}$ y $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X})$ tal que $\alpha(\mathbf{X}) = Q$. Nosotros consideraremos cuatro casos:
i) si $\alpha(c) \geq b$ entonces $\alpha(c^{\uparrow}) \subseteq b^{\uparrow}$. Sea $Y := s^{\downarrow} \smallsetminus \{c\}$. Sea $Z \subseteq X \smallsetminus \{c\}$ tal que $\alpha(Z) = Y$. Claramente, $Z \subseteq s^{\downarrow} \smallsetminus \{c\} = Y$. Pero $\sharp(Z) < \sharp(Y)$, es decir $Z \subsetneq Y$ ya que $s \in Y \smallsetminus Z$, una contradicción.
ii) Si $\alpha(c) \geq s$. Entonces, $\alpha(c^{\uparrow}) \subseteq s^{\uparrow}$. Sea $Y := (X \smallsetminus \{c\}) \smallsetminus s^{\uparrow} = u^{\downarrow} \cup s^{\downarrow} \smallsetminus \{u, s, c\}$ y eligamos $Z \subseteq X \smallsetminus \{c\}$ tal que $\alpha(Z) = Y$. Como $\alpha(c^{\uparrow}) \subseteq s^{\uparrow}$ se sigue que $Z \subseteq Y$. De hecho $Z \subsetneq Y$ ya que $b \in Y \smallsetminus Z$, una contradicción.
iii) Si $\alpha(c) \leq a$ o $\alpha(c) \leq t$ nosotros obtenemos una contradicción de manera similar.
iv) Si $t < \alpha(c) < s$ entonces, $\alpha(c^{\uparrow} \cup c^{\downarrow}) \subseteq s^{\uparrow} \cup t^{\downarrow} \cup \{t, s\}$. Sea $Z \subseteq X$ tal que $\alpha(Z) = [v, a] \cup [v, w]$. Claramente $Z \subseteq [z, r]$ y esto va en contra de la hipótesis principal.

□

Bibliografía

[1] T.S Blyth, T.S., Fang, J., Silva, H.J.: The endomorphism kernel property in finite distributive laticces and finite de Morgan algebras. comunications in Algebra, 32, 2225-2242 (2004).

[2] Balbes and Dwinger, Distributive Lattices, University of Missouri Press, (1974).

[3] B. M. Schein, Ordered set, semilattices,distributive lattices and Boolean álgebras with homomorphic endomorphism semigroups, Fundamenta Mathematicae LXVIII (1970).

[4] C. Chen , & G. Grätzer , Stone lattices: Construction theorems, Canad. J. Math. 21 (1969), 884–894.

[5] H. Priestley , Stone lattices: a topological approach, Fund. Math, 84(1974), 127–143.

[6] S. Burris y H.P Sankappanavar, A course in universal álgebra, Graduate text in mathematics, Vol. 78, Springer, Berlin,(1981).

[7] Carlton J Maxon, On semigroups of Boolean ring endomorphisms, Semigroups Forum, vol. 4 (1972), 78-72.

[8] B.A. Davey, H.A. Priestley , Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, 1990..

[9] H. Priestley, Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces, The Bulletin Of London Mathematical Soc.2(1970), 186-189.

[10] H. Priestley, Stone lattices: a topological approach, Fundamenta Mathmaticae, LXXXIV (1974), 127–143.

[11] J. Fang, An extended Ockham Algebra with the Endomorphism Kernel Property, Acta Math Sinica, Published online: Jan 16 2007, DOI: 10.1007/s10114-005-0892-y, Http://www.ActaMath.com

[12] Kenneth D. Magill, JR, The semigroup of endomorphisms of a Boolean ring, J. Austral Math soc. 11(1970) 412-416.

[13] McKenzie, R. N., Mcnulty, G. F., Taylor, W.F. Algebras, Lattices, Varieties. Wadsworth y Brooks, Vol. I.(1987)

[14] T.S. Blyth Lattices and ordered Algebraic Structures Springger (2005)

[15] T.S. Blyth and J.C Varlet Ockham algebras Oxford university press (1994)

[16] A. Urquhart, Distributive Lattices with Dual homomorphic Operation, Studia Logica 38(1979)2, 201–209.

[17] Joel Berman, Distributive Lattices with additional unary operation, Aequationes Mathematicae, 16(1977) 165–171.

[18] W. H. Cornish and P. R Fowler, Coproducts of the Morgan algebras, Bull. Austral. Math. Soc. 16 (1977) 1-13.

[19] W. H. Cornish and P. R Fowler, Coproducts of Kleene algebras, J. Austral. Math. Soc.(series A) 27(1979) 209-220.